УДК 625. 745. 11

ВИБІР ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ ПРИ КЕРУВАННІ ВИПАДКОВИМИ ПРОЦЕСАМИ

канд. техн. наук Бєлятинський А. О.,
студент Цуканов О. І.,
студент Кривенко І. В.

Вихід із ладу автомобільних доріг у наслідок надзвичайних природних явищ призводить до значних збитків. Тому відновлення ії утримання цих шляхів у робочому стані потребує значних коштів. У зв'язку з цим важливим питанням є прийняття оптимальних рішень, які направлені на ефективне використання коштів на будівництво та експлуатацію доріг. Під ефективністю прийняття рішень розуміється зменшення ризику втрат, так як це пов'язано з випадковим характером процесів у функціонуванні доріг.

Треба зазначити, що дослідження таких процесів пов'язано із значними труднощами в оцінці економічних показників ефективності (утрат, доходу, тощо). Неможливо визначити усі чинники, точно їх ідентифікувати й оцінити з економічної точки зору. У ряді випадків оцінки втрат або прибутку носять суб'єктивний характер. Але тим не менш є важливим постановка і розв'язання задач пошуку оптимальних рішень, пов'язаних із проблемами ефективного функціонування автомобільних доріг. Прикладами вибору рішень в управлінні системою можуть служити ситуації, коли система знаходиться у робочому стані й управління нею полягає у виборі різних альтернатив, пов'язаних з економічними умовами її функціонування. Якщо система знаходиться у аварійному стані, то управління можуть бути пов'язані з різними варіантами її відновлення.

Найбільш актуально вирішення цієї задачі для регіону Закарпатської області, яка потерпає від повені. На гірських автомобільних дорогах України на кінець 2001 року експлуатується більше ста кілометрів мостів, що становить понад двадцять вісім відсотків від усієї довжини мостів України, тоді як гірська територія займає менше десяти відсотків площі держави. Кількість труб становить понад 29 тис. штук, а це 23 відсотка від чисельності усіх труб держави.

Надійність функціонування дорожніх споруд (доріг, мостів, тунелів, труб, тощо) можна розглядати як існування деякої складної системи, яка у будь-який момент часу може знаходитись у одному із множини можливих станів. Кожний такий стан системи визначається множиною станів її елементів. У загальному випадку кількість станів залежить від кожного з них. Розглядається чотири стани: по-перше коли дорожня система роботоздатна, по-друге коли система потребує профілактики, по-третє, коли система вимагає заміни одного з елементів і коли система потребує повного ремонту.

Процес переходів дорожньої системи зі стану у стан припускається марківським випадковим процесом, який має таку властивість, що майбутня поведінка системи залежить лише від її теперішнього стану і не залежить від її минулої поведінки. Марківський процес є хорошою моделлю для описання надійності систем, у яких кожний її елемент має приблизно експоненціальний розподіл часу роботи до відмови.

Розглянемо дорожню систему зі скінченим числом $m+1$ станів $i=0,1,\dots m$. Періодично, раз на деякий період T, здійснюється перевірка поточного стану системи і з імовірністю, яка залежить від передісторії системи, вибирається деяке вирішувальне правило d_k $(k=1,\dots K)$, яке переводить систему в один із можливих її станів, наприклад, профілактика, ремонт, повна заміна.

Позначимо через $q_{ij}(k)$ імовірність переходу системи зі стану i у стан j, якщо вибрано правило d_k. Імовірностям переходів $q_{ij}(k)$ із стану i у стан j при вибраному правилі $q_{ij}(k)$ можна приписати деяку оцінку C_{ik}. Оцінка C_{ik} може і не мати економічного змісту, наприклад, бали, очки і т. інш. В економічних задачах така оцінка може виражати прибуток або витрати у співставимих одиницях (як правило, грошових). Наприклад, перехід деякої системи із стану експлуатації у аварійний стан із ремонтом або заміною призводить до певних витрат. Підвищення якості функціонування системи дає економічний ефект. Відносно оцінки ефективності експлуатації автомобільних доріг можна прийняти як витрати на підтримку їх у робочому стані, так і ефективність, яка виражається у підвищенні пропускної спроможності доріг, отже й у підвищенні економічної ефективності автомобільних перевезень. Оцінювання імовірностеі переходів у випадкових процесах особливо важливе для порівняння різних рішень, серед яких можна вибрати оптимальне.

