

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

УДК 621.314:519.21

МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ  
СИСТЕМ ДІАГНОСТИКИ

Монографія

**Марченко Надія Борисівна  
Нечипорук Віталій Володимирович  
Нечипорук Олена Петрівна  
Пепа Юрій Володимирович**

Київ–2014

**ЗМІСТ**

Перелік основних умовних позначень, символів, скорочень.....	5
ВСТУП.....	9
<b>РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ ЕФЕКТИВНОГО ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ.....</b>	<b>13</b>
1.1. ІВС діагностики як складна технічна система.....	13
1.2. Основні методи та моделі аналізу функціонування ІВС діагностики .....	16
1.3. Основні властивості оцінок точності інформаційно-вимірювальних систем .....	20
1.4. Точність і достовірність оцінок в технічних вимірюваннях.....	22
<b>РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СУБГАУССОВИХ ПРОЦЕСІВ В ТЕОРІЇ ІВС.....</b>	<b>31</b>
2.1. Особливості використання субгауссових випадкових процесів в ІВС.....	31
2.2. Класи гільбертових та субгауссових процесів .....	33
2.3. Субгауссові випадкові величини та процеси, їх основні характеристики..	38
2.4. Методика перевірки процесу на субгауссовість при відомій твірній функції.....	44
2.5. Аналіз особливостей використання субгауссових випадкових процесів..	51
2.6. Аналіз точносних оцінок для лінійного субгауссового процесу.....	63
<b>РОЗДІЛ 3. АЛГОРИТМИ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ТОЧНОСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІВС НА ОСНОВІ СУБГАУССОВИХ ПРОЦЕСІВ.....</b>	<b>72</b>
3.1. Особливості статистичної обробки результатів вимірювання ІВС діагностики.....	72
3.2. Методи перевірки вібросигналів в інформаційно-вимірювальних системах діагностики на субгауссовість.....	75
3.3. Основні співвідношення для згладжування гістограм по Пірсону.....	79
	101

<b>РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ СИСТЕМ ДІАГНОСТИКИ НА ОСНОВІ СТАЦІОНАРИЗАЦІЇ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ІНФОРМАЦІЇ.....</b>	
4.1. Роль стаціонаризації при обробці вимірювальної інформації.....	101
4.2. Класи процесів.....	103
4.3. Вінеровські випадкові процеси.....	113
4.4. Пуассонівські випадкові процеси.....	124
4.5. Стаціонаризація кусково-однорідного процесу Пуассона.....	133
4.6. Методи стаціонаризації.....	134
4.6.1. Метод стаціонаризації за допомогою масштабних коефіцієнтів.....	134
4.6.2. Неперервна зміна масштабного коефіцієнта.....	135
<b>РОЗДІЛ 5. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕАЛІЗАЦІЙ КУСКОВО-СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ.....</b>	141
5.1. Сутність методів моделювання і область його застосування.....	141
5.2. Особливості імітаційного моделювання реалізацій процесу.....	151
5.3. Моделювання рівномірно розподілених величин .....	154
5.4. Моделювання випадкових величин із заданим законом розподілу.....	156
5.5. Моделювання реалізацій пуассонівських процесів.....	159
5.5.1. Моделі однорідних процесів Пуассона.....	160
5.5.2. Моделі кусково-однорідних процесів Пуассона.....	161
5.5.3. Точносні характеристики моделювання.....	162
5.5.4. Використання отриманих реалізацій пуассонівських процесів для перевірки методу масштабних коефіцієнтів.....	163
<b>РОЗДІЛ 6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ВІБРОДІАГНОСТИКИ.....</b>	165
6.1. Структура, особливості побудови та використання лабораторного зразка інформаційно-вимірювальних систем вібродіагностики.....	166
6.2. Експерименти з лабораторним макетом інформаційно-вимірювальних	

систем вібродіагностики.....	176
6.3. Особливості реєстрації досліджуваних вібросигналів .....	180
Висновки.....	191
Список використаних джерел.....	193
Додатки.....	200



**ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ,  
СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ**

$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$	ймовірнісний простір
$\Omega$	множина елементарних подій
$\omega$	елементарна подія
$A, B, C$	події
$\mathbf{P}(\cdot), \mathbf{P}\{\cdot\}$	ймовірність випадкової події або співвідношення ( $\mathbf{P}$ – ймовірнісна міра)
$\xi(\omega), \xi$	загальне позначення випадкової величини
$\xi(\omega, t), \xi(t)$	загальне позначення випадкового процесу
$\zeta(t)$	процес з незалежними (некорельованими) значеннями, білий шум
$\eta(t)$	випадковий процес з незалежними приростами
$\pi(t)$	однорідний процес Пуассона
$\pi_\lambda(t)$	неоднорідний процес Пуассона
$\Pi_n = (\pi_1(t), \dots, \pi_n(t)),$ $n = 1, 2, 3, \dots$	пуассонівський вектор-процес
$\lambda, \lambda(t)$	інтенсивність відмов
$\Lambda_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	вектор інтенсивностей
$K_n = (k_1, \dots, k_n)$	вектор масштабних множників
$T_n = (T_1, \dots, T_{n-1})$	вектор точок стиковки інтервалів
$\Xi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$	загальне позначення випадкового вектора
$t$	часовий аргумент процесу
$F(x)$	функція розподілу випадкової величини
$p(x)$	щільність розподілу випадкової величини
$f(u)$	характеристична функція випадкової величини
$\mathbf{D}[\cdot]$	оператор дисперсії

$\mathbf{M}[\cdot]$	оператор математичного сподівання
$I_{(A)}(t)$	індикаторна функція множини $A$
$R(t_1, t_2)$	кореляційна функція випадкового процесу
$R(\tau)$	кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу
$\alpha, \beta$	ймовірності похибок першого та другого роду відповідно
$H_0, H_1$	основна та альтернативна статистичні гіпотези
$\ x\ $	норма вектора $x$
$\mathbf{N}$ або $[\overline{1, \infty}]$	множина натуральних чисел
$\mathbf{Z}$ або $(\overline{-\infty, \infty})$	множина цілих чисел
$\mathbf{Z}_0$ або $[\overline{0, \infty}]$	множина невід'ємних цілих чисел
$\mathbf{R}$ або $(\overline{-\infty, \infty})$	множина дійсних чисел
$T$	інтервал часу, область визначення процесу, період
$f$	частота
$\delta_{nk}$	символ Кронекера
$[\overline{1, n}] = \{1, 2, \dots, n\}$	множина послідовних цілих чисел від 1 до $n$ включно
$B(t_1, t_2), B(\tau)$	коваріаційна функція
$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$	багатовимірна (скінченновимірна) функція розподілу випадкового процесу
$f(u)$	одновимірна характеристична функція
$f(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n)$	багатовимірна (скінченновимірна) характеристична функція випадкового процесу
$S(f)$	спектральна щільність стаціонарного випадкового процесу

$N(t)$	загальне позначення детермінованих сигналів
$\varphi(\tau), \varphi(\tau, t)$	імпульсна реакція лінійної системи
$K(\omega)$	операторна функція лінійної системи
$L_2(\Omega)$	гільбертовий простір випадкових величин і процесів
$\tau(\xi)$	субгауссовий стандарт
$Sub(\Omega)$	клас субгауссових величин
$S$	коефіцієнт субгауссовості
$Ssub(\Omega)$	клас строго субгауссових величин
АЦП	аналогово-цифровий перетворювач
ВВ	випадкова величина
ВЕС	вітрова електростанція
ВЕУ	вітроелектрична установка
ВС	вимірювальна система
ІВС	інформаційно-вимірювальна система
ІВТ	інформаційно-вимірювальна техніка
ІФ	індикаторна функція
ІС	інформаційний сигнал
КОП	кусково-однорідний процес
КСП	кусково-стаціонарний процес
ЛВП	лінійний випадковий процес
ЛПВП	лінійний періодичний випадковий процес
МК	масштабний коефіцієнт
ПЕОМ	промислова електроннообчислювальна машина
ПЗ	програмне забезпечення
ПП	процес Пуассона
ППП	пакет прикладних програм
ППМ	процес, що характеризується параметрами положення та масштабу

САК	система автоматичного контролю
СКВ	середньоквадратичне відхилення
СТД	система технічної діагностики
СПП	стохастично-періодичний процес
ТО	технічне обладнання

## ВСТУП

Інформаційно-вимірювальні системи (ІВС) широко використовуються в складі різних сучасних технічних комплексів і служать для здійснення функцій контролю, діагностики та керування. На вхід такої системи надходить інформація від датчиків, яка за своєю фізичною природою може бути стаціонарною або нестаціонарною. З задачею обробки випадкових сигналів явної фізичної нестаціонарності часто мають справу в радіотехніці, акустиці, теорії надійності.

Успішна обробка інформаційних сигналів такого виду можлива лише за наявності досконалої математичної моделі досліджуваного процесу. Проте розробка математичної моделі яка б враховувала нестаціонарність загального виду неможлива, тобто задача аналізу нестаціонарного сигналу про який нічого невідомо не може бути поставлена. Тому обробка нестаціонарного сигналу, зареєстрованого датчиками ІВС, починається з дослідження класу процесів, які при відомому характері нестаціонарності можна стаціонаризувати та вибору математичного апарату, який за даних умов забезпечив би можливість здійснювати обробку інформаційних сигналів нестаціонарної природи відомими класичними статистичними методами.

З проблемою обробки нестаціонарної інформації часто стикаються в задачах теорії надійності, яка описана в 1 розділі. Особливо гостро це питання постає в останні роки в зв'язку із значним періодом експлуатації, наприклад, технічного обладнання (ТО) енергетичної галузі та високою вартістю обладнання. Надзвичайно актуальною така задача є і для авіаційної галузі, оскільки наслідки відмов можуть мати трагічні наслідки не лише для пасажирів повітряного судна. В цьому плані також можна виділити електротехнічне обладнання чи системи газопостачання до яких ставляться вимоги безперебійного постачання електроенергії чи газу, техніку зв'язку, медичну техніку діагностики захворювань людини та ін.

Для забезпечення ефективної роботи ІВС діагностики, в першу чергу були проведені наукові дослідження спрямовані на обґрунтування математичних

моделей, які б узгоджувалися із властивостями об'єктів дослідження та розв'язуваними задачами. Це в першу чергу стосується нових математичних моделей до яких в певній мірі можна віднести модель субгауссових процесів, які розглядаються в 2 розділі.

На практиці при проведенні вимірювань зустрічаємося з проблемою, коли апріорно не відомі статистичні характеристики результатів окремих вимірювань, наприклад: функція розподілу, щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсія тощо. Це в свою чергу не дає можливості побудувати оцінку достовірності та точності отримуваних результатів вимірювання. Для подолання цих труднощів використовують різного типу нерівності, що характеризують достовірність при заданій точності. Такого типу нерівності часто мають місце не для окремих функцій розподілу, а для деякого класу величин і процесів. На сьогоднішній день широко відомі і успішно використовуються кілька нерівностей такого типу. Найбільш поширеними в класі процесів із скінченною дисперсією (гільбертових) є нерівність Чебишева та різні її форми. Нерівності такого типу дають змогу в більшій або меншій мірі отримати межі точносних характеристик при використанні стохастичних моделей.

Апріорна інформація про те, що процес є субгауссовим, дає можливість в цьому класі більш точно оцінити результат вимірювань при меншій затраті матеріальних та часових ресурсів. Слід одразу зауважити, що в роботі не йде мова про підвищення точності того чи іншого конкретного вимірювання чи якоїсь конкретної системи. Як буде показано в роботі, модель субгауссових процесів в ряді випадків дозволяє покращити оцінки точності, які дає нерівність Чебишева при обробці результатів вимірювання та в методі перевірки стохастичних гіпотез. Таким чином виникає задача розробки методів і відповідних алгоритмів оцінювання точносних характеристик ІВС на базі моделей субгауссових процесів, яка розглядається у розділі 3.

Одним із методів підвищення точності технічного обладнання є його технічна діагностика з використанням сучасних ІВС на базі ЕОМ, що

розглядається у розділі 4. Використання потужних ЕОМ докорінно змінило уявлення про роль і структуру ІВС. Зараз ІВС діагностики являють собою апаратно-програмний комплекс, функціонально об'єднаних в логічні структури засобів, які не лише призначені для збору інформації, контролю і діагностування, а і являють собою потужну базу по обробці інформації, її зберіганню та прийняттю рішення (керування об'єктом). А це в свою чергу ставить підвищені вимоги до програмного забезпечення подібних систем і математичного забезпечення, що покладено в його основу.

Проблему надійності намагаються вирішити на всіх етапах життєвого циклу об'єкта, таких як проектування, розробка та експлуатація. Вона базується на математичному апараті теорії ймовірностей та математичної статистики, що досяг значного розвитку в другій половині минулого століття і який є основою сучасного апарату теорії надійності.

Особливо актуальною задачею загальної проблеми надійності є задача контролю показників надійності виробів, що працюють в нестационарних режимах. Тобто виробів, які або тривалий час перебувають в експлуатації і знаходяться на межі повного використання технічного ресурсу (в умовах, що склалися на даний час в Україні такими є більшість об'єктів енергетичного комплексу) або експлуатуються в умовах змінних вібраційних та ударних навантажень, різких перепадів температури чи не стабільного значення номінальної напруги.

В більшості випадків обробку зафіксованої статистики здійснюють базуючись на припущенні про стаціонарність отриманої інформації. Подібне припущення часто приймається без належного обґрунтування, що ставить під сумнів результати такого аналізу. Подібний підхід неприйнятний без належного доведення того, що зменшення обсягу діагностичної інформації суттєво не вплине на результати аналізу. Однак практичні дослідження показують, що найбільш інформативними є якраз нестационарні режими.

5 розділ присвячений імітаційному моделюванню деяких класів процесів які допускають застосування при їх статистичній обробці класичних методів і

дозволяють застосовувати до їх модифікацій класичні ергодичні теореми. В ньому наведено основні обчислювальні процедури та алгоритми, що використовувалися автором при проведенні імітаційного моделювання з метою перевірки шляхом статистичного експерименту запропонованої математичної моделі кусково-однорідного процесу Пуассона та методики стаціонаризації його приростів.

В 6 розділі наводиться інформація, що стосується побудови, структури, особливостей та принципів роботи лабораторного зразка ІВС статистичної вібродіагностики. Крім того, тут проаналізовано основні види похибок, які виникають під час виміру та при обробці інформаційних сигналів. Розглянуто основні елементи методики практичного застосування лабораторного макета ІВС вібродіагностики вузлів вітроелектричних агрегатів.



## **РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ ЕФЕКТИВНОГО ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ТА НАДІЙНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ**

### **1.1. ІВС діагностики як складна технічна система**

Метою діагностики технічного стану ТО є підвищення його надійності протягом життєвого циклу. Для досягнення цієї мети проводяться розробки інформаційно-вимірювальних систем які дозволяли б з визначеною точністю здійснювати одержання ІС, їх обробку, включаючи попередню фільтрацію, передачу, зберігання та формування у зручній для користувача (оператора) формі остаточної інформації про стан діагностуємого об'єкта.

Вік комп'ютерних технологій, розвиток нових технологій таких як нанотехніка, досягнення кібернетики та обчислювальної техніки не могли не накласти свій відбиток і на сучасні ІВС діагностики, що викликає потребу корінного перегляду основних засад їх побудови та використання, а також нових розробок в цьому напрямку.

Багато речей які увійшли в класичні наукові праці, підручники, документи, наукові звіти в зв'язку з широким розвитком в останні роки комп'ютерної техніки і її небувалими масштабами поширення стали або не актуальними або не ефективними. Тому більшість означень, які увійшли до довідників, енциклопедій та класичних підручників з теорії та практичного використання ІВС тепер потребують уточнень. Це в першу чергу стосується теорії кодування, аналізу похибок, передачі числових кодів, похибок засобів вимірювання (особливо коли мова йде про вимірювальні системи), “точного” значення вимірюваної величини, наукових меж і багатьох термінів ІВС діагностики та ін. Поділ похибок в загальному плані на адитивні та мультиплікативні і низка інших понять потребують негайного уточнення.

Останнім часом роль програмного забезпечення в сучасних комп'ютеризованих ІВС діагностики виходить на перший план. Це в свою

чергу ставить підвищені вимоги до математичного апарата, який лежить в основі побудови таких діагностичних систем.

Тому в роботі реалізовувалося прагнення максимально використати нові можливості побудови сучасних ІВС з врахуванням нових сучасних розробок в галузі математики та комп'ютерної техніки і програмного забезпечення.

Постало питання з'ясувати, що ж на сьогодні слід розуміти під словами інформаційно-вимірвальна система діагностики і взагалі, що таке ІВС.

Огляд наукових робіт, включаючи ДСТУ, показав, що існує декілька означень ІВС, які наведені у різних публікаціях, ці означення досить різні. Наведемо деякі з них. Так, наприклад, в [1] визначення ІВС наступне:

*ІВС – “пристрій з автоматичним вимірюванням, управлінням і обробкою інформації по деякому алгоритму”.*

В [2]: *ІВС – “системи, призначені для автоматичного отримання кількісної інформації безпосередньо від об'єкту, що вивчається шляхом процедур вимірювання та контролю, обробки цієї інформації та видачі її у вигляді сукупності іменованих чисел, графіків і т.п., що відображають стан даного об'єкту”.*

*ІВС – “сукупність засобів вимірвальної техніки, засобів контролю, діагностування та інших технічних засобів, об'єднаних для створення сигналів вимірвальної та інших видів інформації”* таке означення ІВС пропонується в ДСТУ [3].

На нашу думку найбільш близьке до функціонального призначення, можливостей і структури ІВС діагностики означення наведено в [4]:

**Означення** . *“Інформаційно-вимірвальна система” – апаратно-програмний комплекс функціонально об'єднаних засобів вимірвальної техніки (ВТ), обчислювальних і інших технічних засобів для отримання вимірвальної інформації, її перетворення і обробки з метою здійснення функцій контролю, діагностики, ідентифікації і відображення.*

Кожне із наведених означень в деякій мірі доповнює одне одного, але має і деякі неточності. Наприклад, ІВС є не обов'язково автоматичною

системою, як сказано в [1, 2] не розкрито призначення ІВС. Вживання терміну “сукупність” в означенні ІВС [3, 4], на нашу думку теж є не зовсім вдалим.

ІВС мають сприймати від датчиків, встановлених на об'єктах, що діагностуються, величини чи процеси, а на їх виході має отримуватися кількісна інформація (і тільки інформація) про об'єкт, що досліджується; ІВС суттєво відрізняються від інших інформаційних систем та систем автоматичного керування. Згідно з [5] системи обчислювальні, зв'язку та управління можуть отримувати на вході інформацію від інших систем (в тому числі і від ІВС). Інформація, що отримується на виході ІВС, використовується для прийняття певних рішень, проте питання використання інформації звичайно лежить поза межами роботи і функцій ІВС.

Таким чином, ІВС – *поняття узагальнююче*. Під ним розуміють клас засобів інформаційно-вимірювальної техніки (ІВТ), що об'єднує системи вимірювання, контролю, технічної діагностики та розпізнавання.

ІВС знаходять застосування повсюди, де необхідне автоматичне (і не тільки) отримання дослідним шляхом кількісної інформації про стан досліджуваних об'єктів, причому це отримання пов'язано з виконанням масових операцій та здійсненням вимірювань у складній формі, що недоступно локальним вимірювальним приладам. Як приклад ІВС можна навести: системи діагностики, системи автоматизованого контролю, системи моніторингу, слідкуючі системи, тощо.

Виходячи з вище сказаного, забезпечення надійності ТО нерозривно пов'язане з своєчасним проведенням контролю і діагностики його технічного стану. ІВС діагностики ТО, як правило, базуються на вібраційних методах. Огляд систем вібродіагностики вітчизняного та зарубіжного виробництва [6] показує, що подібні ІВС діагностики створювалися в основному для систем спеціального призначення, що пояснюється значними економічними витратами на створення подібних ІВС.

## 1.2. Основні методи та моделі аналізу функціонування ІВС діагностики

Діагностика має на меті підвищення надійності шляхом неперервного чи в певні моменти часу збору інформації від об'єкта, що діагностується та певного її фізичного та математичного аналізу.

Для ефективного діагностування того чи іншого вузла ТО потрібно мати добре розвинені математичні методи, які дозволяють з необхідною точністю здійснювати обробку на ЕОМ експериментальних даних, що надходять від датчиків ІВС діагностики. При цьому математичні методи, які застосовуються при обробці отриманих даних розрізняють на детерміновані та стохастичні, останні є більш загальні.

В першому випадку в якості вихідної математичної моделі сигналу, що надходить від датчиків діагностичної системи, вибирається детермінована функція. Діагностика з використанням детермінованих методів зводиться до теоретичного визначення та обґрунтування можливих діагностичних ознак і їх порівняння з результатами аналізу експериментальних даних. Якщо результати аналізу експериментальних даних значно відрізняються від отриманих теоретично, то робиться висновок про наявність дефекту (несправності) у діагностованому вузлі. Детерміновані методи можна використовувати у випадках коли однотипні результати всіх спостережень при реалізації одного і того ж комплексу умов повторюються з допустимою точністю, а також коли вимірюється один і той же діагностичний параметр в одних і тих же умовах і спостерігається повторюваність результатів. Це значить, що при використанні детермінованих методів нема необхідності проводити багаторазові вимірювання оскільки всі вони апріорно вважаються однаковими. Така ситуація не прийнятна у випадку коли при незмінних початкових фізико-технічних умовах експерименту спостерігаються різні результати, і виникає проблема, а що ж є насправді, що взяти за результат вимірювань.

Таким чином детерміновані методи є частинним випадком стохастичних

методів в умовах повної відсутності дисперсії результатів вимірювань при незмінних початкових умовах експерименту.

Оскільки часто результати вимірювань за своєю природою мають випадковий характер, то використання детермінованих методів не можна вважати задовільними і аргументованими.

При використанні стохастичних методів проведення діагностики в самій постановці задачі допускаються відхилення окремих результатів вимірювань одного від іншого, але і вони вважаються теж точними, якщо гарантується певна ймовірність неправильних рішень про технічний стан діагностованого об'єкта чи його окремого вузла, і є можливість шляхом статистичної обробки отримувати стійкі в ймовірнісному плані результати оцінювання. При цьому завжди є не нульова ймовірність прийняття неправильних рішень.

Крім того стохастичні методи дозволяють по серії результатів вимірювального експерименту рекомендувати алгоритм по якому вираховується найкраще у ймовірнісному сенсі наближення вимірюваного (досліджуваного) параметра до його значення, якщо таке значення єдине і існує.

Безпосередній зв'язок із задачею діагностики має задача прогнозу залишкового ресурсу, що реалізується за допомогою статистичних методів. Що на відміну від детермінованого підходу значно розширює можливості діагностики та залишковий технічний ресурс.

Класифікувати стохастичні методи діагностики, що зустрічаються на практиці можна наступним чином рис. 1.1.

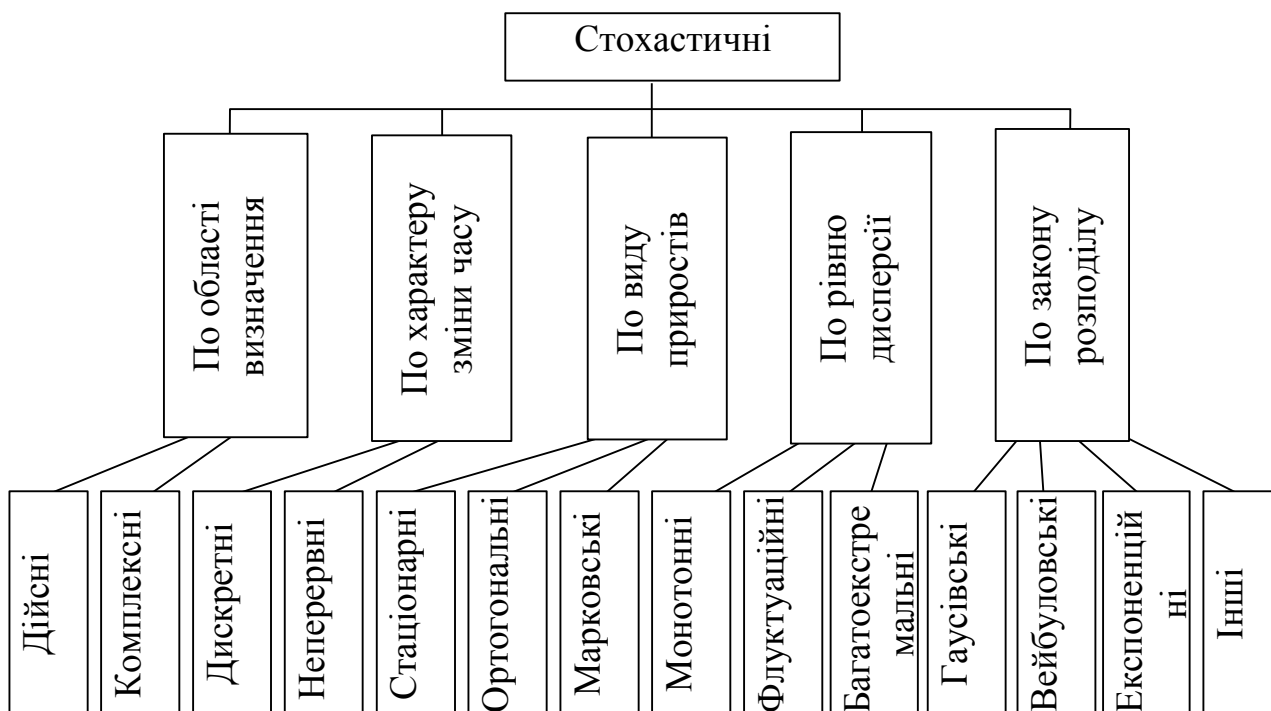


Рис.1.1. Класифікація стохастичних методів

При стохастичному підході діагностика базується на відповідним шляхом вибраній ймовірнісній моделі. Модель відіграє основну роль при встановленні діагностичних ознак. Від того наскільки зроблено вдало її вибір і наскільки добре вона узгоджена і підтверджується експериментальними даними, в значній мірі залежить як успіх діагностики так і її практична цінність. До моделі та її параметрів висуваються такі вимоги:

- параметри моделі повинні мати просту фізичну трактовку;
- параметри моделі повинні легко обраховуватися при заданій теоретичній моделі;
- модель повинна забезпечувати потрібну точність;
- мати достатню інформативність.

В якості діагностичних параметрів можуть виступати:

- кореляційна функція;
- спектральна щільність потужності;
- коефіцієнти кореляції, асиметрії, ексцесу;
- моменти, кумулянти, а також емпіричні одновимірні та багатовимірні

функції розподілу.

При цьому в якості математичних моделей функціонування об'єктів діагностики при стохастичному підході найчастіше вибирають процеси Пуассона і Гауса. На рис. 1.2 наведено найчастіше використовувані моделі діагностичного сигналу.

