

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ
ВИКЛАДАННЯ БАЗОВИХ ДИСЦИПЛІН
ПРИ ПІДГОТОВЦІ ДО ВСТУПУ
В ВИЩИЙ ТЕХНІЧНИЙ
НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД

Матеріали
I міжрегіонального
семінару

15-16 грудня 2005 року

Київ 2006

УДК: 373.6(076.5)

Науково-методичні проблеми викладання базових дисциплін при підготовці до вступу у вищий технічний навчальний заклад: Матеріали I міжрегіонального семінару – К.:НАУ, 2006 – 120 с.

До збірника увійшли матеріали доповідей семінару, у яких викладено питання теорії та практики навчальної роботи в системі підготовки до вступу у вищі навчальні заклади України. Відображено реальний досвід, подано рекомендації щодо удосконалення методики викладання базових дисциплін (математики, фізики) в системі безперервної освіти.

Видання буде корисним для викладачів загальноосвітніх навчальних закладів, слухачів підготовчих курсів Інституту доуніверситетської підготовки, учнів старших класів середніх загальноосвітніх шкіл, ліцеїв, гімназій при підготовці до вступного тестування з математики та фізики у вищі навчальні заклади України.

*Організаційний комітет: Н.П. Муранова (голова)
В.І.Ємець (секретар)*

Рекомендовано до друку вченою радою Національного авіаційного університету (протокол №8 від 20 вересня 2006 року).

Л.З. Тарасова,

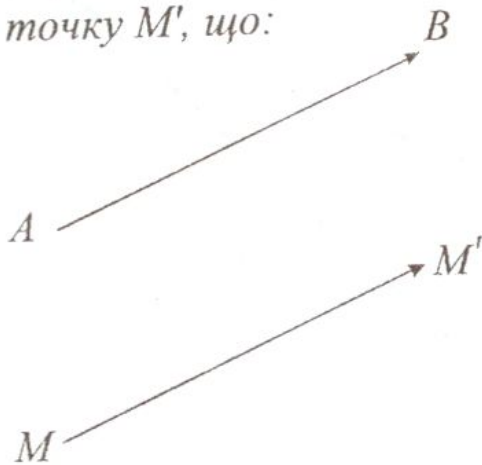
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри базових і спеціальних
дисциплін

Н.П. Муранова

кандидат педагогічних наук, доцент

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Означення: Паралельним перенесенням площини, заданим впорядкованою парою (A, B) точок, називається перетворення площини, яке кожному точку M відображає на таку точку M' , що:



$$1) [MM'] \uparrow\uparrow [AB],$$

$$2) |MM'| = |AB|.$$

Рис. 1

Із означення випливає, що якщо паралельне перенесення задано впорядкованою парою (A, B) точок, то воно відображає A на B , тому що $[AB] \uparrow\uparrow [AB]$ і $|AB| = |AB|$.

Таке перетворення називають вектором і позначають \overline{AB} або $\vec{r} = \overline{AB}$.

Паралельне перенесення (вектор) повністю характеризується напрямом, заданим $[A, B]$ і відстанню $|AB|$.

Цей напрям і відстань називають відповідно напрямом і довжиною (або модулем) вектора.

Очевидно, паралельне перенесення \overline{AA} є тотожним перетворенням. Вектор \overline{AA} називають також нуль-вектором і позначають: $\vec{0} = \overline{AA} = \overline{BB}$.

Якщо $[MM'] \uparrow\uparrow [AB]$ і $|MM'| = |AB|$, то $[M'M] \uparrow\uparrow [BA]$ і $|M'M| = |BA|$. Тому, якщо $\vec{AB}(M) = M'$, то $\vec{BA}(M') = M$.

Перетворення, обернене до паралельного перенесення \overline{AB} , є паралельне перенесення \overline{BA} , $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

Композицією двох перенесень (векторів) називається перенесення (вектор)

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{c}.$$

Ця композиція позначається знаком "+" і називається сумою векторів $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

