Загальні відомості про рішення задач оптимізації в пакеті Mathematica.

Рішення оптимізаційних задач

Рішення оптимізаційних завдань - одне з найбільш практичних додатків математичних розрахунків.Значимість завдань оптимізації породила велику кількість різних математичних методів.Можливості системи Mathematica тут досить обмежені: відсутні вбудовані функції реалізації багатьох з цих методів.Проте слід мати на увазі, що система Mathematica має великі можливості реалізації будь-яких методів шляхом програмування на її мові.Більш того, є можливість вирішувати завдання оптимізації в аналітичному вигляді.

Можливості системи Mathematica вирішувати завдання оптимізації за допомогою її вбудованих функцій обмежуються в основному наступними випадками:

□ пошук максимального і мінімального числа з безлічі чисел, представлених у вигляді векторів або матриць;

□ визначення локального мінімуму або максимуму аналітичної функції;

□ визначення глобального мінімуму або максимуму аналітичної функції, зокрема, рішення оптимізаційних завдань лінійного програмування.

Викладемо ці методи і наведемо приклади.

Пошук мінімального і максимального числа в переліку чисел

Завдання пошуку мінімального чи максимального числа формулюється наступним чином: дано числа, представлені у вигляді вектора або матриці; знайти мінімальне і максимальне числа.

На перший погляд здається, що це завдання занадто просте і великого сенсу не має. Але це тільки здається. Звичайно, шукати мінімальне або максимальне числа з сімейства чисел 1, 2, 3, 5, 7, 20, 8 сенсу немає, тому що рішення очевидне: максимальним є число 20, а мінімальним - 1. А якщо задані раціональні числа, наприклад, виду 2/3, 4/7, 17/21, 3/7, 121/164, 12/21 або виду невизначених функцій: sin1.5, cos2.5, $e^{0.25}$, 0.96^6 , ln3.2. Яке тут число є мінімальним, а яке максимальним?

Система Mathematica має такі функції визначення максимального і мінімального числа списку:

□ Max [x1, x2, ...] – повертає максимальне з чисел;

□ Max [{x1, x2, ...}, {y1, y2, ...}] – повертає максимальне з матриці чисел;

□ Min [x1, x2, ...] – повертає мінімальне з чисел

□ Min [{x1, x2, ...}, {y1, y2, ...}] – повертає мінімальне з матриці чисел.

Числа при цьому можуть бути цілими, раціональними, дійсними. Більше того, елементами списку можуть бути функції з чисельними значеннями аргументів. При цьому відгуком у багатьох випадках може бути число того ж типу, що й вихідні дані. Це ще раз підтверджує високу інтелектуальність системи.

Технологія пошуку чисел, що потрібно знайти, елементарна і полягає в наступному:

1. Введення списку чисел або функцій з присвоєнням йому унікального імені.

2. Введення функції пошуку максимального або мінімального числа.

3. Отримання рішення натисканням комбінації клавіш <Shift> + <Enter>.

Покажемо цю технологію на прикладах.

Приклад 1

Нехай необхідно визначити максимальні і мінімальні значення чисел вектора [1, 2.3, -1.7, 3, 4.2, 6.3, 0.25, -1.70001] і матриці {{1, 2, 3}, {0.5, 2.8, 7}, {4, -1, 3.2}}.

Рішення наведено на рис. 1.

Наведемо приклад, коли числа задані в раціональній формі та у вигляді функцій.

Приклад 2

Нехай необхідно визначити максимальні і мінімальні числа, представлені у вигляді наступних векторів:

[2/3, 3/4, 4/5, 4/3, 3/2, 5/4]

[Sin 1, sin 2, sin 0.5, sin 3.14, sin 8]

[$e^{-0.1}$, $e^{-0.6}$, 1/2.5, sin 1, cos 1, 0.6^5]

Рішення наведено на рис. 2

f1= {1, 2.3,-1. 7, 3, 4.2, 6.3, 0.25, -1.70001}

Max[f1]

{1,2 .3,-1. 7, 3,4.2, 6.3,0.2 5,-1.70001}

6.3

Min[f1]

-1.70001

f2={ {1,2,3}, {0.5,2. 8, 7} ,{4,-1,3.2}}

Max [f2]

{{1, 2,3},{0.5, 2.8,7},{4,-1,3.2}}

7

Min[f2]