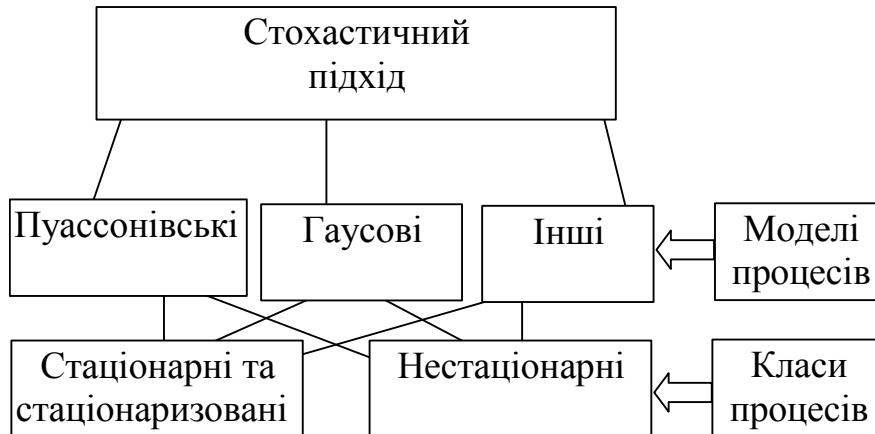


Рис. 1.2. Моделі в залежності від виду і характеру вхідних процесів при стохастичному підході

Назви моделей походять від типу законів розподілу, які при її використанні покладені в основу. В практичних задачах найчастіше використовуються наступні щільності розподілу: щільність розподілу Гауса, щільність розподілу Вейбулла, щільність розподілу Релея, щільність розподілу Ерланга, щільність рівномірного розподілу, щільність показникового розподілу, щільність розподілу арксинуса. Детально типи щільності проаналізовано в другому розділі в рамках дослідження класів процесів, що характеризуються параметрами положення і масштабу.

### **1.3. Основні властивості оцінок точності інформаційно-вимірювальних систем**

Сучасна інформаційна техніка – науковий напрямок досліджень технічної кібернетики – дисципліни, що вивчає загальні закономірності процесів доцільного управління, отримання та перетворення інформації в технічному обладнанні [7, 8].

На основі використання інформаційної техніки розв’язується велика кількість задач, пов’язаних головним чином з отриманням, переробкою, передачею, зберіганням, пошуком та видаванням різноманітної інформації людині чи системі.

Згідно з основними функціями інформаційної техніки [8, 9] виділяють наступні її галузі: інформаційно-вимірювальна техніка (ІВТ), обчислювальна техніка, техніка передачі інформації, техніка зберігання та пошуку інформації. Кожна з цих основних галузей інформаційної техніки має свої особливості, принципи побудови технічного обладнання. В той же час вони об’єднуються загальними теоретичними основами.

Зауважимо, що згідно ДСТУ 2681-94 [10] вимірювання – це відображення вимірюваних величин їх значеннями шляхом експерименту та обчислень за допомогою спеціальних технічних засобів. В процесі вимірювання отримується чисельне співвідношення між вимірюваною величиною і деяким її значенням, прийнятим за одиницю вимірювання, яке часто реалізується на практиці за допомогою різного виду компараторів.

Найголовнішим питанням будь-яких вимірювань є питання про їх точність [8, 9, 11]. Точність засобу або методу вимірювання є головним його метрологічним показником і характеризує його власну якість. При виборі та призначенні засобів і методів контролю якості продукції в першу чергу враховують їх точність на рівні з економічністю і продуктивністю. Ступінь точності вимірювань характеризується величиною їх похибки.



Перед вимірювальною технікою стоїть проблема створення нових засобів, здатних звільнити людину від необхідності збору та обробки інтенсивних потоків вимірювальної інформації. Розв'язування цієї проблеми привело до появи нового класу засобів вимірювання – вимірювальних систем (ВС), призначених для автоматичного збору та обробки вимірювальної інформації. Згідно ДСТУ 2681-94 [10] вимірювальна система – це сукупність вимірювальних каналів, вимірювальних пристроїв та інших технічних засобів, об'єднаних для створення сигналів вимірювальної інформації про декілька вимірюваних фізичних величин.

Аналогічним був розвиток інших засобів ІВТ, що привів до необхідності створення крім ВС також систем автоматичного контролю (САК), технічної діагностики (СТД), розпізнавання (РС).

Сукупність перерахованих вище систем отримала назву інформаційно-вимірювальних систем (ІВС). Під ІВС розуміють системи, призначені для автоматичного отримання кількісної інформації безпосередньо від об'єкту, що вивчається шляхом процедур вимірювання та контролю, обробки цієї інформації та видачі її у вигляді сукупності іменованих чисел, графіків і т.п., що відображають стан даного об'єкту [8, 9, 10].

ІВС мають сприймати величини чи процеси, що вивчаються, безпосередньо від об'єкту, а на їх виході має отримуватися кількісна інформація (і тільки інформація) про об'єкт, що досліджується; ІВС суттєво відрізняються від інших інформаційних систем та систем автоматичного керування. Згідно з [10] системи обчислювальні, зв'язку та управління можуть отримувати на вході інформацію від інших систем (в тому числі і від ІВС). Інформація, що отримується на виході ІВС, використовується для прийняття певних рішень, проте питання використання інформації звичайно лежить поза межами роботи і функцій ІВС.

Слід зауважити, що в даній роботі, як це загально прийнято, під поняттям вимірювальної інформації слід розуміти: інформацію про вимірювані величини

та залежності між ними у вигляді сукупності їх значень [10]. Саме поняття інформації дуже переобтяжене, наприклад, розрізняють інформацію по Шенону, Хартлі, Фішеру тощо. В роботі поняття інформації вживається в широкому сенсі, в інших випадках це буде додатково обумовлено в тексті.

В ДСТУ 2681-94 [10] наведено наступне означення: ІВС – сукупність засобів вимірювальної техніки, засобів контролю, діагностування та інших технічних засобів, об'єднаних для створення сигналів вимірювальної та інших видів інформації.

Таким чином, ІВС – поняття узагальнююче. Під ним розуміють [8, 9, 10] клас засобів ІВТ, що об'єднує системи вимірювання, контролю, технічної діагностики та розпізнавання.

ІВС знаходять застосування повсюди, де необхідне автоматичне отримання дослідним шляхом кількісної інформації про стан досліджуваних об'єктів, причому це отримання пов'язано з виконанням масових операцій та здійсненням вимірювань у складній формі, що недоступно локальним вимірювальним приладам. Як приклад ІВС можна навести: системи діагностики, системи автоматизованого контролю, тощо.

#### **1.4. Точність і достовірність оцінок в технічних вимірюваннях**

В багатьох наукових працях [8, 12] на першому місці при аналізі роботи систем як правило виникає питання взаємозв'язку і функціонування окремих ланок, вузлів, їх технічної реалізації, способів накопичення та зберігання результатів вимірювання тощо. Однак, часто другорядна роль відводиться визначенню точності окремих вимірювань метрології отримання оцінок та питанням про їх достовірність і точність. В ряді робіт [9, 10, 12] вказується, що нехтування розглядом питань точності та достовірності може призвести до повної неможливості відтворення параметрів вимірюваних об'єктів. Тобто може звести нанівець всі зусилля, спрямовані на реалізацію технічних питань,

які розглядаються на етапах проектування та розробки ІВС. В данній роботі прийнято *стохастичний підхід*, як найбільш повний, що базується на теоретичних основах математичної статистики. Він включає в себе детермінований підхід, який, як відомо, часто зручно розглядати як вироджений (частинний) випадок стохастичного підходу.

Перш за все щоб глибше проаналізувати задачу, яка є основною в роботі, зупинимось на деяких роботах, що стосуються опису та термінології в теорії вимірювань, оцінювання та похибок. Це потрібно зробити тому, що, як показав огляд літератури, з цих питань існує багато розбіжностей між держстандартами та математичною і технічною літературою. Стандарти часто не повністю охоплюють важливі терміни та питання з теорії оцінювання точності результатів вимірювання. Особливо це стосується методів оцінювання точності обробки стохастичних даних. А так як в роботі аналізуються *методичні похибки*, то коротко зупинимось на вимірювальних експериментах та деяких термінах.

Як вказується у роботах [10, 12], одна з перших задач, яка підлягає розв'язуванню за допомогою математичної статистики, полягає в отриманні статистичних оцінок законів розподілу та їх характеристик.

Як відомо [13], всяка задача вимірювання починається з отримання послідовності результатів вимірювального експерименту, яку будемо позначати

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}. \quad (1.1)$$

Ця послідовність зветься *вибіркою*, а натуральне число  $n$  - *обсягом вибірки*.

У більш складних ситуаціях елементи вибірки можуть бути вектори, або реалізації випадкових процесів.

Крім того відносно вимірюваних об'єктів, що породжують вибірку (1.1) завжди роблять деякі апіорні припущення. Якщо припускати, що вид (клас)

функцій розподілу відомий, а лише не відомі деякі параметри цього розподілу, то методи оцінювання невідомого параметра називають *параметричними*, а якщо задачу розв'язують в ситуації, коли про клас розподілу апріорно нічого не відомо (наприклад, робастне оцінювання), то тоді методи такого оцінювання називають *непараметричними*.

До параметричних методів відноситься *точкове оцінювання*, *інтервальне* та оцінювання з використанням теорії *перевірки гіпотез*.

При точковому оцінюванні центральним моментом є побудова деякої довільної функції від вибірккових значень (1.1)

$$T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

такої, щоб вона у якомусь ймовірнісному сенсі приймала значення близькі до оцінюваного (вимірюваного) параметра. Більш детально це питання викладено в [13].

Найпростішим прикладом точкової оцінки вимірюваної величини можна вважати частоту появи деякої події  $A$ , що використовується в якості наближеного значення ймовірності цієї події  $\mathbf{P}(A)$ .

Введемо поняття довірчого інтервалу та довірчої ймовірності.

*Довірчим інтервалом* називають інтервал, який з заданою *довірчою ймовірністю*  $\alpha$  накриває оцінюваний параметр  $\theta$ .

Для *симетричного* довірчого інтервалу його ширина  $2\varepsilon$  визначається з умови

$$\mathbf{P}\{\theta - T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \varepsilon\} = \alpha, \quad (1.2)$$

де  $T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  – оцінка параметра  $\theta$ , а ймовірність  $\mathbf{P}\{|\theta - T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| \leq \varepsilon\}$  визначається законом розподілу  $T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Величину  $1 - \alpha$  називають *рівнем значущості* [14].

Зауважимо, що замість (1.2) аналогічно можна розглядати і односторонній або несиметричний довірчий інтервал.

Як видно з огляду робіт [11, 12, 14] і ін. в теорії оцінювання по методу довірчих інтервалів та методу перевірки гіпотез проблему становить задача відшукування  $\alpha$  при відомому  $\varepsilon$  або по заданому  $\alpha$  відшукування величини  $\varepsilon$ . Представимо (1.2) у наступному вигляді

$$\mathbf{P}\{\theta - T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq x\} = P(x)$$

або  $\mathbf{P}\{\theta - T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > x\} = 1 - P(x)$ .

В такому випадку при фіксованому  $x = \varepsilon$  маємо конкретне значення  $\alpha = P(\varepsilon)$ . Але щоб скористатися таким способом знаходження  $\alpha$  треба мати точний вид функції  $P(x)$ . Наприклад, цю функцію можна знайти, коли задана функція розподілу оцінки  $T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Але в кращому випадку ми можемо мати гістограму для цієї оцінки, що в свою чергу вимагає отримання шляхом вимірювання самої гістограми та оцінок її точності, що потребує отримання вибірок великого обсягу. Тому на практиці використовують різні функції  $1 - P(x)$ , які б задовольняли умовам  $1 - P(x) < 1 - \alpha$  або  $\sup P(x) = \alpha$ . Одна з таких функцій зараз широко використовується, а її обґрунтування для класу гільбертових величин і процесів впливає з наслідку нерівності Чебишева. Будемо позначати цю функцію (вона зустрічається і в наступних розділах) так

$$P_2(x) = 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{x^2}. \quad (1.3)$$

Традиційно вона використовується в багатьох конкретних випадках без аналізу, хоча, наприклад, для розподілу Коші вона не застосовна, бо ним описуються не гільбертові випадкові величини.

Виникає законне запитання чи є клас законів розподілу для якого б можна було отримати функцію  $P_1(x)$ , яка б мала наступну властивість  $P_1(x) \geq P_2(x)$ ? У випадку виконання цієї умови ми б наблизились ближче до величини  $\sup P(x) = \alpha$  чим зменшили б методичну похибку при оцінюванні. Виявляється, що можна. Виходячи з робіт [15, 16, 17, 18] і інших математиків видно, що такий клас існує і зветься він субгауссовими випадковими величинами та процесами.

Згідно ДСТУ 2681-94 [10] точність вимірювання – це головна характеристика якості вимірювання, що відображає близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної величини. Слід зауважити, що при цьому не вказується що таке “істинне значення вимірюваної величини” та не обговорюється взагалі питання його існування на практиці. Тобто це питання є дискусійним [19, 20].

В багатьох роботах [12, 21], точність та достовірність отриманої оцінки характеризується ймовірністю того, що дійсне відхилення знайденого наближення від оцінюваної “істинної” величини не перевищують заданої межі. В (1.2) такою межею є  $\varepsilon$ .

Наприклад, якщо прийняти рівень довірчої ймовірності  $\alpha = 0,9973$  і припустити, що відхилення оцінки від істинної величини описується нормальним законом розподілу  $N(z; 0, \sigma)$ , то для оцінки точності (довірчого інтервалу) можна скористатися правилом (а не законом)  $3\sigma$ , згідно якого довірчий інтервал лише рекомендується вибирати в межах  $\pm 3\sigma$ . До речі, при використанні правила  $3\sigma$ , часто цей підхід називають “законом  $3\sigma$ ”, в той час як правило  $3\sigma$  стосується лише “стандартного” вибору довірчого інтервалу. З

таким же успіхом можна було б вибрати довірчий інтервал  $\pm 2\sigma$ , який в даній ситуації забезпечив би рівень довірчої ймовірності  $\alpha = 0,954$ .

Таким чином, із робіт [5, 13] випливає, що при фіксованому обсязі вибірки  $n$  точність (довірчий інтервал) і достовірність (довірча ймовірність) оцінки пов'язані між собою, і можна *порівнювати точності двох різних оцінок лише при однаковій їх достовірності або при однаковому довірчому інтервалі порівнювати їх достовірність*. Описана вище ситуація, коли відомий закон розподілу оцінок, спостерігається і у випадках їх розподілу, відмінних від нормального. Тому важливо не лише знаходити оцінки, а й мати можливість їх порівнювати при даному рівні достовірності та при фіксованому обсязі вибірки.

Якщо вже отримана послідовність вибірових значень спостережень (1.1) і по ним необхідно отримати оцінки для параметрів розподілу і визначити точність цих оцінок, то існує безліч можливих рішень, так як можна запропонувати безліч різних функцій  $T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  від вибірових значень, що можуть бути використані в якості оцінок. Але це в свою чергу приведе до різних законів розподілу значень  $T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .

Тому, як вказувалося у [11, 13] важливо не лише знаходити оцінки, але і порівнювати їх властивості для отримання оцінок максимально можливої точності при даному рівні довірчої ймовірності, або при фіксованому рівні довірчої ймовірності до різних довжин довірчого інтервалу.

Тут доцільно коротко зупинитися на деяких зауваженнях щодо термінології, яка використовується. Відносно вимірюваної величини ДСТУ 2681-94 [10] встановлює термін «похибка вимірювань», тому і в даній роботі в такому словосполученні вживається слово похибка, оскільки при цьому мова йде про вимірювання. Проте математична енциклопедія [22] використовує терміни «помилка теорія» і «похибка» як у випадку, коли мова йде про вимірювання, так і у випадку, коли мають на увазі тільки обчислення. В [10] термін «помилка вимірювань» не використовуються. Але існує розділ математичної статистики, названий «Теорія помилок», зміст якого ми не вправі

змінювати, тому термін «помилка» будемо використовувати тільки стосовно результатів обчислювального характеру, а не вимірювань. Не можна не звернути увагу й на те, що математика Гаусса вважають творцем теорії, яка зараз відома під назвою “Гауссова теорія помилок” [23]. Розглянемо її детальніше.

В [22] визначається “Помилок теорія” як розділ математичної статистики присвячений побудові уточнених висновків про числові значення наближено вимірних величин, а також про помилки (похибки) вимірювань.

Таким чином в математичній літературі (математичній статистиці) не протиставляються терміни “помилка” та “похибка”.

В теорії помилок Гаусса завжди роблять припущення, що випадкова величина  $x$  має скінченне середнє значення  $\hat{x}$  та середнє квадратичне відхилення  $\sigma$ . Згідно з Гауссом, квадратичним відхилення  $\sigma$  називають середньою помилкою спостереження. Усредненням багатьох спостережень середню помилку можна понизити. Вибірковим середнім з  $n$  незалежних спостережень типу (1.1) є

$$v = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i,$$

де  $x_i$  реалізація  $\xi_i$  має те ж середнє значення  $\hat{x}$ , що і окремі спостереження  $\xi_i$ , і середня помилка  $v$  в  $\sqrt{n}$  разів менша середньої помилки  $\xi_i$ :

$$\sigma_v = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Для того, щоб можна було розглядати точність  $v$  як оцінку для  $\hat{x}$ , треба знайти наближене значення для її дисперсії  $\sigma^2$ . В якості наближеного значення приймають



$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - v)^2.$$

Для дисперсії вибіркового середнього  $v$

$$\sigma_v^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

відповідне наближене значення рівне

$$s_v^2 = \frac{s^2}{n}.$$

Якщо кількість спостережень  $n$  велика, то  $s_v$  є хорошим наближенням для середньої помилки  $\sigma_v$ . Знайдене вибіркоче середнє  $v$  та його вибіркочу середню помилку  $s_v$  звичайно об'єднують у вираз  $v \pm s_v$ . Це основа роботи Гаусса стосовно теорії помилок. Крім того в своїй роботі він припускав, що помилки мають закон розподілу близький до нормального, звідси і виникла друга його назва – розподіл гаусса.

В його працях вводяться цікаві компактні математичні позначення, які сприяли швидкому поширенню метода найменших квадратів і не втратили своєї привабливості і інколи використовуються і зараз.

Одним з основних розділів сучасної теорії вимірювань є теорія похибок. Більшість робіт по теорії вимірювань ґрунтується на гіпотезі існування точного значення вимірюваної величини, яке, як правило, постулюється [8, 9]. В той же час існування у всіх випадках точного значення вимірюваної величини викликає сумнів, так інколи його не можливо знайти, а іноді гіпотеза про його існування суперечить фізичній природі величин. Разом з тим сам факт

існування точного значення величини часто для практичних задач не є істотним. Згідно з існуючим положенням припускається, що похибка вимірювань є функцією точного значення вимірюваної величини, а це в свою чергу робить таку “теорію похибок” беззмістовною, коли апріорно вже відомо, що точного значення величини не існує. З таким положенням не можна погодитись, особливо в тому випадку, коли виникає наявна потреба в уточненні оцінювання похибок, що на практиці майже завжди має місце [19, 20].

Таким чином, при визначенні точності, якщо виходить згідно з [24] із постулату існування істинного значення вимірюваної величини, виникають такі проблеми:

1. Існування в принципі істинного значення (в цьому випадку відповідь або неможливо дати, або вона негативна);

2. Якщо навіть істинне значення існує, то воно нам не відоме (якби було відомо, то не треба будувати систему вимірювань). А значить, знайти похибку раніше істинного значення просто неможливо.

В даній роботі термін похибка вживається у відповідності з означеннями викладеними в роботах [19, 20], згідно з якими похибка  $\Delta$  розглядається як деякий  $\Delta$ -окіл в топологічному просторі побудованому на результатах вимірювання.

У роботі не розглядаються детально питанням покращення самих похибок конкретних результатів вимірювань, а лише вивчаються та розробляються шляхи покращення їх оцінювання та питання використання запропонованої методики оцінювання. В шостому розділі буде детально розглянуто увесь цикл діагностики вітроагрегатів, де по новому будуть побудовані методика отримання характеристик періодичних випадкових вібрацій з метою як визначення похибок конкретних результатів вимірювань характеристик вібропроцесів, так і оцінювання їх точності з використанням моделі субгауссових процесів.

## **РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СУБГАУССОВИХ ПРОЦЕСІВ В ТЕОРІЇ ІВС**

В другому розділі йде мова про систему програм для обробки експериментальних даних періодичних випадкових процесів. При розробці цих систем виникла нова проблема їх тестування та оцінювання ефективності. Останнє виявилось складною задачею, яку довелося розв'язувати шляхом статистичного моделювання. Тому даний підпункт є підсумком огляду робіт, які були вивчені, а деякі з них і використані при математичному моделюванні.

Як вказано у [13, 25] під статистичним моделюванням розуміють відтворення за допомогою ЕОМ функціонування ймовірнісної моделі деякого об'єкту. Мета моделювання такого роду полягає в оцінюванні з його допомогою середніх ймовірнісних характеристик моделі об'єкту. Зазвичай це – математичне сподівання величин, що характеризують систему, а також їх дисперсії та коваріації. У більш складних випадках оцінюються функції розподілу.

### **2.1. Особливості використання субгауссових випадкових процесів в ІВС**

Існує багато робіт, присвячених моделюванню реалізацій випадкових величин та процесів і послідовностей з незалежними значеннями [18, 25, 26].

Виходячи з того, що вищезгадана нова математична модель ще не достатньо вивчена та мало відома в прикладному плані, дана робота присвячена більш глибокому дослідженню точносних характеристик та особливостей моделювання з використанням субгауссових випадкових періодичних процесів [27, 28, 29, 30].

Головна мета даної роботи полягає у розробці методів моделювання випадкових величин із заданим законом розподілу (наприклад,  $\varphi$  – серій [31] у випадку нестационарних процесів), що базується на класі субгауссових процесів, які в прикладних аспектах стосовно аналізу роботи ІВС ще повністю не вивчені. Очевидно, що для того, щоб виконати моделювання, треба мати

певні початкові данні. За умови використання ЕОМ ми маємо справу із скінченними послідовностями. Скінченні послідовності випадкових величин задаються скінченновимірними функціями розподілу.

Отже, повна постановка задачі моделювання вимагає, щоб була принаймні задана послідовність  $n$ -вимірних функцій розподілу процесу, що моделюється.

Нас в даній роботі буде цікавити моделювання інформаційних сигналів, а це накладає певні обмеження на вибір функцій розподілу і на повноту їх опису. Як відомо, часто треба моделювати сигнали, коли ми не маємо в повному обсязі функцій розподілу вимірюваних сигналів (наприклад, невідомі деякі багатовимірні функції модельованого процесу). Тоді доводиться мати справу з процесами, для яких відомі лише якісь окремі характеристики.

В такому випадку, в першу чергу можуть бути використані конструктивні моделі процесів, наприклад, лінійні процеси або моментні функції, які можна отримати шляхом математичної формалізації опису структурної схеми роботи тієї чи іншої ІВС.

При оцінці точності моделювання випадкових величин та процесів методом довірчих інтервалів, а також при розв'язуванні різних задач пов'язаних з перевіркою шляхом моделювання та перевіркою статистичних гіпотез часто виникає задача оцінки величини ймовірності  $p = \mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon\}$ , де  $2\varepsilon$  – довжина довірчого інтервалу, а  $\xi$  – значення моделюючого процесу, які ще можуть залежати і від часу  $t$  або значень результатів вимірювання [39].

Щоб оперувати з наведеним вище виразом в ідеальному випадку треба мати функцію розподілу значень величини  $\xi$  і величину  $2\varepsilon$ . На практиці використовують різного виду нерівності для оцінки величини  $p$ . При цьому найчастіше використовується нерівність Чебишева, яка дає оцінку знизу для величини  $p$ .

Виходячи з того, що при використанні нерівності Чебишева майже не накладаються ніякі апріорні обмеження на клас розподілів випадкової величини  $\xi$ , виникає ідея розглянути задачу оцінки точності моделювання ввівши деякі

неістотні з практичної точки зору обмеження, які б дали змогу уточнити оцінку, що отримана на базі нерівності Чебишева.

Зокрема дослідити цю задачу в класі періодичних субгауссових процесів. Цьому дослідженню і приділена увага в даному розділі. Слід зауважити, що для використання нерівності Чебишева необхідно знати дисперсію, що не завжди відома і існує лише для гільбертових випадкових величин і процесів за означенням.

## 2.2. Класи гільбертових та субгауссових процесів

Зупинимось на деяких роботах з аналізу класів процесів, що використовуються при побудові стохастичних моделей різних процесів та на деяких питаннях теорії гільбертових і банахових просторів випадкових величин і процесів. І врешті проаналізуємо деякі роботи, що стосуються статистичного моделювання, ймовірності та дослідження операцій [25].

Вивчення моделей випадкових процесів та їх моделювання за допомогою ЕОМ відіграють важливу роль при розв'язуванні широкого кола прикладних задач. Спосіб моделювання випадкового процесу визначається способом його задання. Найбільш загальним є випадок [25], коли процес заданий своїми скінченновимірними розподілами. В цьому випадку для будь-якого набору моментів часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$  з  $T$  повинна бути відома функція розподілу  $F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbf{P}(\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n)$ . Якщо існує щільність сумісного розподілу  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що відповідає вище наведеній функції розподілу  $F$ , то можна моделювати випадковий вектор  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ . Крім деяких частинних випадків, при великих  $n$  ця задача є надзвичайно трудомісткою. Крім того, всі скінченновимірні розподіли процесу, про який не робиться додаткових припущень (наприклад, стаціонарність, гауссовість, марковість), рідко бувають відомими. Зазвичай апріорно робиться ряд припущень про процес, що спостерігається, тобто задається деяка модель

процесу. Прийнятність побудованої моделі перевіряється засобами математичної статистики. Крім того, нерідко використовують часові ряди – значення процесу в послідовні дискретні моменти часу.

Розв'язуючи задачу моделювання випадкового процесу за допомогою ЕОМ, потрібно мати апіорну інформацію про процес. Так, якщо процес гауссовий, то необхідно знати його математичне сподівання та коваріаційну функцію. Однорідний ланцюг Маркова повністю визначається своїм початковим розподілом  $F_0(x)$  та перехідною щільністю  $p(x \rightarrow y)$ . Іноді для розв'язування задачі досить моделювати процес за неповними даними. Наприклад, моделювання процесу по заданому математичному сподіванню та коваріаційній функції, але не обов'язково гауссового, може бути достатнім при розв'язуванні задачі, де істотні лише ефекти, пов'язані з моментами не вище другого порядку. Взагалі кажучи моделювання за неповними даними викликає додаткові похибки.

Цікавим є моделювання субгауссових випадкових величин та процесів [17, 18]. Як буде показано нижче, використання класу субгауссових випадкових величин дає можливість звужити границю довірчого інтервалу, порівнюючи з використанням нерівності Чебишева, а також покращити методичну похибку. Слід зауважити, що до цього питання моделювання субгауссових випадкових величин та процесів не розглядалося в технічному плані.

Щоб застосувати нерівність Чебишева [32] при дослідженні випадкового процесу  $\{\xi(t), t \in T\}$  треба знати другий центральний момент (дисперсію) параметра, що моделюється. Але часто отримати хорошу оцінку дисперсії не вдається і, навіть, маючи її для випадкового процесу ми повинні якимось чином перейти від точкових оцінок для дисперсії в фіксований момент часу до рівномірних оцінок на всьому інтервалі часу  $T$ , де заданий моделюючий процес.

Задачу можна спростити, якщо використати апіорну інформацію, зокрема про те, що процес є субгауссовим. Тоді ми можемо отримати оцінку аналогічну

нерівності Чебишева, але рівномірну на всьому інтервалі часу. В цьому випадку роль дисперсії грає субгауссовий стандарт.

