МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Методичні рекомендації та завдання
до розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності 6.040301
«Прикладна математика»

Київ 2012

УДК 65.014.1: 004 (076.5)
ББК С 823.2 р
У677

Укладач: *П. Ф. Жук*

Рецензент: *В. О. Дубко*

*Затверджено на засіданні методично-редакційної ради Національного авіаційного університету (протокол № 5/10 від 17.04.2012 р.).*

**Диференціальні рівняння**: методичні рекомендації та завдання
**У677** до розрахунково-графічної роботи / уклад.: П. Ф. Жук. – К.: НАУ, 2012. – 15 с.

Методичні рекомендації містять основні вимоги до структури та змісту розрахунково-графічної роботи з дисципліни «Диференціальні рівняння», правила її оформлення. Наведено перелік завдань до розрахунково-графічної роботи.

Для студентів спеціальності 6.040301 «Прикладна математика».

# ЗМІСТ

## 1. ПЕРЕДМОВА

Курс «Диференціальні рівняння» є обов'язковим компонентом загальної та професійної освіти фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "Бакалавр" за напрямом 6.040301 "Прикладна математика". Значення цього курсу визначається насамперед тим, що диференціальні рівняння є математичним фундаментом науково-дослідницької діяльності та науково-технічного прогресу.

У результаті вивчення даної навчальної дисципліни студент повинен знати основні означення, теореми та методи теорії звичайних диференціальних рівнянь; принципи побудови на їх основі математичних моделей прикладних задач. Він повинен вміти використовувати сучасні методи теорії диференціальних рівнянь; самостійно формалізувати окремі прикладні задачі, зводити їх до типових задач та розв'язати; застосовувати основні математичні методи при розв'язанні практичних задач з використанням обчислювальної техніки і нормативної літератури.

Важливою складовою курсу «Диференціальні рівняння» є розрахунково-графічна робота (РГР). Вона виконується з метою закріплення та поглиблення теоретичних знань і набуття практичних навичок застосування звичайних диференціальних рівнянь при математичному моделюванні та дослідженні динамічних систем.

У результаті виконання розрахунково-графічної роботи студент повинен знати технології та методи математичного моделювання динамічних систем, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь, і програмні засоби комп'ютерної математики для інтегрування систем звичайних диференційних рівнянь. Він повинен вміти самостійно розробляти математичні моделі динамічних систем і проводити дослідження властивостей їх траєкторій з використанням програмних засобів комп'ютерної математики.

Час, потрібний для виконання розрахунково-графічної роботи, – до 10 годин самостійної роботи.

## 2. СТРУКТУРА ТА ЗМІСТ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Структура розрахунково-графічної роботи: титульна сторінка, зміст, вступ, основна частина, висновки, список літератури, додаток.

1. *Титульна сторінка*. Вона оформляється згідно з вимогами НАУ. Зверху – назва міністерства, навчального закладу і кафедри. Нижче – назва дисципліни і тема розрахунково-графічної роботи, ще нижче, праворуч, – прізвище, ім'я, по батькові студента, який виконав роботу, і викладача, який перевірив роботу. Внизу – рік написання розрахунково-графічної роботи.

2. *Зміст*. У ньому представлені назви пунктів і підпунктів плану розрахунково-графічної роботи. При цьому їх формулювання повинні точно відповідати змісту роботи, бути короткими, чіткими, послідовно і точно відображати її внутрішню логіку. Обов'язково вказуються сторінки, з яких починається кожен розділ роботи.

3. *Вступ*. Ця частина роботи містить обґрунтування актуальності теми та основні характеристики розрахунково-графічної роботи (проблема, об'єкт, предмет, мета, завдання та інші). Об'єм вступу складає 1 сторінки тексту.

4. *Основна частина* розрахунково-графічної роботи з курсу «Диференціальні рівняння» полягає у розробці та дослідженні математичної моделі певного процесу або системи (наприклад, механічної системи, популяції двох антагоністичних біологічних видів, електричних полів тощо) і обчисленні траєкторій цієї динамічної системи шляхом інтегрування системи звичайних диференційних рівнянь з використанням програмних засобів комп’ютерної математики.

