УДК 504.54(045) DOI: 10.30929/1995-0519.2021.4.104-109

СТІЙКІСТЬ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЕКОСИТЕМИ НА ПРИКЛАДІ ЕКОСИСТЕМИ СХИЛІВ

В. П. Петрусенко, Т. І. Дмитруха, С. М. Маджд, Л. М. Черняк, О. В. Лапань
Національний авіаційний університет
ORCID: 0000-0003-3120-9379; 0000-0001-5195-9519; 0000-0003-2857-894x; 0000-0003-4192-3955; 0000-0001-6509-4456

В даній статті розглянута математична модель динамічної екосистеми схилів на предмет перерозподілу радіонукліда Cs^{137} у ній. Для цього було складено математичний опис переносу забруднювача у вигляді системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами для обраної типової екосистеми. При створенні даної моделі за основу було взято метод камерних моделей переходу радіонуклідів із камери в камеру. Взаємодія між камерами у такому випадку задається за допомогою коефіцієнтів переходу радіонуклідів із камери в камеру за одиницю часу в одну годину. Проведений аналіз цієї системи на стійкість даної моделі. Чисельним методом визначений вплив параметрів системи на рівень радіаційного забруднення. У результаті проведеного дослідження показано, що для всіх додатних значень коефіцієнтів системи, вона залишається стійкою до збурення початкових умов. Таким чином, дана модель може виступати зручним інструментом для аналізу екологічних процесів у будь-якій екосистемі з наступним застосуванням певних контрзаходів.

Ключові слова: математична модель, екосистема, система диференціальних рівнянь, радіонуклід

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Задачі оцінки якості навколишнього середовища та управління у сфері природоохоронної діяльності вимагають комплексних знань та злагодженої роботи спеціалістів різних професійних напрямів [1]. Наприклад, задачі екології та екологічної експертизи проектів промислового розвитку певної території вирішуються великими експертними колективами, які включають екологів, технологів, управлінців, економістів і вимагають залучення до цього «вузьких» спеціалістів: математиків, фізиків, хіміків тощо [2].

У зв’язку з цим важливо не тільки побудувати або використати теоретичну модель адекватну певній ситуації, але і вміти створювати такий інструмент моделювання, який можна використовувати іншими користувачами та організаціями, застосовуючи певне методичне забезпечення [3]. Важливо не тільки описати або змоделювати явище або процес, але і вміти, використовуючи знання в цій області, створювати науково-дослідницький інструментарій, який розширює можливості спеціалістів із суміжних галузей знань, що працюють над комплексною екологічною проблемою [4].

Метод математичного моделювання забезпечує необхідний синтез знань про природне середовище, оскільки дає можливість застосувати моделі із фізики, хімії та математики тощо [5]. Частина інформації при моделюванні базується на основних положеннях цих галузей науки, а деяка інформація отримується шляхом аналізу та визначення характеристик моделі [6].

Однією із головних задач математичної екології є проблема стійкості екосистем. Екосистема стійка або «стабільна», якщо відносна чисельність представників різних видів протягом певного часу залишається незмінною або постійно повертається у її початковий стан [7].

Зі стійкістю екосистеми тісно пов’язані питання керування цими системами, оскільки вплив людини у функціонування екосистем повинен відбуватися таким чином, щоб це відбувалось з урахуванням рівноважного стану системи [8].

Метою даної роботи було проаналізувати математичну модель екосистеми схилів на стійкість при розподілі ланками екосистеми забруднювача Cs^{137} із застосуванням методу камерних моделей.

Моделювання екологічних процесів за допомогою цього методу активно розвивається в сучасній радіоекології. Цикл досліджень по моделюванню розподілу радіонуклідів у трофічних ланцюгах України був виконаний у лабораторіях В. Б. Георгієвського та у роботах інших вчених [9].