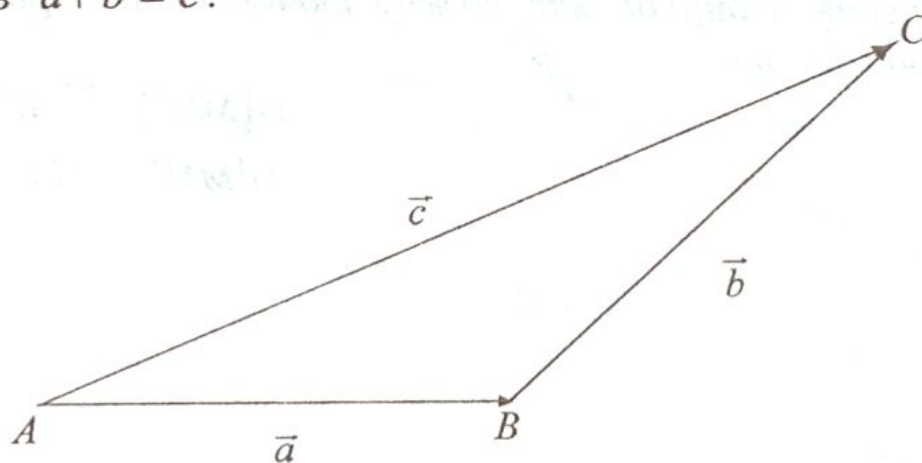


Рис. 2

Якщо $\vec{a}(A) = B$, $\vec{b}(B) = C$, то $\vec{c}(A) = C$, тому $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ для будь-яких точок A, B, C .

Властивості суми векторів:

1^o. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативність).

2^o. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативність).

3^o. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

4^o. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Теорема. Паралельне перенесення є рух.

Доведення. Якщо $\vec{r}(M) = M'$, $\vec{r}(N) = N'$, то $\vec{MM'} = \vec{NN'}$.

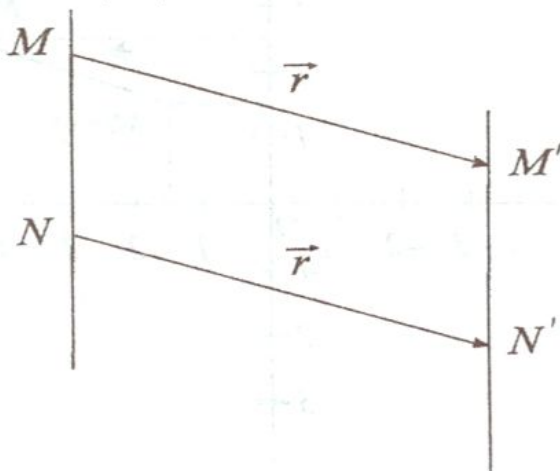


Рис. 3

Таким чином, $\vec{MN} = \vec{MM'} + \vec{M'N} = \vec{M'N} + \vec{NN'} = \vec{M'N'}$, або $\vec{MN} = \vec{M'N'} \Rightarrow |MN| = |M'N'|$.

Наслідок. Паралельне перенесення відображає пряму на паралельну їй пряму.

Доведення. Перенесення як і будь-який рух, відображає пряму на пряму. Якщо $M \in a$, $N \in a$, $M \neq N$ і $\vec{r}(M) = M'$, $\vec{r}(N) = N'$, то $\vec{r}(a) = (M'N')$ і $\vec{MN} = \vec{M'N'}$, тобто $\vec{r}(a) \parallel a$.

Теорема. Паралельне перенесення відображає промінь на промінь, відрізок на відрізок, коло на коло, кут на рівний йому кут.

Вправи

а) Дано дві паралельні прямі. Чи можливо за допомогою паралельного перенесення відобразити одну з них на другу?

б) Яким умовам повинні задовольняти два кути, щоб один з них можна було одержати з другого за допомогою паралельного перенесення?

в) Задайте паралельне перенесення парою точок. Намалюйте довільне коло і його образ при заданому паралельному перенесенні.