Наведемо приклад основної частини розрахунково-графічної роботи на тему «Математичне моделювання подвійного маятника» [3, с. 19].

*а). Виведення диференціальних рівнянь подвійного маятника*

Подвійний маятник є системою з двох маятників – важкого (маси $m_1$) і легкого (маси $m_2$). Легкий маятник підвішений до важкого (див. рис. 1). Маси $m_1$ і $m_2$ вважатимемо за точкові, довжини ниток – однаковими $l_1 = l_2 = 1$, а кути $\alpha_1$ і $\alpha_2$ – малими.

За вказаних умов для подвійного маятника характерне так зване явище биття, що супроводжується циклічним обміном енергією між маятниками. Зовні картина коливань виглядає досить несподівано: без видимих причин один з маятників час від часу мимоволі зупиняється, а інший починає інтенсивно розгойдуватися. Подібні коливання можуть виникати при спуску на парашуті, при підйомі по мотузяних сходах і в інших ситуаціях.

Динаміка механічних систем описується законами Ньютона. За відсутності тертя вони приводять до системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, матричний запис яких має вигляд

$$M\ddot{X} + KX = 0, \tag{1}$$

де $M, K$ – постійні матриці розмірів $m \times m$.

Якщо, наприклад, мова йде про рух системи матеріальних тіл, то вектори $X$ і $\ddot{X}$ характеризують положення і прискорення цих тіл, а матриці $M$ і $K$ залежать від мас і сил. Загальний розв’язок системи (1) містить $n = 2m$ довільних сталих, для їх визначення необхідно знати $n$ початкових умов. Вигляд розв’язку визначається коренями $p_1, \ldots, p_n$ характеристичного рівняння, яке отримують, прирівнюючи до нуля визначника $\det\left(Mp^2 + K\right) = 0.$

Для консервативних коливальних систем (систем без тертя і втрат енергії) корені є чисто уявними $p_j = \pm i\omega_k$, де $i = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця. Додатні $\omega_1, \ldots, \omega_m$ називаються циклічними частотами системи. Таким кореням відповідає загальний розв’язок виду

$$X(t) = c_1 H_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \ldots + c_m H_m \cos(\omega_m t + \varphi_m), \tag{2}$$

де $c_j, \varphi_j$ – довільні сталі. Вектори $H_j$ задовольняють алгебраїчним рівнянням $\left(Mp_j^2 + K\right)H_j = 0$, які можна отримати підстановкою окремих компонент розв’язку (2) в систему (1).

Для виведення диференціальних рівнянь малих коливань подвійного маятника скористаємося законом збереження повної енергії $E$, згідно якому

$$E = E_k + E_n = const, \tag{3}$$

де $E_k$ і $E_n$ – кінетична і потенційна енергії відповідно.

Вираз для кінетичної енергії малих коливань має вигляд

$$E_k \approx \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}, \qquad (4)$$

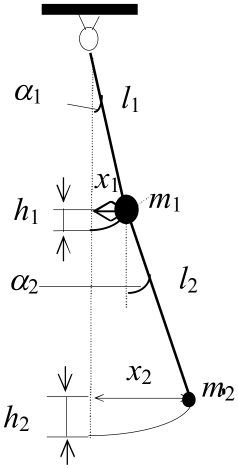

Рис 1. Подвійний маятник

де $x_1$ і $x_2$ – горизонтальні відхилення важкого і легкого маятників від положення рівноваги. Потенційна енергія визначається вертикальним відхиленням маятників $h_1$ и $h_2$:

$$E_n = m_1gh_1 + m_2gh_2 \approx$$

$$\approx \frac{g}{2l}\left[m_1x_1^2 + m_2x_1^2 + m_2(x_2 - x_1)^2\right]. \qquad (5)$$

Підставляючи вирази (4) і (5) в (3) і переходячи до матричної форми запису, отримуємо

$$E_n = 0{,}5\dot{X}^T M\dot{X} + 0{,}5X^T KX = const, \qquad (6)$$

де

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad K = \frac{g}{l}\begin{bmatrix} m_1 + 2m_2 & -m_2 \\ -m_2 & m_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

а знак $T$ означає транспонування.