Для вирішення даного питання ставилися такі завдання:

- побудова моделі типової екосистеми схилів;
- визначення основних властивостей і характеристик даної екосистеми для визначення коефіцієнтів перерозподілу вибраного радіонукліда;
- створення математичного опису міграції Cs^{137} камерами екосистеми;
- перевірка математичної моделі на стійкість відносно збурення початкових умов;
- аналіз результатів та прийняття відповідних рішень.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Можна стверджувати, що характер поводження радіонуклідів, що утворилися при ядерних вибухах та інших техногенних аваріях, включилися в харчові ланцюги, визначається не тільки тим, скільки їх випало з повітря, але також і структурою екосистеми та особливостями біогеохімічних циклів, адже завдяки обмінним реакціям відбувається перерозподіл радіонукліда Cs^{137} між складовими екосистеми. Тому ля дослідження була обрана типова екосистема, характерна для Українського Полісся, що складається з дев'яти камер: камера-ліс, камера-узлісся, камера-лука, камера-тераса, камера-заплава, камера-вода, камера-біота, камера-донні камера-відкладення, камера-людина (рис. 1) [10].

Надходячи у навколишнє середовище, техногенні радіонукліди включаються до природних процесів масового енергообміну, які мають комплексний характер, охоплюючи усі природні компоненти, включаючи в себе водний, повітряний та біогенний перенос. Через це характер геохімічних умов та інтенсивність міграційних процесів залежать від структури і динаміки ландшафтів забрудненої території [11].

Цезій ^{137}Cs відноситься до розсіяних елементів. В незначних кількостях він міститься практично у всіх об’єктах зовнішнього середовища. Середній вміст нукліда у земній корі $3{,}7 \cdot 10^{-4}$ %, у ґрунті – $5 \cdot 10^{-5}$%. Цезій – постійний мікроелемент рослинних тваринних організмів: у живій фітомасі міститься у кількості $6 \cdot 10^{-6}$%, в організмі людини – $15 \cdot 10^{-4}$г. Цей нуклід потрапляє в основному з їжею в кількості 10 $^{мкг}/_{добу}$. Виводиться з організму переважно із сечею (в середньому 9 $^{мкг}/_{добу}$).

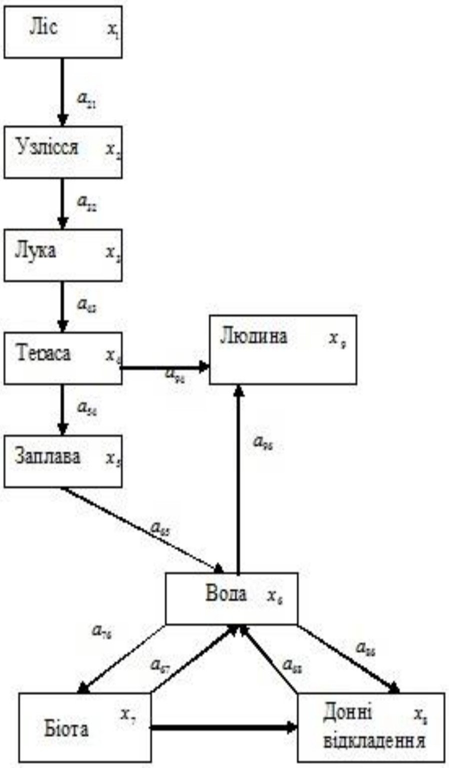

Рисунок 1 – Модель типової схилової екосистеми

Викид радіоактивного цезію в навколишнє середовище відбувається в основному в результаті випробувань ядерної зброї та аварій на підприємствах атомної енергетики. Надзвичайно складні ситуації виникають після аварій, коли у зовнішнє середовище потрапляє велика кількість радіонуклідів та забруднюються великі території. Основним джерелом потрапляння цезію ^{137}Cs для населення України – це молочні, м’ясні та зернові продукти. Вміст радіоактивного цезію в одному літрі коров’ячого молока досягає 0,8-1,1 % від добового потрапляння нукліда, козиного – 10-20 %. Але в основному він накопичується у м’язовій тканині тварин: в 1 кг м’яса корів, свиней та курей міститься 4, 20 та 26 % (відповідно) від добового потрапляння цезію. У білок куриних яєць потрапляє менше – 1,8-2,1 %. Ще у більших кількостях цезій накопичується у м’язових тканинах гідробіонтів: активність 1 кг прісноводної риби може перевищувати активність1 л води більше ніж у 1000 разів (у морських - нижче) [12].

