

**ПОХИБКА ВИМІРЮВАННЯ СМУГИ ЗАЙМАНИХ ЧАСТОТ,  
ЩО ОБУМОВЛЕНА РЕАЛЬНОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ ОСЛАБЛЕННЯ  
ФІЛЬТРА ВІД ЧАСТОТИ**

Інститут електроніки і систем управління НАУ

*Розглянуто вплив параметрів фільтра і форми сигналу на похибку вимірювання ширини смуги випромінювання. Запропонована методика, яка дає можливість мінімізувати похибки вимірювань за допомогою порівняння результатів вимірювань або моделювання з результатами визначення ширини займаної смуги частот ідеальним фільтром.*

**Вступ.** Ширина займаної смуги частот є найважливішою характеристикою радіосигналів. Вона використовується для визначення рівня позасмугових випромінювань, для оцінки необхідних смуг частот для певних класів радіовипромінювань, встановлення відповідності досліджуваного випромінювання оптимальному, для розв'язання конфліктних ситуацій з забезпеченням електромагнітної сумісності. Тому методам і засобам вимірювання ширини займаної смуги частот значну увагу надають спеціалісти з радіоконтролю, електромагнітної сумісності, експлуатації радіоелектронних систем, захисту інформації і т. і..

Прямі методи вимірювання смуги займаних частот ґрунтуються на визначенні поняття ширини смуги займаних частот, що запропоноване Міжнародним союзом електрозв'язку. Згідно з цим визначенням під шириною займаної смуги розуміють ширину такої смуги частот, за верхньою і нижньою границями якої середні потужності випромінювань дорівнюють  $\beta/2$  відсотку від усієї середньої потужності розглядуваного випромінювання.

**Постановка завдання.** Енергію  $E$  сигналів  $S(t)$  будь-якої форми за відомим модулем спектральної густини  $S(\omega)$  обчислюють таким чином

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d(\omega). \quad (1)$$

Очевидно, що середня потужність сигналу визначається періодом, протягом якого ведеться спостереження за сигналом.

Для вимірювань верхньої  $\omega_{в.зр.}$  і нижньої  $\omega_{н.зр.}$  границі смуги частот, займаної спектром сигналу, використовують фільтри. Існують різні способи вимірювань, які ґрунтуються на застосуванні або фільтра верхніх частот, або фільтра нижніх частот, або обидвох фільтрів одночасно [1]. Кількість і тип фільтра не мають принципового значення, оскільки суть процесу вимірювань зводиться до встановленого значення такої рівності

$$\int_{\omega_{в.зр.}}^{\infty} S^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\omega_{н.зр.}} S^2(\omega) d\omega = \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega, \quad (2)$$

де  $\beta$  – допустима частина енергії радіосигналу, якого можна знехтувати. У багатьох випадках встановлюють рівень  $\frac{\beta}{2} = 0.005$ , який рекомендований Міжнародним союзом електрозв'язку.

Очевидно, що реалізація вимірювання граничних частот на засадах рівняння (2) можливе при застосуванні ідеального фільтра, частотна характеристика коефіцієнта передачі