Аналогічна задача виникає при оцінюванні точності роботи різних інформаційно-вимірювальних систем та приладів за методом довірчих інтервалів, коли функція розподілу похибки вимірювань невідома.

Зупинимося коротко на аналізі класів процесів, які використовуються при побудові стохастичних моделей різних процесів, і зокрема процесів в електроенергетиці. При цьому детально будемо розглядати два простори:  $L_2(\Omega)$  і  $Sub(\Omega)$  та відповідні їм випадкові величини і процеси. Під  $L_2$ -моделями будемо розуміти стохастичні величини та процеси, які належать лінійним просторам, зокрема гільбертовим просторам випадкових величин і процесів [33, 34]. Як було сказано раніше під  $Sub(\Omega)$  будемо розуміти банахові простори випадкових величин.

Згідно з означенням гільбертового простору випадкових величин чи процесів, норма у них породжується скалярним добутком, в той час як в субгауссовому просторі  $Sub(\Omega)$  норма породжується субгауссовим стандартом, а скалярний добуток там не обов'язково вводиться.

Найчастіше при моделюванні вимагають, щоб розроблювальні моделі мали скінченну дисперсію, щоб дослідити в  $L_2$  збіжність відповідних послідовностей та рядів. Проте часто при розв'язуванні певних задач моделювання досить знати субгауссовий стандарт, для забезпечення відповідної збіжності рядів, за допомогою яких моделюються випадкові процеси.

Навіть в тому випадку, коли простір є одночасно гільбертовим та банаховим, використання субгауссового стандарту дає можливість отримати більш достовірні в ймовірнісному розумінні оцінки точності розроблювальних моделей при тих же економічних затратах та затратах часу [27, 28, 29, 30, 35].

З наведених вище результатів огляду робіт випливає висновок, що при використанні та аналізі субгауссових моделей треба виходити із взаємного

розташування всіх вказаних вище функціональних просторів. Для наочності в цьому випадку може бути корисним рисунок 2.1.

При аналізі взаємного розташування функціональних просторів можна використати відомі нерівності Чебишева [32] і аналогічну нерівність, яку можна розглядати як наслідок первинної нерівності Чебишева, в яку не входить дисперсія, а входить лише субгауссовий стандарт [27, 28, 29, 30, 35].

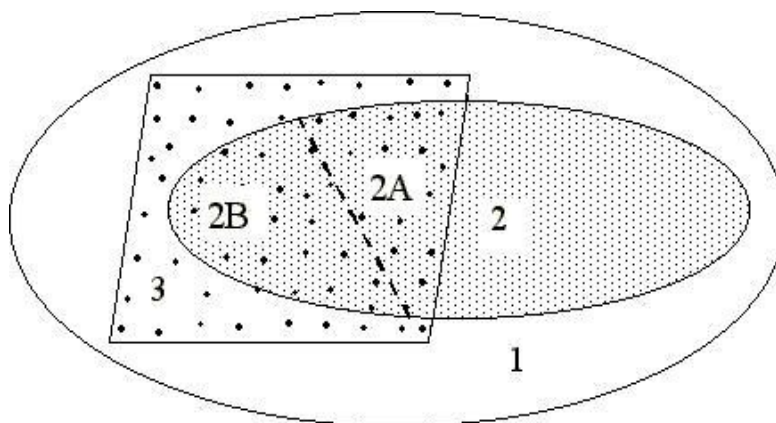


Рис. 2.1. Ілюстрація взаємного розташування функціональних просторів

На рис. 2.1 позначено: 1 – банаховий простір, 2 – субгауссовий простір  $Sub(\Omega)$ , 3 – гільбертовий простір  $L_2(\Omega)$ . Перетин просторів 2 та 3 розбитий на дві підмножини, з яких 2А – множина субгауссових величин, для яких  $S=1$ , тобто строго субгауссових; а 2В – множина субгауссових величин, для яких  $S>1$ .

З цього рисунку видно, що банаховий простір (як повний, нескінченновимірний, лінійний, нормований) включає всі класи функцій, які розглядаються в даній дисертаційній роботі. Гільбертовий простір завжди є банаховим (він теж повний, нескінченновимірний, лінійний, нормований), але в ньому норма завжди співпадає з середньоквадратичним відхиленням (СКВ) і визначається за допомогою скалярного добутку. Для випадкових процесів нормою є корінь квадратний із середньої потужності або СКВ, в той час як у



банаховому просторі скалярний добуток може бути відомий, а норма може бути задана без скалярного добутку.

Субгауссові величини і процеси обов'язково належать банаховому простору, але не обов'язково мають скінченну дисперсію.

Цікавим для практики є випадок, коли простір одночасно банаховий і гільбертовий. тоді в ньому існують два способи задати норму: як корінь середньої потужності (СКВ) і як субгауссовий стандарт. В цьому випадку цікаво для практики мати відношення квадратів цих двох норм, яке в дисертаційній роботі вводиться вперше, позначається воно через  $S$  і називається коефіцієнтом субгауссовості.

$S$  – це відношення квадрата субгауссового стандарту до дисперсії (відношення квадратів двох норм). Так як дисперсія завжди менша субгауссового стандарту, то  $S \geq 1$  завжди для субгауссових і гільбертових процесів одночасно. При  $S = 1$  процес строго субгауссовий.

В основі характеристики класу субгауссових процесів лежать наступні міркування: виділити клас випадкових величин та процесів, який базується на порівнянні характеристик гауссової випадкової величини і досліджуваної. Це можна зробити шляхом порівняння функцій або щільностей розподілу гауссового закону і досліджуваного. Але для такого порівняння не існує простих співвідношень типу більше або менше, тому при описі класу субгауссових процесів використовується метод характеристичних функцій. Оскільки характеристична функція є комплекснозначною, то щоб порівнювати дві характеристичні функції треба перейти до функцій дійсного аргументу. Однією з таких функцій може бути твірна функція моментів або її логарифм, тобто твірна функція кумулянт і далі порівнювати або дві однотипні твірні функції моментів, або їх логарифми. А саме: твірну функцію моментів гауссового закону розподілу і твірну функцію моментів досліджуваного закону розподілу. Твірна функція одновимірного гауссового закону розподілу має

вигляд  $\exp \frac{\alpha^2 y^2}{2}$ . Таким чином до субгауссових відносять ті величини, у яких твірна функція моментів  $\psi(y) \leq \exp \frac{\alpha^2 y^2}{2}$ , звідки і виникла назва “субгауссовий”. Детальний розгляд цих питань проводиться в наступному розділі.

### 2.3. Субгауссові випадкові величини та процеси, їх основні характеристики

При розв’язуванні багатьох конкретних задач у різноманітних галузях техніки вимірювань часто зустрічаються випадки, коли аналітичний розв’язок задачі через значні математичні труднощі практично неможливий, а проведення експериментальних досліджень і натурних випробувань потребує дуже великих затрат часу і засобів. Одним з ефективних заходів по подоланню цих труднощів є застосування в роботі методів моделювання досліджуваних явищ за допомогою сучасних швидкодіючих ЕОМ. Задача моделювання різних ІВС та зокрема діагностичних систем формулюється як задача розробки алгоритмів. Ці алгоритми за відомими характеристиками систем, наприклад, операторами або динамічними характеристиками нелінійностей окремих ланок, дозволяють точно чи з допустимою похибкою перетворювати та обробляти на ЕОМ реалізації відповідних випадкових вхідних інформаційних сигналів в системах, що досліджуються. Такі алгоритми називаються цифровими моделями сигналів і систем. В роботі використовується одна з таких нових математичних моделей, яка отримала назву субгауссових процесів [17, 18].

Зупинимось на деяких математичних викладках стосовно визначення та властивостей субгауссових величин та процесів.

Трійка  $\{\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P}\}$ , де  $\Omega$  – простір елементарних подій,  $\mathbf{F}$  – деяка алгебра підмножин  $\Omega$ ,  $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}(A), A \in \mathbf{F}\}$  – ймовірнісна міра. Ця трійка формально

задає деяку ймовірнісну модель експерименту, яку будемо надалі називати ймовірнісним простором [36].

Позначимо через  $F(x)$  функцію розподілу випадкової величини  $\zeta$

$$F(x) = \mathbf{P}\{\zeta < x\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Відповідна їй характеристична функція випадкової величини  $\zeta$ , виражається таким чином [32]

$$f(u) = \mathbf{M} \exp(iu\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) dF(x), \quad u \in \mathbf{R}.$$

Позначимо експоненційну генератрису (твірну функцію) кумулянт випадкової величини  $\zeta$  [28, 29, 35, 36]

$$g(y) = \ln \mathbf{M} e^{y\zeta} = \ln f(-yi), \quad y \in \mathbf{R}. \quad (2.1)$$

За допомогою генератриси (2.1) знаходяться кумулянти випадкової величини  $\zeta$  згідно виразу

$$\kappa_k = \left. \frac{d^k g(y)}{dy^k} \right|_{y=0},$$

а моменти

$$\mathbf{M}_{\xi}^{\zeta k} = \left. \frac{d^k e^{g(y)}}{dy^k} \right|_{y=0}. \quad (2.2)$$

Зупинимось коротко на суті математичної формалізації ймовірнісної моделі, яка базується на понятті субгауссовості випадкових величин та процесів.

Випадкову величину  $\xi$  називають субгауссовою [17, 18], якщо знайдеться таке дійсне число  $\alpha \geq 0$ , що для всіх  $y \in \mathbf{R}$  виконується нерівність

$$e^{g(y)} \leq e^{\frac{\alpha^2 y^2}{2}}, \quad (2.3)$$

де  $g(y)$  визначається згідно (2.1).

Зліва в (2.3) стоїть генератриса степеневих моментів випадкової величини  $\xi$  [37], генератриса степеневих моментів на відміну від характеристичної функції існує не для всіх функцій розподілу  $F(x)$ . Вона пов'язана з характеристичною функцією  $f(u) = \mathbf{M}e^{iu\xi}$  співвідношенням (2.1), для характеристичної функції  $u = -iy$  [38].

Клас субгауссових величин позначається  $Sub(\Omega)$  [18].

Введемо позначення

$$\tau(\xi) = \inf \left\{ \alpha \geq 0 : e^{g(y)} \leq e^{\frac{\alpha^2 y^2}{2}}, y \in \mathbf{R} \right\}, \quad (2.4)$$

$\tau(\xi)$ —називається субгауссовим стандартом випадкової величини  $\xi$ . Тобто

$\tau(\xi)$ — це найменше невід'ємне  $\alpha$ , яке задовольняє вираз (2.4) для всіх  $y \in \mathbf{R}$ .

Позначимо через  $\bar{f}_\alpha(y) = \left(\exp(y^2/2)\right)^{\alpha^2}$  функцію, яка задає параметричне сімейство залежне від параметра  $\alpha$ . Ця функція стоїть справа у виразі (2.4). За параметром  $\alpha$  при кожному фіксованому значенні  $y$  остання функція не є спадною. Значення  $\tau(\xi)$  вибирається згідно  $\alpha = \alpha_{\min} = \tau(\xi)$ , що забезпечує виконання нерівності (2.4).

Таким чином, квадрат субгауссового стандарту це границя, яка обмежує логарифм генератриси помножений на  $2/y^2$ ,  $\tau^2(\xi) \geq \frac{2}{y^2} g(y)$ , де  $y \in \mathbf{R}$  [38].

**Лема 1.** Має місце співвідношення [19]

$$\tau(\xi) = \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in \mathbf{R}}} \left[ \frac{2g(y)}{y^2} \right]^{1/2}. \quad (2.5)$$

При  $y \in \mathbf{R}$

$$e^{g(y)} \leq \exp \left[ \frac{y^2 \tau^2(\xi)}{2} \right]. \quad (2.6)$$

Ця лема розглядається в [18]. Вираз (2.5) є основною формулою для визначення субгауссового стандарту. Він буде покладений в основу побудови методик в дослідженнях випадкових величин і процесів на субгауссовість та визначення субгауссових стандартів для конкретних видів розподілу.

**Лема 2.** Детермінована відмінна від нуля (вироджена) випадкова величина і детермінована функція не є субгауссовими.

**Доведення.** Зупинимось лише на доведенні даної леми для детермінованої випадкової величини, так як для детермінованої функції твердження леми є очевидним і може розглядатися як наслідок.

Ймовірнісний простір, на якому задана вироджена випадкова величина  $\xi = c$ , описується таким чином:  $\Omega = \{\omega_1\}$ ;  $\mathbf{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ , що складається з достовірної події  $\Omega$  і порожньої множини (це так звана тривіальна алгебра);  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$  і  $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ .

Згідно (2.1) в даному випадку експоненційна генератриса має вигляд  $g(y) = uc$ . Тоді згідно (2.5) маємо:

$$\tau(\xi) = \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in R}} \left[ \frac{2c}{|y|} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Вираз справа при  $c < 0$  стає комплекснозначним, а субгауссовий стандарт є дійсна величина, тому цей вираз втрачає сенс. В околі нуля ця функція необмежена, за винятком випадку коли  $c = 0$ . При  $c > 0$  в околі нуля функція необмежена по  $y$  і при  $y \rightarrow 0$ ,  $\tau(\xi) \rightarrow \infty$ . Тобто субгауссовий стандарт не існує. Лема доведена.

**Зауваження 2.1.** Іноді випадкову величину, яка після центрування стає субгауссовою, теж будемо називати субгауссовою, за умови, що у неї існує математичне сподівання.

**Зауваження 2.2.** Інколи при дослідженні загального виду функції розподілу цілого класу однотипних випадкових величин параметричної множини, приналежність цієї випадкової величини до класу субгауссових випадкових величин істотно залежать від значень одного або кількох параметрів. При цьому виникає задача визначення діапазонів цих параметрів, при яких ця величина належить до класу субгауссових випадкових величин.

**Лема 3** [18]. Нехай  $\xi \in \text{Sub}(\Omega)$ , тоді для будь-якого  $r > 0$  існує абсолютний  $r$ -й момент:

$$\mathbf{M}|\xi|^r < \infty \text{ та } \mathbf{M}\xi = 0;$$

і виконується нерівність (доводиться виходячи з нерівності  $x^r \leq e^x r^r e^{-r}$  при  $r > 0, x > 0$ )

$$\mathbf{M}\xi^2 \leq \tau^2(\xi).$$

**Лема 4** [18]. Якщо  $\xi$  – обмежена центрована випадкова величина та  $|\xi| \leq c$  майже напевно, то  $\xi \in \text{Sub}(\Omega)$  та  $\tau(\xi) \leq c$ , де  $c > 0$ .

Субгауссова випадкова величина  $\xi$  називається строго субгауссовою [19], якщо  $\tau^2(\xi) = \mathbf{M}\xi^2$ , тобто при всіх  $y \in \mathbf{R}$  виконується нерівність

$$e^{g(y)} \leq e^{\frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}}, \quad (2.7)$$

де  $\sigma^2 = \mathbf{M}\xi^2$ . Клас строго субгауссових випадкових величин позначатимемо  $\text{SSub}(\Omega)$ .

Простір  $\text{Sub}(\Omega)$  є повний лінійний нормований простір, тобто є банаховим простором, а  $\tau(\xi)$  – є нормою в цьому просторі, це впливає із наведених вище лем.

Згідно з лемою 1 при  $\xi \in \text{Sub}(\Omega)$  впливає, що  $\mathbf{M}\xi = 0$  і виконується нерівність  $\mathbf{M}\xi^2 \leq \tau^2(\xi)$ , тобто  $\mathbf{D}\xi \leq \tau^2(\xi)$ . Тому можна вивести наступний коефіцієнт:

$$S = \frac{\tau^2(\xi)}{\mathbf{D}\xi}, \quad (2.8)$$

який будемо називати коефіцієнтом субгауссовості.

Коефіцієнт субгауссовості, як буде показано нижче, є ефективним ключем для уточнення точносних характеристик випадкових процесів отриманих при моделюванні та при оцінюванні довірчої ймовірності для результатів вимірювання. Він дозволяє проводити порівняльний аналіз інтервальних оцінок точносних характеристик, наприклад, у порівнянні з нерівністю Чебишева.

Для субгауссової величини коефіцієнт субгауссовості  $S \geq 1$ . Тому його не можна задавати довільно. У загальному випадку коефіцієнт субгауссовості невизначений, коли  $\tau^2(\xi) < \mathbf{D}\xi$ . Він не може бути меншим за 1.

Коефіцієнт субгауссовості довільної величини  $\xi$  являє собою квадрат відношення норми величини  $\xi$  в банаховому та гільбертовому просторах.

#### **2.4. Методика перевірки процесу на субгауссовість при відомій твірній функції**

В цьому розділі розроблена методика перевірки різних випадкових величин на субгауссовість. Основна задача на практиці при моделюванні і аналізі роботи ІВС полягає у встановленні субгауссовості процесу.

Послідовність операцій розв'язку такої задачі можна розбити на такі етапи (рис.2.2):

- по заданій одновимірній функції розподілу величин чи процесів знаходимо їх характерестичну функцію;
- переходимо від характерестичної функції до твірної функції згідно (2.1);
- скориставшись лемою 1, знаходимо субгауссовий стандарт (цей пункт можна виконувати як аналітично так і графічно);



- в разі існування субгауссового стандарту робимо аналітичні дослідження його залежності від параметрів заданого закону розподілу.

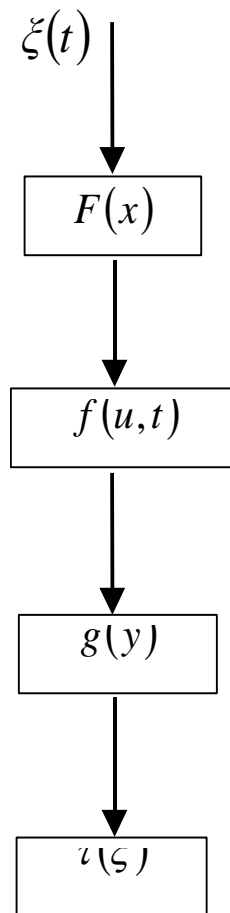


Рис.2.2. Структурна схема алгоритму перевірки процесу на субгауссовість

Зупинимося на деяких прикладах з використанням описаної вище схеми дослідження на субгауссовість.

*Приклади.*

1. Нехай  $\xi \in \mathbf{N} (0, \sigma^2)$  тоді

$$e^{g(y)} = \mathbf{M}e^{y\xi} = e^{\frac{y^2\sigma^2}{2}},$$

тобто  $\xi$  – є гауссова випадкова величина, для якої згідно (2.4)  $\tau(\xi) = \sigma$ .

Тобто в (2.5) має місце строга рівність [18].

Коефіцієнт субгауссовості при цьому  $S = 1$ .

2. Випадкова величина  $\xi$  рівномірно розподілена на відріжку  $[-b, b]$ ,  $b > 0$ , її характеристичну функцію отримуємо у вигляді

$$f(u) = \frac{\sin(bu)}{bu}, \quad u \in R.$$

Почнемо з аналітичного розв'язку згідно рис.2.2. Заміняючи в останньому виразі  $u = -iy$ , отримаємо твірну функцію  $g(y)$ . Крім того згідно (2.1) для неї можна записати вираз

$$\exp(g(y)) = \mathbf{M} e^{y\xi} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b e^{yx} dx = \frac{sh(yb)}{yb}.$$

Також її можна представити у вигляді

$$\exp(g(y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yb)^{2k}}{(2k+1)!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(yb)^{2k}}{6^k k!} = e^{\frac{(yb)^2}{6}} = e^{\frac{y^2 \cdot b^2}{3}}.$$

Отже, рівномірно і симетрично розподілена випадкова величина  $\xi$  є субгауссова і згідно з лемою 1,  $\tau^2(\xi) = \mathbf{M} \xi^2 = \frac{b^2}{3}$ , звідки субгауссовий

стандарт  $\tau(\xi) = \frac{b}{\sqrt{3}}$ , а згідно (2.8) коефіцієнт субгауссовості в цьому випадку

$S = 1$ , хоча закон розподілу не є строго гауссовим.

Проілюструємо аналітичний розв'язок графічно. Розглянемо функцію

$\exp(g(y)) = \frac{sh(yb)}{yb}$ . Скориставшись лемою 1 позначимо через

$u_1(y, b) = \sqrt{\frac{2}{y^2} g(y)}$ , функцію від  $b$ , яка взята з правої частини (2.5) і яка при

всіх  $y \in \mathbf{R}$ ,  $y \neq 0$  повинна бути менша від деякого поки що невідомого  $\alpha$ , тобто від деякої обмежуючої при всіх  $y \in \mathbf{R}$  функції  $c_1(y, \alpha) = \alpha$ , що випливає із (2.4), якщо під  $\alpha$  розуміти якусь додатню величину, яка не менша за субгауссовий стандарт, коли він існує. Очевидно, що цей мінімум буде залежати і від  $b$ , тому при побудові графіка спочатку вибираємо  $b = 1$ . Потім змінюючи пробні значення  $\alpha$  шляхом зменшення їх значення доки в якийсь момент не порушиться нерівність  $u_1(y, b) < c_1(y, \alpha)$  ми досліджуємо і залежність від параметра розподілу  $b$ .

На рисунку 2.3 наведено графіки  $u_1(y, 1)$  та  $c_1(y; 0,7)$  звідки видно, що найбільше значення  $u_1(y, 1)$  приймає в точці  $y = 0$ , причому

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u_1(y, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Тому при  $b = 1$  замість пробного  $\alpha = 0,7$  треба взяти меншу величину

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

А це значить, що в цьому випадку вираз  $\tau(\xi) = \frac{b}{\sqrt{3}}$  має місце.

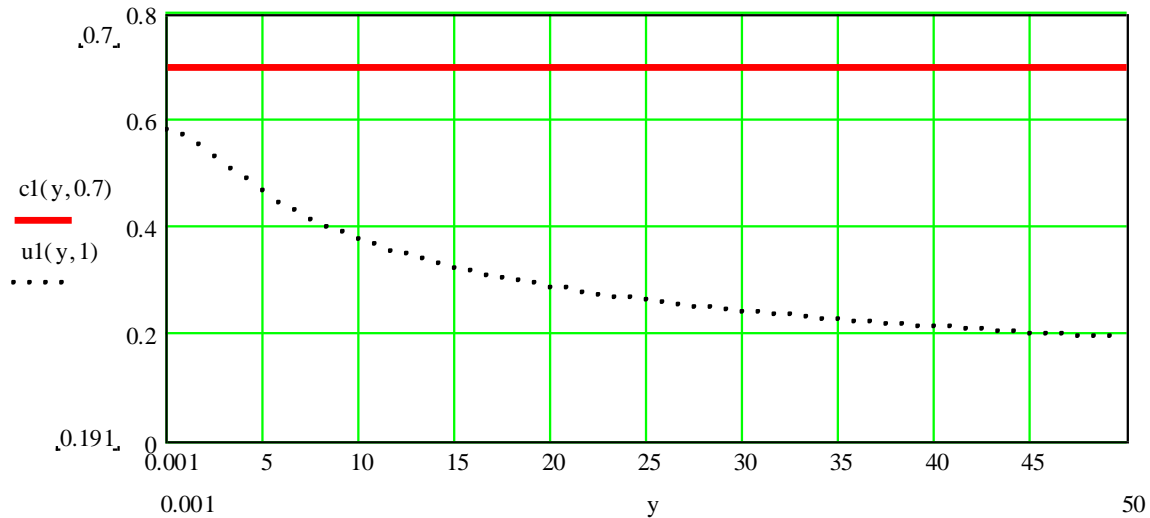


Рис. 2.3. Графічна ілюстрація перевірки на субгауссовість рівномірного розподілу

3. Випадкова величина  $\zeta$  має розподіл арксинуса,  $\zeta = b \sin \varphi$ , де  $\varphi$  – рівномірно розподілена на інтервалі  $|x| \leq \pi$  випадкова величина.

Почнемо з аналітичного розв’язку. В цьому випадку твірна функція згідно (2.1) задається виразом

$$\exp(g(y)) = \mathbf{M} e^{y\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{yb \sin x} dx.$$

Її можна представити у вигляді

$$\exp(g(y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yb)^{2k}}{2^{2k} k! k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(yb)^{2k}}{2^{2k} k!} = e^{\frac{y^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2}}.$$

Тобто  $\zeta$  – субгауссова випадкова величина і виходячи з останньої нерівності згідно леми 1 маємо  $\tau^2(\zeta) = \mathbf{M} \zeta^2 = \frac{b^2}{2}$ , звідки субгауссовий стандарт випадкової величини  $\zeta$  розподіленої за законом арксинуса

$\tau(\xi) = \frac{b}{\sqrt{2}}$ , а згідно (2.8) коефіцієнт субгауссовості в цьому випадку  $S = 1$ ,

хоча в цьому випадку графік функції щільності розподілу  $U$  – подібний, тобто його форма далека від форми гауссової кривої.

Цей випадок аналогічний до попереднього, але тепер  $\exp(g(y)) = I_0(y, b)$

(функція Бесселя нульового порядку).  $u_2(y, b) = \sqrt{\frac{2}{y^2} \ln I_0(y, b)}$  та

$c_2(y, \alpha) = \alpha$ , де  $\alpha$  теж буде залежати від величини  $b$ .

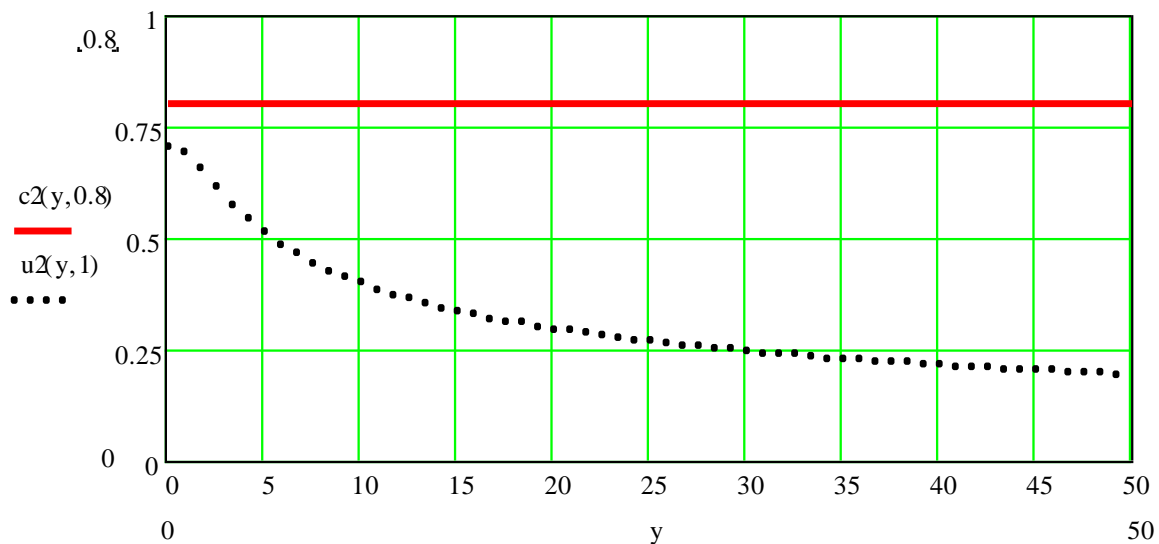


Рис. 2.4. Графічна ілюстрація перевірки на субгауссовість розподілу арксинуса

Аналогічно до попереднього при  $b = 1$  пробне значення  $\alpha$  вибираємо рівним 0,8. Графіки відповідних кривих  $u_2(y, 1)$  та  $c_2(y; 0,8)$  наведені на рисунку 2.4 звідки видно, що найбільше значення  $u_2(y, 1)$  приймає в точці

$y = 0$ , причому  $\lim_{y \rightarrow 0^+} u_2(y, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Вище були розглянуті приклади випадкових величин  $\xi$ , що мали розподіли рівномірний та арксинуса, при цьому початкові моменти були нульовими. Тепер перейдемо до розгляду прикладів випадкових величин, які не є центрованими, але після центрування можна встановити їх субгауссовість.