Геометрично рівняння (6) задає деякий еліпсоїд в чотиривимірному просторі станів з координатами $x_1$, $x_2$, $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Розміри еліпсоїда пропорційні повній енергії маятника. Кожному стану маятника відповідає певна точка еліпсоїда, яка при коливаннях переміщається по деякій траєкторії, що лежать на його поверхні.

Щоб знайти рівняння такої траєкторії, продиференціюємо рівність (6) за часом:

$$\dot{X}^T M\ddot{X} + \dot{X}^T KX = \dot{X}^T(M\ddot{X} + KX) = 0. \qquad (7)$$

При диференціюванні ми скористалися наступною формулою:

$$\frac{d}{dt}Y^T MY = \dot{Y}^T MY + Y^T M\dot{Y} = 2\dot{Y}^T M\dot{Y}$$

Рівність (7) повинна виконуватися при будь-яких значеннях першого співмножника, тому другий співмножник повинен дорівнювати нулю: $M\ddot{X} + KX = 0$.

Ми знайшли систему диференціальних рівнянь, що описує рух подвійного маятника:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \frac{g}{l}\begin{bmatrix} m_1 + 2m_2 & -m_2 \\ -m_2 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Переходячи до скалярних рівнянь і вводячи позначення $\mu^2 = m_2 / m_1$, $k^2 = g / l$, остаточно отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + k^2(1+2\mu^2)x_1 - \mu^2 k^2 x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 - k^2 x_1 + k^2 x_2 = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

*б). Розв'язування диференціальних рівнянь подвійного маятника*

Рівняння (8) можна розв'язати аналітично, оскільки вони є лінійними однорідними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами. Для спрощення подальших обчислень покладемо $k = 1$ і вважатимемо, що $\mu << 1$. Тоді система рівнянь (8) набуває вигляду:

$$\ddot{X} + AX = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -\mu^2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Запишемо характеристичне рівняння цієї системи

$$\det\left(Ep^2 + A\right) = \det\begin{bmatrix} p^2+1 & -\mu^2 \\ -1 & p^2+1 \end{bmatrix} = (p^2+1)^2 - \mu^2 = 0.$$

Воно має 4 чисто уявних кореня $p_{1,2} = \pm i\omega_1$, $p_{3,4} = \pm i\omega_2$, де циклічні частоти $\omega_1$, $\omega_2$ визначаються рівністю

$$\omega_{1,2} = \sqrt{1 \pm \mu} \approx 1 \pm 0{,}5\mu.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд (2) при $m = 2$:

$$X(t) = c_1 H_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + c_2 H_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

де вектори $H_1$ і $H_2$ є власними векторами матриці $A$:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/\mu \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/\mu \end{bmatrix}.$$

Для визначення довільних сталих $c_1, \varphi_1, c_2, \varphi_2$ задамо початкові умови $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$, $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$. Підставляючи їх у вирази для $X$ і $\dot{X}$, отримуємо $\varphi_1=\varphi_2=0$, $c_1=c_2=0{,}5$. Остаточний вигляд розв'язку система рівнянь (8) такий:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0{,}5(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)=\cos(\mu t)\cos t, \\ x_2(t) &= (-0{,}5/\mu)(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t)=(1/\mu)\sin(\mu t)\sin t. \end{aligned} \tag{10}$$

У роботі потрібно побудувати графіки за формулами (10). При малих $\mu$ перший співмножник в цих формулах міняється значно повільніше ніж другий, що дозволяє розглядати його як огинаючу результуючого графіка. Тому при побудові графіка $x_1(t)$ зручно спочатку побудувати огинаючи $\pm\cos\mu t$, а потім заповнювати область між ними косинусоїдальним сигналом з періодом 2π. Аналогічно будується графік функції $x_2(t)$.