В організм людини ^{137}Cs потрапляє переважно через органи дихання та травлення. Незалежно від шляхів потрапляння близько 80 % ^{137}Cs накопичується у м’язах, 8 % - у скелеті, інша частина відносно рівномірно розподіляється в інших тканинах. ^{137}Cs високотоксичний незалежно від шляхів потрапляння його в організм [13].

Для обраної екосистеми була створена математична модель опису переносу радіонуклідів у вигляді системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$. У цій системі функції $x_1(t), x_2(t), ..., x_9(t)$ виражають вміст радіонукліда у певній камері, t - час, A - матриця коефіцієнтів переносу забруднювача із камери у камеру.

Для зручності дану систему можна записати у вигляді:

Для складеної системи диференціальних рівнянь матриця коефіцієнтів має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{86} & a_{87} & a_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{94} & 0 & a_{96} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} = a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \\ \frac{dx_5}{dt} = a_{54}x_4 + a_{55}x_5, \\ \frac{dx_6}{dt} = a_{65}x_5 + a_{66}x_6 + a_{67}x_7 + a_{68}x_8, \\ \frac{dx_7}{dt} = a_{76}x_6 + a_{77}x_7, \\ \frac{dx_8}{dt} = a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8, \\ \frac{dx_9}{dt} = a_{94}x_4 + a_{96}x_6. \end{cases} \quad (2)$$

Коефіцієнти $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66}, a_{77}, a_{88}$ можна визначити за формулами:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= -\alpha - a_{21},\\
a_{22} &= -\alpha - a_{32},\\
a_{33} &= -\alpha - a_{43},\\
a_{44} &= -\alpha - a_{54} - a_{94},\\
a_{55} &= -\alpha - a_{65},\\
a_{66} &= -\alpha - a_{76} - a_{86} - a_{96},\\
a_{77} &= -\alpha - a_{87} - a_{67},\\
a_{88} &= -\alpha - a_{68}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

У даному випадку $\alpha = 0{,}3$ характеризує швидкість напіврозпаду радіонукліда ^{137}Cs. Дана система містить коефіцієнти, серед яких лише деякі з них є незалежними відповідно до зв'язків між камерами. Будемо називати їх параметрами системи та позначатимемо вектором $p = \{p_1, p_2, ..., p_{13}\}$, де $p_1 = \alpha$, $p_2 = a_{21}$, $p_3 = a_{32}$, $p_4 = a_{43}$, $p_5 = a_{54}$, $p_6 = a_{65}$, $p_7 = a_{76}$, $p_8 = a_{86}$, $p_9 = a_{96}$, $p_{10} = a_{87}$, $p_{11} = a_{67}$, $p_{12} = a_{68}$, $p_{13} = a_{94}$.

Ця система диференціальних рівнянь має такі особливості: перші п'ять рівнянь можна проінтрегрувати послідовно від першого до п'ятого. Наступні рівняння, що описують підсистему « вода – біота – донні відкладення» можна розв'язати, знайшовши $x_5(t)$. Тоді останнє рівняння можна розв'язати так:

$$x_9(t) = \int_0^t \left(a_{94}x_4(t) + a_{96}x_6(t)\right)dt + x_9(0). \tag{4}$$

Тому його доцільно розглядати окремо, а порядок системи можна понизити на одиницю. Тоді отримаємо

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= A'y,\\
\frac{dz}{dt} &= a_{94}y_4(t) + a_{96}y_6(t),
\end{aligned} \tag{5}
$$

Матриця A' отримана із матриці A, в якій викреслено останній рядок і останній стовпчик.