Координатні формули паралельного перенесення

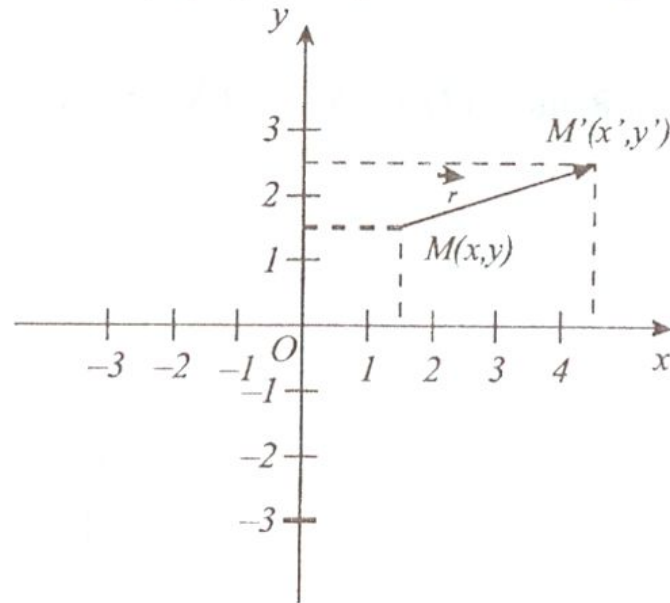


Рис. 4

Розглянемо паралельне перенесення на вектор $\vec{r}(x_0, y_0)$.

Якщо $\vec{r}(M) = M'$, то $\vec{MM'} = \vec{r}$; $M(x, y) \rightarrow M'(x', y')$.

$(x' - x, y' - y) = (x_0, y_0)$. Таким чином,
$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

Координатні формули паралельного перенесення мають вигляд:

$$\begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = y + y_0. \end{cases}$$

Вправи:

1. Перерахуйте відомі вам способи задання паралельного перенесення.

Відповідь: $\vec{r}; (A, B)$.

2. Побудуйте образи точок $A(2; 5)$, $B(0; -7)$, $C(3; 0)$ при паралельному перенесенні в напрямі осі Ox на 3 од. Запишіть координати побудованих точок.

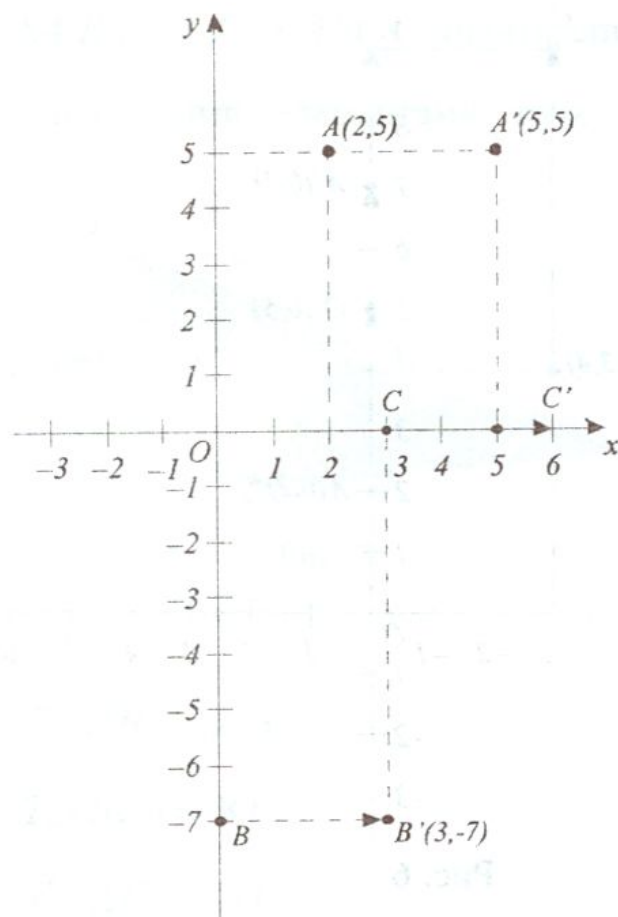


Рис. 5

Відповідь: $A(2;5) \rightarrow A'(5;5)$ $B(0;-7) \rightarrow B'(3;-7)$
 $C(3;0) \rightarrow C'(6;0)$

3. Побудуйте точки, відповідні точкам $A(0;2)$, $C(-3;4)$ $O(0;0)$ при паралельному перенесенні в напрямі осі OY на відстань 5 од. Запишіть їх координати.