Графіки $x_1(t)$ і $x_2(t)$ мають екстремуми і нулі в точках, що кратні $\pi/2$, тому доцільно розрахувати їх значення для цих моментів і отримані дані звести в таблицю. Цією таблицею зручно користуватися і при побудові фазової траєкторії.

Графіками $x_1(t)$ і $x_2(t)$ є "швидкі" коливання з періодом $2\pi$, що модулюються "повільними коливаннями" з періодом $2\pi\mu$ і наочно описують явище биття, яке полягає в циклічному "перекачуванні" енергії від одного маятника до іншого.

Биття можна охарактеризувати трьома параметрами – періодом швидких коливань $\tau$, періодом повільних коливань $T$ і числом "швидких" коливань за період биття $n=T/\tau$.

Побудову графіка фазової траєкторії також зручно починати із знаходження його "огинаючої", тобто геометричної фігури, усередині якої він розташований. Для подвійного маятника такою фігурою є ромб з центром на початку координат. Щоб побудувати фазову траєкторію, слід спочатку намалювати цей ромб, а потім послідовно наносити точки $(x_1, x_2)$, які відповідають екстремумам і нулям функцій $x_1$ і $x_2$, та з'єднати їх плавною кривою, що вписана в ромб. Якщо відмовитися від спрощуючого припущення $\mu \ll 1$, то ромб перестане бути строго симетричним відносно координатних осей і прийме вигляд, що показаний на рис. 2.

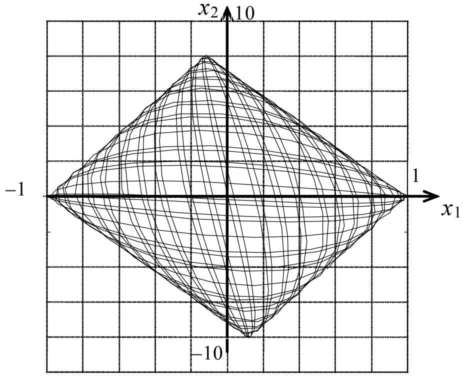


Рис. 2. Траєкторія в площині $x_1$, $x_2$

*в). Складання структурної схеми моделювання*

Для побудови такої схеми скористаємося методом пониження порядку похідних, застосовуючи його до кожного з рівнянь (8). Відповідно до цього методу припустимо, що нам відомі похідні другого порядку $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$. Пропускаючи кожну з них через ланцюжок з двох послідовно включених інтеграторів, отримаємо змінні $x_1$ і $x_2$. Після цього запишемо необхідні нам значення похідних другого порядку на основі рівності (8):

$$\ddot{x}_1 = -k^2(1+2\mu^2)x_1 + \mu^2 k^2 x_2, \quad \ddot{x}_2 = k^2 x_1 - k^2 x_2 .$$

В результаті отримуємо схему, показану на рис. 3.

Таким чином, схема моделювання подвійного маятника складається з двох чисто коливальних ланок з близькими власними частотами $k$ і $\nu k$ ($\nu^2 = 1+2\mu^2$), з'єднаних в "кільце". Ліва схема моделює коливання легкого маятника, права - важкого, взаємний вплив маятників враховується зв'язками між схемами (коефіцієнти $k^2$ і $\mu^2 k^2$). Початкові умови, показані на схемі, означають, що в перший момент важкий маятник відхиляють від положення рівноваги і без поштовху відпускають, легкий маятник при цьому має нульові значення швидкості і координати.