Задача полягає у виборі вирішувальних правил управління системою, мінімізуючих математичне сподівання повних витрат на функціонування системи при випадковому способі їх вибору. У теорії прийняття рішень математичне сподівання витрат звичайно, називають функцією ризику. За критерій мінімізації доцільно взяти середні очікувані витрати в одиницю часу.

Імовірності переходів $[q_{ij}(k)]$ можна задавати у вигляді k $(k=1,\ \dots,\ K,)$ окремих матриць, або у вигляді блокової матриці, де кожний блок містить елементи, які визначаються трьома індексами i, j і k. Матриця витрат $C=[C_{ik}]$ визначається таким чином. Для кожного вирішувального правила d_k $(k=1,\ \dots,\ K)$

$$C_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad q_{i,j}(k) = 0, \quad j < m; \\ C_{i,k}, & \text{якщо} \quad q_{i,j}(k) > 0, \quad j < m; \\ C_{m,k}, & \text{якщо} \quad i = m, \end{cases}$$

Де $C_{i,k} < C_{m,k}$. Ця умова означає, що витрати на заміну системи повинні перевищувати витрати на переходи системи у інші стани.

Нехай X_t $(t=0,1,...)$ позначають послідовність спостережуваних станів системи у моменти t і D_t послідовність рішень. Будемо розглядати так звані рандомізовані правила, які вибираються за випадковою процедурою і визначаються умовними ймовірностями $D_{ik}=P(D_t=d_k / x_t=i)$, які залежать тільки від останнього спостережуваного стану системи і визначають ймовірність прийняття вирішувального правила d_k, якщо система в момент t знаходилась у стані i.

Оптимальне правило буде стійким, тобто $D_{ik}=0$ або 1. Але для формулювання задачі у термінах лінійного програмування більш зручно розглянути більш широкий клас рандомізованих правил D_{ik}, для яких виконуються умови

$$\sum_{k=1}^{k} D_{ik} = 1,$$

$$P(X_{t+1} = j / X_t = i) = \sum_{k=1}^{K} q_{ij}(k) D_{ik}, \qquad i, j=0,1,...m \quad t=0,1,...$$

де $q_{ij}(k)$ є ймовірність того, що при умові, що система знаходиться у стані i наступним станом буде стан j, якщо вибране правило d_k, тобто:

$$q_{ij}(k)=P(X_{t+1}=j/x_t=i,\ D_t=d_k). \qquad i, j=0,\ 1,...\ m;\ k=0,\ 1,....\ K.$$

Нехай C_{ik} визначає величину середніх витрат в одиницю часу при умові, що система спостерігається у стані i і що було застосоване правило d_k, а C_t $(t=0,\ 1,....)$ — середні витрати до моменту часу t. Треба визначити такі управляючі правила, які мінімізують середні витрати в одиницю часу:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} C_{j,k}(t)$$

З теорії марківських ланцюгів відомий такий факт [1]. Нехай $P=[p_{ij}]$ є матрицею перехідних імовірностей марківського ланцюга $\{X_t\}$ $(t=0,\ 1,...,)$ зі скінченою множиною станів I. Нехай також $f(i)$ є функція, визначена на множині усіх станів. Тоді має місце співвідношення

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} M[f(x_t)] = \sum_{j\in I} \pi_j f(j), \qquad (1)$$

