УДК. 517.938

Оксана І.Ковтун
Олег В. Перегуда
Юлія А. Паламарчук

**Про застосування нестаціонарного проекційно-ітеративного методу для інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю та додатковими умовами**

*Встановлено умови сумісності задачі з обмеженнями для нелінійних інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю. Запропоновано та обгрунтовано нестаціонарний проекційно – ітеративний метод для нелінійних інтегральних рівнянь зі слабкою не лінійністю та додатковими умовами*

*Ключові слова: :інтегральне рівняння, нелінійність, нестаціонарний проекційно-ітеративний метод.*

E-mail: *Perol @ukr.net*

Oksana I. Kovtun.
Oleg V. Pereguda
Ulia A.Palamarchuk

**About of the appliance of nonstationary projection-iteration method for nonlinear integral equations with weak nonlinearity and conditions imposed.**

*We find condition of consistency of a problem with constraints for the nonlinear integral equations.We propose and substantiate a nonstationary projection-iteration method for the nonlinear integral equations with conditions imposed on the unknown function.*

*Key words: integral equation, nonlinearity, nonstationary projection-iteration method.*

Статтю представив д.ф.-м.наук, професор Лучка А.Ю.

**1. Вступ**

Математичними моделями різноманітних задач природознавства та техніки, як відомо, є диференціальні, інтегральні чи інтегро – диференціальні рівняння та їх системи. В наш час привертають до себе увагу дослідження систем диференціальних рівнянь з параметром чи з імпульсним впливом, узагальнені крайові задачі, інтегральні рівняння з обмеженнями.

Задачі з додатковими умовами на шукану функцію є перевизначені, відносяться до класу нетерових задач. Зокрема до інтегральних рівнянь з додатковими умовами зводяться перевизначені задачі для диференціальних, інтегро – диференціальних рівнянь та більш складних класів функціонально – диференціальних рівнянь з параметрами. Дослідження задач з обмеженнями можна проводити за допомогою задач з параметрами.

Побудова розв`язків задач з параметрами в явному вигляді можлива в дуже рідких випадках, Тому побудова та обгрунтування ефективних методів наближеного розв`язку задач з параметрами є актуальною задачею, яка має теоретичний та практичний інтерес.

Розглянутий [3] модифікований проекційно - ітеративний метод для інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю та додатковими умовами значно поширив область застосування та прискорив швидкість збіжності порівнянно з ітераційним методом. Але іноді для інтегральних інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю та додатковими умовами практично краще застосовувати нестаціонарний модифікований проекційно-ітеративний метод. Нестаціонарний модифікований проекційно-ітеративний метод можна трактувати як об'єднання проекційного і нестаціонарного ітераційного методів.

В даній роботі до задачі (1), (2) запропоновано новий підхід до дослідження сумісності цієї задачі та розроблено і обгрунтовано нестаціонарний модифікований проекційно-ітеративний метод . Розглянемо інтегральне рівняння зі слабкою нелінійністю

$$y(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x,t)y(t)dt + \varepsilon\int_{\Omega} T(x,t)F(t, y(t))dt\,, \quad (1)$$

і додатковими умовами

$$\int_{\Omega} \Phi_s(t)y(t)dt = \alpha_s, \quad s = \overline{1,m}, \quad (2)$$

$\varepsilon$ - малий параметр $K:(\Omega\times\Omega)\to R$, $T:(\Omega\times\Omega)\to R$, причому $\iint_{\Omega} |K(x,t)|^2 dxdt \prec \infty$, $\iint_{\Omega} |T(x,t)|^2 dxdt \prec \infty$, $F(t,\tilde{u}), t\in\Omega, \tilde{u}\in R$ - неперервна функція своїх аргументів і за другою змінною задовольняє умову Ліпшиця, $f(x)$ і $\Phi_s(x)$ належать класу $L_2(\Omega)$ і є відомими функціями, $\alpha_s, s=\overline{1,m}.$ - відома множина чисел, $y(x)$ - невідома функція.