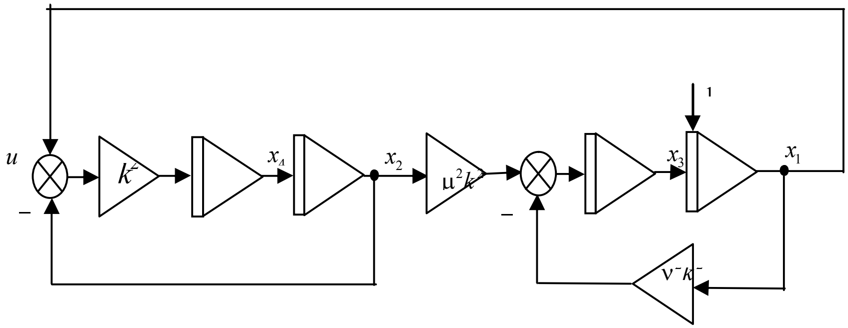


Рис. 3. Схема моделювання подвійного маятника

Використовуючи схему на рис. 3, легко отримати матриці, що описують подвійний маятник в просторі станів:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\nu^2k^2 & \mu^2k^2 & 0 & 0\\ k^2 & -k^2 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Введення вектора $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ дозволяє розглядати рух подвійного маятника за наявності управляючої дії, що прикладена до нижнього маятника.

*г). Комп'ютерне моделювання подвійного маятника*

При виконані РГР здійснюється комп'ютерне моделювання подвійного маятника в пакетах SIMULINK і MATLAB. Основою для моделювання є схема на рис. 3 і опис в просторі станів. Чисельні значення параметрів подвійного маятника приведені в таблиці варіантів. У ході моделювання необхідно знайти:

1. Математичний розв'язок системи рівнянь (8) при заданих значеннях параметрів $k$, $\mu^2$ для початкових умов:

$$x_1(0)=5,\ x_2(0)=0,\ \dot{x}_1(0)=0,\ \dot{x}_2(0)=0.$$

2. Чисельні значення параметрів $T$, $\tau$, $n$, таблицю і графіки функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$, графік фазової траєкторії $x_2=f(x_1)$. Графіки повинні відображати півтора – два періоди биття.

Для цього в пакеті SIMULINK необхідно виконати роздільне моделювання коливальних ланок (маятників) (рис. 3), без з'єднання їх між собою. Приймаючи $\nu = 1$, встановити нульові початкові умови. Подати на входи обох ланок одиничний вхідний сигнал і переконатися, що коливання на виходах ланок збігаються (напівперіод коливань повинен дорівнювати $\tau = \pi / k$). Далі, відключити одиничний сигнал, з'єднати ланки між собою "в кільце", згідно рис. 3, встановити початкові умови $x_1(0) = 1$. Спостерігати графіки сигналів $x_1(t)$, $x_2(t)$ і їх різниці. Порівняти експериментальні оцінки величин $T$, $\tau$, $n$ з їх теоретичними значеннями.

При моделюванні подвійного маятника в пакеті MATLAB використати опис в просторі станів. При $\nu = \mu$ фазова траєкторію $x_2 = f(x_1)$ на екрані повинна мати форму ромба. Встановлюючи коефіцієнт $\nu^2 = 1 + 2\mu^2$, спостерігаємо зміни фазового портрета ("перекіс" ромба). Знаходимо початкові умови, при яких обидва маятники гойдаються синхронно (синфазний і протифазний).

5. *Висновки* повинні бути оформлені у вигляді нумерованого списку і стисло відображати основні результати, отримані у ході виконання розрахунково-графічної роботи.

6. *Список літератури* складається в алфавітному порядку прізвищ авторів. У списку застосовується загальна нумерація літературних джерел, вказуються прізвище і ініціали автора, назва роботи, місце і рік видання, сторінки.

7. *Додаток* містить перелік особливостей програмного забезпечення, що було використане при виконанні розрахунково-графічної роботи.

## 3. ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Розрахунково-графічну роботу набирають на комп'ютері (через 1,5 інтервалу) з одного боку листа білого паперу формату А4 ($210 \times 297$ мм), шрифтом редактора Word: Times New Roman, pt 14, розміщуючи на сторінці 30 рядків (повний рядок повинен містити близько 65 знаків). Абзацний відступ повинен бути однаковим по всій роботі і дорівнювати приблизно 1,27 см.

Текст розрахунково-графічної роботи повинен бути надрукований з дотриманням таких полів: ліве – 25, праве – 15, верхнє – 20, нижнє – 20 мм.