На основі експериментальних даних вибрані такі коефіцієнти матриці A' для обраної екосистеми.

Визначення параметрів системи диференціальних рівнянь, що описують міграцію радіонукліда ^{137}Cs у екосистемі схилів:

1) a_{21} – параметр, що характеризує швидкість переходу радіонукліда ^{137}Cs із камери *ліс* до камери *узлісся.*

Для визначення даного параметру були використані дані багаторічного моніторингу, який показав, що ліс може втрачати від 1 до 5% запасу радіонукліда за рік.

2) a_{32} – параметр, що характеризує швидкість переходу радіонукліда ^{137}Cs із камери *узлісся* до камери *лука.*

На основі натурних даних встановлено, ^{137}Cs з узлісся переноситься на луки у кількості 5-15% від запасу на узліссі. Збільшення цього параметра пов'язано з іншим характером покриття, крутизною схилу, характером стоку.

3) a_{43} – параметр, що характеризує швидкість переходу радіонукліда ^{137}Cs із камери *лука* до камери *тераса.*

Луки є зоною антропогенного впливу (випас тварин) і має відносно слабке покриття (трава), тому доля переносу радіонукліда ^{137}Cs за нашими оцінками буде складати від 10 до 20% від запасу на луках .

4) a_{54} – параметр, що характеризує швидкість переходу радіонукліда ^{137}Cs із камери *тераса* до камери *заплава.*

Сільськогосподарська тераса, яка отримує радіонукліди, - це зона активної аграрної діяльності, тому перенос перенос радіонуклідів до заплави вже буде трохи більшим і становитиме від 10 до 30% від запасу на терасі.

5) a_{94} – параметр, що характеризує швидкість переходу радіонукліда ^{137}Cs із камери *тераса* до камери *людина.*

$$A' = \left(\begin{array}{ccccc:ccc}
-0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0,3 & -1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1,5 & -6,3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2 & -3,3 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -12,3 & 0,5 & 0,7\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1,3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0,5 & -1
\end{array}\right) \tag{6}$$

Матриця A' невироджена, оскільки $\det A' = 183{,}3$. Тому маємо єдиний стаціонарний розв'язок системи $y(t) = \{0, 0, ..., 0\}$. Дослідимо на стійкість цей розв'язок. Для цього знайдемо власні числа матриці A'. За будовою матриці A' серед власних чисел будуть $\lambda_1 = a_{11},\ \lambda_2 = a_{22}, \dots, \lambda_5 = a_{55}$.

Для системи (5) цими числами є
$\lambda_1 = -0,6;\ \lambda_2 = -1,3;\ \lambda_3 = -1,8;\ \lambda_4 = -6,3;\ \lambda_5 = -3,3.$
Решту власних чисел знаходимо з рівняння

$$Det\begin{pmatrix} a_{66}-\lambda & a_{67} & a_{68}\\ a_{76} & a_{77}-\lambda & 0\\ a_{86} & a_{87} & a_{88}-\lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{7}$$

У розгорнутому вигляді наведений визначник є характеристичним многочленом третього степеня $P(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ з наступними коефіцієнтами: $a_3 = 1$, $a_2 = -(a_{66} + a_{77} + a_{88})$,

$$a_1 = \begin{vmatrix} a_{77} & 0 \\ a_{87} & a_{88} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{66} & a_{68} \\ a_{86} & a_{88} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{66} & a_{67} \\ a_{76} & a_{77} \end{vmatrix},$$

$$a_0 = -\begin{vmatrix} a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ a_{76} & a_{77} & 0 \\ a_{86} & a_{87} & a_{88} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, характеристичне рівняння підсистеми «вода – біота – донні відкладення» має вигляд:

$$\lambda^3 + 14,6\lambda^2 + 22,89\lambda + 6,28 = 0.$$

Розв'язавши дане кубічне рівняння, маємо решту власних чисел матриці A':

$$\lambda_6 = -12,86, \quad \lambda_7 = -1,39, \quad \lambda_8 = -0,35.$$

Отже, характеристичний многочлен має тільки від'ємні дійсні корені, що свідчить про стійкість нульового розв'язку системи по відношенню до збурення початкових умов (стійкість за Ляпуновим) і асимптотичну стійкість системи (1), тобто можна стверджувати, що $y_i(t) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} 0; \quad (i = 1,2,\ldots,8).$

Покажемо, що система (1) залишається асимптотично стійкою для довільних додатних параметрів.

Система (1) з додатними параметрами буде асимптотично стійкою, згідно з теоремою Гурвиця тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти многочлена $P(\lambda)$ задовольняють наступним нерівностям:

$$a_0 > 0, \; a_2 > 0, \; a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Чисельно було підраховано істинність даних співвідношень, що свідчить про те, що система (1) асимптотично стійка для довільних додатних параметрів.

Характер асимптотичного наближення розв'язків $y_i(t)$ до нуля залежить від значення найбільшого від'ємного характеристичного кореня (показника експоненти) $\lambda_{\max}$. Модуль цього значення є запасом стійкості. В розглянутому прикладі $\lambda_{\max} = \lambda_8 \approx -0,35$. Отже запас стійкості дорівнює 0, 35.

Зважаючи на те, що параметри екосистеми мають певну похибку і можуть змінюватися в деякому діапазоні, варто проаналізувати вплив параметрів системи на значення характеристичних чисел. Такий вплив можна характеризувати матрицею частинних похідних

$$\frac{D\lambda}{Dp} = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}\right) \; (i = 1,2,\ldots,8), \; (j = 2,\ldots,12). \qquad (8)$$

Ця матриця знайдена чисельним способом і має наступний вигляд:

$$\frac{D\lambda}{Dp} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,01 & -0,004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,02 & 0,01 & 0,004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,96 & 0,001 & -0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,96 & -0,74 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,43 & -0,55 & -0,02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & -0,46 & -0,05 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Як видно з цієї матриці, на значення характеристичного показника λ_8 впливають параметри $p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}$. Можна стверджувати, що збільшення параметра p_8 на $0,1$ зменшує запас стійкості на 0.04 (тобто на 0.1%), а збільшення решти параметрів зменшує λ_8. Наприклад, збільшення параметра $p_{10} = a_{87}$ (вплив біоти озера на донні відкладення) на $0,1$зменшує λ_8 на 7%.

Запишемо загальний розв'язок системи (1) з прийнятою матрицею A' і розв'язок задачі Коші для довільних початкових умов. Для цього знайдемо власні вектори матриці A', які відповідають знайденим характеристичним числам $\lambda_i \;\; i = 1,2,\ldots,8$, і утворимо матрицю *B* порядку 8, стовпцями якої є ці власні вектори:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,43 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,36 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,09 & 0,6 & 0,33 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,07 & 0,6 & 0,44 & -0,67 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,02 & 0 & 0,08 & -0,28 & 0,26 & 0,01 & 0,94 & -0,07 \\ -0,17 & 2,7 & -0,81 & 0,28 & -0,64 & -0,79 & -0,41 & -0,37 \\ -0,58 & -4,5 & -0,1 & 0,29 & -0,53 & 0,78 & -0,46 & -0,93 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Тоді загальний розв'язок в формі Коші має вигляд: $Y(t) = B\exp(B^{-1}A'Bt)B^{-1}Y_0$, де Y_0 – вектор стовпець початкових умов. Або, якщо позначити за матрицю

$D(t) = diag\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_8 t}\right) = B\exp(B^{-1}A'Bt)B^{-1}$, то отримаємо $Y(t) = D(t)Y_0$, з якого можна отримати розв'язок системи $\dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ для будь-яких початкових умов.