4. Випадкова величина  $\xi$  має розподіл Бернуллі. В цьому випадку твірна функція визначається виразом  $\exp(g(y)) = 1 - p + pe^y$ . Використовуючи лему 1, необхідно від  $g(y)$  відняти перший момент (математичне сподівання) помножений на  $y$ , тобто

$$u_3(y, p) = \sqrt{\frac{2}{y^2}(g(y) - y \cdot p)}.$$

На рисунку 2.5 наведено графіки  $u_3(y, p)$  та  $c_3(y; 0,22)$  з яких видно, що  $\xi$  – субгауссова випадкова величина, а функція  $u_3(y, 0.96)$  найбільше значення приймає в точці  $y = 0$ , причому  $\lim_{y \rightarrow 0^+} u_3(y, 0.96) = 0.196$ . Нехай  $p = 0.96$ .

Аналогічно, графічним методом, можна дослідити і інші випадкові величини на субгауссовість, якщо відома їх характеристична функція.

Випадковий процес  $\{\xi(t), t \in T\}$  називається субгауссовим, якщо при всіх  $t \in T$   $\xi(t) \in \text{Sub}(\Omega)$  та  $\sup_{t \in T} \tau(\xi(t)) < \infty$  [18].

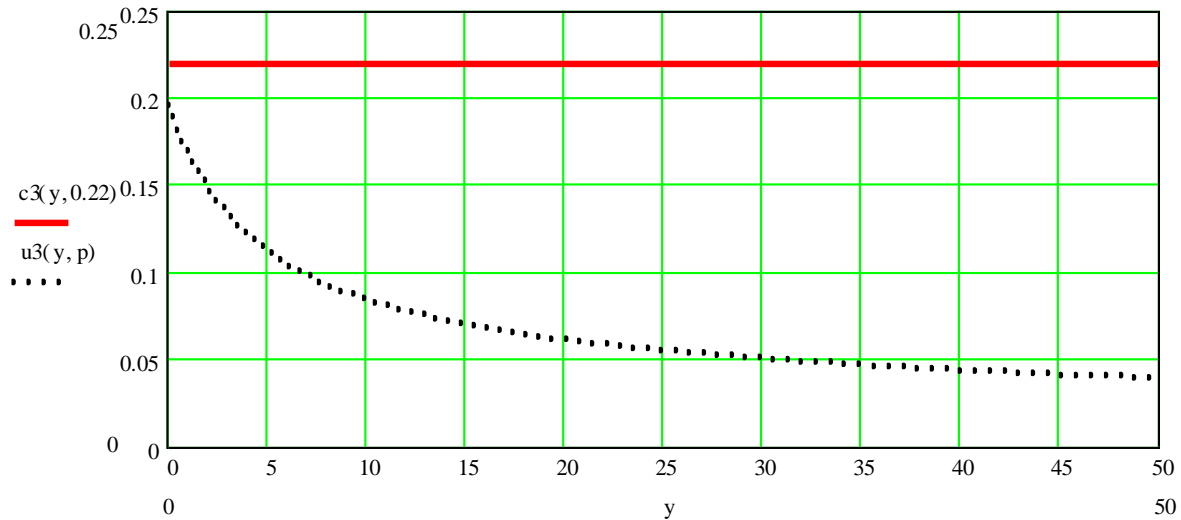


Рис. 2.5. Графічна ілюстрація перевірки на субгауссовість розподілу Бернулі

## 2.5. Аналіз особливостей використання субгауссових випадкових процесів

Зупинимося коротко на аналізі класів процесів, які використовуються при побудові стохастичних моделей різних процесів, і зокрема процесів в електроенергетиці. При цьому детально будемо розглядати два простори:  $L_2(\Omega)$  і  $Sub(\Omega)$  (рис 2.1) та відповідні їм випадкові величини і процеси [17, 18, 33, 39]. Під  $L_2$ -моделями будемо розуміти стохастичні величини та процеси, які належать лінійним просторам, зокрема гільбертовим просторам випадкових величин і процесів.

Символом  $Sub(\Omega)$  позначається банаховий простір випадкових величин, а  $\tau(\xi)$  – є нормою в цьому просторі. Банаховий простір є повний лінійний нормований простір [32, 33, 39].

Неважко переконатися, що субгауссовий стандарт (визначається виразами (2.4) та (2.5)) задовольняє сформульованим вимогам у першому розділі.

Як вказано в роботах [7,18], простір субгауссових величин, що позначається як  $Sub(\Omega)$ , є банаховим простором, а  $\tau(\xi)$  – є нормою в цьому просторі. Банаховим простором є повний лінійний нормований простір [33, 39].

Нормою в  $L$  (лінійний простір) називається скінченний опуклий функціонал  $p$ , що задовольняє наступним умовам [32, 33, 39]:

- 1)  $p(x) \geq 0$ , причому  $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- 2)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ,  $x, y \in L$ ,
- 3)  $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ ,  $\forall \alpha$ .

Субгауссовий стандарт  $\tau(\xi)$  задовольняє перерахованим вище вимогам.

Зокрема  $\tau(c\xi) = c\tau(\xi)$ ,  $\tau(\xi + \eta) \leq \tau(\xi) + \tau(\eta)$ . Ці вирази мають практичне застосування.

Згідно з означенням гільбертового простору випадкових величин  $L_2(\Omega)$  чи процесів, норма у них породжується скалярним добутком, в той час як в субгауссовому просторі  $Sub(\Omega)$  норма визначається субгауссовим стандартом, а скалярний добуток там не обов'язково вводиться. Хоча найчастіше на практиці вимагають, щоб використовувані та розроблювані моделі мали скінченну дисперсію. Проте часто при розв'язуванні певних задач моделювання досить знати субгауссовий стандарт, для забезпечення відповідної збіжності оцінок та рядів, за допомогою яких моделюються випадкові процеси. Крім того, навіть в тому випадку, коли простір є одночасно гільбертовим та банаховим (рис 2.1), використання субгауссового стандарту дає можливість отримати більш достовірні в ймовірнісному розумінні оцінки точності розроблювальних моделей (з меншою методичною похибкою).

З вищенаведеного, при використанні та аналізі субгауссових моделей треба виходити із взаємного розташування всіх вказаних вище функціональних просторів (рис 2.1).

Для підтвердження вищевказаного можна скористатися хоча б аналізом використання відомої нерівності Чебишева [32] і аналогічної нерівності, яку



можна розглядати як наслідок основної нерівності Чебишева, в яку уже не входить дисперсія, а входить лише субгауссовий стандарт [28, 29, 30, 35].

Зупинимось більш детально на цих питаннях, які є центральними в теоретичному плані в даній роботі і порівняємо два варіанта таких нерівностей. Для цього спочатку наведемо кілька різних форм запису нерівності Чебишева.

Перша форма [38]. Нехай  $\xi$  – випадкова величина і  $h(\xi)$  – функція, що приймає невід’ємні значення і крім того для  $c \geq 0$   $\inf_{|y| \geq c} h(y) = b(c)$ . Якщо

$\mathbf{M}(h(\xi))$  існує і,  $b(c) > 0$ , то

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geq c\} \leq \frac{\mathbf{M}(h(\xi))}{b(c)}. \quad (2.9)$$

Формула (2.9) надалі буде називатися першою або основною формою нерівності Чебишева. Вона в математичній літературі, як правило, наводиться у вигляді теореми з доведенням.

Друга форма [40]. Якою б не була випадкова величина  $\xi$ , яка може приймати лише невід’ємні значення і має скінченне математичне сподівання, завжди має місце нерівність

$$\mathbf{P}\{\xi \geq 1\} \leq \mathbf{M}\xi, \quad (2.10)$$

тобто ймовірність того, що випадкова величина  $\xi$  прийме значення, не менше за одиницю, не більша за її математичне сподівання.

Від наведеної нерівності (2.10) можна перейти до більш загальної. Нехай  $\varepsilon$  – додатне число. Тоді отримаємо для довільної величини, що приймає лише невід’ємні значення

$$\mathbf{P}\{\xi > \varepsilon\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\xi}{\varepsilon} \geq 1\right\} \leq \mathbf{M}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) = \frac{\mathbf{M}\xi}{\varepsilon},$$

тому [32]

$$\mathbf{P}\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{M}\xi}{\varepsilon}. \quad (2.11)$$

Історично, вираз (2.11) і був вперше отриманий Чебишевим.

Перейдемо до розгляду різновиду другої форми нерівності Чебишева.

Якою б не була випадкова величина  $\xi$ , яка має скінченне математичне сподівання і скінченну дисперсію, і якою б не була додатна стала величина  $\varepsilon$ , завжди має місце нерівність

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}. \quad (2.12)$$

Вираз (2.12) досить широко вживаний в теорії вимірювань при оцінці точності і достовірності. Найчастіше він зустрічається в технічній літературі по теорії вимірювань [41, 42]. При оцінці точності довірчих інтервалів під виразом нерівність Чебишева завжди розуміють вираз (2.12). В (2.12) під  $\varepsilon$  розуміють границю, симетричну відносно математичного сподівання довірчого інтервалу, а під  $1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}$  – величину, яку приймають за нижню границю ймовірностей того, що центрована випадкова величина  $\xi$  потрапить в довірчий інтервал (при цьому сама нижня границя не є точною, тобто найменшою). Вираз (2.12) використовується при моделюванні в гільбертовому просторі  $L_2(\Omega)$ , тобто його можна застосовувати лише до гільбертових випадкових величин і процесів.

В тому випадку коли випадкова величина або процес не є гільбертовим, необхідно шукати інші шляхи побудови оцінок методом довірчих інтервалів. Навіть у випадку гільбертових випадкових величин вираз (2.12) дає лише оцінку нижньої границі довірчої ймовірності, а тому результат може бути покращений (тобто більш наближений до нижньої границі), якщо відомо що випадкова величина належить ще і до інших класів. Виходячи з цього в даній роботі і розглядаються субгауссові випадкові величини та процеси. Показано, що використовуючи (2.11) в цьому класі можна покращити оцінку довірчої ймовірності, тобто частково зменшити методичну похибку при оцінці точності.

В подальшому, щоб позбавитися масштабних різновидів, будемо розглядати в усіх нерівностях нормовані відхилення, тобто величини  $\frac{\xi - \mathbf{M}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}$ , і надалі будемо позначати ці нормовані відхилення лише через  $\zeta$ .

Оскільки для центрованих субгауссових випадкових величин коефіцієнт субгауссовості дорівнює квадрату субгауссового стандарту, тобто  $S = \tau^2(\xi)$  та замінивши  $\varepsilon$  на  $x$  отримаємо нерівність (2.12) у вигляді:

$$\mathbf{P}\{|\zeta| < x\} \geq 1 - \frac{1}{x^2}. \quad (2.13)$$

Повернення до ненормованих та нецентрованих величин очевидні і не викликають додаткових ускладнень.

Сформулюємо наступну теорему, доведення якої базується на нерівності Чебишева (2.11), а тому її можна розглядати як другий наслідок із основної нерівності Чебишева (2.9). Ця теорема є центральною в даній роботі.

**Теорема** [18]. *Якщо  $\xi$  є субгауссовою випадковою величиною з  $\tau(\xi) > 0$ , то тоді для всіх  $x > 0$  мають місце нерівності*

$$\mathbf{P}\{\xi > x\} \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{P}\{\xi < -x\} \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{P}\{|\xi| > x\} \leq 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right). \quad (2.16)$$

**Доведення.** При  $\lambda > 0$  та  $x > 0$ , з нерівності Чебишева (2.11) випливає, що

$$\mathbf{P}\{\xi > x\} = \mathbf{P}\{e^{u\xi} > e^{ux}\} \leq \frac{\mathbf{M} \exp\{u\xi\}}{\exp\{ux\}} \leq \exp\left\{\frac{u^2\tau^2(\xi)}{2} - ux\right\},$$

де використано нерівність (2.6).

Продиференціювавши по  $u$  і прирівнявши до нуля праву частину останньої нерівності, маємо

$$\exp\left\{\frac{u^2\tau^2(\xi)}{2} - ux\right\} \cdot (u\tau^2(\xi) - x) = 0.$$

Звідки критична точка  $u = \frac{x}{\tau^2(\xi)}$  і, нарешті, отримуємо

$$\mathbf{P}\{\xi > x\} \leq \exp\left\{\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)} - \frac{x^2}{\tau^2(\xi)}\right\} = \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\}.$$

тобто (2.14).

Друга нерівність (2.15) доводиться аналогічно. Третя (2.16) випливає з того, що  $\mathbf{P}\{|\xi| > x\} = \mathbf{P}\{\xi > x\} + \mathbf{P}\{\xi < -x\}$ . Теорему доведено.

**Зауваження 2.3.** Як вказувалось раніше субгауссова величина є центрованою, а тому (2.16) у випадку не центрованої випадкової величини (зауваження 2.2), якщо після центрування ця випадкова величина є субгауссовою, можна записати таким чином

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < x\} \leq 1 - 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right).$$

Скористаємося нерівністю (2.16), яка була детально розглянута та доведена вище. Згідно (2.8)  $\tau^2(\xi) = \mathbf{S}\mathbf{D}\xi$ ,  $\mathbf{D}\xi = 1$  то, виконавши відповідні викладки, її можна переписати у вигляді

$$\mathbf{P}\{|\xi| < x\} \leq 1 - 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2S}\right). \quad (2.17)$$

Оскільки для неперервних центрованих випадкових величин

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}, \quad (2.18)$$

рівність (2.18) можна переписати у вигляді

$$\mathbf{P}\{\xi \geq x\} = 1 - F(x), \quad (2.19)$$

де  $F(x)$  – функція розподілу. Тоді праві частини нерівностей (2.12) та (2.17) можна розглядати як оцінки функцій розподілу з використанням нерівності Чебишева та коефіцієнта субгауссовості.

Зауважимо, що для  $S \geq 1$  величина  $2 \exp\left(-\frac{x^2}{2S}\right)$  не повинна бути меншою за значення функції розподілу.

Побудуємо графіки правих частин нерівності Чебишева (2.12), яка широко використовується при оцінці точності вимірювання, та нерівності (2.17), яку можна застосувати у випадку, коли оцінювані величини належать до  $Sub(\Omega)$  та проведемо їх графічний порівняльний аналіз. Для цього побудуємо їх графіки, де позначимо праві частини (2.12) та (2.17) відповідно як

$$P_1(x, S) = 1 - 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2S}\right) \text{ та } P_2(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Як було показано вище, з означення субгауссового стандарту випливає, що він не може бути меншим за дисперсію. Це значить, що коефіцієнт субгауссовості, за означенням, не може бути меншим за 1. Тому в усіх подальших викладках будемо виходити з умови  $S \geq 1$ . Графіки будемо для трьох випадків  $S = 1; 2; 4$ . Вони зображені на рисунках 2.6; 2.7; 2.8 відповідно.

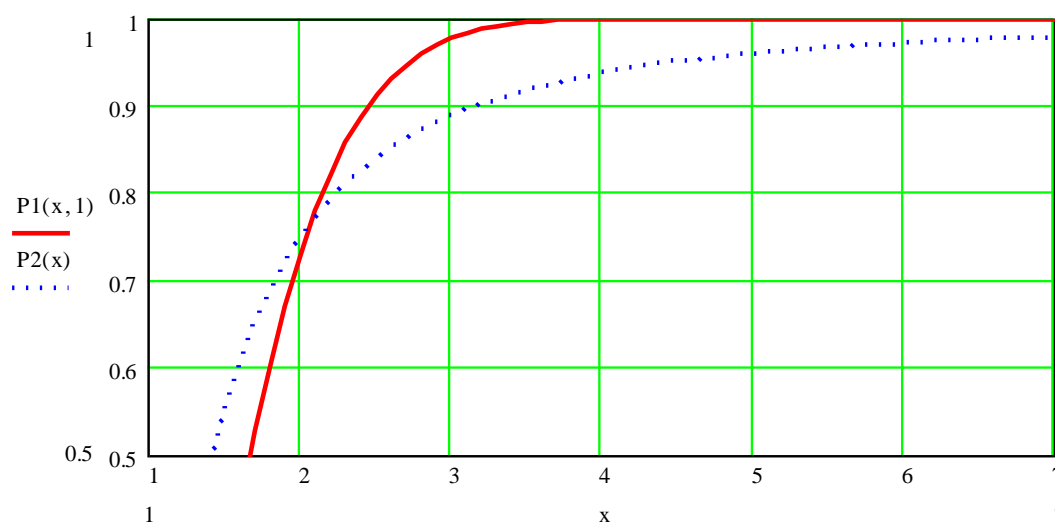


Рис. 2.6. Графік перетину кривих  $P_1(x, S)$  та  $P_2(x)$  при  $S = 1$ .

Аналізуючи рисунок 2.7, бачимо, що існує “особлива” точка – абсциса перетину кривих  $P_1$  та  $P_2$ , до якої  $P_2 > P_1$ , а потім знак нерівності змінюється на протилежний. Це значить, що до цієї точки доцільно використовувати основну нерівність Чебишева, а після неї краще використовувати функцію  $P_1$ , яка має місце для “великих” інтервалів, а це можливо у випадку субгауссового розподілу.

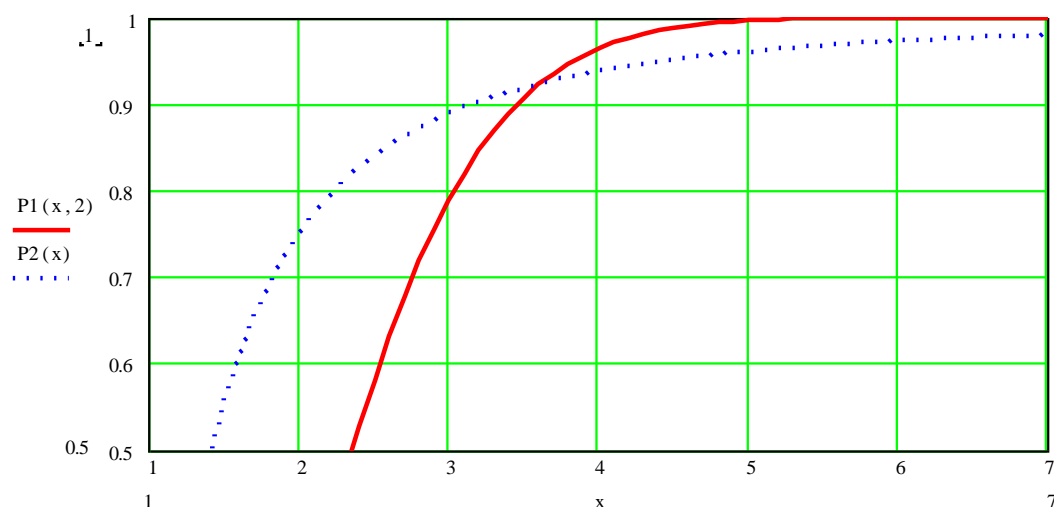


Рис. 2.7. Графік перетину кривих  $P_1(x, S)$  та  $P_2(x)$  при  $S = 2$ .

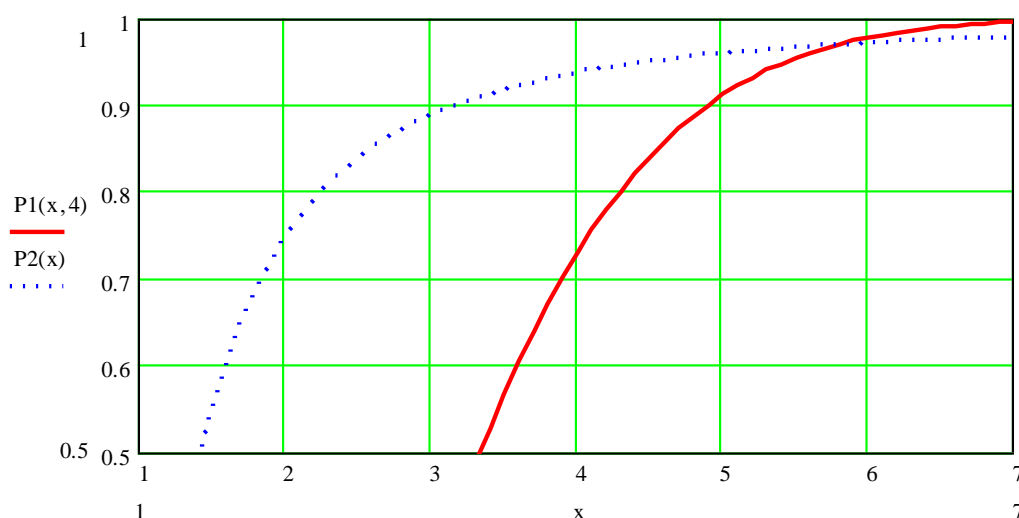


Рис.2.8. Графік перетину кривих  $P_1(x, S)$  та  $P_2(x)$  при  $S = 4$ .

На рисунку 2.7 видно, що починаючи з  $S = 1$  із збільшенням  $S$  величина абсциси точки перетину збільшується, тобто зсувається в бік “великих” інтервалів, тим сильніше, чим більше  $S$ .

Так при  $S = 1$  точка перетину має абсцису 2,08;

при  $S = 2$  відповідно 3,61;

при  $S = 4$  відповідно 5,8.

Цю точку в кожному випадку можна знайти з розв'язку рівняння

$$2 \exp\left(-\frac{x^2}{2S}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Використання субгауссового стандарту у порівнянні з використанням нерівності Чебишева (2.12) дає зменшення ймовірності методичної похибки на величину  $P_1(x) - P_2(x)$ , якщо величина  $x$  лежить справа абсциси точки перетину кривих. Отриманий результат і лежить в основі уточненої нерівності Чебишева у випадку субгауссового процесу. Зауважимо, що цей результат не залежить від конкретного виду субгауссової функції розподілу випадкової величини  $\xi$ , і в цьому сенсі він є загальним.

Проілюструємо використання наведених вище теоретичних обґрунтувань на конкретних прикладах.

*Приклади.*

1. Оцінемо по результатам спостереження  $\xi_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$  математичне сподівання випадкової величини  $\xi \in \mathbf{N}(\theta, 1)$ . Для точкової оцінки математичне сподівання

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k.$$



Апріорний розподіл  $\xi_k$  – гауссовий. Тому  $v_n \in \mathbf{N} \left( \theta, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ , звідки  $\frac{v_n - \theta}{\sqrt{n}} \in \mathbf{N} (0,1)$ .

Згідно першому наслідку з нерівності Чебишева (незалежно від розподілу), при  $\varepsilon = 3$ , маємо:

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{v_n - \theta}{\sqrt{n}} \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \varepsilon^{-2} = \frac{1}{9} \approx 0,11. \quad (2.20)$$

Згідно (2.16), маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{v_n - \theta}{\sqrt{n}} \right| \geq \varepsilon \right\} &\leq 2 \exp \left\{ - \frac{\varepsilon^2}{2\tau \left( \left| \frac{v_n - \theta}{\sqrt{n}} \right| \right)} \right\} = \\ &= 2 \exp \left\{ - \frac{9}{2} \right\} \approx 0,02. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Якщо безпосередньо використати інформацію про те, що  $v_n$  має стандартний гауссовий розподіл, то отримуємо значення [43]

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{v_n - \theta}{\sqrt{n}} \right| \geq \varepsilon \right\} \approx 0,003. \quad (2.22)$$

Отже, використання субгауссового стандарту у порівнянні з нерівністю Чебишева дає можливість в даному випадку підвищити оцінку нижньої межі

довірчої ймовірності з 0,89 до 0,98, в той час як теоретично її точне значення становить 0,997.

2. У випадку  $\varepsilon = 2$ , використовуючи (2.20) отримаємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|V_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25. \quad (2.23)$$

Згідно (2.16) маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{|V_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} &\leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau\left(\frac{|V_n - \theta|}{\sqrt{n}}\right)}\right\} = \\ &= 2 \exp\{-2\} = 0,271. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Якщо безпосередньо використати інформацію про те, що  $V_n$  має стандартний гауссовий розподіл, то отримуємо значення [43]

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|V_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \approx 0,046. \quad (2.25)$$

Аналізуючи рівності (2.23) та (2.24), можна зробити висновок що у цьому випадку доцільніше використовувати нерівність Чебишева, ніж субгауссовий стандарт, який в даному випадку не дає можливість підвищити оцінку нижньої межі довірчої ймовірності.

3. У випадку  $\varepsilon = 4$ , використовуючи (2.20) отримаємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-2} = \frac{1}{16} = 0,0625. \quad (2.26)$$

Згідно (2.21), маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} &\leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau\left(\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}}\right)}\right\} = \\ &= 2 \exp\{-8\} \approx 6,7 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

У випадку стандартного гауссового розподілу отримаємо [43]:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \approx 4 \cdot 10^{-4}. \quad (2.28)$$

При  $\varepsilon = 4$  використання (2.27) має значну перевагу у порівнянні з (2.26). А отриманий результат при використанні субгауссового стандарту становить 0,99933 є досить близьким у порівнянні з використанням (2.28) і становить 0,9996.

При  $\varepsilon \geq 5$  вирази (2.27) та (2.28) стають майже еквівалентними. Отже, як було вказано вище, використання субгауссового стандарту має місце для “великих” інтервалів.

## 2.6. Аналіз точносних оцінок для лінійного субгауссового процесу

Часто при побудові моделі гільбертового процесу використовують різні моделі лінійних формуючих систем. В дискретному випадку це моделі типу ковзного середнього, а в неперервному це різні фільтри. Тобто системи, які

формують згортку породжуючих процесів, в якості яких найчастіше беруть білий шум і деякі вагові функції, ядра перетворення або імпульсної реакції формуючого фільтра. Такі моделі дістали назву лінійних випадкових процесів [44, 45]. Основна їх привабливість і широке використання обумовлюються тим фактом, що у випадку породжуючого процесу з незалежними значеннями або приростами отримується процес з безмежно-подільною функцією розподілу, для якої, як відомо [45], існує канонічна форма характеристичної функції загального виду. Такі процеси не завжди є субгауссовими, але в багатьох випадках вони є гільбертовими.

В тому випадку, коли лінійний процес є субгауссовим, розроблений вище апарат дозволяє оцінити якість їх моделювання або оцінити точність роботи ІВС.

Коротко зупинимось на схемі застосування отриманих вище оцінок до лінійних процесів.

Лінійний процес визначається наступним чином [44, 45, 46]:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\eta(\tau), \quad t \in T, \quad (2.29)$$

де  $T$  – область визначення процесу (2.29) в часі,  $\varphi(\tau, t)$  – функція інтегровна з квадратом по  $\tau$  при всіх  $t \in T$ , яка зветься ядром лінійного процесу, а  $\eta(\tau)$ ,  $\tau \in (-\infty, \infty)$  – процес з незалежними приростами, який зветься породжуючим процесом.