-1

Рис. 1. Визначення максимальних і мінімальних чисел вектора і матриці

f3= {2/3,3/4,4/5,4/3,3/2,5/4}

Max[f3]

{[illegible]}

Min[f3]

f4={sin[1] ,sin[2] ,sin[0. 5] ,sin[3.14] ,sin[8] } Max [f4]

{sin [1] ,sin[2] ,0.47942 6,0 .00159265, sin[8] }

sin[8]

Min[f4]

0. 001592 65

f5={E^(-0.1) ,E^(-0. 6) ,1/2 .5 ,sin[1],cos[1],0.6^5}

Max [f5]

0.904837

Min[f5]

0.077776

N[f5]

{0.90483 7, 0.548812, 0.4, 0.841471, 0.5403 02, 0.07776}

Видно, що система видала шукані числа в раціональній формі, в якій вони і були задані у вигляді вектора.

У разі другого вектора система видала максимальне число у вигляді sin [8]. Вона не визначила значення синуса, так як аргумент заданий у вигляді цілого числа, при якому точне значення синуса не існує.

При визначенні шуканих чисел третього вектора система видала рішення в числовому вигляді, так як аргументи функцій представлені у дійсній формі. Однак при цьому елементи вектора, що відповідають отриманими значеннями шуканих чисел, нам невідомі. Довелося представити елементи вектора у вигляді чисел за допомогою функції N[f5]. Тепер видно, що максимальним являється елемент $e^{-0.1}$, а мінімальним 0.65.

<u>2. Класичний метод визначення екстремуму аналітичної функції</u>

У точці екстремуму (максимуму або мінімуму) похідна функції *y(x)* дорівнює нулю. Тоді координату *x* можна знайти, якщо вирішити рівняння *y'(x)*. Підставивши це значення *y* вихідну функцію, отримаємо координати точки максимуму (мінімуму).

Комп'ютерна технологія розв'язання задачі відшукання екстремуму функції, цим традиційним методом за допомогою системи Mathematica ,полягає в виконанні наступних процедур:

□ побудова графіка функції *y(x)* з метою встановлення наявності екстремумів функції *y(x)* і встановлення наближеного значення координат точок екстремуму;

□ визначення похідної *y'(x)* за допомогою вбудованої функції D[f, x];

□ визначення дійсних коренів рівняння *y'(x)*=0 за допомогою однієї з функцій системи;

□ обчислення значень функції *y(x)* при значені аргументів, що дорівнюють кореням рівняння.

Ця методика досить проста і очевидна. Однак при її практичній реалізації можуть виникнути труднощі з визначенням коренів рівняння *y'(x)* = 0. Тут можливі випадки, коли система Mathematica вирішує рівняння і видає всі корені, видає тільки один з декількох коренів або зовсім не вирішає рівняння. Складнощі виникають у тих випадках, коли рівняння $y'(x) = 0$ є трансцендентним.

Розглянемо технологію визначення екстремумів аналітичної функції на прикладах.

Приклад 3

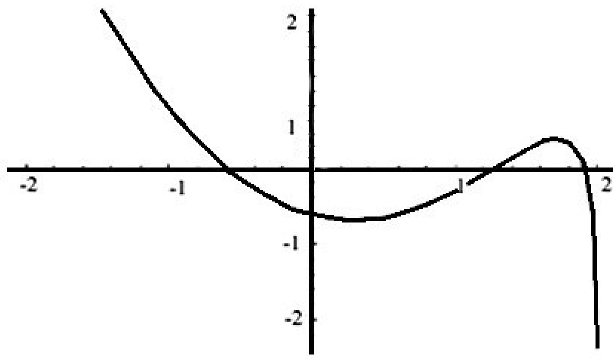
Визначити координати екстремальних точок функції

$$f = \ln(4-2x) + x^2-2.$$

Кількість екстремальних точок визначити по виду графіка функції, а корені похідної $f'(x)$ обчислити за допомогою функції NSolve [f == 0, x].

f=Log[4-2 x]+x^2-2

Plot[f,{x,-2,2}]



-2+x^2+Log[4-2x]

z=D[f,x]

NSolve[z=0,x]

{{x->1. 70711}, {x->0. 292893}}

f/.x->1.10711

0.379414

f/.x->0.292893

-0.686266

Видно, що функція має максимум і мінімум. При цьому система за допомогою функції NSolve [f == 0, x] знайшла абсциси точок екстремуму, визначивши два корені рівняння $f'(x) = 0$ за одну команду.