У даному варіанті моделі оцінюється надходження радіонуклідів до популяції людей через питну воду та продукцію харчування, що формує очікувану колективну дозу для людей. На графіку (рис. 2) представлена динаміка формування колективної дози у розмірності – відсотки від загального запасу радіонуклідів в екосистемі.

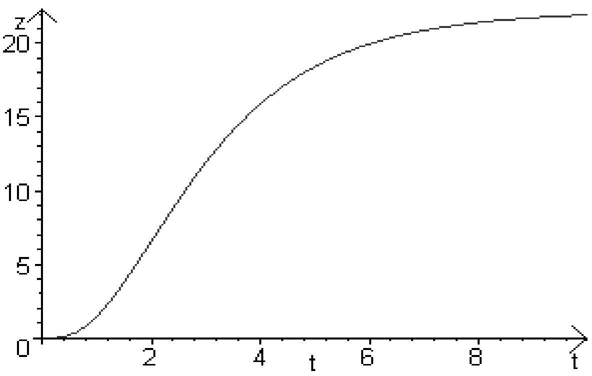

Рисунок 2 – Графік накопичення радіонуклідів для камери людина,
z – запас радіонуклідів (%), t – час (декади)

ВИСНОВКИ. Таким чином, моделювання екологічних процесів необхідне для прискорення пошуку оптимального режиму функціонування природних та техологічних систем, для зменшення ризиків викликати негативні зміни у функціонуванні екосистем. Разом з традиційними методами, які застосовуються в екології цей метод посідає важливе місце і дозволяє визначити не тільки кількісні та якісні показники природного середовища, але і надає можливість прогнозу протікання тих чи інших хімічних та фізико-хімічних процесів, що відбуваються з урахуванням різних параметрів певного впливу. У даній роботі показано, що розглянута модель екосистеми схилів є стійкою щодо збурення початкових умов. Експерементально визначено, що найбільший вплив на зменшення накопичення радіонукліда мають параметри $p_{11}(a_{67})$ та p_{12} (a_{68}), тобто активний взаємо обмін відбувається у водному середовищі біоти та донних відкладень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Petrusenko V. Estimation of ecological human health risks by influence of non-threshold toxicants. *Proceedings of the National Aviation University* . 2015. № 1(62) . P. 89 – 92.

2. Онишкевич В. М., Холявка В. З., Гапаляк Х. О. Математичне моделювання екологічних процесів за допомогою систем лінійних диференціальних рівнянь. *Науковий вісник НЛТУ України.* 2011. Вип. 21. 6. С. 330–334.

3. Бойко Т. В., Абрамова А. О., Запорожець Ю. А. Математичне моделювання міграції забруднюючих речовин у грунтах. *Східно-Європейський журнал передових технологій.* 2013. Том 6. № 4(66). С. 14–16.

4. Лаврик В. І., Скуратівська І. А. Математичне та імітаційне моделювання процесів процесів формування і регулювання поверхневого стоку промислових територій. *Вісник ЖТУ: Технічні науки.* 2004. №2 (29). С. 234–239.

5. Michel A, Hou L, Liu D. Stability of dynamical systems. Boston: Birkh auser, 2008. 515 p.

6. Michel A. N., Wang K., Hu B. Qualitative theory of dynamical systems. New York. Base: Marcel Dekker, 2001.707p.

7. Петрусенко В. П. , Шмаков І. П., Кутлахмедов Ю. А. Аналіз стійкості динамічної моделі екосистеми щодо міграції радіонуклідів. *Ядерна фізика та енергетика. Інститут ядерних досліджень.* Київ, 2008. №2. С. 73–77.

8. Самойленко В. М. Математичне моделювання в геоекології. Київ. ВПЦ «Київський університет». 2003. 233с.