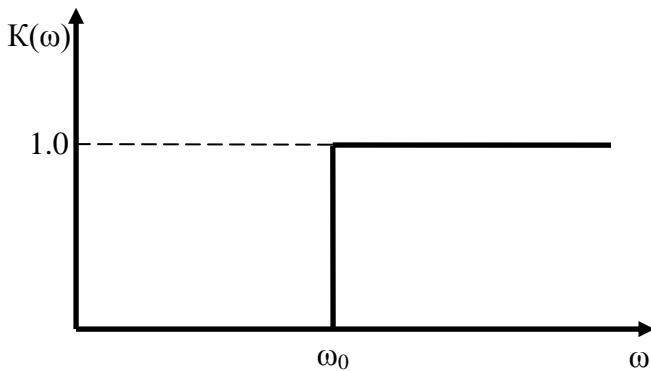


Рис.1 Частотна характеристика коефіцієнта передачі ідеального фільтра

якого зображена на рис.1. З наведеного рисунка випливає, що фільтр верхніх частот має нульовий коефіцієнт передачі на частотах  $\omega < \omega_0$  і без будь-яких змін передає спектральні складові сигналу на частотах  $\omega \geq \omega_0$ . Отже, ідеальний фільтр мусить мати характеристику, у якій збігаються частота замирання  $\omega_3$  і частота пропускання  $\omega_p$ , тобто  $\omega_3 = \omega_p = \omega_0$ . Частотні характеристики реальних фільтрів суттєво відрізняються від ідеальної частотної характеристики. Для реального фільтра  $\omega_3 < \omega_p$ , а рівень

ослаблення в смузі замирання не досягає нульового значення. У смузі пропускання коефіцієнт передачі не завжди дорівнює одиниці і залежить від частоти.

Використання реальних фільтрів у пристроях вимірювання смуги займаних частот призводить до похибок у оцінці граничних частот. Значення похибок залежатимуть від частот замирання і пропускання, крутизни схилу характеристики та від ослаблення у смузі пропускання. Враховуючи, що похибка вимірювання є найважливішою характеристикою вимірювального пристрою, необхідно визначити кількісний вплив характеристики фільтра на точність вимірювання смуги займаних частот фільтровим методом.

**Теоретичні засади.** У реальній апаратурі промоделювати або відтворити рівняння (2) неможливо. За допомогою апаратурних засобів можна забезпечити такі співвідношення між енергетичними частинами спектру

$$\int_{\omega_g}^{\omega_{c.n.}^g} K^2(\omega) K_{в.ч.}^2(\omega) S^2(\omega) d\omega = \int_{-\omega_{c.n.}^h}^{\omega_h} K^2(\omega) K_{н.ч.}^2(\omega) S^2(\omega) d\omega = \frac{\beta}{2} \cdot \int_{-\omega_{c.n.}^h}^{\omega_{c.n.}^g} K^2(\omega) S^2(\omega) d\omega, \quad (3)$$

де  $\omega_g$  – вища обмежувальна частота;

$\omega_{c.n.}^g$  – вища частота смуги пропускання вимірювального пристрою;

$\omega_{c.n.}^h$  – нижча частота смуги пропускання вимірювального пристрою;

$K_{в.ч.}^2$  – частотна залежність коефіцієнта передачі фільтра вищих частот;

$K_{н.ч.}^2$  – частотна залежність коефіцієнта передачі фільтра нижніх частот;

$K(\omega)$  – частотна залежність коефіцієнта передачі пристрою у смузі частот від  $\omega_{c.n.}^h$  до  $\omega_{c.n.}^g$ .

Для реальних фільтрів не можна вважати, що  $\omega_g = \omega_{грв}$  і  $\omega_h = \omega_{гpn}$ , оскільки ці частоти можуть знаходитися в межах

$$\omega_3^g \leq \omega_g \leq \omega_n^g \text{ або}$$

$$\omega_3^h \leq \omega_g \leq \omega_n^h,$$

де  $\omega_3$  – частота зрізу фільтра вищих або нижчих частот;

$\omega_n$  – частота пропускання відповідних фільтрів.

Отже, похибка вимірювання може бути визначена з порівняння результатів, отриманих з рівняння (2) і рівняння (3). Очевидно, що похибка залежатиме від конкретного сигналу.

Розглянемо дещо ідеалізований випадок, коли частотна характеристика вимірювального пристрою у смузі робочих частот є сталою величиною, тобто  $K(\omega) = const$  при  $\omega_{с.п.}^H \leq \omega \leq \omega_{с.п.}^6$ .

Вважатимемо, що досліджується спектр сигналу, що передається за допомогою прямокутних імпульсів

$$S(t) = \begin{cases} A & \text{при } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{при } -\frac{\tau}{2} > t \text{ і при } t > \frac{\tau}{2}, \end{cases} \quad (4)$$

де  $A$  – амплітуда сигналу,  
 $\tau$  – тривалість імпульсу.