Для того, щоб функція  $f_{\eta}(u; t)$  була одновимірною характеристичною функцією гільбертового процесу  $\eta(\tau)$  з безмежно подільним одновимірним законом розподілу необхідно і достатньо, щоб вона допускала зображення [38, 47, 48]

$$\ln f_\eta(u;t) = imu + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \right] d_x K_\eta(x,t), \quad (2.30)$$

де  $m$  – дійсна стала,  $K_\eta(x,t)$  – неспадна неперервна зліва обмежена функція, яка носить назву пуасонівського спектру стрибків у формулі Колмогорова, а підінтегральна функція при  $x = 0^+$  рівна  $-\frac{u^2}{2}$ .

Функція  $K_\eta(x,t)$ , що входить у формулу (2.30), визначається однозначно по заданій характеристичній функції  $f_\eta(u;t)$  безмежно подільного розподілу з скінченною дисперсією, як перетворення Фур'є-Стілтєса із співвідношення [47]

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f(u;t) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dK_\eta(x,t), \quad (2.31)$$

звідки в усіх точках неперервності по  $x$   $K_\eta(x,t)$  маємо [48, 49]

$$K_\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-iux} - e^{-iuy}}{iu} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_\eta(u;t) du, \quad (2.32)$$

а в точках розриву права частина (2.32) дорівнює  $0.5[K_\eta(x+0;t) + K_\eta(x-0;t)]$ .

Вираз (2.29) має місце як для однорідних так і для не однорідних процесів з незалежними приростами і носить досить загальний характер.

Одновимірною характеристичною функцією гільбертового лінійного випадкового процесу (2.29) визначається виразом [44]

$$\begin{aligned} \ln f_{\xi}(u, t) = iumx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{iux\varphi(\tau, t)} - 1 - iux\varphi(\tau, t)}{x^2} \right] d_x K_{\eta}(x, t) d\tau, \end{aligned} \quad (2.33)$$

де  $m$  – дійсна стала,  $K_{\eta}(x, t)$  – неспадна, неперервна зліва, обмежена функція по  $x$ , при всіх  $t \in (-\infty, \infty)$ , яка носить назву пуассонівського спектру стрибків у формулі Колмогорова, а підінтегральна функція при  $x = 0$  рівна  $-\frac{u^2}{2} \varphi^2(\tau, t)$ .

Якщо в (2.33) замість  $\varphi(\tau, t)$  взяти  $\varphi(t-\tau)$  а  $\eta(\tau)$  вважати однорідним процесом з незалежними приростами, то лінійний процес (2.33) буде стаціонарним у вузькому розумінні.

Аналогічно (2.31) для лінійного процесу маємо [44]

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_{\xi}(u; t) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} d_x K_{\xi}(x; t) = -\mathbf{D}\xi(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} d_x \hat{K}_{\xi}(x; t), \quad (2.34)$$

де  $\hat{K}_{\xi}(x, t)$  - при кожному фіксованому  $t \in$  звичайною функцією розподілу, тому

$$-\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_{\xi}(u; t) / \mathbf{D}\xi(t)$$

є характеристичною функцією розподілу  $\hat{K}_{\xi}(x, t)$ .

Це значить, що нормовані відхилення процесу  $\xi(t)$  мають функцію стрибків  $\hat{K}_{\xi}(x, t)$ , що є звичайною функцією розподілу.

Тому, якщо існує похідна по  $x$  для  $K_\xi(x, t)$ , тобто  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_\xi(u; t)$  і вона абсолютно неперервна, то тоді відразу одержуємо

$$K'_\xi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_\xi(u; t) du, \quad (2.35)$$

і завдяки відомій теоремі Леві [47]  $K'_\xi(x, t)$  неперервна по  $x$  і по заданій  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_\xi(u; t)$  встановлюється однозначно. Надалі функція  $K_\xi(x, t)$  – пуассонівських стрибків лінійного процесу не використовується, а буде використовуватися лише пуассонівський спектр стрибків породжуючого процесу  $K_\eta(x, t)$ .

Для гільбертового процесу  $\eta(t)$  з незалежними однорідними приростами має місце наступне символічне співвідношення

$$\begin{aligned} \mathbf{M}d\eta(\tau) &= \kappa_1 d\tau, \\ \mathbf{M}[d\eta(\tau) - \kappa_1 d\tau]^2 &= \mathbf{M}[d(\eta(\tau) - \kappa_1 \tau)]^2 = \kappa_2 d\tau, \end{aligned}$$

де  $\kappa_1 = \mathbf{M}\eta(1)$  та  $\kappa_2 = \mathbf{M}\eta^2(1) - \kappa_1^2$ .

З іншого боку, якщо  $\xi(t)$  – центрований лінійний процес, то його кореляційна функція визначається за допомогою виразу

$$R(t_1, t_2) = \kappa_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t_1) \varphi(\tau, t_2) d\tau. \quad (2.36)$$

Не будемо зупинятися детально на цих двох видах розкладу, вони досить широко викладені в літературі, наприклад [28].

Перейдемо до застосування методики перевірки гільбертових лінійних випадкових процесів на субгауссовість, що була викладена раніше в розділі 2.2. Позначимо експоненційну генератрису (твірну функцію) кумулянт випадкової величини  $\xi(t)$  – значення лінійного процесу в точці  $t$  через

$$g_{\xi}(y) = \ln \mathbf{M} e^{y\xi(t)} = \ln f_{\xi}(-yi; t) - y \cdot \mathbf{M}\xi, \quad y \in \mathbf{R}. \quad (2.37)$$

Як було показано вище, для перевірки на субгауссовість, необхідно щоб випадкові величини були центрованими, тому у формулі (2.37) потрібно відняти початковий момент.

З врахуванням (2.33) маємо

$$\begin{aligned} g_{\xi}(y) &= \ln f_{\xi}(u; t) = \ln f_{\xi}(-yi; t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{yx\varphi(\tau, t)} - 1 - yx\varphi(\tau, t)}{x^2} \right] d_x K_{\eta}(x, t) dt. \end{aligned} \quad (2.38)$$

**Зауваження 2.4.** Згідно (2.2) можна легко провести перевірку, що для (2.38)  $\mathbf{M}\xi(t) \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\xi^k &= \left. \frac{d^k g_{\xi}(y)}{dy^k} \right|_{y=0} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{x\varphi(\tau, t)e^{yx\varphi(\tau, t)} - x\varphi(\tau, t)}{x^2} \right] d_x K_{\eta}(x, t) dt \Big|_{y=0} = 0. \end{aligned}$$

А це означає, що в (2.30)  $m = 0$ .



Таким чином для гільбертового субгауссового лінійного процесу  $\xi(t)$  має місце наступна формула субгауссового стандарту:

$$\begin{aligned} \tau(\xi(t)) = & \\ = \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in R}} & \left[ \frac{2}{y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{yx\varphi(\tau,t)} - 1 - yx\varphi(\tau,t)}{x^2} \right] d_x K_{\eta}(x,t) d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

де  $\xi$  – значення лінійного процесу в точці  $t$ .

Нагадаємо, що при  $\xi \in Sub(\Omega)$  впливає, що  $\mathbf{M}\xi = 0$  і виконується нерівність  $\mathbf{M}\xi^2 \leq \tau^2(\xi)$ , тобто  $\mathbf{D}\xi \leq \tau^2(\xi)$ . Тому можна вивести наступний коефіцієнт (2.8) з урахуванням (2.36) та (2.39) в момент  $t$

$$S_t = \frac{\tau^2(\xi)}{R(t,t)} = \frac{\tau^2(\xi)}{\kappa_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau,t) d\tau}. \quad (2.40)$$

В розділі 2.2 розроблена методика перевірки різних випадкових величин на субгауссовість. Основна задача на практиці при оцінюванні точності моделювання і при аналізі похибок ІВС діагностики полягає у встановленні субгауссовості процесу, який досліджується.

Зупинимося на деяких прикладах з використанням описаної вище схеми дослідження процесів на субгауссовість.

Розглянемо випадок, коли  $\xi(t)$  – лінійний випадковий субгауссовий процес виду

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) d\pi(\tau), \quad t \in T,$$

ядро якого визначається функцією  $\varphi(\tau)$ , а породжуючий процес  $\eta(t)$  – однорідний з незалежними приростами, що входять в (2.29) є пуассонівський  $\eta(t) = \pi(t)$ .

Тобто це стаціонарний процес у вузькому сенсі, який залежить від ядра. Використовуючи характеристичну функцію цього процесу ми можемо дослідити його на субгауссовість. Відповідь буде залежати від характеристик породжуючого процесу, а більш конкретно від пуассонівського спектру стрибків породжуючого процесу.

$$\begin{aligned} \tau(\xi) &= \\ &= \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in R}} \left[ \frac{2}{y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{yx\varphi(\tau)} - 1 - yx\varphi(\tau)}{x^2} \right] d_x K_{\pi(1)}(x) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\text{де } K_{\eta}(x, t) \equiv K_{\pi(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \lambda, & x \geq 1. \end{cases}$$

Враховуючи останній вираз (2.41) можна представити у вигляді:

$$\tau(\xi) = \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in R}} \left[ \frac{2}{y^2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{y\varphi(\tau)} - 1 - y\varphi(\tau)) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

Модель процесу будується у вигляді згортки або тільки наближено у вигляді дискретної згортки породжуючого процесу з дискретним ядром, як це

описано в [46]. Отримавши формулу (2.42), при відповідних ядрах, можна дослідити її на приналежність до  $Sub(\Omega)$ .

Таким чином, якщо в (2.42) існує права частина, то для такого процесу ми будемо принаймні теоретично мати субгауссовий стандарт, дисперсію, коефіцієнт субгауссовості. Це дає можливість порівнювати між собою різні моделі імпульсних процесів, наприклад, такі як модель RC-шуму – дискретну і неперервну, модель RLC-шуму, різні моделі імпульсних потоків.

В тому випадку, коли теоретичні дослідження моделей виявляються складними доводиться застосовувати чисельні методи, як це було показано в цьому розділі за допомогою графіків. Коли вихідний лінійний процес, що моделюється, не є субгауссовим, то переходять до зрізаних розподілів, тобто до обмежених випадкових значень лінійного процесу. А згідно наведеної вище теорії, обмежена випадкова величина є субгауссова і для неї легко знайти її субгауссовий стандарт або принаймні його оцінку, яка буде дорівнювати обмежуючій константі.

### **РОЗДІЛ 3. АЛГОРИТМИ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ТОЧНОСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІВС НА ОСНОВІ СУБГАУССОВИХ ПРОЦЕСІВ**

#### **3.1. Особливості статистичної обробки результатів вимірювання в інформаційно-вимірювальних системах діагностики**

На сьогодні статистична обробка результатів досліджень над випадковими величинами та процесами (сімействами випадкових величин) починається з вироблення планів отримання експериментальних результатів, які найчастіше отримуються у вигляді реалізацій досліджуваних випадкових величин та процесів.

**Зауваження 3.1.** В існуючій літературі досить часто зустрічається твердження про те, що реалізації випадкової величини чи процесу залишаються випадковими після проведення експерименту (aposteriori). Це помилкове уявлення нами не використовується. До експерименту (apriori) ми маємо випадкову величину чи процес (вибірку випадкових величин), після експерименту ми маємо зафіксовану реалізацію (числова послідовність), яка не є випадковою, хоча з нею може бути зв'язана певна міра [50]. Інакше навіть тоді проводити експеримент, наслідком якого є знову випадкова величина чи процес.

В цьому плані етап отримання реалізації експериментальним шляхом є початковим і суттєво залежить від моделі, яка описує апріорно випадкову величину чи процес, тобто від сукупності тих припущень, які робляться на етапі формування плану проведення вимірювального експерименту та основних положень теоретичних моделей, які при цьому використовуються.

Найчастіше ці припущення стосуються функцій розподілу або еквівалентних їм характеристичних функцій, твірних функцій моментів чи щільностей розподілу. Якщо такі характеристики неможливо апріорі з'ясувати,

то використовуючи їх окремі параметри – моменти, семіінваріанти, кореляційні та спектральні функції, коефіцієнти асиметрії та ексцесу (чотири перші моменти), або лише такі властивості процесу як ергодичність чи стаціонарність, або конструктивні моделі та їх характеристики, як, наприклад клас лінійних випадкових процесів. У випадку нестаціонарних процесів найбільш привабливою є модель періодичного випадкового процесу чи процесу з періодичними кореляційними функціями.

В нашому випадку для використання моделі субгауссових процесів нам потрібно мати оцінку функції або щільності розподілу не обов'язково кожного разу в явному виді. Це можна зробити один раз для даного механізму або виду обладнання, а потім при аналогічних умовах виходити з загального класу розподілів (в нашому випадку класу  $Sub(\Omega)$  та  $L_2(\Omega)$ ), будувати оцінки точності вимірюваних параметрів, а оцінки будемо отримувати на базі гільбертових субгауссових процесів.

В третьому і шостому розділах роботи будемо виходити з моделі періодичних випадкових процесів для вібросигналів.

Для перевірки основних теоретичних результатів роботи, які в основному були викладені в другому розділі, було використано лабораторний макет вітроенергетичної установки [51]. Таке рішення напрямку експериментальних досліджень було вибрано виходячи з наступних міркувань:

1. Досліджувані вібропроцеси, які супроводжують роботу вітрових електростанцій є нестаціонарними в часі, а значить і не ергодичними, бо викликані різними джерелами, механіка яких зв'язана з валами і роторами, які обертаються під силою досить нестійкого і різко змінного в часі і в широкому діапазоні вітрового потоку, а тому в механічну систему вітрових електростанцій входять вузли електромеханічного плану з глибокими зворотними стабілізуючими зв'язками. Тому і віброакустичні процеси треба обробляти таким чином, щоб принаймні у теоретичному плані можна було б на значних часових інтервалах вважати реалізаціями стаціонарних ергодичних

процесів. Крім того отримувані послідовності відліків віброакустичних процесів були синхронізовані з фазовими кутами валів, що обертаються в досліджуваних механізмах.

В науковій літературі з цього приводу не вдалося знайти задовільних рекомендацій щодо методів обробки таких процесів, а тому, хоча дисертація спочатку не була присвячена цим питанням, не була б завершеною без вирішення цих проблем. Тому в останніх розділах з'являються нові результати, які стосуються статистичної обробки випадкових періодичних процесів в класі субгауссових, доведені до алгоритмів та робочих математичних програм.

2. Згідно з Комплексною програмою будівництва вітрових електростанцій, прийнятою в 1997 році, усе більша роль в енергетиці України приділяється вітроелектричним агрегатам. Широке впровадження таких агрегатів вимагає одночасного створення для них засобів контролю та діагностики. Одним із шляхів розв'язання поставленої задачі є створення спеціалізованих інформаційно-вимірювальних систем діагностики.

Розробка таких систем потребує, насамперед, докладного вивчення безпосередньо самого об'єкту діагностики, тобто вітроелектричного агрегату, а також попереднього дослідження (за допомогою математичних моделей) фізичних процесів, що супроводжують роботу вітроелектричних агрегатів.

Сучасна вітроелектрична установка (ВЕУ) є складною інженерною спорудою, у складі якої є механічні, електричні та електронні системи, об'єднані єдиним технологічним процесом перетворення кінетичної енергії вітрового потоку у електричну енергію [52, 53].

З наведених причин дуже важливим є практичне визначення режимів роботи як окремих частин та систем ВЕУ, так і всієї її конструкції в умовах реальної експлуатації. Тому створення вимірювального обладнання, яке забезпечить комплексне вивчення режимів роботи ВЕУ, є нагальним, враховуючи, що в експлуатації знаходяться сотні ВЕУ, та незмінну тенденцію нарощування потужностей вітрових електростанцій (ВЕС) в Україні.

Отримані з допомогою зазначеного вимірювального обладнання дані слугуватимуть вдосконаленню, в першу чергу, експлуатації існуючих ВЕС в Україні та допоможуть більш ефективно проектувати та споруджувати нові потужності цих станцій.

Методи і програмне забезпечення для ІВС контролю і діагностики ґрунтується на розгляді віброакустичних сигналів, що виникають в окремих вузлах вітроагрегату як випадкових процесів.

Досліджуваний зразок ІВС діагностики орієнтований на вимірювання та обробку як віброакустичних сигналів, так і інших інформаційних сигналів, що супроводжують роботу вітроелектричного агрегату (наприклад, електричних, акустостемісійних тощо).

### **3.2. Методи перевірки вібросигналів в інформаційно-вимірювальних системах діагностики на субгауссовість**

В даному підрозділі розглядаються алгоритми та програмне забезпечення, що базується на методах оцінки розподілу фізичних процесів.

У розроблених програмах при одержанні оцінок моментів застовується метод усереднення за часом. При згладжуванні гістограм використовується метод моментів і система кривих Пірсона. Коротко зупинимось на основних співвідношеннях, які було використано Пірсоном при побудові своєї системи кривих.

Аналізуючи експериментально отримані гістограми, Пірсон виявив, що вони часто мають значну асиметрію та ексцес, тобто сильно відрізняються від нормального розподілу. Асиметрія та ексцес розподілу пов'язані з третім та четвертим моментами, тому для того, щоб теоретична крива з достатньою точністю описувала такий несиметричний експериментальний розподіл, необхідно, щоб вона мала такі ж чисельні значення перших чотирьох моментів, як і експериментальна крива.

Беручи за основу різницеве рівняння, якому задовольняє гіпергеометричний розподіл, і вводячи деякі додаткові припущення, Пірсон отримав диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{x-a}{b_0 + b_1x + b_2x^2} p(x), \quad (3.1)$$

де  $p(x)$  – щільність розподілу.

Розв'язки цього рівняння називаються кривими Пірсона. Параметри  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  та  $b_2$ , що входять в рівняння (3.1), можуть бути виражені через перші чотири моменти розподілу, для якого підбирається аналітичний вираз. А саме, при умові центрування розподілу

$$a = b_1, \quad b_0 = \frac{c_0}{d}, \quad b_1 = \frac{c_1}{d}, \quad b_2 = \frac{c_2}{d}, \quad (3.2)$$

де

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= -\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2), \\ c_1 &= -\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2), \\ c_2 &= -2\mu_2\mu_4 + 6\mu_2^3 + 3\mu_3^2, \\ d &= 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

У виразах (3.3)  $\mu_n$ ,  $n = 2, 3, 4$  – центральні моменти розподілу.

Як відомо [51], загальний розв'язок рівняння (3.1) має вигляд



$$p(x) = Ce^{\varphi(x)}, \quad \varphi(x) = \int \frac{x-a}{b_0 + b_1x + b_2x^2} dx. \quad (3.4)$$

Константа  $C$ , що входить у вираз (3.4), вибирається з умови, якій повинна задовольняти щільність будь-якого розподілу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1. \quad (3.5)$$

Характер кривої  $\varphi(x)$  може бути дуже різним в залежності від коренів (характеристичного рівняння) знаменника в (3.4)

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 = 0. \quad (3.6)$$

Пірсон ввів величину

$$\kappa = \frac{b_1^2}{4b_0b_2}, \quad (3.7)$$

від значення якої залежать корені рівняння (3.6), а значить і характер кривої розподілу. Величина (3.7) отримала назву “критерій Пірсона” або “каппа Пірсона”.

Каппа Пірсона є основним критерієм при виборі типу апроксимуючої кривої. Всього існує 13 типів кривих, серед яких 3 основних, а інші є їхніми граничними або частинними випадками. Деякі автори, наприклад, [46], виділяють окремо ще нормальний розподіл як 13 тип. Основні типи мають

місце при наступних значеннях каппи Пірсона: тип I при  $\kappa < 0$ , тип IV при  $0 < \kappa < 1$ , тип VI при  $\kappa > 1$ .

Тип 13 є розв'язком рівняння

$$\frac{dp(x)}{dx} = -\frac{x-a}{\sigma^2} p(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < p(x) < \infty,$$

яке одержуємо коли в знаменнику (3.1) покласти  $b_0 = -\sigma^2$ ,  $b_1 = b_2 = 0$ .

Далі в цьому розділі наведемо деякі результати, що стосуються досліджень на субгауссовість розподілів К.Пірсона.

В розділі 2 було детально розглянуто деякі важливі частинні розподіли, що належать системі кривих Пірсона і було показано, що тип 13, та такі розподіли як рівномірний і арксинуса, які належать до типу I є субгауссовими. Для них було отримано явні вирази субгауссових стандартів та коефіцієнта субгауссовості. Тепер наведемо з обґрунтуванням основні розрахункові формули для основних трьох типів Пірсона. Розподіли першого типу по Пірсону, при деяких несуттєвих обмеженнях на параметри, всі можна віднести до субгауссових

Інші два основних типи Пірсона IV та VI не завжди в первісному виді є субгауссовими, але в дисертації вони теж детально розглядаються виходячи з тих міркувань, що зрізані варіанти цих розподілів теж будуть субгауссовими, що дає змогу використовувати їх на практиці.

Переходимо до розгляду основних типів розподілів Пірсона, деяку цікаву інформацію з цього питання можна знайти, наприклад, в [54].

### 3.3. Основні співвідношення для згладжування гістограм по Пірсону

Тип I є одним з основних трьох типів і отримується при  $\kappa < 0$ . Його щільність розподілу, що називається бета-розподілом [57], описується наступним виразом

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{q_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{q_2} & -a_1 < x < a_2, \\ 0 & x \notin (-a_1, a_2), \end{cases} \quad (3.8)$$

де  $q_1 > -1, q_2 > -1, a_1 + a_2 > 0$ .

Цей розподіл зосереджений на інтервалі  $x \in [-a_1, a_2]$ ,  $a_1 \in (-\infty, \infty)$ ,  $a_2 \in (-\infty, \infty)$ , при умові, яка вже міститься в (3.8),  $-a_1 < a_2$ , тобто

$$a_1 + a_2 > 0. \quad (3.9)$$

Інакше кажучи, довжина інтервалу, на якому зосереджено розподіл (3.8) завжди має бути додатною.

Якщо  $q_1$  та  $q_2$  одночасно додатні, то щільність розподілу (3.8) унімодальна, тобто має один максимум і на кінцях інтервалу  $[-a_1, a_2]$  перетворюється в нуль. Якщо  $q_1$  та  $q_2$  одночасно від'ємні, то ця щільність розподілу має один мінімум і прямує до нескінченності по мірі наближення до граничних точок, тобто отримаємо  $U$ -подібну криву. Якщо  $q_1$  та  $q_2$  мають різні знаки, то на одному кінці ця щільність розподілу перетворюється в нуль, а на іншому в нескінченність. Тобто отримаємо  $J$ -подібну криву.

Для існування інтегралу від  $p(x)$ , визначеного згідно з формулою (3.8), тобто для існування "момента нульового порядку", необхідно щоб  $q_1 > -1$  і  $q_2 > -1$ . Ці умови виявляються достатніми і для існування вищих моментів.

Оскільки, згідно зроблених вище припущень, значення  $a_1 = 0$  і  $a_2 = 0$  виявляються допустимими у формулі (3.8), то необхідно розкрити її зміст для цих частинних випадків, в зв'язку з тим, що при цьому безпосередньо скористатися виразом (3.8) неможливо через появу нулів у знаменнику.

Якщо в якості лівої граничної точки розподілу (3.8) взяти 0, тобто формально в формулі (3.8) здійснити перехід від змінної  $x$  до  $x - a_1$ , що геометрично відповідає зсуву (без деформації) графіка цієї кривої на величину  $|a_1|$  вздовж осі  $x$ , то отримаємо

$$p(x) = \begin{cases} \tilde{p}_0 x^{q_1} \left(1 + \frac{x - a_1}{a_2}\right)^{q_2} & 0 < x < a_1 + a_2, \\ 0 & x \notin (0, a_1 + a_2), \end{cases}$$

Звідки, при  $a_1 = 0$  маємо

$$p(x) = \begin{cases} \tilde{p}_0 x^{q_1} \left(1 + \frac{x}{a_2}\right)^{q_2} & 0 < x < a_2, \\ 0 & x \notin (0, a_2), \end{cases} \quad (3.10)$$

де  $q_1 > -1, q_2 > -1, a_1 + a_2 > 0$ .

Аналогічно, при  $a_2 = 0$  отримуємо частинний випадок виразу (3.8) у вигляді

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{q_1} x^{q_2} & -a_1 < x < 0, \\ 0 & x \notin (-a_1, 0), \end{cases} \quad (3.11)$$

де  $q_1 > -1, q_2 > -1, a_1 + a_2 > 0$ .

Зсуви, що здійснюються таким чином, не впливають на значення центральних моментів порядку другого і вище, а лише ведуть до зміни першого моменту розподілу (3.8).

При  $q_1 = q_2 = 0$  розподіл (3.8) не втрачає змісту і перетворюється у рівномірний розподіл на інтервалі  $[-a_1, a_2]$ .

При  $q_1 = q_2 = -\frac{1}{2}, a_1 = a_2 = a$  отримуємо "арксинуса-щільність" розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \pi a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} & -a < x < a, \\ 0 & x \notin (-a, a). \end{cases} \quad (3.12)$$

Інші розподіли, що отримуються з (3.8) при  $q_1 + q_2 = -1$  іноді називають "узагальненими арксинус-щільностями". Арксинус-щільність грає важливу роль в задачах статистичної радіотехніки. При  $a_1 = 0, a_2 = 0$  з (3.8) з урахуванням (3.10) отримується класичний бета-розподіл першого роду на інтервалі  $[0, 1]$  у вигляді [40]

$$p(x) = B_{q_1 q_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{-B(q_1 + 1, q_2 + 1)} x^{q_1} (1 - x)^{q_2} & 0 < x < 1, \\ 0 & x \notin (0, 1), \end{cases} \quad (3.13)$$

де  $B(x, y)$  – бета функція [57].

Тип IV є основним і отримується при  $0 < \kappa < 1$ . Для цього типу  $S < -3$ ,  $l_1 > 6$ ,  $l_2 < 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_2 \geq 3$ . Його щільність розподілу описується виразом

$$p(x) = p_0 \left( 1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^q e^{-\text{varctg} \frac{x}{a}}; \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (3.14)$$

де  $S < -3$ ,  $q < -2,5$ ,  $-\text{varctg} \frac{x}{a} \in (-\infty, \infty)$ .

Зауважимо, що для того, щоб від  $p(x)$ , визначеної згідно (3.14), існував інтеграл (нульовий момент), досить вимагати виконання умови  $q < -1$  ( $S < 0$ ), при всіх  $-\text{varctg} \frac{x}{a} \in (-\infty, \infty)$ . Проте для існування перших чотирьох моментів розподілу (3.14), за допомогою яких і визначаються всі невідомі параметри щільності, що розглядається, необхідно щоб  $q < -2,5$  ( $S < -3$ ), що і буде припускатися надалі.

Розподіл (3.14) зосереджено на всій прямій і є унімодальним. Практично, без допомоги обчислювальної техніки або спеціальних таблиць, з таким розподілом важко працювати, оскільки параметри, що входять в нього не виражаються за допомогою елементарних функцій через отримані емпіричним шляхом оцінки перших моментів. Крім того, при визначенні чисельних значень  $p_0$  необхідно застосовувати значне збільшення розрядності обчислення.

Зокрема, в нашій обчислювальній практиці такий розподіл отримувався в тих випадках, коли у сукупності спостережень над нормально розподіленою випадковою величиною зустрічалися поодинокі вимірювання, що різко відхилялися (нехарактерні викиди, помилкові спостереження). Виключення з вибірки таких поодиноких спостережень часто приводило до нормального

"Згладженого" закону. Крім того IV тип зустрічався і в інших випадках, не пов'язаних з нормальним розподілом.