Обчисливши значення функції методом підстановки, одержимо наступні координати екстремальних точок: максимуму - [1.70711,0.379414], мінімуму – [0.292893, -0.686266].

Приклад 4

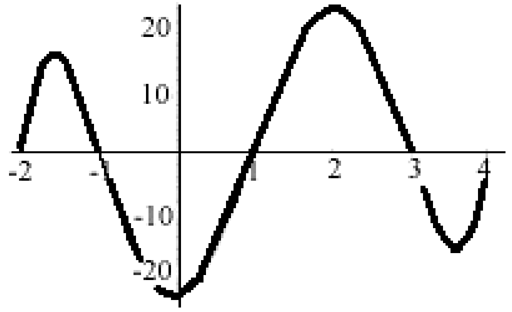
Необхідно визначити координати екстремальних точок функції:

$f=x^5-5x^4-3x^3+29x^2+2x$-24.

f=x^5-5x^4-3x^3+29x^2+2x-24

Plot[f,{x,-2,4}]

$-24+2x+29x^2-3x^3-5x^4+x^5$



y=D[f,x]

$2+58x-9x^2-20x^3+5x^4$

NSolve[y,x]

{{x->-1.59426},{x->-0.0343141},{x->2.03431},{x->3.59426}}

f/.x->-1.59426

16.0767

f/.x->-0.0343241

-24.0344

f/.x->2.03431

24.0344

f/.x->-3.59426

-16.0767

Видно, що, як і в попередньому прикладі, функція NSolve [f == 0, x] визначила всі корені рівняння f '(x) = 0 однією командою, суттєво полегшивши обчислення координат екстремальних точок. У таких випадках немає необхідності будувати графік даної функції f (x). Хіба тільки для контролю правильності визначення координат екстремальних точок.

У більшості випадків рівняння f '(x) = 0 є трансцендентним. У таких випадках функція NSolve [f '(x), x] не може відразу знайти всі корені рівняння. Доводиться застосовувати інші функції рішення рівнянь, що вимагають завдання найближчого значення x або навіть області ізоляції кореня.

Розглянемо такі приклади.

Приклад 7,5

Необхідно визначити координати екстремумів функції:

f (x) = (2^x-4x) • (3^x-9).

Рішення наведено на рис. 7.5. У даному випадку визначити корені рівняння

(3^x - 9x) (-4 + 2^xLog [2]) + (2^x-4x) (-9 +3^xLog [3]) = 0

за допомогою функції Solve [f, x] неможливо. Корені визначені за допомогою триразового застосування функції FindRoot [z, {x, x0}], де x0 - числове значення x поблизу екстремуму.

<u>7.2.1. Визначення координат точок перегину</u>

До особливих точках аналітичної функції відносяться також точки перегину. У цих точках друга похідна дорівнює нулю. Класичний метод визначення екстремальних точок (максимуму і мінімуму) дозволяє також визначити координати точок перегину. Відмінність полягає лише в тому, що доводиться шукати корені не першої, а другої похідної функції y (x). В іншому технологія визначення координат точок перегину не відрізняється від технології визначення координат точок максимуму і мінімуму.

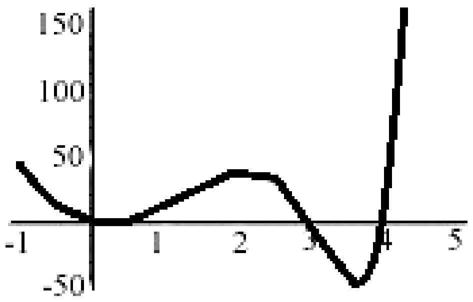
Покажемо технологію на прикладі.