$$A(0;2) \rightarrow A'(0;7)$$

$$C(-3;4) \rightarrow C'(-3;9)$$

$$O(0;0) \rightarrow O'(0;5)$$

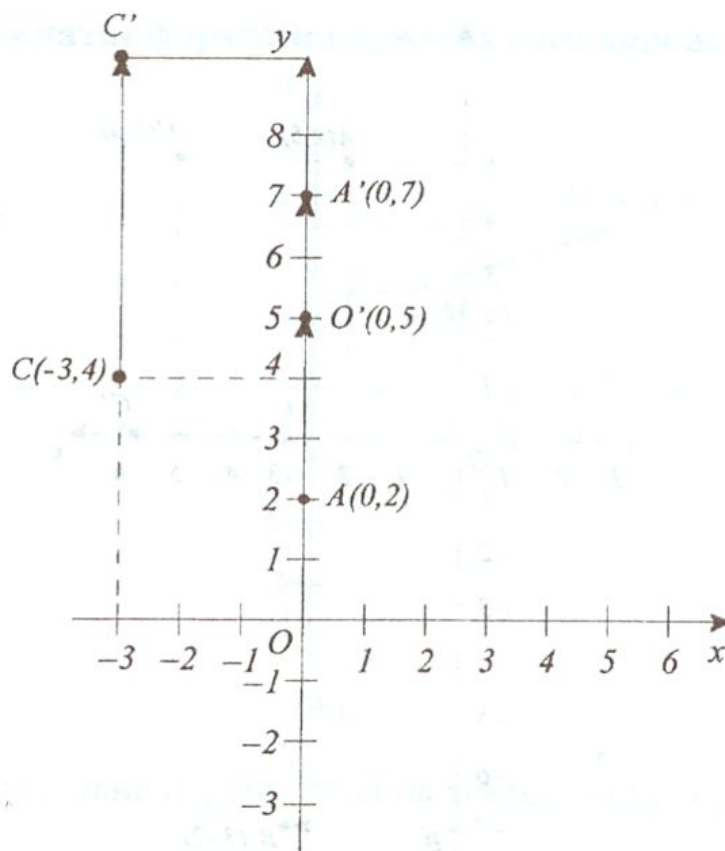


Рис. 6

4. Паралельне перенесення задано парою точок $O(0;0) \rightarrow M(-2;0)$.
 Запишіть координати образів точок $A(-3;2)$, $B(4;1)$, $C(0;-3)$.

Розв'язання:

$$T_{\vec{r}} : \vec{r} = \vec{OM}(-2-0;0-0); \vec{r} = \vec{OM}(-2;0)$$

$$T_{\vec{r}}(A) = A'; \begin{cases} x' = x + a & a = -2, \\ y' = y + b & b = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -3 - 2, \\ y' = 2 + 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -5, \\ y' = 2; \end{cases} \Rightarrow A'(-5;2).$$

$$T_{\vec{r}}(B) = B'; \begin{cases} x' = 4 - 2, \\ y' = 1 + 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2, \\ y' = 1; \end{cases} \Rightarrow B'(2;1); C'(-2;-3).$$

Відповідь: $A'(-5;2)$; $B'(2;1)$; $C'(-2;-3)$.

5. Відомо, що $\Delta A_1 B_1 C_1 = T_{\vec{r}}(\Delta ABC)$. Знайти співвідношення між відповідними основними елементами трикутників ABC і $A_1 B_1 C_1$.

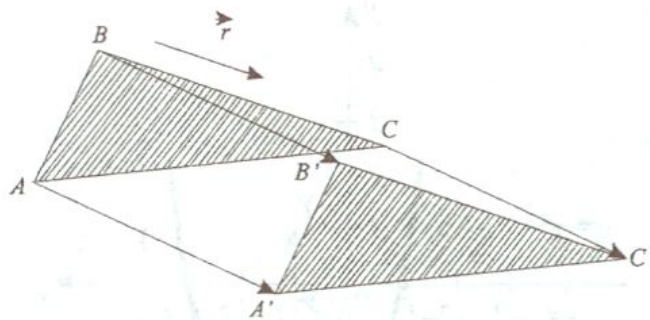


Рис. 7

Розв'язання:

$$T_{\vec{r}}(A) = A_1, \quad T_{\vec{r}}(AB) = A_1 B_1,$$

$$T_{\vec{r}}(B) = B_1, \quad T_{\vec{r}}(BC) = B_1 C_1,$$

$$T_{\vec{r}}(C) = C_1, \quad T_{\vec{r}}(AC) = A_1 C_1.$$

6. Побудуйте квадрат із стороною 5 см та його образ при паралельному перенесенні в напрямі діагоналі квадрата на 5 см. Вкажіть фігури, які є об'єднанням (перетином) даного квадрата і його образу.

Приклад.