Зупинимося на з'ясуванні умов існування інтегралу від правої частини в (3.14) і на визначенні  $p_0$ . Припускаючи у (3.14)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{S-2}{2}, \quad (3.15)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^q e^{-\operatorname{var} \operatorname{ctg} \frac{x}{a}} dx &= p_0 \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\operatorname{var} \operatorname{ctg} \frac{x}{a}} \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{S}{2}} d \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \\ &= p_0 a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\nu \theta} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{\frac{S}{2}} d\theta = p_0 a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{-S} \theta e^{-\nu \theta} d\theta = F(-S, \nu) p_0 a. \end{aligned}$$

З урахуванням нормування щільності розподілу

$$p_0 = \frac{1}{aF(-S, \nu)}, \quad (3.16)$$

де через  $F(-S, \nu)$  позначена трансцендентна функція, для якої К.Пірсоном були складені таблиці її логарифмів, і яка визначається наступним виразом

$$F(x, \nu) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^x \theta e^{-\nu \theta} d\theta \equiv e^{-\frac{1}{2}\nu\pi} \int_0^{\pi} \sin^x \varphi e^{\nu\varphi} d\varphi, \quad (3.17)$$

де здійснено заміну  $\Theta = \pi/2 - \varphi$ . Зауважимо, що інтеграли в правій частині (3.17) існують при всіх  $x \geq 0$ . З виразу (3.17) випливає, що  $F(x, \nu) = F(x, -\nu)$  при всіх  $x \geq 0$ , тобто парність по аргументу  $\nu$ , тому маємо

$$F(x, \nu) = \frac{1}{2} [F(x, \nu) + F(x, -\nu)] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^x \theta \frac{e^{-\nu\theta} + e^{\nu\theta}}{2} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^x \theta ch(\nu\theta) d\theta$$

або остаточно

$$F(x, \nu) = \int_0^{\pi/2} \cos^x \theta ch(\nu\theta) d\theta. \quad (3.18)$$

З останнього виразу видно, що

$$\frac{\partial F(x, \nu)}{\partial x} = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^x \theta \ln(\cos \theta) ch(\nu\theta) d\theta < 0,$$

при  $x \geq 0$ . Тому  $F(x, \nu)$  монотонно спадає як функція  $x$ , причому найбільше її значення  $F(x, \nu) = \frac{1}{\nu} sh \frac{\pi\nu}{2}$ .

Має місце співвідношення

$$F(x+2, \nu) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2) + \nu^2} F(x, \nu), \quad (3.19)$$

при  $x > 0$ ,  $\nu \neq 0$ .



При великих значення  $-S$  та  $|v|$  замість (3.16) і (3.17) можна скористатися асимптотичною формулою, виведеною К.Пирсоном [55]

$$p_0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{-S}{2\pi}} \frac{e^{\frac{1}{12S} \cos^2 \varphi} \varphi |v|}{(\cos \varphi)^{1-S}},$$

де  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{|v|}{-S}$ .

Зупинимось на визначенні початкових умов у цьому випадку

$$m_1 = \frac{av}{S}. \quad (3.20)$$

Враховуючи (3.20), а також припускаючи  $m_0 = 1$ , отримуємо перші початкові моменти при  $q < -2,5$ ,  $S < -3$ ,

$$m_2 = \frac{a^2}{S(S+1)} (v^2 - S), \quad (3.21)$$

$$m_3 = \frac{a^3 v}{S(S+1)(S+2)} (v^2 - 3S - 2), \quad (3.22)$$

$$m_4 = \frac{a^4}{S(S+1)(S+2)(S+3)} [v^4 - v^2(6S+8) + 3S(S+2)]. \quad (3.23)$$

Перші центральні моменти отримуються з (3.20), (3.21), (3.22) та (3.23) в наступному вигляді

$$\bar{m}_2 = \frac{-a^2}{S^2(S+1)}(v^2 - S), \quad (3.24)$$

$$\bar{m}_3 = \frac{4a^3v(S^2 + v^2)}{S^3(S+1)(S+2)} = -\bar{m}_2 \frac{4av}{S(S+2)}, \quad (3.25)$$

$$\bar{m}_4 = \frac{3a^4(v^2 + S^2)[(S-6)(v^2 + S^2) + 8S^2]}{S^4(S+1)(S+2)(S+3)}. \quad (3.26)$$

Подальші викладки проводяться аналогічно типу I.

Якщо у виразах (3.21), (3.22) та (3.23) замінити  $\bar{m}_j$  на  $\bar{\mu}_j$ ,  $j = 2, 3, 4$ , то отримуємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими  $a$ ,  $v$  та  $S$ . Зупинимося коротко на визначенні цих параметрів (точніше їх статистичних оцінок).

Враховуючи визначення  $\beta_1$  та  $\beta_2$  і вводячи позначення  $z = S^2 + v^2$ , отримаємо з (3.24), (3.25) та (3.26)

$$\beta_1 = \frac{\bar{\mu}_3^2}{\bar{\mu}_2^3} = \frac{4^2(S^2 - z)(S+1)}{(S+2)^2 z},$$

$$\beta_2 = \frac{\bar{\mu}_4^2}{\bar{\mu}_2^2} = \frac{3(S-6)(S+1)}{(S+2)(S+3)} + \frac{24S^2(S+1)}{(S+2)(S+3)z},$$

або

$$\frac{\beta_1(S+2)^2}{2(S+1)} = \frac{8S^2}{z} - 8,$$

$$\frac{\beta_2(S+2)(S+3)}{2(S+1)} = S - 6 + \frac{8S^2}{z}.$$

Віднявши почленно від другої рівності першу та поділивши на  $S+2$ , отримаємо

$$\frac{\beta_2(S+3)}{3(S+1)} - \frac{\beta_1(S+2)}{2(S+1)} = 1.$$

Звідки

$$S = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{3\beta_1 - 2\beta_2 + 6} \quad (3.27)$$

та

$$z = \frac{S^2}{1 + \frac{\beta_1(S+2)^2}{16(S+1)}} = \frac{16S^2(S+1)}{w} = \frac{S^2}{1-\kappa}. \quad (3.28)$$

Оскільки  $0 < \kappa < 1$ , то  $z > 0$ . Використовуючи раніше введене позначення  $z = S^2 + v^2$  отримуємо

$$v^2 = -S^2 + \frac{16S^2(S+1)}{w} = -S^2 + \frac{S^2}{1-\kappa} = S^2 \frac{\kappa}{1-\kappa}. \quad (3.29)$$

Оскільки  $S < -3$  для вказаного типу, то маємо  $w < 0$ . Тому

$$|\nu| = S(S+2)\sqrt{\frac{-\beta_1}{w}} = |S|\sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}}. \quad (3.30)$$

З рівняння (3.24), з урахуванням переходу від  $\bar{m}_2$  до оцінки  $\bar{\mu}_2$  отримуємо

$$a^2 = -\frac{\bar{\mu}_2 S^2 (S+1)}{\nu^2 + S^2} = -\bar{\mu}_2 (S+1)(1-\kappa).$$

Враховуючи  $z = S^2 + \nu^2$  та формулу (3.29), отримуємо

$$|a| = \frac{1}{4}\sqrt{-\bar{\mu}_2 w} = \sqrt{-\bar{\mu}_2 (S+1)(1-\kappa)}, \quad (3.31)$$

де

$$w = 16(S+1)(1-\kappa).$$

Залишилося тепер з'ясувати знаки при  $a$  і  $\nu$ , які залежать від знаку  $\bar{\mu}_3$ . З виразу (3.18) видно, що  $F(x, \nu) > 0$ , тому що на  $[0, \pi/2]$ ,  $\cos \theta \geq 0$  і  $ch \theta \geq 0$ , а так як у формулі (3.16) завжди  $\frac{1}{aF(-S, \nu)} > 0$ , то звідси випливає, що завжди в (3.14) треба брати  $\alpha > 0$ . Оскільки у визначенні третього центрального моменту (3.25)  $a$  і  $\nu$  входять у вигляді добутку і  $a > 0$ , то  $\nu$  буде мати знак протилежний знаку  $\bar{\mu}_3$ . В формулі (3.25) перед добутком  $a \cdot \nu$  є знак "-", тому у формулі (3.31) будемо брати арифметичне значення кореня квадратного, тоді маємо

$$v = \text{sign}(-\bar{\mu}_3)S(S+2)\sqrt{\frac{-\beta_1}{w}}, S < -3. \quad (3.32)$$

Зупинимося на положенні моди для типу, що розглядається.

Диференціюючи (3.14) по  $x$  отримаємо

$$p'(x) = p_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{q-1} e^{-\text{varctg} \frac{x}{a} \left(\frac{2qx}{a^2} - \frac{v}{a}\right)}. \quad (3.33)$$

$p'(x)$  перетворюється в нуль при  $x = -\infty$ ,  $x = \infty$  і  $x = \frac{va}{2q}$  (оскільки

$q < -2,5$ ). В точці

$$x = \frac{va}{2q} = \frac{va}{S-2} \quad (3.34)$$

цей закон має один максимум, абсциса якого і визначає положення моди.

Таким чином формули (3.15), (3.31) та (3.32) дозволяють визначити всі числові параметри, що входять в (3.14) якщо є оцінки центральних моментів  $\bar{\mu}_2$ ,  $\bar{\mu}_3$  і  $\bar{\mu}_4$ .

Значення  $x$  "згладженої" кривої та  $x'$  кривої, що спостерігається, з урахуванням (3.20) пов'язані співвідношенням

$$x = x' - \mu_1 + \frac{av}{S}. \quad (3.34)$$

Цей тип в кожному конкретному випадку потребує окремого дослідження на субгауссовість. Але очевидно, що зрізані розподіли IV типу субгауссові.

Тип VI є основним типом і отримується при  $\kappa > 1$ . Для нього  $S < -3$ . Його щільність розподілу, іменована іноді щільністю розподілу Парето [56] визначається у такий спосіб

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \left(\frac{x}{a}\right)^{q_1} \left(\frac{x}{a} - 1\right)^{q_2} & \text{при } \frac{x}{a} > 1, q_1 < -4, a \neq 0, q_2 > -1, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (3.35)$$

Цей розподіл зосереджений на інтервалі  $x \in (a, \infty)$  при  $a > 0$  або на інтервалі  $x \in (-\infty, a)$  при  $a < 0$ .

Якщо  $q_2 > 0$ , то ця щільність унімодальна, тобто має один максимум і в точці  $x = a$  обертається в нуль, а на нескінченності асимптотично наближається до нуля. Якщо  $q_2 < 0$ , то крива щільності при наближенні аргументу до точки  $a$  іде на нескінченність, і має вид j-подібної кривої.

Для існування інтеграла від правої частини, тобто для існування моменту "нульового порядку", у (3.35) треба щоб  $q_1 < 0$  і  $q_2 > -1$ . Однак для існування моментів до 4-го порядку включно треба щоб  $q_1 < -4$  при  $q_2 > -1$ .

Тип VI основний і для визначення усіх вхідних у нього параметрів використовуються в загальному випадку всі оцінки перших чотирьох моментів розподілу (3.35). При  $\bar{m}_3 > 0$  параметри  $a$ ,  $q_1$  і  $q_2$  визначаються за тими формулами що і  $a_1 + a_2$ ,  $q_1$  і  $q_2$  у першому типі, однак при  $\bar{m}_3 < 0$  ці формули відрізняються знаками, що входять в них. Останній збіг формул підтверджується і тим фактом, що розподіл VI типу за допомогою простого

перетворення  $x = \frac{a}{z}$  зводиться до розподілу I-го типу. Тому багато авторів [57]

цей тип окремо не розглядають. Але нас цікавить не тільки теорія, але і питання практичного застосування цього розподілу, то ми зупинимося на ньому докладніше.

При  $a = 1$ , вираз (3.35) має такий вид

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x^{q_2}}{B(q_2 + 1, -q_2 - q_1)(1+x)^{-q_1}} & \text{при } x \in (0, \infty), \\ 0 & \text{при } x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (3.36)$$

де  $q_1$  і  $q_2$  визначаються за тими формулами, що і для виразу (3.35). Розподіл (3.36) відомий як бета-розподіл другого роду.

Між цими розподілами існує наступний зв'язок [58]

$$\frac{B(-q_1 - q_2 - 2, q_2)}{(1+x)^2} \left( \frac{1}{1+x} \right) = \frac{x^{q_2}}{B(q_2 + 1, -q_1 - q_2 - 1)(1+x)^{-q_1}},$$

де  $x \in (0, \infty)$ .

Іншими словами, якщо випадкова величина  $\xi$  має щільність розподілу (3.13), то величина  $\xi^{-1} - 1$  має щільність (3.36).

Зокрема z-розподіл Фішера, застосовується в дисперсійному аналізі, і обумовлений співвідношенням [59]

$$p_{mn}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}, & x > 0 \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (3.37)$$

де  $m, n = 1, 2, 3, \dots$ , являє собою окремий випадок бета-розподілу другого роду (3.36). За цим законом розподілу частка двох сум, що містять відповідно по  $m$  і  $n$

доданків центрованих незалежних нормально розподілених випадкових величин з однаковими дисперсіями [59].

При  $q_2 = 0$  вираз (3.35) не втрачає змісту і перетворюється в XI-й тип.

Зупинимося на обґрунтуванні формули для  $p_0$ . Маємо

$$\int_a^{\infty} p_0 \left(\frac{x}{a}\right)^{q_1} \left(\frac{x}{a} - 1\right)^{q_2} dx = 1.$$

Увівши заміну змінних  $x = \frac{a}{z}$  одержуємо

$$\int_1^0 p_0 z^{-q_1} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{q_2} (-az^{-2}) dz = ap_0 \int_0^1 z^{-q_1 - q_2 - 2} (1 - z)^{q_2} dz = 1.$$

З огляду на визначення бета-функції і

$$\overline{m}_1 = \frac{a_2 - a_1 + a_2 q_1 - a_1 q_2}{S}$$

при  $q_1 + q_2 + 2 = S$  і  $q_2 > -1$  маємо

$$p_0 = \frac{1}{aB(q_2 + 1, 1 - S)} = \frac{\Gamma(-q_1)}{a\Gamma(q_2 + 1)\Gamma(1 - S)}, \quad S < 1. \quad (3.38)$$

У такий спосіб у розглянутому випадку для існування моменту "нульового порядку" параметри, що входять у (3.35), повинні задовольняти умовам



$$q_1 < 0, q_2 > 1, S < 1, -q_1 > q_2 + 1. \quad (3.39)$$

Однак, як буде показано нижче, для існування 4-го моменту виконання умов (3.39) виявляється недостатнім.

Якщо величина  $a$  виходить від'ємною, то тоді маємо

$$\int_{-\infty}^{-|a|} p_0 \left( -\frac{x}{|a|} \right)^{q_1} \left( -\frac{x}{|a|} - 1 \right)^{q_2} dx = \int_{|a|}^{\infty} p_0 \left( \frac{x}{|a|} \right)^{q_1} \left( \frac{x}{|a|} - 1 \right)^{q_2} dx.$$

Останній інтеграл збігається з проаналізованим раніше, якщо в ньому формально замінити  $a$  на  $|a|$ . Тому остаточно для довільного  $a$  маємо

$$p_0 = \frac{1}{aB(q_2 + 1, 1 - S)} = \frac{\Gamma(-q_1)}{|a|\Gamma(q_2 + 1)\Gamma(1 - S)}. \quad (3.40)$$

Зупинимося на визначенні початкових моментів для розподілу (3.35).

У загальному випадку для усіх  $a \neq 0$  з урахуванням (3.38) і (3.40) маємо

$$m_n = \frac{a^n B(q_2 + 1, 1 - S - n)}{B(q_2 + 1, 1 - S)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.41)$$

При  $S < 1 - n$  і  $q_2 > -1$  одержуємо

$$m_n = \frac{a^n \Gamma(1 - S - n) \Gamma(-q_1)}{\Gamma(1 - S) \Gamma(-q_1 - n)} = \frac{a^n \prod_{j=1}^n (-q_1 - j)}{\prod_{j=1}^n (1 - S - j)} = a^n \prod_{j=1}^n \frac{-q_1 + j}{S + j - 1}. \quad (3.42)$$

Таким чином, якщо припустити замість (3.39), що виконуються співвідношення

$$q_1 < -4, \quad q_2 > -1, \quad (S < -3), \quad (3.43)$$

то з урахуванням (3.42) перші початкові моменти розподілу (3.35) виражаються в такий спосіб

$$m_1 = \frac{a(q_1 + 1)}{S},$$

$$m_2 = \frac{a^2(q_1 + 1)(q_1 + 2)}{S(S + 1)},$$

$$m_3 = \frac{a^3(q_1 + 1)(q_1 + 2)(q_1 + 3)}{S(S + 1)(S + 2)},$$

$$m_4 = \frac{a^4(q_1 + 1)(q_1 + 2)(q_1 + 3)(q_1 + 4)}{S(S + 1)(S + 2)(S + 3)}.$$

(3.44)

Перші чотири центральних моменти виходять з

$$m_1 = m_{01} = \frac{a(q + 1)}{q} - a = \frac{a}{q}, \quad \text{якщо в цих формулах припустити, що}$$

$a_1 + a_2 = a$ , у наступному виді

$$\bar{m}_2 = \frac{a^2(q_1 + 1)(q_2 + 1)}{S^2(S + 1)}, \quad (3.45)$$

$$\bar{m}_3 = \frac{2a^3(q_1 + 1)(q_2 + 1)(q_2 - q_1)}{S^3(S + 1)(S + 2)},$$

$$\bar{m}_4 = \frac{3a^4(q_1 + 1)(q_2 + 1)[(q_1 + 1)(q_2 + 1)(S - 6) + 2S^2]}{S^4(S + 1)(S + 2)(S + 3)},$$

за умови (3.43).

Якщо у виразах (3.45) моменти  $\bar{m}_j$  замінити їхніми оцінками  $\bar{\mu}_j$ ,  $j = 2, 3, 4$ , то в підсумку одержуємо систему трьох рівнянь із трьома невідомими  $a$ ,  $q_1$  і  $q_2$ , у результаті розв'язку якої виходять вираз для статистичних оцінок зазначених параметрів.

У силу того, що одночасно  $q_2 > -1$  і  $q_1 < -4$  параметр  $\varepsilon$ , уведений при розгляді першого типу, для VI-го типу задовольняє умові  $\varepsilon < 0$ . За умов (3.43) одержуємо для розглянутого випадку нерівність  $w < 0$ . Маємо

$$\varepsilon < 0, \quad S < -3, \quad w > 0. \quad (3.46)$$

Згідно (3.45) для оцінок моментів маємо

$$\bar{\mu}_3 = a(q_2 - q_1) \frac{2\bar{\mu}_2}{S(S + 2)},$$

звідси, у силу того, що  $\bar{\mu}_2 > 0$  і  $S(S + 2) > 0$ , знак  $\bar{\mu}_3$  і добутки  $a(q_2 - q_1)$  – завжди збігаються, а для того, щоб мало місце (3.43) треба щоб  $q_2 - q_1 > 0$ , у такий спосіб знаки і  $\bar{\mu}_3$  і  $a$  повинні збігатися. Отже, з першого виразу (3.45) відразу одержуємо формули

$$a = \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\bar{\mu}_3) \sqrt{\bar{\mu}_2 w}, \quad (3.47)$$

а тому що  $q_2 > q_1$ , то одержуємо

$$q_1 = \frac{S-2}{2} - \frac{S(S+2)}{2} \sqrt{\frac{\beta_1}{w}}, \quad (3.48)$$

$$q_2 = \frac{S-2}{2} + \frac{S(S+2)}{2} \sqrt{\frac{\beta_1}{w}},$$

Зупинимося на співвідношенні, що зв'язує абсциси  $x'$  вибіркової кривої (гістограми) з абсцисами  $x$  кривої "згладжування"

$$x = x' - \mu_1 + \frac{a(q_1+1)}{q_1+q_2+2} = x' - \mu_1 + \frac{a(q_1+1)}{S}. \quad (3.49)$$

Вхідні дані програми представляють собою ряд послідовних упорядкованих у часі рівновіддалених відліків ергодичних випадкових процесів. Вхідні дані оформляються у виді текстового файлу (у кодах ASCII).

Вихідні дані програми видаються в текстовий файл і на екран монітора. Вихідна інформація складається зі значень змінних, повідомлень, таблиць і графіків, у яких міститься наступне:

1. Вид гістограми: центрована, нормована чи ні;
2. Обсяг вибірки, кількість інтервалів у гістограмі;
3. Оцінки початкових моментів;
4. Оцінка дисперсії, середньоквадратичного відхилення, інтервал гістограми, найменше і найбільше спостереження;
5. Оцінки центральних моментів, коефіцієнти асиметрії й ексцесу, каппа Пірсона;
6. Тип згладжуючої кривої, її параметри;
7. Таблиці значень згладжуючої кривої і гістограми, відповідні їм графіки.

Схема алгоритму програми наведена на рис. 3.1.

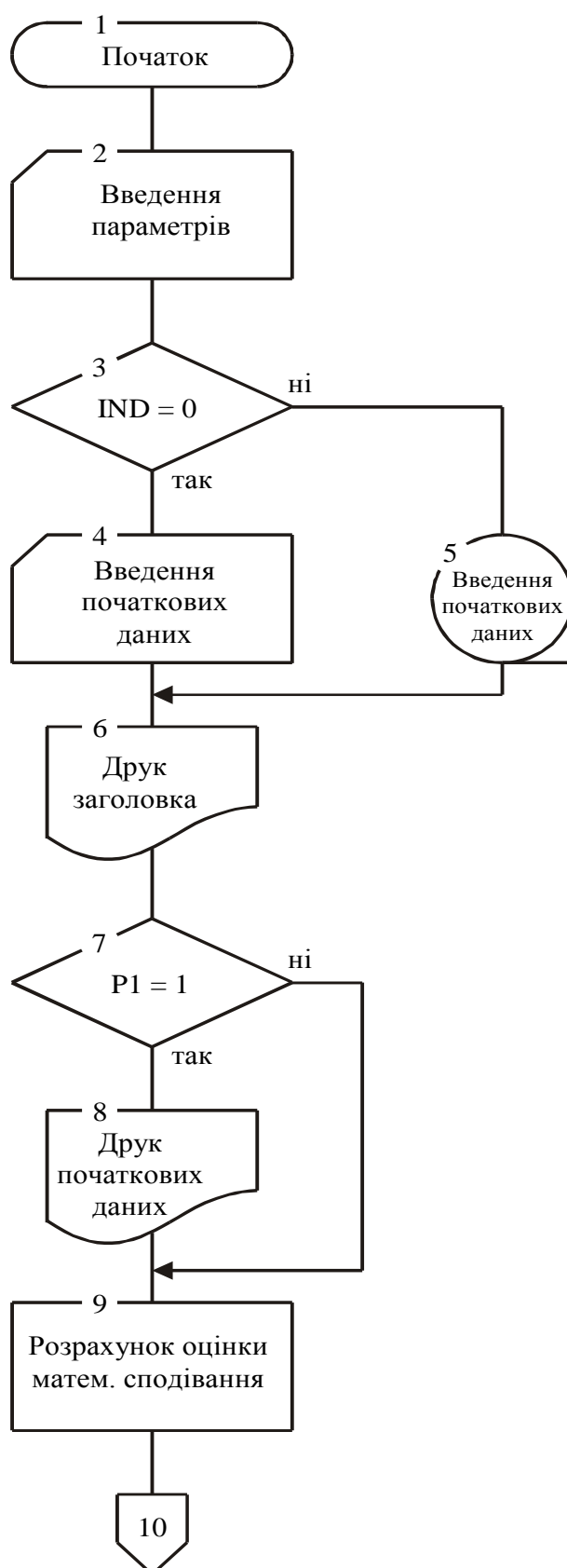
**Алгоритм програми для підбору кривих Пірсона**

Рис. 3.1.Схема алгоритму програми для підбору кривих Пірсона

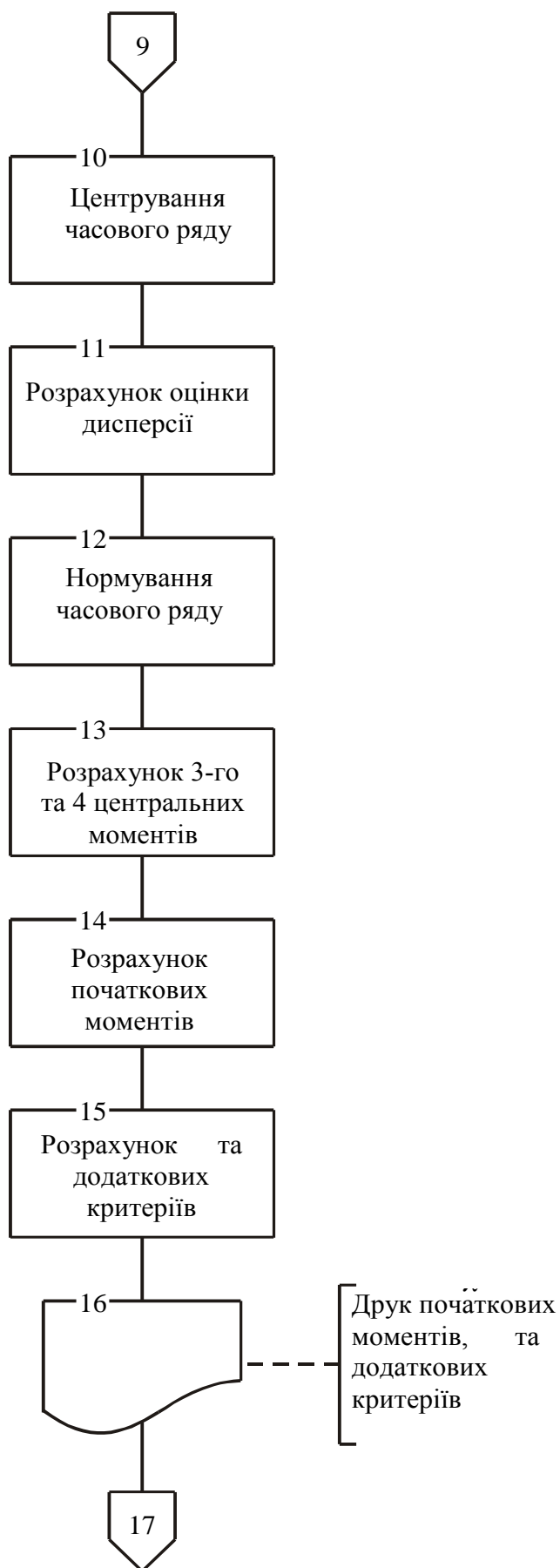


Рис. 3.1 (продовження).