Позначимо частоту несучої як  $\omega_0$  і для спрощення аналізу прийемо, що щільність імпульсів досить велика, тобто спектральна густина визначається з урахуванням тільки одного імпульсу. Ці припущення дають змогу записати спектр сигналу у вигляді

$$S(\omega) = \frac{A \cdot \tau}{2} \left[ \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}} \right]. \quad (5)$$

Використовуючи формулу (1), знаходимо повну енергію імпульсу

$$E = \frac{A^2 \cdot \tau}{2}. \quad (6)$$

За допомогою ідеального фільтра вищих частот з формули (2) при урахуванні властивостей ортогональних функцій отримуємо таке інтегральне рівняння

$$\frac{\tau}{4\pi} \int_{\omega_{ср.в}}^{\infty} \left[ \frac{\sin^2 \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)^2 \tau^2}{4}} + \frac{\sin^2 \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0)^2 \tau^2}{4}} \right] d\omega = \frac{\beta}{2}. \quad (7)$$

Введемо такі позначення

$$\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} = \alpha \text{ і } \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2} = \gamma.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$d\alpha = d\gamma = \frac{\tau}{2} d\omega.$$

Границями змін аргументу  $\alpha$  є  $\alpha_1 = \frac{(\omega_{ср.в} - \omega_0)\tau}{2}$  і  $\alpha_2 = \infty$ , аргумент  $\gamma$  змінюється в

межах від  $\gamma_1 = \frac{(\omega_{ср.в} + \omega_0)\tau}{2}$  до  $\gamma_2 = \infty$ . При такій заміні рівняння (7) набуває вигляду

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2} d\gamma \right] = \frac{\beta}{2}. \quad (8)$$

Інтегруючи лівий бік рівняння (8) по частинам, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \Big|_{\alpha_1}^{\infty} + \int_{\alpha_1}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} d(2\alpha) - \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2} \Big|_{\gamma_1}^{\infty} + \int_{\gamma_1}^{\infty} \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} d(2\gamma) \right\} = \frac{\beta}{2}. \quad (9)$$

Інтеграл у рівнянні (9) представимо у вигляді

$$I = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - si(x),$$

де  $x = 2\alpha$ , або  $x = 2\gamma$ .

Отже остаточно ми можемо записати

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \pi - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\alpha_1} - \frac{\sin^2(\alpha_1 + \omega_0 \tau)}{\alpha_1 + \omega_0 \tau} - si(2\alpha_1) - si(2\alpha_1 + 2\omega_0 \tau) \right] = \frac{\beta}{2}, \quad (10)$$

де  $\gamma_1 = \alpha_1 + \omega_0 \tau$  і  $\alpha_1 = 0.5(\omega_{зр.в} - \omega_0)\tau$ .

Розв'язок трансцендентного рівняння (10) визначає точне значення верхньої граничної частоти. Аналогічно можна знайти і нижню частину  $\omega_{зр.н}$ .

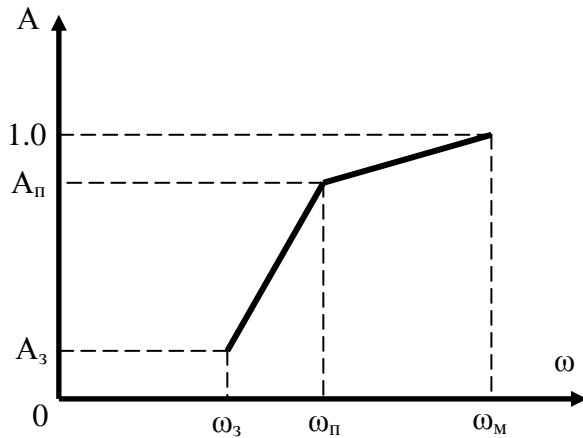


Рис. 2 Пусково-лінійний контур

Реальні фільтри найчастіше будують так, щоб їх частотні залежності коефіцієнта ослаблення описувалися або поліномами Баттерворта, або поліномами Чебишева. На жаль, при використанні таких залежностей аналітичне визначення смуги займаних частот приводить до надзвичайно громіздких виразів, з яких важко оцінити похибки вимірювань. Тому для спрощення математичних викладок частотну характеристику передачі фільтра за потужністю або обернену величину ослаблення  $h^{-1}(\omega)$  апроксимуємо кусково-лінійним контуром (рис. 2).