Об'єм роботи повинен не перевищувати 10 сторінок.

Нумерацію сторінок, розділів, підрозділів, пунктів, підпунктів, малюнків, таблиць, формул подають арабськими цифрами без знаку №. Номер сторінки проставляють в правому верхньому кутку вибраним для тексту шрифтом на відстані 10 мм від верхнього і правого країв листа. Нумерувати сторінки починають зі вступу, враховуючи попередні сторінки: титульний лист і зміст.

Ілюстрації (фотографії, креслення, схеми, графіки) і таблиці необхідно подавати в роботі безпосередньо після тексту, де вони згадані вперше, або на наступній сторінці. Ілюстрації і таблиці, розміщені на окремих сторінках роботи, включають в загальну нумерацію сторінок.

## 4. ПЕРЕЛІК ЗАВДАНЬ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

1) Побудувати орбіту Луни в геліоцентричній системі відліку ([2, с. 12-21; 4, с. 4-13]).

2) Побудувати орбіту Марса в системі відліку, пов'язаній із Землею ([2, с. 26-30; 4, с. 13-21]).

3) Промоделювати рух у гравітаційному полі Землі з урахуванням сили тертя ([2, с. 32-36; 4, с. 56-62]).

4) Побудувати модель та перевірити другий закон Кеплера ([1, с. 105; 4, с. 72-80]).

5) Промоделювати рух планет у полі тяжіння небесних світил ([4, с. 63-71]).

6) Моделювання Сонячної системи ([2, с. 51-54; 4, с. 82-87]).

7) Промоделювати рух математичного маятника ([1, с. 172; 4, с. 205-212]).

8) Промоделювати вимушені коливання лінійного гармонійного осцилятора ([2, с. 267-272; 4, с. 213-215]).

9) Промоделювати динаміку біологічних популяцій (модель "хижак-жертва") ([2, с. 155-160]).

10) Моделювання електричного поля системи нерухомих зарядів ([2, с. 45-46; 4, с. 89-100]).

11) Моделювання магнітного поля витка з постійним струмом ([2, с. 50; 4, с. 100-107]).

12) Моделювання магнітного поля соленоїда з постійним струмом ([2, с. 205; 4, с. 107-120]).

13) Моделювання магнітного поля тороїдальної обмотки з постійним струмом ([2, с. 214; 4, с. 120-128]).

14) Промоделювати розсіювання частинок в центральному полі (експеримент Резерфорда) ([4, с. 147-162]).

15) Моделювання руху електричних зарядів в постійному магнітному полі ([4, с. 162-168]).

16) Моделювання руху електричних зарядів в постійних електричних і магнітних полях ([4, с. 168-173]).

17) Моделювання вільних коливань ланцюжка зв'язаних гармонійних осциляторів ([1, с. 301; 4, с. 216-224]).

18) Моделювання вимушених коливань ланцюжка зв'язаних гармонійних осциляторів ([1, с. 313; 4, с. 232-240]).

19) Моделювання ланцюгової реакції ядерного вибуху ([1, с. 158; 4, с. 45-49])

20) Промоделювати рух у гравітаційному полі Землі без урахуванням сили тертя ([2, с. 30-32; 4, с. 50-56]).

## 5. СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994. – 454 с.

2. Эдвардс Ч., Пенни Д. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2007. – 1104 с.

3. Мироновский Л.А. Моделирование линейных систем. – СПбГУАП, 2007. – 51 с.

4. Поршнев С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. - М.: Горячая линия - Телеком, 2003. - 592 с.

*Навчальне видання*

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Методичні рекомендації та завдання
до розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності 6.040301
«Прикладна математика»

Укладач:
ЖУК Петро Федорович

Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Коректори *В. В. Кулініч, І. М. Вихованець*
Комп'ютерна верстка *Н. В. Чорної*

Підп. до друку 20.04.12. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 1. Обл.-вид. арк. 3,0.
Тираж 100 прим. Замовлення № 118-1.

Видавець і виготовлювач
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Космонавта Комарова, 1.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 9