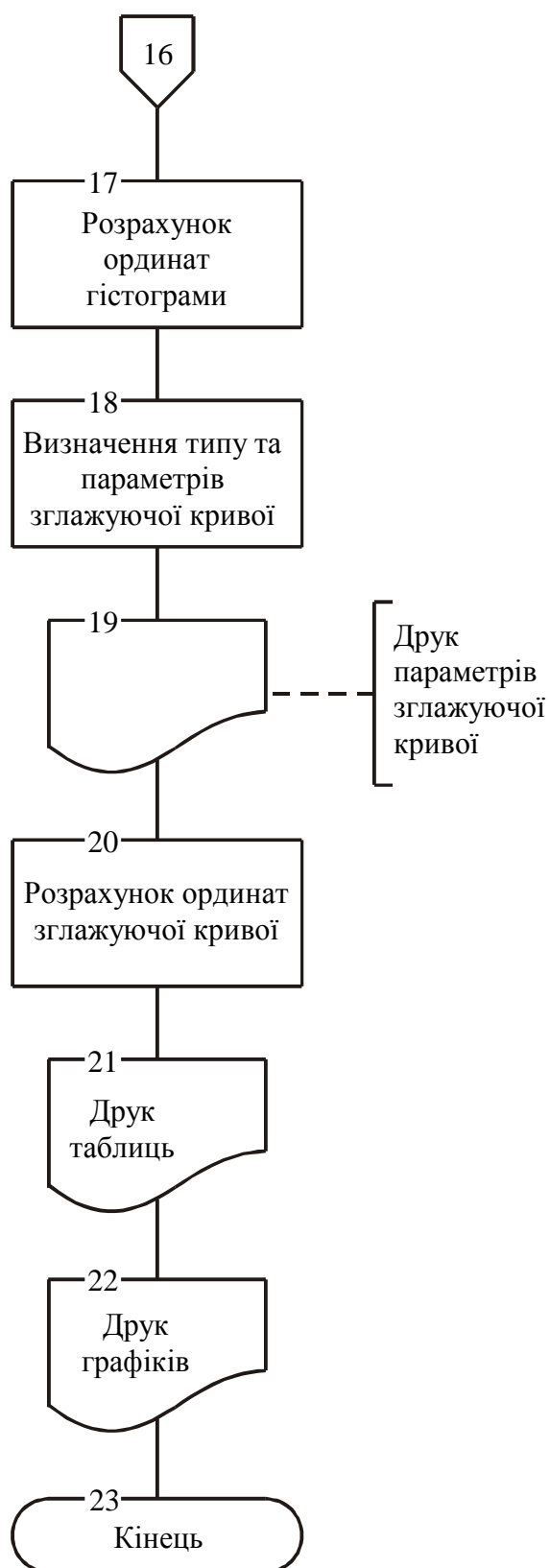


Рис. 3.1 (закінчення).



## РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ СИСТЕМ ДІАГНОСТИКИ НА ОСНОВІ СТАЦІОНАРИЗАЦІЇ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

### 4.1. Роль стаціонаризації при обробці вимірювальної інформації

В наш час не можливо уявити жодну галузь народного господарства, де б не використовувалось різноманітне ТО. Це в першу чергу електроприлади, енергогенеруючі установки, електроприводи та агрегати. Споживач зацікавлений у високій надійності використовуваного технічного обладнання. Особливо гостро це питання постає в останні роки в зв'язку із значним періодом експлуатації та високою вартістю обладнання. Найбільш важливою задачею є попередження відмов, які в деяких випадках можуть призвести до значних матеріальних збитків і навіть катастроф.

Одним із методів підвищення надійності роботи технічного обладнання є технічна діагностика обладнання з використанням сучасних ІВС на базі ЕОМ, що значно розширює можливості ІВС діагностики. Використання потужних ЕОМ докорінно змінило уявлення про роль і структуру ІВС. Зараз ІВС діагностики являють собою найчастіше цілий комплекс, функціонально об'єднаних в логічні структури, засобів які не лише призначені для збору інформації, контролю і діагностування [10], а і потужна база по обробці інформації, її зберіганню та прийняттю рішень (керування об'єктом).

При розробці ІВС діагностики необхідно мати добре розроблені статистичні і обчислювальні методи, які б дозволяли з необхідною точністю обробляти на ЕОМ експериментальні дані, а також математичні моделі, які з фізичної точки зору з достатньою достовірністю описували б процеси функціонування виробів.

На даному етапі розвитку науки створення таких систем діагностики не викликає значних труднощів, але їх розробка ведеться виходячи з припущення про **стаціонарність** досліджуваного процесу. В даній роботі пропонується

методика побудови ІВС діагностики, що значно розширює можливості діагностування. Базуючись на статистичному підході, який розглянуто в роботах [15, 60], розглядається модель кусково-однорідного процесу Пуассона, як типова та найбільш вживана модель для класу процесів з незалежними приростами, а також виділяються класи процесів які характеризуються параметрами положення та масштабу.

ІВС діагностики, як правило, працюють в умовах випадкових вхідних процесів тому алгоритм роботи таких систем тісно пов'язані з теорією побудови статистичних оцінок діагностичних параметрів та аналізом діагностичних просторів. А це в свою чергу вимагає, щоб при аналізі ІВС використовувалися моделі стаціонарних і ергодичних вхідних інформаційні сигнали. Але часто інформаційні сигнали в найбільш цікавих ситуаціях, що спостерігаються на практиці, з фізичної точки зору не можна безпосередньо описати стаціонарними моделями. І тоді дослідники на практиці повинні шукати шляхи такої попередньої обробки інформаційних сигналів, яка б дозволяла при обробці явно нестационарних з фізичної точки зору сигналів використовувати математичні методи, які застосовуються при обробці стаціонарних випадкових процесів. На практиці це досягається різними шляхами. Один із найчастіше вживаних це *пошук вкладених стаціонарних процесів*. Другий це пошук і *стаціонаризація* спеціальних класів процесів. Тут мова йде не про заміну або переведення нестационарних процесів в стаціонарні, а про пошук шляхів та методів математичної обробки певних класів нестационарних з фізичної точки зору процесів.

Слід особливо зауважити, що в даній роботі під терміном **стаціонаризація** завжди розуміється наступне: це процедура яка полягає в тому, що шляхом попередньої обробки, отриманого з ІВС нестационарного з фізичної точки зору процесу, отримується або будується новий стаціонарний випадковий процес, котрий зберігає повну інформацію про вимірюваний параметр, величину чи функцію вимірюваного фізичного процесу.

В подальших викладках буде суттєво використуватися відома *характеристична функція множини* або так звана *індикаторна функція* [61]. Тому перш ніж формулювати основну теорему стаціонаризації кусково-стаціонарних випадкових процесів дамо означення цієї функції.

*Індикаторна функція.* В даній роботі індикаторна функція визначається так

$$I_A(t) = \begin{cases} 0, & t \notin A, \\ 1, & t \in A, \end{cases} \quad (4.1)$$

де  $A$  – деяка множина моментів часу, що належить деякій системі множин (більш точно кільцю множин), а  $t$  – число яке характеризує час, взятий з множини, на якій задається процес відповідно.

## 4.2. Класи процесів

Розробка, вивчення та обґрунтування математичної моделі фізичних сигналів є один із найважливіших етапів дослідження функціонування різних ІВС діагностики. Саме від того, наскільки математична модель відповідає фізичному явищу, в значній мірі залежить точність визначення характеристик реального процесу. В даній роботі моделі досліджуваних процесів розбиті на класи. Наведемо короткий опис цих класів.

***Клас процесів, що характеризуються положенням і масштабом (клас ППМ).*** Як вказувалося вище при обробці нестационарних сигналів можна піти шляхом стаціонаризації інформаційних сигналів, якщо наперед відомо характер їх нестационарності. А це вимагає пошуку і вивчення певних класів математичних моделей нестационарних випадкових вимірюваних сигналів для яких в принципі можливо провести стаціонаризацію, а також і відповідних методів її успішної реалізації. В результаті проведення дисертаційних досліджень був детально досліджений один з таких класів. Зупинимося на його означенні, та короткому дослідженні.

**Означення.** Дві щільності  $p_1(x)$  та  $p_2(x)$  належать до одного типу коли між ними існує співвідношення

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma} p_2\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad \sigma > 0, \quad (4.2)$$

$m$  – параметр положення;  $\sigma$  – параметр масштабу.

Надалі такий клас (тип) будемо називати класом процесів, що характеризуються положення і масштабом.

Зупинимося на деяких важливих типах розподілів, що характеризуються параметрами положення та масштабу.

*Рівномірний розподіл.*

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \frac{1}{a+b}, & x \in [a, b], \end{cases} \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a < b. \quad (4.3)$$

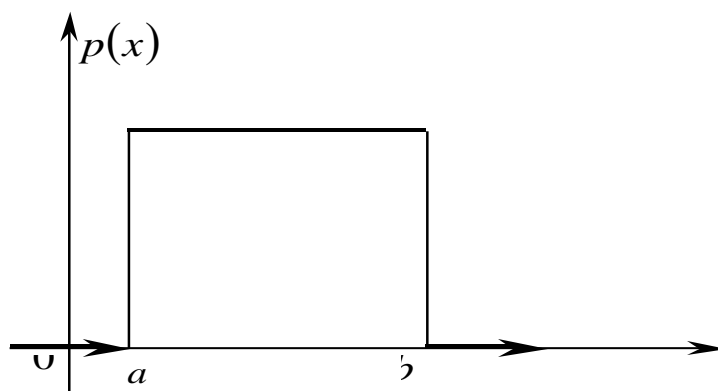


Рис. 4.1 Щільність рівномірного розподілу

*Гауссівський розподіл.* Нормальний закон є типовим прикладом з класу ПМ.

При дослідженні різних технічних систем використовують нормальний закон із

щільністю розподілу, що визначається формулою наступного виду:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a \in \mathbf{R}, \quad \sigma > 0, \quad (4.4)$$

де  $a$  - параметр положення,  $\sigma$  - параметр масштабу.

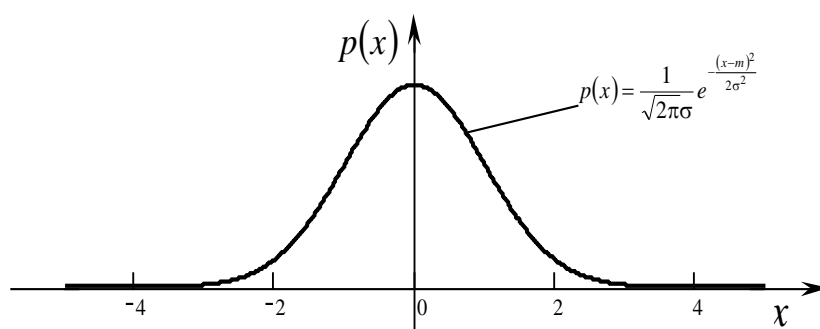


Рис. 4.2 Щільність нормального розподілу, при  $a = 0$ ,  $\sigma = 1$ .

Параметр  $a$  характеризує положення цієї щільності розподілу і значить зміна величини  $a$  приводить до зсуву графіку без деформації в напрямку вісі  $x$ , а зміна  $\sigma$  приводить до масштабної деформації без зміщення вершини кривої. На рис. 4.2 приводиться стандартна крива щільності розподілу гауссівської випадкової величини, а відповідні її числові значення зазвичай наводяться в таблицях.

*Показниковий розподіл.* Функція розподілу показникової випадкової величини має наступний вигляд

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x \in [0, \infty), \quad (4.5)$$

а щільність розподілу, що відповідає (2.5)

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (4.6)$$

відповідно параметр положення і масштабу дорівнює  $\frac{1}{\lambda}$ ,

$\lambda^{-1}$  – є одночасно і параметром положення і параметром масштабу.

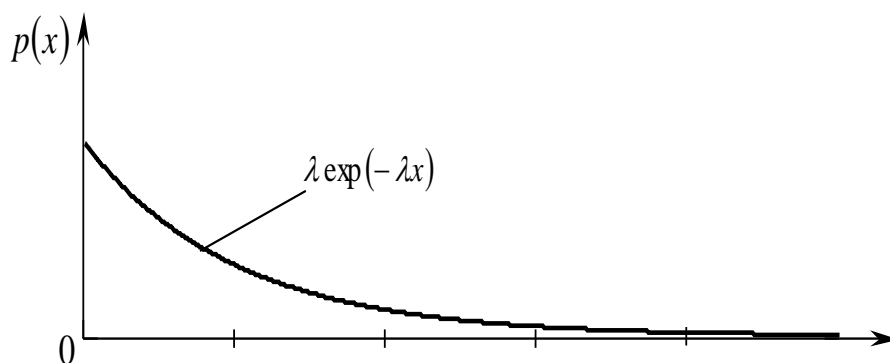


Рис. 4.3 Щільність ймовірностей показникового розподілу.

Показників розподіл часто використовують в теорії надійності, а саме, в тих випадках, коли елемент не старіє, тобто його залишковий час життя не залежить від того, скільки часу він пропрацював до даного моменту часу.

*Розподіл арксинуса.*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, & x \in (-a, a); \\ 0, & x \notin [-a, a], \end{cases} \quad a > 0, \quad (4.7)$$

де  $a$  параметр положення,  $t$  параметр масштабу.

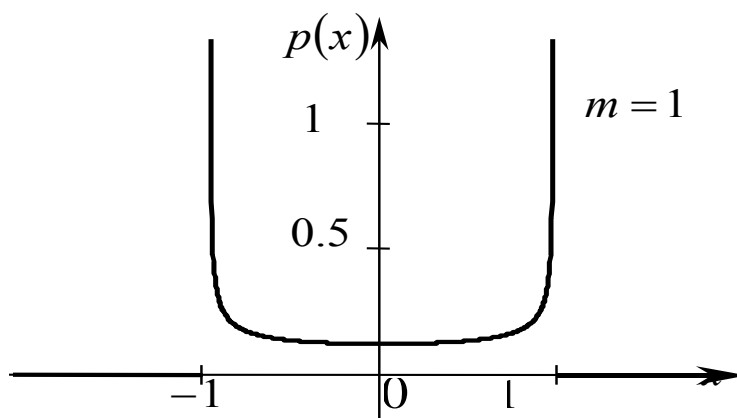


Рис. 4.4 Щільність розподілу арксинуса при  $a=0$  і  $m=1$ .

*Розподіл Вейбулла.* Щільність розподілу Вейбулла визначається наступним виразом:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\alpha}{\sigma} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\sigma}}, & x \geq 0, \quad \alpha > 0, \sigma > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

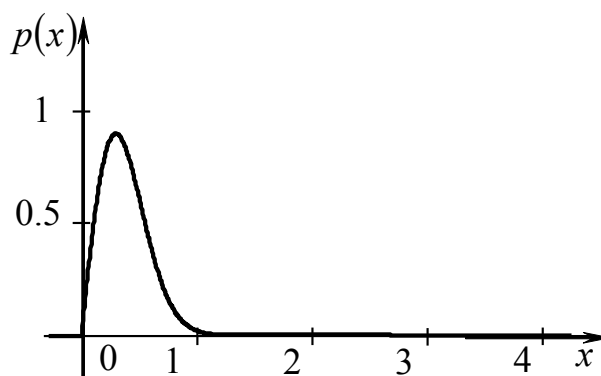


Рис. 4.5 Щільність розподілу Вейбулла, при  $\sigma=1$  і  $\alpha=2$ .

- параметр положення,
- параметр масштабу.

При  $\alpha=1$ , як частинний випадок, маємо показниковий розподіл, а при  $\alpha=2$  – релеївський.

Криві функції розподілу Вейбулла не належать сімейству кривих Пірсона.

*Розподіл Релея.* Щільність розподілу Релея визначається виразом

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0, \sigma > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Щільність розподілу Релея має властивість характерну для класу ПМ.

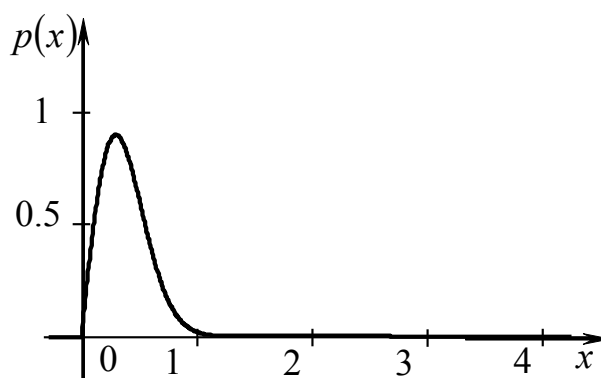


Рис. 4.6 Щільність розподілу Релея.

*Розподіл Ерланга.* Щільність розподілу Ерланга

$$p_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} x^n e^{-\lambda x}, & x \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (4.10)$$

$n + 1$  - кількість доданків в сумі випадкових величин експоненційного типу, які формують закон Ерланга.

При  $n = 0$  маємо як частинний випадок одну експоненційно розподілену ВВ з показниковим типом розподілу.



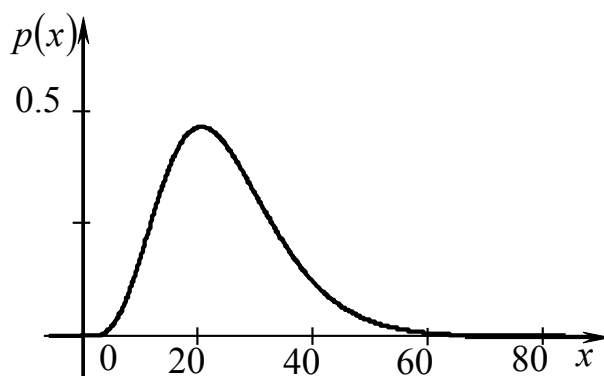


Рис. 4.7 Щільність розподілу Ерланга, при  $\lambda = 0,2$  і  $n = 5$

$\mathbf{M}\xi = \frac{n+1}{\lambda}$  - параметр положення,  $\mathbf{D}\xi = \frac{n+1}{\lambda^2}$  - параметр масштабу.

Якщо відомо, що нестационарність випадкового процесу, у якого одновимірна функція розподілу процесу належить ПМ класу, викликана зміною параметрів положення, то такий клас процесів можна стаціонаризувати методом масштабних коефіцієнтів який розроблено в даній роботі.

*Приклад.* Випадкова величина  $\xi$  має щільність рівномірного розподілу на відрізьку  $[a, b]$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x),$$

де  $I$  – індикаторна функція (1).

Для цього закону  $m = \frac{b-a}{2}$ ,  $\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$ , нормовані відхилення  $\frac{(\xi - m)\sqrt{12}}{(b-a)}$ , а

$$\text{щільність } \hat{p}(x) = \frac{\sqrt{12}}{b-a} p_{\xi} \left( \frac{x - \frac{b-a}{2}}{b-a} \sqrt{12} \right).$$

Таким чином, якщо для кожного відліку  $\xi_t$  нестационарного процесу ППМ зробити перехід до нового процесу згідно  $\frac{(\xi_t - m_t)\sqrt{12}}{b_t - a_t}$ , то отримаємо стаціонарну модифікацію ППМ з нормованим рівномірним розподілом. Множник  $\frac{\sqrt{12}}{b_t - a_t}$  – є масштабним множником з неперервним часом для даного випадку. Коли процес ППМ одночасно є і процесом КСП (див. нижче), то в цьому випадку масштабні множники будуть з дискретним часом (тобто буде їх послідовність).

**Клас кусково-стаціонарних процесів (клас КСП).** Розглянемо випадковий вектор-процес

$$\Xi_n(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)) \quad (4.11)$$

з стохастично незалежними стаціонарними компонентами, заданий на інтервалі  $t \in [a, b]$  і нехай послідовність множин  $B_k, k = \overline{1, n}$  є розбиттям інтервалу  $[a, b]$  точками  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , а  $I_{B_k}(t)$  індикаторна функція, визначена згідно (4.1), множини  $B_k$ , тоді випадковий процес

$$\xi_{\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(t) I_{B_k}(t) \quad (4.12)$$

зветься *процесом розладки*, а моменти  $t_1, t_2, \dots, t_n$  *моментами розладки*.

Якщо для компонент вектора (4.11) задано одновимірну  $F_k(x; t), t \in [a, b]$  і двовимірну  $F_k(x_1, x_2; t_1, t_2), t_1, t_2 \in [a, b]$  функції розподілу, то тоді на відрізку  $[a, b]$  можна розглядати загальну одновимірну функцію розподілу процесу (4.12)

$$F_{\Sigma}(x_1; t_1) = \sum_{k=1}^n p_k F_k(x_1; t_1) I_{B_k}(t) \quad (4.13)$$

та двовимірну

$$F_{\Sigma}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \sum_{k=1}^n p_k F_k(x_1, x_2; t_1, t_2), \quad (4.14)$$

де  $p_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$  вагові коефіцієнти, для яких  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ .

**Клас кусково-однорідних процесів (клас КОП).** Опис цього класу подібний до опису наведеного вище з тією відмінністю, що тепер розглядається *нестационарний* випадковий вектор-процес

$$\Xi_n(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)), \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (4.15)$$

з стохастично незалежними *однорідними* компонентами, заданий на нескінченному інтервалі  $t \in (-\infty, \infty)$ , де кожна компонента вектора має свою одновимірну функцію розподілу  $F_k(x; t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  і двовимірну  $F_k(x_1, x_2; t_1, t_2)$ ,  $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ , то тоді на інтервалі  $(-\infty, \infty)$  можна розглядати загальну одновимірну функцію в вигляді (4.13), та двовимірну виду (4.14).

### **Стохастично періодичний процес (клас СПП).**

Слід відзначити, що теорія стохастично періодичних випадкових процесів, це теорія вимірних функцій двох змінних, одна з яких, розглядається як параметр, - по ній процес є періодичним, а по другій змінній процес завжди розглядається як функція *невпорядкованої* множини, яка задана на деякому ймовірносному просторі. Саме завдяки цій другій змінній і з'являються у випадкового процесу властивості, не притаманні детермінованим функціям

двох впорядкованих змінних. По другій змінній випадковий процес не може мати періодичних властивостей, бо вона не упорядкована подібно числам на числовій вісі.

Слідуючи Слуцькому наведемо означення періодичних випадкових процесів

**Означення.** Сепарабельний випадковий процес  $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$ , (включаючи і комплекснозначний) називається періодичним (коротко  $T$ -періодичним), якщо існує таке число  $T > 0$ , що скінченновимірні вектори  $(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))$  і  $(\xi(t_1 + T), \xi(t_2 + T), \dots, \xi(t_n + T))$ , де  $t_1, t_2, \dots$  – множина сепарабельності процесу  $\xi(t)$ , при всіх цілих  $n > 1$  є стохастично еквівалентними в широкому розумінні. У випадку комплекснозначних періодичних процесів  $\xi(t)$  і  $\xi(t + T)$  вважається, що їх дійсні та уявні частини мають одну і ту ж послідовність скінченновимірних функцій розподілу.

Нагадаємо, що два дійсних випадкових процеси  $\xi_1(t)$  і  $\xi_2(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ , задані на одному і тому ж ймовірносному просторі називаються:

а) стохастично еквівалентними (в точному сенсі), якщо для будь-якого  $t \in (-\infty, \infty)$   $\mathbf{P}\{\xi_1(t) \neq \xi_2(t)\} = 0$ ;

б) стохастично еквівалентними в широкому розумінні, якщо ці процеси мають однакові послідовності скінченновимірних розподілів.

**Побудова моделі.** Модель будемо будувати виходячи із співвідношень між процесом  $\xi(t)$  і вкладеним до нього процесом  $\hat{\xi}(t)$ .

Введемо вектор

$$\Xi_n(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)), \quad (4.16)$$

де  $t \in (-\infty, \infty)$  або  $t \in (0, \infty)$ , у якого всі компоненти стохастично незалежні. Тоді

$$\Xi_n(t) = (\xi(t + T), \xi(t + 2T), \dots, \xi(t + nT)) \quad (4.17)$$

вектор з незалежними компонентами.

Для стохастично-періодичного процесу вектори-колонки  $\Xi^{(n \times 1)}(t)$  та  $\Xi^{(n \times 1)}(t + kT)$  визначені згідно (4.14) і (4.15) є стохастично-еквівалентні,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , тобто кожна компонента першого з них є стохастично-еквівалентна відповідній компоненті другого.

Нехай  $t \in \mathbf{T}$ , і  $\mathbf{T}$ - неперевна множина. Припустимо, що на  $\mathbf{T}$  є розбиття виду

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m, \quad t_j \in \mathbf{T}, \quad j = \overline{0, m},$$

*Ступінчастою* - називають всяку функцію, яка приймає скінченне або зліченне число значень, а *простою функцією*, коли число значень скінченне. Зауважимо, що кусково-стала функція із скінченою кількістю ступеньок (точок) називається *простою* функцією.

За допомогою кусково-сталої функції можна записати яку завгодно суму чисел, якщо використати інтеграл Стілтєса або дельта-функцію.

### 4.3. Вінеровські випадкові процеси.

Дослідження різних фізичних явищ, наприклад, руху броунівської частинки, шумової напруги, що виникає в провіднику при тепловому русі носіїв заряду показали, багато явищ можна описати виходячи з єдиної математичної моделі, числові характеристики якої набувають той або інший конкретний фізичний зміст в залежності від досліджуваного явища.

Однією з таких математичних моделей може бути вінеровський процес, що є класичним прикладом випадкових процесів з незалежними приростами. З історії його відкриття й дослідження заслуговують на увагу наступні факти.

На початку XIX століття (1828 рік) англійський ботанік Роберт Броун (R.Brown) вивчаючи в рух мікроскопічної частинки в рідині, згодом названий

його ім'ям, помітив, що її рух в результаті випадкових зіткнень із молекулами рідини, число яких при нормальних умовах досягає порядку  $10^{21}$  (зіткнень) у секунду, носить хаотичний характер.

У 1900 році Башельє, а потім у 1905 році А. Ейнштейн (A.Einstein) молодший і польський учений М. Смолуховський (M.Smoluchowski) встановили, що траєкторії броунівського руху частинки в часі описуються функціями, які можна розглядати як реалізації деякого випадкового процесу [8]. Н.Вінер (N.Wiener) побудував і докладно дослідив математичну модель такого випадкового процесу, що дозволила кількісно описати броунівський рух. Згодом ця модель знайшла широке поширення при описі гауссівських процесів і одержала назву "вінеровський процес". Значний внесок у побудову математичної моделі броунівського руху вніс П.Леві. Зустрічаються й інші назви розглянутого випадкового процесу, наприклад, процес Вінера-Леві або процес Башельє-Вінера [5], що менш уживані. По термінології П.Леві, вінеровський процес названий лінійним броунівським рухом, що належить до класу однорідних неперервних з ймовірністю 1 випадкових процесів з незалежними приростами [5].

Розрізняють вінеровський і стандартний вінеровський процеси.

**Означення.** Вінеровським випадковим процесом називають однорідний гауссів випадковий процес з незалежними приростами, якщо характеристична функція його приростів визначається виразом:

$$f(u_1; t_1, t_2) = \mathbf{M} \exp \{ iu [\bar{w}(t_2) - \bar{w}(t_1)] \} = \exp \left[ iu(t_2 - t_1)a - \frac{\sigma^2 u^2}{2} (t_2 - t_1) \right] \quad (4.18)$$

Таким чином, прирости вінеровського процесу розподілені за законом Гаусса з параметрами  $\mathbf{N} \{ a(t_2 - t_1), \sigma \sqrt{t_2 - t_1} \}$ , що зветься коефіцієнтом зносу і дифузії відповідно.

Частинним випадком вінеровського – є стандартний вінеровський випадковий процес.

**Означення.** Дійсний випадковий процес називається стандартним вінеровським процесом якщо він має наступні властивості:

1.  $\mathbf{P}[w(0)=0]=1$ ;

2. випадкова величина має гауссівський розподіл з параметрами  $\{0, \sqrt{t_2-t_1}\}$ , тобто з нульовим математичним сподіванням і дисперсією, рівною  $t_2-t_1$ ;

3. для будь-яких  $0=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  випадкові величини  $w(t_1)$ ,  $w(t_2)-w(t_1), \dots, w(t_n)-w(t_{n-1})$  взаємно незалежні.

Коротко – це процес  $\mathbf{N} \{0, \sqrt{t}\}$ .

**Означення.** Процес  $w^\circ(t) = w(t) - tw(1)$ ,  $t \in [0,1]$ , де  $w(t)$  стандартний вінеровський процес, називається броуновським мостом.