Побудувати графік функції $y = x^2 - 2x - 3$ (1) за допомогою паралельного перенесення.

Розв'язання.

$$y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 \Leftrightarrow y = (x - 1)^2 - 4 \Leftrightarrow y + 4 = (x - 1)^2 \quad (2).$$

$$\text{Введемо нові змінні } \begin{cases} x - 1 = X, \\ y + 4 = Y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y - 4. \end{cases}$$

Координати нового початку: $x_0 = 1, y_0 = -4; O'(x_0; y_0), O'(1; -4)$.

Вектор паралельного перенесення: $\vec{r} = \overline{OO'}$; $\vec{r}(1; -4)$

$$(2) \Rightarrow Y = X^2.$$

Таким чином, парабола, яка має рівняння $y = x^2 - 2x - 3$ в старій системі координат xOy , в новій системі $XO'Y$ має рівняння $Y = X^2$.

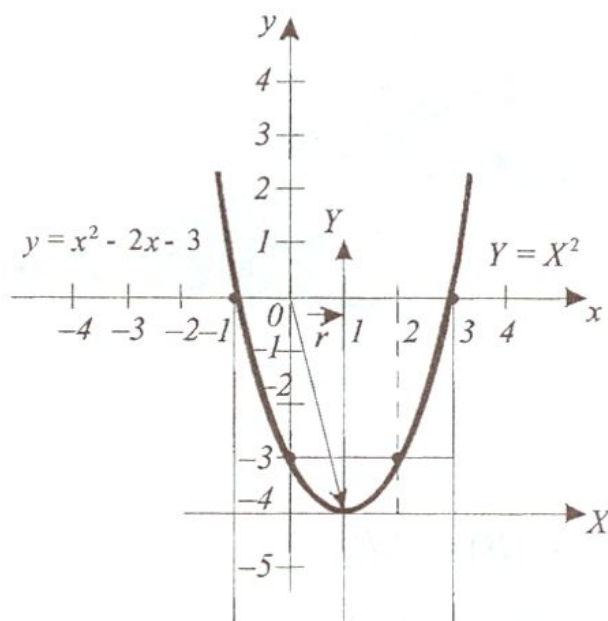


Рис. 8

Приклад.

Побудувати графік функції $y = \frac{2x+3}{x-1}$ (1) за допомогою паралельного перенесення.

Розв'язання:

$$(1) \Rightarrow y = \frac{(2x-2)+2+3}{x-1} \Leftrightarrow y = 2 + \frac{5}{x-1} (2).$$

$$\text{Введемо нові змінні: } \begin{cases} x-1 = X, \\ y-2 = Y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+1, \\ y = Y+2. \end{cases}$$

Таким чином, координати нового початку координат – $O'(1; 2)$ і вектор паралельного перенесення – $\vec{r} = \overline{OO'}$, тому $\vec{r}(1; 2)$. В новій системі координат $XO'Y$ графіком функції (1) буде $Y = \frac{5}{X}$ (3).

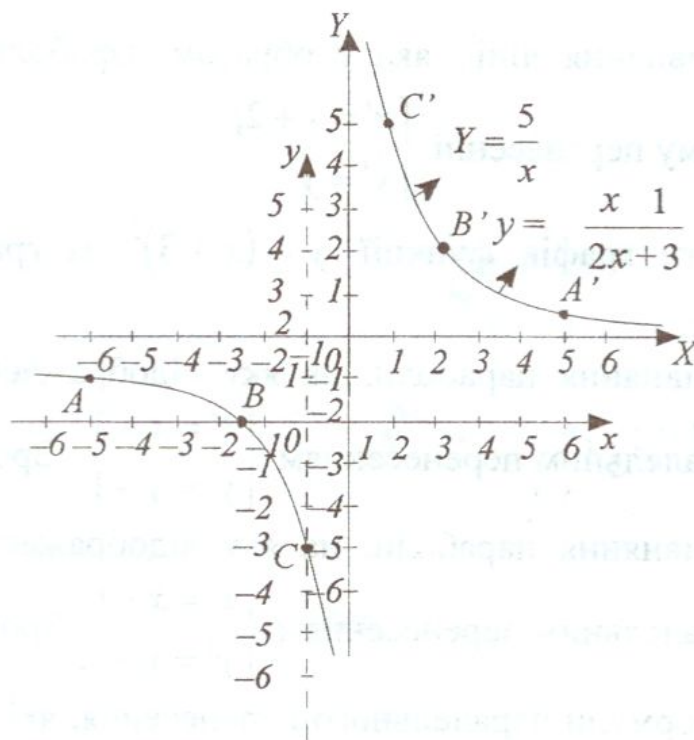


Рис. 9

Асимптотами графіка функції $Y = \frac{5}{X}$ в “новій” системі координат $XO'Y$ будуть координатні осі $O'X$ і $O'Y$.