Задачу (1), (2) вважають сумісною, якщо існує функція $y\in L_2(\Omega)$, яка задовольняє рівняння (1) та умови (2).

**1.Задача з керуванням.**

Розглянемо задачу з керуванням

$$y(x)=f(x)+u(x)+\int_\Omega K(x,t)y(t)dt+\varepsilon\int_\Omega T(x,t)F(t,y(t))dt,$$

$$\int_\Omega \Phi_s(t)y(t)dt=\alpha_s, s=\overline{1,m}, \quad (3)$$

де $y\in L_2(\Omega), u\in U_m(\Omega)$ – шукані елементи ($U_m\subset L_2$), причому $u(x)$ шукається в вигляді

$$u(x)=\sum_{s=1}^m \lambda_s\xi_s(x), \quad (4)$$

$\{\xi_s(x)\}_{s=1}^m\subset L_2(\Omega)$ - система лінійно незалежних функцій.

Зведемо задачу (3) до еквівалентного інтегрального рівняння без обмежень. Для цього ядро $K$ подамо у вигляді $K(x,t)=H(x,t)+B(x,t)$ і позначимо

$$z(x):=f(x)+\int_\Omega B(x,t)y(t)dt+\varepsilon\int_\Omega T(x,t)F(t,y(t))dt. \quad (5)$$

Тоді задача (3), врахувавши заміну (5), набуде вигляду

$$y(x)=u(x)+z(x)+\int_\Omega H(x,t)y(t)dt,$$

$$\int_\Omega \Phi_s(t)y(t)dt=\alpha_s, \quad s=\overline{1,m}. \quad (6)$$

Задачу (6) будемо трактувати як допоміжну задачу, де $z\in L_2(\Omega), H(x,t)\in L_2(\Omega\times\Omega)$ - задані функції, $y(x)$ та $u(x)$ треба визначити.

Тут і в подальшому припускаємо, що задача (3), з урахуванням [3], має єдиний розв'язок, тобто існують такі функції $G(x,t), N(x,t)$, що розв'язок цієї задачі зображається формулами

$$u(x)=r(x)-\int_\Omega N(x,t)z(t)dt,$$

$$y(x)=k(x)+z(x)+\int_\Omega G(x,t)z(t)dt. \quad (7)$$

Підставивши вираз (7) в співвідношення (5) та позначивши $g(x):=f(x)+\int_\Omega B(x,t)k(t)dt,$

$$M(x,t):=\int_\Omega B(x,\eta)G(\eta,t)d\eta, \quad (9)$$

$$C(t,z(t)):=F(t,k(t)+z(t)+\int_\Omega G(t,\eta)z(\eta)d\eta), \quad (10)$$

отримаємо інтегральне рівняння

$$z(x)=g(x)+\int_\Omega (B(x,t)+M(x,t))z(t)dt+$$

$$+\varepsilon\int_\Omega T(x,t)C(t,z(t))dt. \quad (11)$$

Таким чином , дослідження задачі (3) звелося до дослідження інтегрального рівняння (11).

**2.Суть методу.** До розв’язання задачі (1)-(2) застосуємо нестаціонарний модифікований проекційно-ітеративний метод. Нехай задано координатні системи лінійно незалежних функцій $\{\xi_j(x)\}_{j=1}^m, \{\eta_j(x)\}_{j=1}^n, \{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{n_k}\subset L_2(\Omega)$, та неспадну послідовність натуральних чисел $n_k$, причому $n_k\ge n, k=0,1,2,3,...,$ де $n\in N$ - деяке фіксоване число, і наближення $y_{k-1}(x)$ вже побудоване.