Приклад 7,6

Необхідно визначити координати точок перегину функції, наведеної у прикладі 7.3.

f=(2^x-4 x) (3^x-9 x)

Plot[f,{x,-1,5}]



z=D[f,x]

$(3^x - 9x)$ $(-4 + 2^x\mathrm{Log}\,[2]) + (2^x - 4x)$ $(-9 + 3^x\mathrm{Log}[3]) = 0$

FindRoot[z,{x, 0.1}]

{x->0.218114}

FindRoot[z,{x, 2}]

{x->2.11009}

FindRoot[z,{x, 3.2}]

{x->3.65157}

f/.x->0.218114

-0,201278

f/.x->2.11009

-36,423

f/.x->3.65157

-45,6272

Рис. 7.5. Визначення координат екстремальних точок функції прикладу 7.5

f=Log[4-2 x]+x^2-2

z=D [f,{x, 2}]

$-2 + x^2 + \mathrm{Log}\,[4 - 2\,x]$

2-4/(4-2x)^2

NSolve [z, x]

{{ x->2 .70711}, {x->1.29289}}

f/ .x->2. 70711

5.67502 +3.14159 i

f/ .x->1. 29269

0.0181427

7.3. Пошук локального мінімуму аналітичної функції за допомогою вбудованих функцій системи Mathematica

Система Mathematica надає вбудовану функцію пошуку локального мінімуму аналітичної функції. Вона має вигляд:

FindMinimum [f (x), {x, x0}]

де:

f (x) - аналітична функція аргументу x;

x0 - значення аргументу поблизу локального мінімуму.

Функція FindMinimum [f (x), {x, x0}] знаходить координати всіх мінімумів функції f (x) шляхом її повторень стільки разів, скільки є локальних мінімумів. При цьому щоразу змінюється значення x0.

Технологія відшукання мінімуму функції проста і полягає у виконанні наступних дій:

1. Побудова графіка аналітичної функції f (x) з метою визначення кількості екстремальних точок і вибору значень x0.

2. Введення вбудованою функції FindMinimum [f (x), {x, x0}]

3. Отримання рішення шляхом натискання комбінації клавіш <Shift> + <Enter>.

Якщо аналітична функція має максимум, то технологія залишається колишньою. Необхідно лише змінити знак функції f (x) на зворотний, помноживши її на -1.

Розглянемо технологію визначення координат мінімуму аналітичної функції на прикладах.

Приклад 7,7

Необхідно визначити координати екстремумів наступної аналітичної функції:

x^4-13x^3 +35 x^2 +13 x-36.

Процедури вирішення задачі наведено на рис. 7.7.

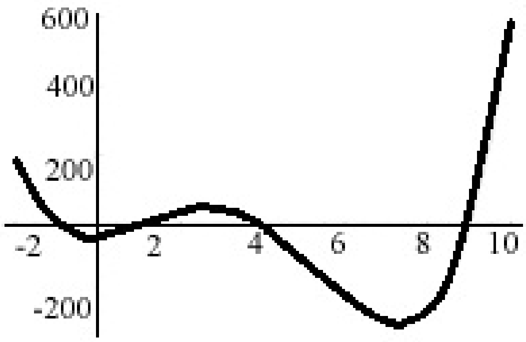
З рис. 7.7 видно, що координатами точок мінімуму і максимуму є: [-0,17, -37], [2.63, 51.64], [7.29, -293.36]. Слід мати на увазі, що ординату максимуму необхідно помножити на -1.

Цей метод порівняно з класичним має ту перевагу, що відгуком тут є координата мінімуму (x і y) і обчислення значень y не вимагається. Його недолік в тому, що він не дозволяє обчислити одночасно координати всіх екстремальних точок.

f= x^4-13 x^3+35 x^2+13 x-36

Plot[f,{x,-2,10}]

$-36+13x+35x^2-13x^3+x^4$



FindMinimum[f,{x,-0.5}]

{-37.1338, {x->-0.169441}}

FindMinimum[-f,{x, 2}]

{-51.6363, {x->2.63205}}

FindMinimum[f,{x, 7}]

{-293.358,{x->7.28739}}

Крім функції FindMinimum [f (x), {x, x0}] система Mathematica має наступні чотири функції, що дозволяють відшукати локальний мінімум аналітичної функції:

□ NMaximize [f, x] - шукає єдиний локальний максимум функції f (x);

□ NMinimize [f, x] - шукає єдиний локальний мінімум функції f (x);

□ NMaximize [{f, zxy}, {x, y,. . . }] - шукає локальний максимум функції f (x), визначений умовою z_{xy};

□ NMinimize [{f, zxy}, {x, y, ...}] - шукає локальний мінімум функції f (x), визначений умовою z_{xy}.

Технологія визначення локального максимуму (мінімуму) за допомогою приведених функцій практично не відрізняється від технології визначення локального мінімуму функцією FindMinimum [f (x), {x, x0}].