Асимптотами графіка функції $y = \frac{2x+3}{x-1}$ в “старій” системі координат будуть прямі $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

7. Нарисуйте довільне коло і побудуйте його образ при паралельному перенесенні, заданому парою точок $A \rightarrow A'$.
8. Запишіть координати точок, на які відображаються точки $A(-2; 4)$, $B(3; -5)$, $C(2; 8)$ паралельним перенесенням $M(1; 2) \rightarrow M'(5; 4)$
9. Запишіть рівняння прямої, на яку відображається пряма $y = 2x - 1,5$ під дією вектора $\vec{OM}(3; -4)$. Зробіть малюнок.

10. Запишіть рівняння лінії, яка є образом параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні $\begin{cases} x' = x + 2, \\ y' = y. \end{cases}$
11. Як одержати графік функції $y = (x + 3)^2$ із графіка функції $y = x^2$?
12. Запишіть рівняння параболи, на яку відображається парабола $y = x^2$ паралельним перенесенням $\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 1. \end{cases}$ Зробіть рисунок.
13. Запишіть рівняння параболи, на яку відображається парабола $y = x^3$ паралельним перенесенням $\begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = y - 1. \end{cases}$ Зробіть рисунок.
14. Запишіть формули паралельного перенесення, які відображають графік функції $y = x^2$ на графік функції $y = x^2 - 4x + 10$.

Розв'язання.

$$y = x^2 - 4x + 10 = (x^2 - 4x + 4) + 6 = (x - 2)^2 + 6;$$

$$y - 6 = (x - 2)^2;$$

$$\begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y - 6; \end{cases} \quad y' = x'^2$$

Але треба виразити старі координати через нові, тому

$$\begin{cases} x = x' + 2, \\ y = y' + 6. \end{cases}$$

15. Дано два круги з центрами O_1 і O_2 . Проведіть пряму, паралельну даній прямій m так, щоб відрізки, які є перетином цієї прямої з даним кругом, були конгруентні.

Розв'язання.

Дано: $\alpha(O_1; r)$, $\beta(O_2; r)$, m .

Побудуйте: $n \parallel m$: $\alpha \cap n = \{A; B\}$, $\beta \cap n = \{C; D\}$, $|AB| = |CD|$.

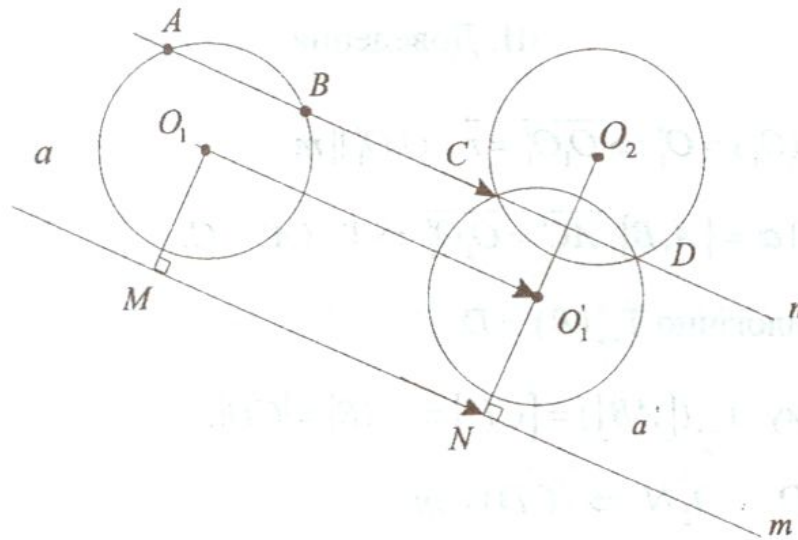


Рис. 10

I. Аналіз

Дано: $\alpha(O_1; r)$, $\beta(O_2; r)$, $n \parallel m$, $\alpha \cap n = \{A; B\}$, $\beta \cap n = \{C; D\}$,
 $|AB| = |CD|$.