Побудуємо функцію

$$z_k(x)=f(x)+\int_\Omega B(x,t)(y_{k-1}(t)+\omega_k(t))dt+$$

$$+\varepsilon\int_\Omega T(x,t)F(t,y_{k-1}(t))dt,\ H(x,t)=K(x,t)-B(x,t) \quad (12)$$

в якій

$$\omega_k(x)=\sum_{j=1}^n a_j^k\eta_j(x), \quad (13)$$

а невідомі коефіцієнти $a_j^k, \quad j=\overline{1,n},$ визначаються з умови

$$\int_\Omega (z_k(x)-l_{k-1}(x)-\beta_k(x))\varphi_i(x)dx=0, \quad i=\overline{1,n}, \quad (14)$$

де

$$\beta_k(x)=\sum_{j=1}^n a_j^k\varphi_j(x). \quad (15)$$

Після цього знаходимо функцію

$$l_k(x)=\sum_{j=1}^{n_k} c_j^k\varphi_j(x). \quad (16)$$

Коефіцієнти $c_j^k$ якої визначаємо з умови

$$\int_\Omega (z_k(x)-l_k(x))\varphi_i(x)dx=0, \quad i=\overline{1,n_k}. \quad (17)$$

Тоді наближений розв'язок знаходиться із задачі

$$y_k(x)=u_k(x)+l_k(x)+\int_\Omega H(x,t)y_k(t)dt,$$

$$\int_\Omega \Phi_s(t)y_k(t)dt=\alpha_s, s=\overline{1,m}, \quad (18)$$

а $u_k(x)$ шукається у вигляді

$$u_k(x)=\sum_{s=1}^m \lambda_s^k\xi_s(x)$$

**3. Обгрунтування методу.**

За умови, що системи функцій $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^n, \{\varphi_j(x)\}_{j=1}^n$ пов'язані співвідношеннями

$$\eta_j(x)=\sigma_j(x)+\varphi_j(x)+\int_\Omega H(x,t)\eta_j(t)dt,$$

$$\int_\Omega \Phi_s(t)\eta_j(t)dt=0. \quad s=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}. \quad (19)$$

алгоритм (12)-(18) можна звести до нестаціонарного проекційно-ітеративного методу [2] розв'язання інтегрального рівняння

$$z_k(x)=g(x)+\int_\Omega (B(x,t)+M(x,t))(l_{k-1}(t)+\beta_k(t))dt+$$
$$+\varepsilon\int_\Omega T(x,t)C(t,l_{k-1}(t))dt, \qquad (20)$$
$$\int_\Omega (z_k(x)-l_{k-1}(x)-\beta_k(x))\varphi_i(x)dx=0,$$
$$\int_\Omega (z_k(x)-l_k(x))\varphi_i(x)dx=0, \quad i=\overline{1,n}_{k-1}.$$

Дійсно, за припущенням п.1, існує єдиний розв'язок задачі (18), який визначається формулою

$$y_k(x)=k(x)+l_k(x)+\int_\Omega G(x,t)l_k(t)dt, \qquad (21)$$

Врахувавши формулу (19) та

$\omega_k(x)=\ \beta_k(x)+\int_\Omega G(x,t)\beta_k(t)dt$, маємо

$$y_{k-1}(x)+\omega_k(x)=\ k(x)+l_{k-1}(x)+\ \beta_k(x)+$$
$$+\varepsilon\int_\Omega G(x,t)(l_{k-1}(t)+\beta_k(t))dt.$$

Підставивши вирази (18), (19) в співвідношення (12) і врахувавши позначення (9)-(10) отримаємо рівняння (20).

Достатні умови збіжності розглянутого методу встановлюються аналогічно [2].

**4. Обчислювальна схема.**

З точку зору реалізації нестаціонарного проекційно-ітеративного методу (12)-(18) зручно користуватися наступною обчислювальною схемою.

Припустимо, що послідовність $\{n_k\}$, початкове наближення $y_0(x)$ і система лінійно незалежних функцій $\{\varphi_i(x)\}$ та ядро $H(x,t)=\sum_{j=1}^{r}a_j(x)b_j(t)$ - задані.