Наведемо приклади визначення екстремальних точок за допомогою цих функцій.

Приклад 7,8

Необхідно знайти координати максимуму (мінімуму) аналітичних функцій: xe-x +1, 3x - 9x + 3.

Спочатку побудуємо графік функції і визначимо, чи має функція екстремальні точку і яка вона (максимум або мінімум). По виду графіка виберемо вбудовану функцію. Рішення виконаємо в послідовності наведених функцій.

Видно, що в результаті рішення отримані координати екстремальних точок, відповідні графіками. При цьому функції NMaximize [f, x] і NMinimize [f, x] не вимагають завдання аргументу поблизу локального максимуму (мінімуму), як це було у випадку використання функції FindMinimum [f (x), {x, x0}].

Розглянемо тепер випадок, коли аналітична функція має кілька екстремумів.

Приклад 7,9

Необхідно визначити координати екстремальних точок наступних аналітичних функцій:

ln (5-3x) + x2 -3,

x5-5x4-4x3 +31 x2 + 2x-30.

Рішення наведено на рис 7.9. Обговоримо результати вирішення завдань.

При визначенні за допомогою функцій NMaximize [f, x], і NMinimize [f, x] координат екстремальних точок аналітичної функції, що має багато максимумів і мінімумів, виникає ряд проблем.

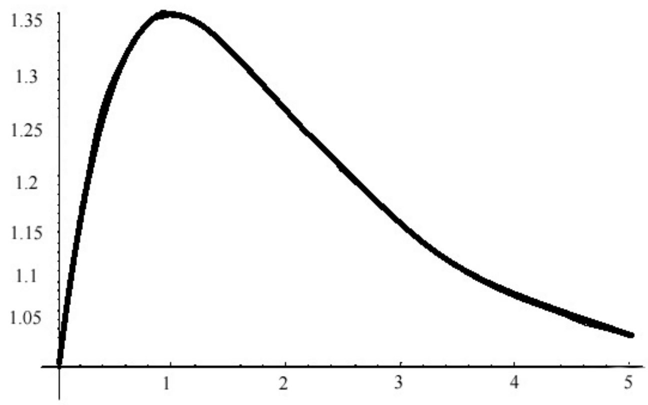
У нашому прикладі функції мають кілька екстремальних точок: перша функція містить один максимум і один мінімум, друга - два максимуми і два мінімуми. Вирішуючи перше завдання, система визначила координати мінімуму і не знайшла координат максимуму (рішення абсурдно). У другій функції система знайшла тільки один максимум і один мінімум, що знаходяться зліва у графіка. Визначити координати інших екстремумів не вдається. У цьому істотний недолік функцій NMaximize [f, x] і NMinimize [f, x].

Існують функції NMinimize [{f, zxy ...}, {x, y, ...}], NMinimize [{f, zxy ...}, {x, y, ...}]. Ці функції знаходять координати екстремальних точок аналітичних функцій багатьох аргументів при обмеженнях z_{xy} ....

f=x **Exp[-x]+1**

Plot[f,{x,0,5}]

$1+ e^{-x} x$



NMaximize [f ,x]

{1.36788,{x->1.}}

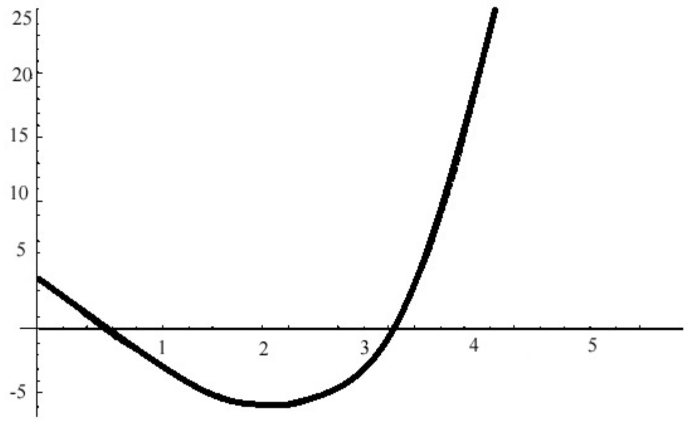
f1=3^x-9 x+3

Plot[f1,**{x,0,5}]**

$3+3^{X}- 9$ x

NMinimize [f1 ,x]