Знайдіть: Конструктивні властивості точок C і D .

I_1 $(O_1M) \perp m$, $(O_2N) \perp m$, $M, N \in m$.

I_2 $T_{\vec{r}}(O_1) = O_1'$, $T_{\vec{r}}(\alpha) = \alpha'$.

I_3 $\alpha' \cap \beta = \{C, D\}$.

Конструктивні властивості точок C і D знайдено.

II. Побудова

Π_1 $(O_1M) \perp m$, $(O_2N) \perp m$, $M, N \in m$, $\overline{MN} = \vec{r}$.

Π_2 $T_{\vec{r}}(O_1) = O_1'$, $T_{\vec{r}}(\alpha) = \alpha'$.

Π_3 $\alpha' \cap \beta = \{C, D\}$, $(CD) = n$.

III. Доведення

$$\text{III}_1 \quad T_{\vec{r}}(O_1) = O'_1 \Rightarrow \overline{O_1 O'_1} = \vec{r}, \quad O_1 O'_1 \parallel m.$$

$$\text{III}_2 \quad n \cap \alpha = \{A, B\} \quad \overline{AC} = \overline{O_1 O'_1} \Rightarrow T_{\vec{r}}(A) = C.$$

$$\text{Аналогічно } T_{\vec{r}}(B) = D.$$

$$\text{Тому } T_{\vec{r}}([AB]) = [CD] \Rightarrow |AB| = |CD|.$$

$$\text{III}_3 \quad CD \perp O_2 N \Rightarrow (CD) \parallel m.$$

IV. Дослідження

$\text{IV}_1 \quad (O_1 M) \perp m, (O_2 N) \perp m$, тому точка $M = (O_1 M) \cap m$ – єдина і точка $N = (O_2 N) \cap m$ – єдина.

Вектор $\vec{r} = \overline{MN}$ визначено однозначно.

$\text{IV}_2 \quad T_{\vec{r}}(O_1) = O'_1$, точка O'_1 – єдина.

$T_{\vec{r}}(\alpha) = \alpha'$, коло α' – єдине.

IV_3 Кількість розв'язків залежить від кількості точок перетину кіл α' і β .

Тому: шукана пряма n єдина, якщо кола α' і β перетнулися в двох точках.

Якщо кола α' і β співпали, тобто $\alpha' \equiv \beta$, то точок перетину безліч і будь-яка пряма, яка перетинає обидва кола і паралельна лінії центрів, буде шуканою.

Якщо кола α' і β не перетинаються або дотикаються, то задача не має розв'язку.

Задача на доведення.

Якщо в трикутнику дві медіани конгруентні, то трикутник рівнобедрений. Доведіть.

$$\text{Дано: } \triangle ABC : |AD| = |DB|, |BM| = |MC|, |AM| = |CD|.$$

Доведіть: $|AB| = |BC|$.

Доведення.

1. $\vec{r} = \overrightarrow{DM}$.

$$\left. \begin{array}{l} T_{\vec{r}}(D) = M, \\ T_{\vec{r}}(C) = C' \end{array} \right\} \Rightarrow T_{\vec{r}}([AC]) = [MC'], |DC| = |MC'|.$$

2. $\left. \begin{array}{l} |AM| = |DC| \\ |DC| = |MC'| \end{array} \right\} \Rightarrow |AM| = |MC'| \Rightarrow \triangle AMC' - \text{рівнобедрений.}$

3. $\triangle AMC' : |AM| = |MC'| \Rightarrow \angle MAC' = \angle MC'A$.

4. $\angle MC'A = \angle DCA$ (як відповідні кути при паралельних прямих $DC \parallel MC'$) $\Rightarrow \angle DCA = \angle MAC$.

5. $\triangle ADC = \triangle CMA$ ($DC = MA$, AC – спільна, $\angle DCA = \angle MAC$) $\Rightarrow AD = CM \Rightarrow 2AD = 2CM \Rightarrow AB = BC$.

Список літератури

1. *Пожарин Я.П., Скопец З.А.* Перемещение и подобие плоскости. – К.: Радянська школа, 1981.–175 с.
2. *Саранцев Г.И.* Сборник задач на геометрические преобразования.- М.: Просвещение, 1981.–110 с.