Вузли цього контуру визначаються за рівнями коефіцієнтів передачі  $A$  на частотах замирання  $\omega_з$ , пропускання  $\omega_п$  та мінімальної частоти  $\omega_м$ , при якій коефіцієнт передачі  $A$  практично досягає одиничного значення. Отже, вираз, що описує частотну передаточну функцію, має вигляд

$$A = h^{-1}(\omega) = \begin{cases} A_{01} + b_1 \omega & \text{при } \omega_з \leq \omega \leq \omega_п; \\ A_{02} + b_2 \omega & \text{при } \omega_п \leq \omega \leq \omega_м; \\ 1 & \text{при } \omega \geq \omega_м. \end{cases} \quad (11)$$

Сталі коефіцієнти виразів (11) обчислюються за відомими параметрами фільтра

$$\left. \begin{aligned} A_{01} &= \frac{A_з \omega_п - A_п \omega_з}{\omega_п - \omega_з}; \\ A_{02} &= \frac{A_п \omega_м - \omega_п}{\omega_м - \omega_п}; \\ b_1 &= \frac{A_п - A_з}{\omega_п - \omega_з}; \\ b_2 &= \frac{1 - A_п}{\omega_м - \omega_п}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Підставимо вирази (11) у формулу (3)

$$\frac{\tau}{4\pi} \left[ \int_{\omega_3}^{\omega_n} (A_{01} + b_1\omega) S_1^2(\omega) d\omega + \int_{\omega_n}^{\omega_m} (A_{02} + b_2\omega) S_1^2(\omega) d\omega + \int_{\omega_m}^{\infty} S_1^2(\omega) d\omega \right] = \frac{\beta}{2}, \quad (13)$$

$$\text{де } S_1(\omega) = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2},$$

$$\alpha = (\omega - \omega_o) \frac{\tau}{2} \text{ і } \gamma = (\omega + \omega_o) \frac{\tau}{2}.$$

Права частина рівняння (13) може бути представлена у вигляді десяти інтегралів, які за своєю суттю зводяться до трьох видів. Узагальнюючи ці види, запишемо перший з них так

$$I_1(U_1, U_2) = \int_{U_1}^{U_2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\sin^2 U_1}{U_1} - \frac{\sin^2 U_2}{U_2} + si2U_2 - si2U_1, \quad (16)$$

де  $U_1$  і  $U_2$  границі інтегрування.

З виразу (14) впливає значення нижньої границі  $U_1$  для змінної  $\alpha$

$$\alpha_1 = (\omega_3 - \omega_o) \frac{\tau}{2}.$$

З виразу (15) отримуємо нижню границю  $U_1$  для змінної  $\gamma$

$$\gamma_1 = (\omega_3 + \omega_o) \frac{\tau}{2}.$$

Верхня границя  $U_2$  для різних змінних отримує значення

$$\alpha_2 = (\omega_n - \omega_o) \frac{\tau}{2} \text{ і } \gamma_2 = (\omega_n - \omega_o) \frac{\tau}{2}.$$

Узагальнений другий інтеграл має вигляд

$$I_2(U_2, U_3) = \int_{U_2}^{U_3} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ \ln \frac{U_3}{U_2} + Ci(2U_3) - Ci(2U_2) \right], \quad (17)$$

де верхніми границями змінних  $\alpha$  і  $\gamma$  є

$$\alpha_3 = (\omega_m - \omega_o) \frac{\tau}{2} \text{ і } \gamma_3 = (\omega_m + \omega_o) \frac{\tau}{2}.$$