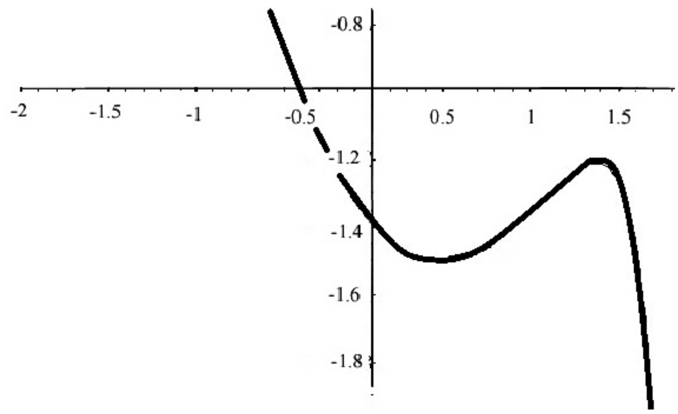
{-6.03739,{x->1.91439}}



f2=Log[5-3x]+x^2-3

Plot[f2,{x,-2,3}]

$-3+x^2+\mathrm{Log}[5-3x]$



NMaximize[f2,x]

$\{9.65572578174896 \times 10^{919}, \{x \to -9.82635526619558\times 10^{459}\}\}$

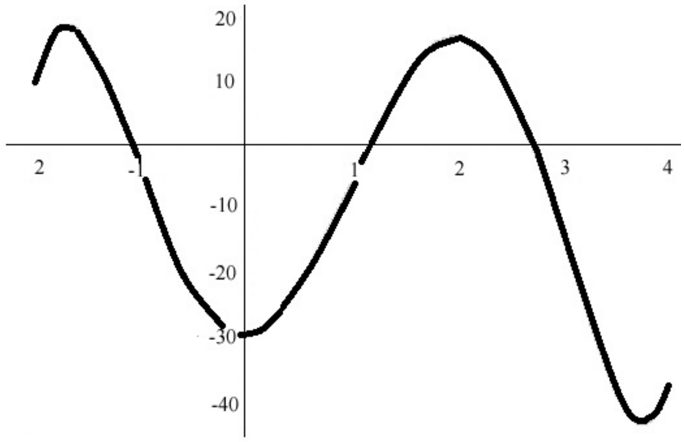
NMinimize [f2, x]

{-1.50504,{x->0.392375}}

f3=x^5-5 x^4-4 x^3+31 x^2+2 x-30

Plot[f3,{x,-2,4}]

$-30 + 2x + 31x^2 - 4x^3 - 5x^4 + x^5$



NMaximize[f3,x]

{19.8942,{x->-1.68837}}

NMinimize[f3 ,x]

{-30.0321,{x->-0.0320697}}

Наведемо приклади визначення координат функцій багатьох змінних, при обмеженнях на їх аргументи.

Приклад 7,10

Необхідно визначити координати точок максимуму і мінімуму наступних функцій:

$\sin x - e^{x+y}$, $x+y<1;$

$2^{x} - 4(x + y)$, $x + y<5;$

$4(x + y + z) - 2^{x+y}$, $x + y + z<7$.

У першої та другої функцій визначимо координати мінімуму, у третьої - максимуму.

NMinimize[{Sin[x]-Exp[x+y] ,x+y<1},{x,y}]

{-3.71828,{x→-1.5708,y→2.5708}}

NMinimize[{2^x-4 (x+y) ,x+y<5} ,{x,y}]

{-20., {x→-50.3938,y→55.3938}}

NMaximize [(4 (x+y+z)-2^ (x+y, x+y+z<7} , {x, y ,z}]

{28.,{x→1.13 548,y→-49.229, **z**→57.3645}}

7.4. Відшукання глобального максимуму (мінімуму) аналітичної функції

Завдання пошуку глобального максимуму (мінімуму) є завданням математичного програмування. Серед цих завдань найбільш часто доводиться вирішувати завдання лінійного програмування.

Завдання лінійного програмування формулюється таким чином. Задана наступна лінійна функція незалежних змінних x1, x2, ..., xn:

a1 x1 + a2 x2 + ... + an xn,

де a_i - числа, звані коефіцієнтами лінійної функції, i = 1,2, ..., п.