де M — символ математичного сподівання. Визначимо ймовірність

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{K} q_{ij}(k) D_{ik}, \qquad i,\ j=0,1,...m.$$

Матриця $P=[p_{ij}]$ є матрицею стаціонарних імовірностей переходів марківського ланцюга. Імовірності станів системи у стаціонарному режимі π_j задовольняють умовам:

$$\pi_j \geq 0,$$
$$\pi_j - \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} = 0, j \in I \qquad (2)$$
$$\sum_{j \in I} \pi_j = 1.$$

Покладемо $f(j) = \sum_{k=1}^{K} D_{jk} C_{jk},\ j = 0,1,\ldots m.$

Тоді з (1) для кожного вирішувального правила будемо мати:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} C_{i,k}(t) = \sum_{j \in I} \pi_j \sum_{k=1}^{K} D_{j,k}(t)\, C_{j,k} \qquad (3)$$

Нехай $x_{jk} = \pi_j D_{jk}$ ($j \in I$, k=1, 2... K). Величина x_{jk} визначає стаціонарну ймовірність прийняття рішення d_k при умові, що система знаходиться у стані j. Тоді співвідношення (2), (3) переходять у задачу лінійного програмування: знайти мінімум сумарних витрат

$$F = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{k} x_{ik} c_{jk} \qquad (4)$$

при обмеженнях

$$x_{jk} \geq 0,\ j=0,\ 1,\ldots\ m;\ k=1,\ 2\ldots,\ K, \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{jk} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} x_{ik} q_{ij}(k) = 0,$$

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{K} x_{jk} = 1.$$

Функціонал задачі F являє собою математичне сподівання витрат, пов'язаних із вибором рішень в управлінні випадковим процесом, який описує функціонування системи. Розв'язання задачі лінійного програмування (4), (5) можна здійснити у системі математичних розрахунків Mathcad, застосовуючи вбудовану функцію **Minimize** [2]. Ця функція використовується у вирішувальному блоці, який відкривається директивою Given і повертає вектор значень, при яких функціонал задачі приймає оптимальне значення. Функціонал задачі записується перед вирішувальним блоком, а початкові значення змінних і умови записуються у середині блоку. Кількість обмежувальних умов може бути як завгодно велика, тобто практично необмежена.

Оскільки рішення задачі x_{jk} (j=0, 1,... m; k=1, 2..., K) задовольняє умові

$$\sum_{k=1}^{K} x_{jk} > 0, \qquad j=0,1,\ldots m,$$

то його можна записати у вигляді:

$$D_{jk} = \frac{x_{jk}}{\sum_{k=1}^{K} x_{jk}}, \qquad j=0,1,....m; \quad k=1,2...,K.$$

Це рішення відповідає рандомізованому оптимальному правилу, яке мінімізує цільову функцію задачі, іншими словами, мінімізує ризик прийняття рішень.

Зробимо деякі зауваження щодо запису алгоритму розв'язання задачі у Mathcad. Елементи матриць $Q=[q_{ij}(k)]$ $(k=1, ..., K)$ і $C=[C_{ik}]$ задаються у звичайному вигляді, тобто у вигляді індексованих величин. Набір величин $q_{ij}(k)$ і C_{ik} на комп'ютері у співвідношеннях (4), (5) здійснюється у вигляді $q[i, j$ і $C[i, k$. Шукані величини x_{jk} записуються у вигляді неіндексованих величин у вигляді x ik. Рішення одержується у векторній формі x_j $(j=1, ..., m*k)$. Для обчислення оптимального значення функціоналу задачі F і імовірностей D_{jk} вектор X_j перетворюється у матрицю x_{jk} $(j=0, 1,..., m; k=1, 2..., K)$ за формулами $x_{jk} = X_{(j-1)k}$.

Література

1. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. – М.:Сов. радио. 1969   С. 486
2. Дьяконов В. Mathcad 8/2000. Специальный справочник. Издательство «Питер», 2000,   С. 592