Обчислюємо допоміжні величини і функції:

- утворюємо матрицю $B$, яка має вигляд

$$B=\begin{pmatrix} 1-\beta_{11} & -\beta_{12} & \dots & -\beta_{1r} \\ -\beta_{21} & 1-\beta_{22} & \dots & -\beta_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\beta_{r1} & -\beta r2 & \dots & 1-\beta_{rr} \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

де $\beta_{ij}=\int_\Omega a_i(t)b_j(t)dt, \quad i=\overline{1,r}, \quad j=\overline{1,r}$ ;

- знаходимо матрицю $B^{-1}$, обернену до матриці $B$;
- формуємо вектор $d_j=\left(d_1^j,\dots,d_r^j\right)$, координати якого обчислюємо за формулою

$$d_i^j=\int_\Omega b_i(t)\xi_j(t)dt, \quad i=\overline{1,r}; \qquad (23)$$

- будуємо вектор $c_j=\left(c_1^j,\dots,c_r^j\right)$ за формулою $c_j=B^{-1}d_j$;
- будуємо нову систему функцій $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^n$ за формулою

$$\eta_j(x)=\varphi_j(x)+\sum_{j=1}^{r}a_j(x)c_j \qquad j=\overline{1,n}; \qquad (24)$$

- обчислюємо функції $\theta_j(x)$

$$\theta_i(x)=\int_\Omega B(x,t)\eta_j(t)dt, \qquad j=\overline{1,n}; (25)$$

- утворюємо матрицю $\Lambda$, елементи якої $\beta_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$ обчислюємо за формулою

$$\beta_{ij}=\int_\Omega (\varphi_j(x)-\theta_j(x))\varphi_i(x)dx; \qquad (26)$$

- знаходимо матрицю $\Lambda^{-1}$, обернену до матриці $\Lambda$;

Будемо вважати, що $y_{k-1}(x)$ - відоме наближення, тоді виконуємо ітерацію

$$v_k(x)=\ f(x)+$$
$$+\int_\Omega B(x,t)y_{k-1}(t)dt+\ \varepsilon\int_\Omega T(x,t)F(t,y_{k-1}(t))dt; \qquad (27)$$

- знаходимо нев'язку $\varepsilon_k(x)=v_k(x)-l_{k-1}(x)$;
- формуємо вектор $b_k=\left(b_1^k,\dots,b_n^k\right)$, координати якого обчислюємо за формулою

$$b_j^k=\int_\Omega \varepsilon_k(x)\varphi_j(x)dx; \qquad (28)$$

- знаходимо вектор $a_k=\left(a_1^k,\dots,a_n^k\right), \quad a_k=\Lambda^{-1}b_k$;
- будуємо функцію

$$\delta_k(x)=\sum_{j=1}^{r}a_j^k\theta_j(x); \qquad (29)$$

- обчислюємо

$$z_k(x)=v_k(x)-\delta_k(x); \qquad (30)$$

- будуємо функцію $l_k(x)=\sum_{j=1}^{n_k}c_j^k\varphi_j(x)$, де невідомі $c_j^k$ знаходяться з системи рівнянь

$$\int_\Omega z_k(x)\varphi_j(x)dx=\sum_{j=1}^{n_k}c_j^k\int_\Omega \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx, \quad i,j=\overline{1,n_k};$$

- визначаємо $k$-те наближення із задачі

$$y_k(x)=u_k(x)+l_k(x)+\int_\Omega H(x,t)y_k(t)dt,$$

$$\int_\Omega \Phi_s(t)y_k(t)dt=\alpha_s, s=\overline{1,m}., \ u_k(x)=\sum_{s=1}^{m}\lambda_s^k\xi_s(x). (31)$$

**5. Приклад.**
Реалізуємо побудовану обчислювальну схему для задачі

$$y(x) = \frac{97}{54}x - \frac{3}{4}x^2 - \int_0^1 K(x,t)y(t)dt + \int_0^1 T(x,t)y^2(t)dt,$$

$$\int_0^1 y(t)dt = \frac{1}{3},$$

де $K(x,t) = \begin{cases} 3x, \; x \le t \\ 3t, \; x \ge t, \end{cases} \; 0 \le x \le 1, \;\; T(x,t) = \frac{1}{2}K(x,t)$.