9. Петрусенко В. П. Оцінка і прогноз розподілу радіонуклідів у типовій екосистемі схилів для ландшафтів України. *Вісник НАУ.* 2006. № 2. С.134–136.

10. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології. К.: Вид. дім «КМ Академія». 2002. 203с.

11. Дейна І. П., Козловська Т. Ф. Прогностична оцінка шкідливого впливу хімічних забруднювачів відходів на ґрунти урбоекосистеми. Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, 2006. № 6 (41). С. 36–43.

12. Петрусенко В. П. , Кутлахмедов Ю. А. Аналіз ефективності контрзаходів для захисту екосистем на схилових ландшафтах методом камерних моделей. *Вісник НАУ.* 2006. №4. С.163–165.

13. Петрусенко В. П., Кутлахмедов Ю. О., Дмитруха Т. І. Моделювання екологічних ризиків у гірських екосистемах через поведінку трасера (137) Cs. *Екологічна безпека.* Кременчук: КрНУ. Випуск 2/2016 (22). С. 84–88.

STABILITY OF ECOSYSTEM MATHEMATICAL MODEL ON THE EXAMPLE OF SLOPES ECOSYSTEM

V. Petrusenko, T. Dmitrukha, S. Madzhd, L. Chernyak, O. Lapan

National Aviation University

ORCID: 0000-0003-3120-9379; 0000-0001-5195-9519; 0000-0003-2857-894x; 0000-0003-4192-3955; 0000-0001-6509-4456

Purpose. Purpose of this work is to analyze the mathematical model of slopes ecosystem on stability while distributing the components of ecosystem pollutant ^{137}Cs with use of the compartment models method. To solve this task the following goals were set: to build the model of representative slopes ecosystem; to determine main characteristics of this ecosystem in purpose of assessment the distribution coefficient for this radionuclide; to create the mathematical description of ^{137}Cs migration with ecosystem compartments; to test the stability of mathematical model in setting of initial conditions disturbance; to analyze the results and make the relevant decisions. **Methods.** In this work the method of compartment models was used, which currently is being in active development stage in field of radiation biology. It consists in dividing the whole chain of radionuclides transfer into compartments (units). Interaction between the compartments is set up with radionuclide distribution and transfer coefficients. These coefficients define what fold is the activity of certain radionuclide can be higher (or lower) in the ecosystem components versus environment. **Results.** The conducted study showed that the mathematical model matrix describing radionuclide transfer is not degenerated, and this suggests the unity of stationary system decoupling. Matrix eigenvalues are negative. It means that system decoupling is stable against the initial conditions disturbance. It was calculated that stability reserve equals 0.35. **Originality.** Along with the conventional methods used in ecology, this method plays important role and allows determine quantitative and qualitative measurements of environment as well as it makes possible to predict the course of some chemical or physical-chemical processes with consideration of various parameters of certain impact. **Practical value.** Mathematical modeling of ecological processes is necessary to facilitate search of optimal operation mode for the natural and technological systems, to diminish risks of harmful changes in ecosystem performance, to develop and implement some countermeasures for ecosystems improvement. **Conclusions.** This model can serve as a multipurpose tool while ecological processes modeling not only in ^{137}Cs pollution but also with other radionuclides or heavy metals.

Key words: mathematical model, ecosystem, system of differential equations, radionuclide

REFERENCES

1. Petrusenko, V. (2015),. Estimation of ecological human health risks by influence of non-threshold toxicants. *Proceedings of the National Aviation University*, No. 1(62), pp. 89–92.

2. Onyshkevych, V. M., Kholiavka, V. Z., Hapaliak, Kh. O. (2011), Matematychne modeliuvannia ekolohichnykh protsesiv za dopomohoiu system liniinykh dyferentsialnykh rivnian [Mathematical modeling of ecological processes using systems of linear differential equations]. *Naukovyi visnyk NLTU Ukrainy*, issue 21.6, pp. 330–334 [in Ukrainian].