Відомо також кілька рівнянь і нерівностей з незалежними змінними які є x1, x2, ..., xn.

Такими рівняннями (нерівностями) можуть бути:

a1 x1 + a2 x2 + ... + an xn = b (a1x1 + a2x2 + ... + an xn ≤ b), x i ≥ 0, i = 1,2, ..., п і ряд інших.

Серед безлічі варіантів, що задовольняють умовам обмеження, необхідно знайти сукупність змінних x1, x2, ..., xn, при яких лінійна функція отримує максимальне (мінімальне) значення. Функція a1 x1 + a2 x2 + ... + an xn в теорії математичного програмування називається цільовою функцією, а сукупність рівностей і нерівностей - обмеженнями.

Сформульована задача лінійного програмування зустрічається на практиці дуже часто при вирішенні оптимізаційних завдань в техніці, управлінні, економіці.

Система Mathematica має вбудовані функції вирішення завдань математичного програмування. Ці функції мають вигляд:

ConstrainedMax [f, {0}, {x1, x2, ..., xn}]

ConstrainedMin [f, {0}, {x1, x2, ..., xn}]

LinearPrograming [c, m, b]

У цих функціях прийняті наступні позначення:

□ f - цільова функція;

□ Q-вектор обмежень;

□ X_i-шукані незалежні змінні;

□ з - мінімізована величина;

□ m - обмеження;

□ b - величина обмежень.

Функція ConstrainedMax [f, {0}, {x1, x2, ..., xn}] шукає глобальний максимум, тобто такі значення x_i, при яких виконуються всі обмеження Q, а цільова функція має максимальне значення.

Функція ConstrainedMin [f, {0}, {x1, x2, ..., xn}] шукає глобальний мінімум, тобто такі значення x_i, при яких виконуються всі обмеження о, а цільова функція має мінімальне значення.

Функція LinearPrograming [c, m, b] шукає вектор x. c при умовах m. x> = b, x> = 0.

Рішення такого складного завдання, як відшукання глобального максимуму (мінімуму), в системі Mathematica гранично просто:

1. Введення функції ConstrainedMax [f, {0}, {x1, x2, ..., xn}].

2. Отримання рішення шляхом натискання комбінації клавіш <Shift> + <Enter>.

Покажемо технологію відшукання глобального максимуму і мінімуму на конкретних прикладах.

Приклад 7,11

Існує три технології випуску деякої продукції. Для її виготовлення необхідно мати три види сировини. Кожна з технологій вимагає певної кількості сировини даного виду, яке мається в обмеженій кількості. Обсяг виробленого продукту залежить від технології виготовлення і відомий для кожної з технологій.

Необхідно знайти таку технологію, при якій обсяг випущеної продукції максимальний.

Вихідні дані виробництва наведено в табл. 7.1.

Таблиця 7.1. Вихідні дані виробництва

Спосіб виробництва	Потрібність в сировині (ум. од.)			Випуск продукції
	Першого виду	**Другого виду**	**Третього виду**	
1	2	3	2	30
2	**1**	2	3	22
3	2	**1**	**1**	24

Технологія виробництва допускає зміну способу виробництва протягом робочого дня.

7.4.1. Математичне формулювання задачі

Позначимо x1, x2, x3 - частки робочого часу, що витрачається на виробництво заданого об'єму готового продукту за умови забезпечення сировиною, відповідно, за першої, другої і третьої технологіях.

Обмеженнями при вирішенні цього завдання є:

$x1 \geq 0, x2 \geq 0, x3 \geq 0;$

$x1 + x2 + x3 \leq 1;$

$2x1 + x2 + 2 x3 \leq 2;$

$3x1 + 2x2 + x3 \leq 2;$

$2x1 + 3x2 + x3 \leq 2.$

Обговоримо прийняті обмеження.

Перше обмеження очевидне: долі робочого часу не можуть бути негативними.

Друге припущення означає, що сумарний робочий час не повинен перевищувати повного робочого дня.

Третє, четверте і п'яте допущення означають, що витрата сировини не повинна перевищувати ліміту (двійка для кожної сировини і технології).

При будь-якій технології буде випущено продукту

$30x1 + 22 x2 + 24 x3.$

Ця функція і є цільовою.

У результаті рішення задачі потрібно визначити значення x1, x2, x3 і максимальне значення випущеного продукту, тобто визначити оптимальну технологію виробництва.