Третій інтеграл визначається як

$$I_3(U_3, \infty) = \int_{U_3}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin^2 U_3}{U_3} - si(2U_3). \quad (18)$$

Використовуючи введені інтеграли (16), (17) і (18), а також значення границь інтегралів, рівняння (13) запишемо у вигляді

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \begin{aligned} &(A_{01} + b_1\omega_o)I_1(\alpha_1, \alpha_2) + (A_{01} - b_1\omega_o)I_1(\gamma_1, \gamma_2) + (A_{02} + b_2\omega_o)I_1(\alpha_2, \alpha_3) + \\ &+ (A_{02} - b_2\omega_o)I_1(\gamma_2, \gamma_3) + b_1I_2(\alpha_1, \alpha_2) + b_2I_2(\alpha_2, \alpha_3) + b_1I_2(\gamma_1, \gamma_2) + \\ &+ b_2I_2(\gamma_2, \gamma_3) + I_3(\alpha_3, \infty) + I_3(\gamma_3, \infty) \end{aligned} \right] = \frac{\beta}{2}. \quad (19)$$

Оскільки характеристиками фільтра в процесі вимірювань практично не змінюються, то між частотами  $\omega_3$ ,  $\omega_n$  і  $\omega_m$  є однозначний для конкретного фільтра зв'язок. Це дає можливість всі граничні значення інтегралів виразити через одну частоту, наприклад, через частоту пропускання  $\omega_n$  і дві сталі величини  $c_1$  і  $c_2$ . Тоді  $\omega_3 = c_1\omega_n$  і  $\omega_m = c_2\omega_n$ . При цьому вираз (19) розглядати як функцію частоти  $\omega_n$ , що спрощує розрахунок похибки визначення ширини займаної смуги.

Вважаючи на те, що вирази (10) і (19) є трансцендентними, то похибку вимірювання ширини смуги знаходять з графіків, які будують, використовуючи ліві частини рівнянь (10) і (19). Очевидно, що значення похибки буде залежати від рівня  $\frac{\beta}{2}$  і сталих фільтра  $\omega_z$ ,  $\omega_n$  і  $\omega_m$ . Крім того значення похибки залежатиме і від форми сигналу. Наближено залежність похибки від форми сигналу можна дослідити, використовуючи обмежувальні лінії для різних класів випромінювання.

**Висновки.** В результаті аналізу прямого методу визначення ширини смуги займаних частот установлено, що фільтровому методу властива похибка, яка передусім визначається параметрами фільтра, тобто частотою замирання, частотою пропускання і амплітудно-частотною характеристикою (ослабленням) у смугі пропускання. Похибка вимірювань залежить також і від форми сигналу.

Запропонована методика дає можливість мінімізувати похибки вимірювань за допомогою порівняння результатів вимірювань або моделювання з результатами визначення ширини займаної смуги частот ідеальним фільтром. Крім того, використовуючи цю методику, можна уточнювати вимоги щодо смуги займаних частот при усуненні електромагнітної несумісності випромінювань, які створюються засобами, що працюють на суміжних частотах.

### Список літератури

1. Ільницький Л.Я., Сібрук Д.Л. Автоматичний вимірювач ширини смуги випромінювання/ Електроніка та системи управління, №3 (9) 2006, с.169-174.

Л. Я. Ильницкий, Д. Л. Сибрук

**Ошибка измерения полосы занимаемых частот, обусловленная реальной зависимостью ослабления фильтра от частоты**

Рассмотрено влияние параметров фильтра и формы сигнала на погрешность измерения ширины полосы излучения. Предложена методика, которая позволяет минимизировать погрешности измерения при помощи сравнения результатов измерения либо моделирования с результатами определения ширины занимаемой полосы частот идеальным фильтром.

L. I. Pnytsky, D. L. Sibruk

**Measurement error of bandwidth due to real frequency dependence of filter attenuation**

The influence of filter parameters and signal form on measurement error of bandwidth is considered. The proposed procedure permits to minimize the measurement error by comparison of measurement data with results of bandwidth definition with ideal filter.