Застосуємо до даної задачі нестаціонарний проекційно-ітеративний метод (12)-(18), причому для зручності обчислень, нехай $H(x,t) = 0$. Покладемо $n = 1, n_1 = n_2 = 3, \xi(x) = 1$.

За координатну систему візьмемо ортогональні функції на відрізку $[0,1]$ - поліноми Лежандра $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 2x - 1, \varphi_3(x) = 6x^2 - 6x + 1$.

Використавши формулу (22)-(26), маємо

$$\eta_1(x) = 2x - 1; \qquad \theta_1(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2,$$

$$\Lambda = 0{,}4333, \qquad \Lambda^{-1} = 2{,}3078$$

Взявши за початкове наближення $l_0 = 0$, і з задачі

$$y_0(x) = \lambda_0, \; \int_0^1 y_0(t)dt = \frac{1}{3},$$

маємо $y_0(x) = \frac{1}{3}$.

Маючи $y_0(x)$ і використавши рекурентні формули (27)-(31), знаходимо перше наближення

$$z_1(x) = -0{,}9629x - 0{,}6952x^2 + 0{,}2413x^3$$

$$l_1(x) = 0{,}0121 + 0{,}8178x - 0{,}333x^2,$$

$$y_1(x) = 0{,}0354 + 0{,}8178x - 0{,}333x^2.$$

Використовуючи формули (27)-(31) і отримане $y_1(x)$, знаходимо друге наближення

$$z_1(x) = 0{,}9931x - 0{,}6987x^2 + 0{,}3945x^3 - 0{,}1638x^4 +$$
$$+ 0{,}0408x^5 - 0{,}0055x^6,$$

$$l_2(x) = 0{,}0097 + 0{,}8676x - 0{,}324x^2$$

$$y_2(x) = 0{,}0075 + 0{,}8676x - 0{,}3240x^2.$$

Продовжуючи цей процес далі, можна отримати наближення з заданою точністю.

Наведена таблиця характеризує відхилення знайдених наближень від точного розв'язку $y^*(x) = 1 - 4(2 + x)^{-2}$.

| $x$ | $y^*(x)$ | $y^*(x) - y_1(x)$ | $y^*(x) - y_2(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | -0,0354 | -0,007 |
| 0,25 | 0,2098 | -0,0092 | 0,005 |
| 0,5 | 0,3600 | -0,0010 | -0,0003 |
| 0,75 | 0,4710 | 0,0096 | -0,0049 |
| 1 | 0,5555 | 0,0353 | 0.0044 |

**6. Висновки.**

В даній роботі знайдено умови сумісності нелінійних інтегральних рівнянь зі слабкою нелінійністю з обмеженнями. Побудовано та обгрунтовано модифікований нестаціонарний проекційно – ітеративний метод. Встановлено достатні умови збіжності та оцінки похибки запропонованого методу. До вихідної задачі наближені методи не могли бути застосовані або збігалися повільно, то новий метод, побудований з використанням узагальненої допоміжної задачі, має більш широку область застосування і набагато швидше збігається.

**Список використаних джерел**

1. **Лучка А.Ю.** Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // //*Кибернетика системный анализ. 1996. №3. С.82-96.*
2. **Лучка А.Ю.** Проекционно – итеративные методы. – Киев: Наук. думка. 1993. – 288с.
3. **Ковтун О.І.** Нелінійні інтегральні рівняння зі слабкою нелінійністю та обмеженнями на шукану функцію //Вісник національного університету "Львівська політехніка". 2000. №411. С.174 – 177.

Надійшла до редколегії 30.10.2008