У нашому випадку функція глобального максимуму буде мати вигляд:

ConstrainedMax [30 x1 +22 x2 +24 x3, {x1> = 0, x2> = 0, x3> = 0, 2 x1 + x2 + 2x3 <= 2, 3 x1 +2 x2 + x3, <= 2, 2 x1 + 3 x2 + x3, <= 2}, {x1, x2, x3}]

Рішення завдання наведено на рис. 7.11.

ConstrainedMax[30*x1+22*x2+24*x3,

{ x1>=0, x2>=0, x3>=0,

x1+x2+x3,<=1,

2 x1+ x2+ 2x3<=2,

3 x1+2 x2+x3<=2,

2 x1+3 x2+x3<=2},

{x1, x2, x3}]

{27, {x1→ [illegible], x2→0, x3→ [illegible]}}

Видно, що підприємством за зміну буде випущено 27 одиниць продукції по першій і третій технологіям. Випуску продукції по другій технології не повинно бути.

Класичною задачею лінійного програмування є транспортна задача. Наведемо і ми такий приклад.

приклад 7,12

Є чотири складу товарів і три їх споживача. Відома також кількість товарів на кожному складі, потреби кожного споживача, а також вартість доставки товару до кожного споживача.

Необхідно скласти оптимальний план перевезень, при якому сумарна вартість перевезень буде мінімальною.

Вихідні дані задачі наведені в табл. 7.2.

Таблиця 7.2. Дані про перевезення товарів зі складів до споживачів

	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	**Z_C**
C_1	2	4	1	9
C_2	4	1	2	7
C_3	2	3	2	7
C_4	1	2	3	7
Z_n	12	10	8	

У таблиці позначено:

□ С1, С2, С3, С4 - склади;

□ П1, П2, П3 - споживачі;

□ Zc - кількість товарів на складі;

□ Zn-кількість товарів, необхідних споживачу.

Цифри в таблиці означають вартість перевезень в умовних одиницях зі складу Сі, до споживача Пj, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3.

У даному випадку цільовою буде наступна функція:

2n11 +4 n12 + n13 +4 n21 + n22 +2 n23 + 2n31 + 3n32 + 2n33 + n41 +2 n42 +3 n43,

де nij - кількість товару, планованого для перевезення зі складу Сі, споживачеві Пj. Сформулюємо обмеження Q.

Оскільки числа не можуть бути негативними, то

n11 ≥ 0, n21 ≥ 0, ..., n42 ≥ 0, n43 ≥ 0.

Сумарна кількість продуктів на складах і потреби споживачів можна представити наступними рівняннями:

n11 + n12 + n13 = 9;

n21 + n22 + n23 = 7;

n31 + n32 + n33 = 7;

n41 + n42 + n43 = 7;

n11 + n21 + n31 + n41 = 12;

n12 + n22 + n32 + n42 = 10;

n13 + n23 + n33 + n43 = 8.

Сукупність нерівностей та цих рівнянь утворюють обмеження Q.

Завдання полягає в тому, щоб знайти такі значення nij цільової функції, при яких сумарні витрати на перевезення були б мінімальними. Скористаємося функцією ConstrainedMin [f, {0}, {x1, x2, ..., xn}].

ConstrainedMin [

2*n11+4*n12+1*n13+4*n21+1*n22+2*n23+

2*n31+3*n32+2*n33+1*n41+2*n42+3*n43,

{n11>=0 ,n12>=0,n13>=0, n21>=0 ,n22>=0 ,n23>=0,

n31>=0 ,n32>=0 ,n33>=o, n41>=0,n42>=0,n43>=0,

n11+n12+n13==9 ,n21+n22+n23==7, n31+n32+n33==7,

n41+n42+n43==7, n11+n21+n31+n41==12,

n12+n22+n32+n42==10, n13+n23+n33+n43==8} ,

{n11,n12 ,n13 ,n21 ,n22 ,n23 ,n31 ,n32 ,n3 3 ,

n41, n42,n43}]

{41, {n11→1,n12→0 ,n13→8,n21→0

,n22→7,n23→0

n31→4,n32→3,n33→0,n41→7,n42→0,n43→0} }

Видно, що всі товари зі складів доставлені споживачам. Однак далеко не всі споживачі отримали товари з причини високої вартості перевезень.