3. Boiko, T. V., Abramova, A. O., Zaporozhets, Yu. A. (2013), Matematychne modeliuvannia mihratsii zabrudniuiuchykh rechovyn u hruntakh. [Mathematical modeling of pollutant migration in the soils]. *Skhidno-Yevropeiskyi zhurnal peredovykh tekhnolohii*, volume 6, No. 4(66). pp. 14–16 [in Ukrainian].

4. Lavryk, V. I., Skurativska, I. A. (2004), Matematychne ta imitatsiine modeliuvannia protsesiv protsesiv formuvannia i rehuliuvannia poverkhnevoho stoku promyslovykh terytorii [Mathematical and simulation modeling of processes of formation and regulation of surface runoff of industrial territories]. *Visnyk ZhTU: Tekhnichni nauky*, No. 2 (29), pp. 234–239 [in Ukrainian].

5. Michel A, Hou L, Liu D (2008), Stability of dynamical systems. Boston: Birkh auser. 515 p.

6. Michel A. N., Wang K., Hu B. (2001). Qualitative theory of dynamical systems. New York. Base: Marcel Dekker, 707 p.

7. Petrusenko, V. P., Shmakov, I. P., Kutlakhmedov, Yu. A. (2008), Analiz stiikosti dynamichnoi modeli ekosystemy shchodo mihratsii radionuklidiv [Analysis of the stability of the dynamic model of the ecosystem for the migration of radionuclides]. *Yaderna fizyka ta energetyka. Instytut yadernykh doslidzhen (Nuclear physics and energy. Institute for Nuclear Research)*, Kyiv, No. 2. pp. 73–77 [in Ukrainian].

8. Lavryk, V. I. (2002), Metody matematychnoho modeliuvannia v ekolohii [Methods of mathematical modeling in ecology]. K.: Vyd. dim “KM Akademiia”, 203 p. [in Ukrainian].

9. Samoilenko, V. M. (2003), Matematychne modeliuvannia v heoekolohii [Mathematical modeling in geoecology]. *K.: VPTs “Kyivskyi universytet”*, 233 p. (in Ukrainian).

10. Petrusenko, V. P. (2006), Otsinka i prohnoz rozpodilu radionuklidiv u typovii ekosystemi skhyliv dlia landshaftiv Ukrainy [Estimation and forecast of radionuclide distribution in a typical slope ecosystem for landscapes of Ukraine]. *Visnyk NAU*, No. 2, pp. 134–136 [in Ukrainian].

11. Deina, I. P., Kozlovska, T. F. (2006), Prohnostychna otsinka shkidlyvoho vplyvu khimichnykh zabrudniuvachiv vidkhodiv na grunty urboeko systemy. [Prognostic assessment of the harmful effects of chemical waste pollutants on the soils of the urban ecosystem]. *Visnyk Kremenchutskoho natsionalnoho universytetu imeni Mykhaila Ostrohradskoho*, No. 6 (41), pp. 36–43 [in Ukrainian].

12. Petrusenko, V. P., Kutlakhmedov, Yu. A. (2006), Analiz efektyvnosti kontrzakhodiv dlia zakhystu ekosystem na skhylovykh landshaftakh metodom kamernykh modelei [Analysis of the effectiveness of countermeasures for the protection of ecosystems on sloping landscapes by the method of chamber models]. *Visnyk NAU*, No. 4, pp. 163–165 [in Ukrainian].

13. Petrusenko, V. P., Kutlakhmedov, Yu. O.,Dmytrukha T. I. (2016), Modeliuvannia ekolohichnykh ryzykiv u hirskykh ekosystemakh cherez povedinku trasera (137)Cs. [Modeling of ecological risks in mountain ecosystems due to (137) Cs tracer behavior]. *Ekolohichna bezpeka*. Kremenchuk: KrNU, issue 2/2016 (22), pp. 84–88 [in Ukrainian].

Стаття надійшла 10.08.2021.