Ця назва походить з того, що в процесі  $w^\circ(t)$ ,  $t \in [0,1]$  закріплені (детерміновані) обидва кінці  $w^\circ(0) = w^\circ(1) = 0$ .

Зупинимося на деяких характеристиках стандартного вінеровського процесу.

На підставі властивостей 2) і 3) процесу  $w(t)$ , його початкові моменти дорівнюють центральним моментам і дисперсія

$$\mathbf{M}[w^2(t_n)] = t_n, \quad t_n \in [0, \infty), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Автокореляційна функція двох значень стандартного вінеровського процесу  $w(t)$  у моменти часу  $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ , при  $t_2 > t_1$

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \mathbf{M}[w(t_1)w(t_2)] = \mathbf{M}\{w(t_1)[w(t_2) - w(t_1) + w(t_1)]\} = \\ &= \mathbf{M}[w_1^2(t_1)] + \mathbf{M}\{w(t_1)[w(t_2) - w(t_1)]\} = \mathbf{M}[w^2(t_1)] \end{aligned}$$

і відповідно до властивостей 3)

$$R(t_1, t_2) = t_1.$$

Провівши аналогічні міркування для випадку  $t_2 < t_1$  одержимо

$$R(t_1, t_2) = t_2, \quad t_2 < t_1.$$

Отже

$$R(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{w(t_1)w(t_2)\} = \min(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1, & t_2 \geq t_1, \\ t_2, & t_2 \leq t_1, \end{cases} \quad (4.19)$$

а кореляційну матрицю для  $n$ -значень процесу  $w(t)$ , взятих у моменти часу  $t_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , з використанням (4.18) і незалежності приростів одержуємо у вигляді:

$$\|R\|_1^n = \begin{vmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 & \dots & t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 & \dots & t_2 & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_j & \dots & t_j & t_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_j & \dots & t_{n-1} & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_j & \dots & t_{n-1} & t_n \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.20)$$

Скінченновимірна щільність ймовірностей приростів стандартного вінеровського процесу  $w(t)$  для довільної розбивки часового інтервалу  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  з урахуванням властивостей 1) і 2) має такий вигляд:

$$p_{\Delta w}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \quad (4.21)$$



$$= \prod_{j=1}^n [2\pi(t_j - t_{j-1})]^{-0.5} \exp\left\{-\frac{x_j^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

а скінченновимірна щільність ймовірностей значень процесу  $w(t)$  узятих у моменти часу  $t_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  гаусівська і записується у виді

$$\begin{aligned} p_w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = \prod_{j=1}^n [2\pi(t_j - t_{j-1})]^{-0.5} \exp\left\{-\sum \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (4.22)$$

де  $x_0 = 0$ .

Скінченновимірна характеристична функція значень стандартного вінеровського процесу визначається з урахуванням (4.21) наступним виразом

$$f_w(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n R_{kj} u_k u_j\right], \quad n = 2, \dots,$$

де  $R_{kj}$  – відповідні елементи кореляційної матриці (4.20).

Справедливість формул для щільності розподілу приростів, для щільності розподілу  $w(t)$  і його характеристична функція легко встановлюється за допомогою методу математичної індукції.

Вінеровський процес може бути заданий на всій часовій вісі. Такий процес, як відзначалося наприкінці другої глави першого розділу, задовольняє умові  $P\{w(0)=0\}=1$  і його еволюція стохастично еквівалентна узятому з мінусом процесові заданому на позитивній піввісі щодо початкової точки  $t_0 = 0$ . Двовимірна характеристична функція такого вінеровського процесу  $\{w(t), t \in [0, \infty)\}$  має вигляд для довільних  $t_1$  і  $t_2 \in (-\infty, \infty)$

$$f_w(u_1, u_2; t_1, t_2) = \exp \left\{ - \frac{u_1^2 |t_1| + u_2^2 |t_2| + 2u_1 u_2 \operatorname{sign}(t_1 t_2) + \min(|t_1|, |t_2|)}{2} \right\} \quad (4.23)$$

Розглянемо деякі властивості реалізацій вінеровського випадкового процесу.

Як уже відзначалось вінеровський процес неперервний, з ймовірністю 1, а це значить, що його реалізації неперервні. Цей факт у ряді робіт, наприклад [47], сформульований і доведений у виді теореми. Зауважимо, що в загальному випадку на тому самому фіксованому ймовірнісному просторі, можна задати декілька (принаймні два) стохастично еквівалентних випадкових процеси, у тому числі і процес, реалізації якого вже не є неперервними функціями. Але, надалі ми будемо використовувати вінеровський випадковий процес з неперервними реалізаціями.

Незважаючи на те, що реалізації вінеровського процесу мають властивість неперервності, вони не диференційовні. З ймовірністю 1 не існує ні однієї точки, де реалізація  $w_\omega(t)$  вінеровського процесу  $w(t)$  мала б похідну. Це означає, що при будь-якому фіксованому  $t_1 \in [0, \infty)$  з ймовірністю 1

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{w_\omega(t) - w_\omega(t_1)}{t - t_1} = \begin{cases} +\infty & t < t_1, \\ -\infty & t > t_1. \end{cases}$$

Реалізації вінеровського процесу з ймовірністю 1 мають необмежену варіацію, що фізично можна інтерпретувати в такий спосіб: траєкторія кожної з реалізацій має нескінченну довжину на скінченному інтервалі часу.

Закон повторного логарифма установлює верхню і нижню границі для всіх реалізацій стандартного вінеровського процесу. Реалізації попадають у внутрішню область, утворену двома гілками кривої  $y = \pm \sqrt{2t \ln |\ln t|}$  при  $t \rightarrow 0$  і при  $t \rightarrow \infty$ . Локальний закон повторного логарифма встановлює співвідношення для  $w(t)$  поблизу  $t = 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = -1 \right\} = 1,$$

$$\mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1 \right\} = 1,$$
(4.24)

Які справедливі з ймовірністю 1 для всіх реалізацій процесу  $w(t)$ .

В іншому граничному випадку справедливі вирази

$$\mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right\} = 1,$$

$$\mathbf{P} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \right\} = 1, \quad t \geq 0.$$
(4.25)

Для ілюстрації співвідношень (4.24) і (4.25), на мал. 4.8 зображена заштрихована область, у яку з ймовірністю 1 попадають реалізації процесу  $w(t)$ . Відзначимо, що зображені рис. 4.8 графіки носять чисто ілюстративний характер, але при цьому масштаби інших областей  $t$  і  $w(t)$  дотримувалися, причому  $t$  відкладено в логарифмічному масштабі.

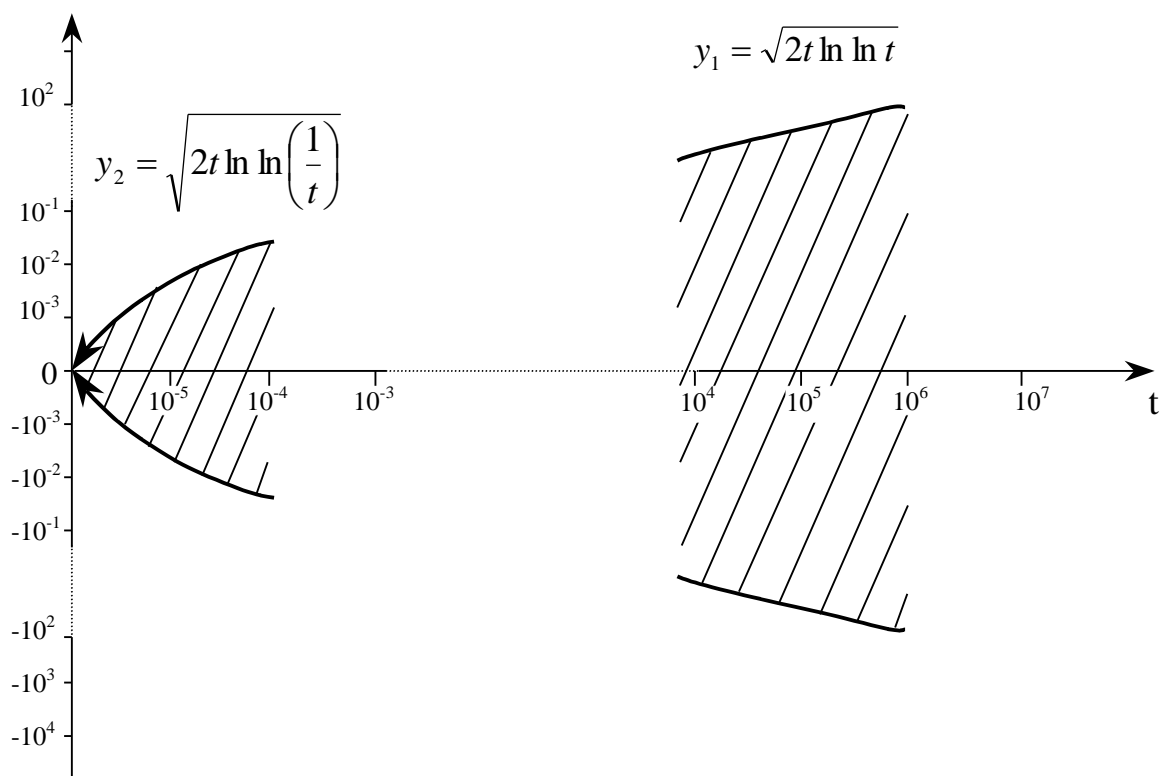


Рис. 4.8. Ілюстрація співвідношень (4.24) і (4.25).

Розглянемо приклади представлень вінеровського процесу, що мають цікаві властивості.

1. Нехай випадковий процес  $\{w_1(t), t \in [0,1]\}$  задається в такий спосіб

$$w_1(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ tw\left(\frac{1}{t}\right), & 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

де  $w(t)$  – стандартний вінеровський процес.

Тоді кореляційна функція випадкового процесу  $w_1(t)$  дорівнює

$$R_1(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{w_1(t_1)w_1(t_2)\} = t_1 t_2 \min\left(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}\right) = \min(t_1, t_2), t_1 t_2 \in [0,1],$$

а його прирости на інтервалах часу, що неперетинаються незалежні і розподілені по гаусівському закону, тобто випадковий процес  $w_1(t)$  є теж вінеровським. За допомогою цього представлення легко установити, що з (4.19) відразу випливає (4.20) і навпаки.

Кореляційна функція випадкового процесу  $w_2(t) = \sigma w\left(\frac{t}{\sigma^2}\right)$ ,

де  $w(t)$  – стандартний вінеровський процес, що визначається виразом

$$R_2(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{w_2(t_1)w_2(t_2)\} = \sigma^2 \min\left(\frac{t_1}{\sigma^2}, \frac{t_2}{\sigma^2}\right) = \min(t_1, t_2), \quad (4.26)$$

тобто випадковий процес  $w_2(t)$  також вінеровський.

2. Вінеровський процес  $\{w_1(t), t \in [0,1]\}$  може розглядатися як функція в гільбертовому просторі  $L_2[0,1]$ , що допускає наступне канонічне представлення

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n \varphi_n(t),$$

де  $\{\zeta_n\}$  – послідовність незалежних гаусівських випадкових величин з параметрами

$$\mathbf{M}\{\zeta_n\} = 0, \quad \mathbf{M}\{\zeta_n^2\} = \left[\frac{\pi}{2}(2n+1)\right]^{-2},$$

а

$$\varphi_n(t) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)t\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

є власними функціями інтегрального оператора

$$\mathbf{B}\varphi(t) = \int_0^1 R(s,t)\varphi(s)ds,$$

де

$$R(s,t) = \min(s,t), \quad s,t \in [0,1].$$

Вінеровський процес  $\{w(t), w(0) = 0, t \in [0, \infty)\}$  є однорідним марковським випадковим процесом, а також мартингалом щодо неперервно спадаючого породженого ним сімейства  $\sigma$ -алгебр  $\mathbf{B}_{\leq t}$ , так як, при  $0 \leq s \leq t$  одержуємо

$$\mathbf{M}\left\{\frac{w(t)}{\mathbf{B}_{\leq s}}\right\} = w(s) + \mathbf{M}\left\{\frac{w(t) - w(s)}{\mathbf{B}_{\leq s}}\right\} = w(s) + \mathbf{M}\{w(t) - w(s)\} = w(s),$$

що співпадає з визначенням мартингала як випадкового процесу  $\{w(t), w(0) = 0, t \in [0, \infty)\}$  погодженого із сімейством  $\sigma$ -алгебр  $\mathbf{B}_{\leq t}$ .

Означення вінеровського процесу може бути узагальнене на випадок декількох змінних. Так, наприклад, дослідження плоского броунівського руху, як траєкторії рухливої точки на площині з координатами  $w_x(t)$  і  $w_y(t)$  що є незалежними одна від одної випадковими функціями лінійного броунівського руху. Результати аналізу багатопараметричного броунівського руху, як випадкового поля (випадкового поля Леві) приведені в роботах.

Наприкінці зупинимося коротко на фізичних явищах, які можна описати за допомогою вінеровського процесу. Відзначимо, що при відомому значенні  $\sigma^2$  рівному швидкості зміни дисперсії броунівського руху молекул газу, можна обчислити число Авогадро (кількість молекул газу в одному молі).

Звичайно, що на першому місці йде броунівський рух мікроскопічної частинки в рідині або газі. Графіки знятих експериментальним шляхом траєкторій руху частинки при броунівському русі, який можна розглядати як реалізації вінеровського процесу, приведені на рис. 4.9. Але як і будь-яка

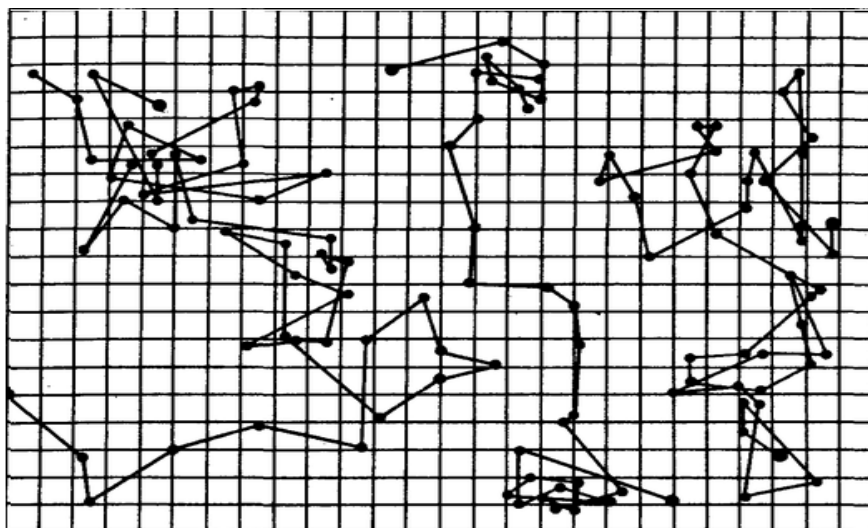


Рис.4.9. Реалізації вінеровського процесу

математична модель вінеровський процес описує лише основні властивості броунівського руху. Такий, наприклад, факт, як вільний пробіг, при якому частинка рухається прямолінійно і з постійною скінченою швидкістю, не вписується в цю модель. Хоча, до речі, Орнштейн Л.С. і Уленбек Дж. Э. розробили модель броунівського руху, у якій швидкості скінчені, а прискорень не існує.

У цілому можна сказати, що вінеровський процес задовільно описує реальний процес броунівського руху на деякому інтервалі часу.

Процес зростання або зменшення кількості тепла однорідного прямолінійного бруска нескінченно малого перетину, описуваний рівнянням теплопровідності, можна досліджувати ґрунтуючись на математичній моделі вінеровського процесу. При цьому, потік, що переносить визначену кількість тепла, представляється як переміщення деякого числа частинок (молекул). Кожна з яких рухається незалежно відносно іншої за законами броунівського руху. Спостерігається велика аналогія процесу передачі тепла й процесу дифузії. Якщо дивитися на дифундуючу речовину, як на речовину, що складається з великого числа частинок, кожна з яких знаходиться в

броунівському русі, то тоді процес дифузії можна розглядати як мікроскопічний варіант броунівського руху.

#### 4.4. Пуассонівські випадкові процеси

В багатьох областях природничих наук, в техніці і економіці часто виникає необхідність статистичної обробки послідовності випадкових подій, які виникають в деякі моменти часу. Таку послідовність подій часто називають *випадковим потоком* (переважно в роботах по теорії масового обслуговування) або випадковим *точковим* процесом, так як реалізації такого процесу являють собою випадкову послідовність окремих точок на числовій вісі, в яких задані відмінні від нуля прирости значення функції у вказаних точках. Багато важливих результатів у теорії точкових процесів належать А.Я. Хінчину і Ю.К. Беляєву.

Точковий випадковий процес з незалежними приростами є окремим випадком точкових процесів. Він описує події, які відбуваються випадково, незалежно і послідовно в часі. Прикладами таких подій можуть бути процеси надходження листів, телефонних викликів, радіоактивного розпаду речовини, несправностей (збоїв) електронних пристроїв та інше.

Нехай в випадкові моменти часу відбуваються деякі однакові у ймовірнісному сенсі події. Якщо послідовність таких подій задовольняє умовам:

а) ймовірність  $p_n(\Delta t)$  того, що на інтервалі часу тривалості  $\Delta t$  відбудеться рівно  $n$  подій, залежить від  $\Delta t$  і  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , але не залежить від положення цього інтервалу на вісі часу (умова однорідності);

б) кількість подій, що відбуваються протягом інтервалів часу, які не перетинаються є незалежними випадковими величинами;



в) ймовірність того, що на малому інтервалі часу тривалості  $\Delta t$  відбудеться більше однієї події, є величина рівна  $o(\Delta t)$  (ця властивість називається ординарністю).

Тоді, така послідовність подій є однорідним простим пуассонівським випадковим процесом з незалежними приростами. [5, 8]. Наведемо коротке зведення позначень різновидів пуассонівських процесів у даній главі.

$\pi(t)$ —однорідний пуассонівський процес;

$\pi_\lambda(t)$ —неоднорідний пуассонівський процес;

$\pi_o(t)$ —складний пуассонівський процес;

$\pi^\circ(t)$ — пуассонівський міст.

**Пуассонівський процес (клас ПП).** Пуассонівський процес означається як випадковий процес з незалежними стаціонарними приростами, розподіленими за законом Пуассона.

Цілочисельний точковий процес  $\{\pi(t), 0 \leq t < \infty\}$  означається трьома властивостями [45].

В загальному випадку процес Пуассона  $\pi_\lambda(t)$   $t \in [0, \infty)$  визначається як процес з незалежними приростами, який має наступні властивості:

- 1)  $\mathbf{P}[\pi_\lambda(0) = 0] = 1$ ;

- 2) приріст  $\pi_\lambda(t_2) - \pi_\lambda(t_1)$ ,  $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ ,  $t_2 > t_1$  має розподіл Пуассона з параметром  $\int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau) d\tau = \beta(t_2) - \beta(t_1)$ ,  $\lambda(0) \geq 0$ ,  $\tau \in [0, \infty)$ , (де  $\beta(t)$ — провідна функція

[16]) тобто

$$\mathbf{P}[\pi_\lambda(t_2) - \pi_\lambda(t_1) = n] = \frac{1}{n!} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau) d\tau \right]^n \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau) d\tau \right], \quad n = 1, 2, \dots; \quad (4.27)$$

- 3) для будь-яких  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  прирости  $\pi_\lambda(t_1) - \pi_\lambda(t_0)$ ,  $\pi_\lambda(t_2) - \pi_\lambda(t_1)$ , ...,  $\pi_\lambda(t_n) - \pi_\lambda(t_{n-1})$  взаємно незалежні.

Значення такого процесу є безмежно подільними випадковими величинами які мають розподіл ймовірностей залежний від  $t$  виду

$$\mathbf{P}\{\pi_\lambda(t) = k\} = \frac{\lambda^k(t)}{k!} \exp\{-\lambda(t)\}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

Якщо  $\lambda(t) = \lambda$  – постійна величина, то пуассонівський процес називається **однорідним**, а якщо  $\lambda$  – залежить від часу, то пуассоновський процес називають **неоднорідним**.

Очевидно, що пуассонівський процес є нестационарним процесом, бо завжди розподіл (4.27) залежить від часу.

Пуассонівський процес належить до класу безмежно подільних законів розподілу.

**Означення.** Функція розподілу  $F(x)$  називається безмежно подільною, якщо для кожного натурального  $n \geq 1$  вона може бути представлена у вигляді стілт'єсівської згортки функцій розподілу  $F_1(x) \# F_2(x) \# \dots \# F_n(x)$  при умові, що  $F_1(x) \equiv F_2(x) \equiv \dots \equiv F_n(x)$ . Наприклад, згортка перших двох

$$F(x) = F_1(x) \# F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) dF_2(x-y).$$

Характеристична функція значень пуассонівського процесу  $\pi(t)$  у формі Леві записується у вигляді

$$f(u; t) = \mathbf{M}\{\exp[iu\pi(t)]\} = \exp\left[t\lambda(e^{iu} - 1)\right],$$

або

$$f(u;t) = \exp\left\{t\left[iu\frac{\lambda}{2}\right] + \int_0^\infty \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right)dN(x)\right\}, \quad (4.29)$$

де  $\lambda > 0$ .

Математичне сподівання і дисперсія  $\pi(t)$  однакові і рівні  $\lambda t$ . Більше того семіінваріанти  $n$  – порядку пуассонівського процесу

$$\chi_n[\pi(t)] = \lambda t, \quad n = 1, 2, \dots$$

Стала  $\lambda$  носить розмірність кількості стрибків в одиницю часу і тому вона називається інтенсивністю стрибків або просто інтенсивністю пуассонівського процесу.

Для процесу  $\pi(t)$  автокореляційна функція

$$R(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{\pi(t_1)\pi(t_2)\} - \lambda^2 t_1 t_2 = \begin{cases} \lambda t_1, & t_1 < t_2, \\ \lambda t_2, & t_2 \leq t_1. \end{cases}$$

Скінченновимірний розподіл ймовірностей значень пуассонівського процесу  $\pi(t)$  для довільного розбиття  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  з урахуванням (4.28) визначається наступним чином

$$\mathbf{P}[\pi(t_1) = k_1, \dots, \pi(t_n) = k_n] = \lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n} \prod_{j=1}^n \frac{(t_j - t_{j-1})^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $k_0 = 0, k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$  - цілі невід'ємні числа. Логарифм скінченновимірної характеристичної функції простого пуассонівського процесу для розбиття  $0 = t_0 < t_1, \dots, t_n$  визначається наступним чином

$$\begin{aligned} \ln f_{\pi}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) &= \ln \prod_{j=1}^n \exp[\lambda(t_j - t_{j-1})(e^{i u_j} - 1)] = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \left[ \exp\left(i \sum_{k=j}^n u_k\right) - 1 \right] = \lambda \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \exp\left(i \sum_{k=j}^n u_k\right) - \lambda t_n. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Скінченновимірний розподіл приростів  $\pi(t_j) - \pi(t_{j-1})$  процесу  $\pi(t)$  згідно (4.27) на цьому ж розбитті визначається виразом

$$\mathbf{P}[\pi(t_j) - \pi(t_{j-1}) = k_j, j=1, 2, \dots, n] = e^{-\lambda t_n} \frac{\lambda^{k_1 + k_2 + \dots + k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \prod_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^{k_j}.$$

Пуассонівський процес можна розглядати на всій часовій вісі  $t \in (-\infty, \infty)$ , як це описано в попередньому розділі.

*Пуассонівським мостом* називається процес  $\pi^0(t), t \in [0, 1]$ , що визначається як

$$\pi^0(t) = \pi(t) - t\pi(1), \quad (4.31)$$

де  $\pi(t)$  - простий пуассонівський процес.

Цікава властивість пуассонівського процесу  $\pi(t)$  випливає з розгляду величини проміжку часу  $\tau \in [0, \infty)$  між двома сусідніми стрибками процесу  $\pi(t)$ . Якщо за час  $t$  не з'явиться жодного стрибка, то це еквівалентно тому, що  $\tau > t$ , а як показано раніше, ймовірність такої події

$$\mathbf{P}[\tau > t] = e^{-\lambda t}.$$

Тоді функція розподілу проміжку  $\tau$

$$F_{\tau}(t) = \mathbf{P}[\tau < t] = 1 - e^{-\lambda t},$$

а щільність ймовірності

$$p_{\tau}(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

У події, які мають функцію розподілу  $F_{\tau}(t)$ , можна вкладати різний фізичний зміст. Зокрема,  $F_{\tau}(t)$  характеризує розподіл ймовірності часу між двома відмовами елементів в радіоелектронному приладі, розподіл терміну служби електричних лампочок і т.д.

Однорідний пуассонівський процес є марковським.

Розглянемо поведінку пуассонівського процесу  $\pi(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  і його реалізацій.

Процес  $\pi(t)$  при кожному  $t$  приймає лише цілочислові значення  $0, 1, 2, \dots$ , тобто він являє собою чисто стрибкоподібний процес зі стрибками, рівними одиниці. Проте, процес  $\pi(t)$  так як і розглянутий у попередній главі  $\tilde{\pi}(t)$ , є стохастично неперервним і ймовірність появи стрибка у наперед заданій точці  $t_j \in [0, \infty)$  дорівнює нулю.

Реалізації процесу  $\pi(t)$  на скінченному інтервалі часу неперервні всюди, за винятком скінченного числа точок, для яких існують скінченні границі справа і зліва. Реалізації являють собою монотонно неспадні ступінчаті функції, які зростають ізольованими стрибками на величину, рівну одиниці.

Неоднорідний процес Пуассона. Процес відмов  $\pi_{\lambda}(t)$  можна вважати неоднорідним пуассонівським з ведучою функцією  $\beta(t)$ .

Для нього, як видно з наведеного вище

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda}(t) = n\} = \frac{1}{n!} \left[ \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]^n \exp \left[ - \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right] = \frac{\beta^n(t)}{n!} \exp[-\beta(t)].$$

При цьому логарифм характеристичної функції

$$\ln f(u;t) = \beta(t)(e^{iu} - 1),$$

а функція пуассонівського спектра стрибків у формулі Леві-Хінчина [13]

$$N(x,t) = \begin{cases} -\beta(t) & x \in (0,1); \\ 0 & x > 1. \end{cases} \quad (4.32)$$

В загальному випадку проміжок часу між двома сусідніми стрибками процесу  $\pi_\lambda(t)$  (функція надійності) визначається виразом

$$F(t) = \mathbf{P}\{\tau < t\} = [1 - e^{-\beta(t)}] I_{(0,\infty)}(t). \quad (4.33)$$

Більш детально це питання розглядається в [62].

**Кусково-однорідний процес Пуассона** В даній роботі вважається, що параметр  $\lambda$  – інтенсивність появи стрибків, є кусково-сталою функцією. Виходячи з цього припущення розглядатимемо  $n$  інтервалів часу на яких інтенсивність залишається незмінною, а моменти часу в яких інтенсивність стрибкоподібно змінюється позначимо через

$$T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-1}, \text{ де } n \in 2, 3, \dots \quad (4.34)$$

Значення інтенсивності між точками росту будемо позначати через

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n. \quad (4.35)$$

На рис. 4.10 наведена одна з можливих реалізацій кусково-однорідного процесу Пуассона,  $n = 2$ .

Припускаємо, що елементи послідовності (4.34) задані (будемо називати їх вузлами), а також повністю задана послідовність (4.35).

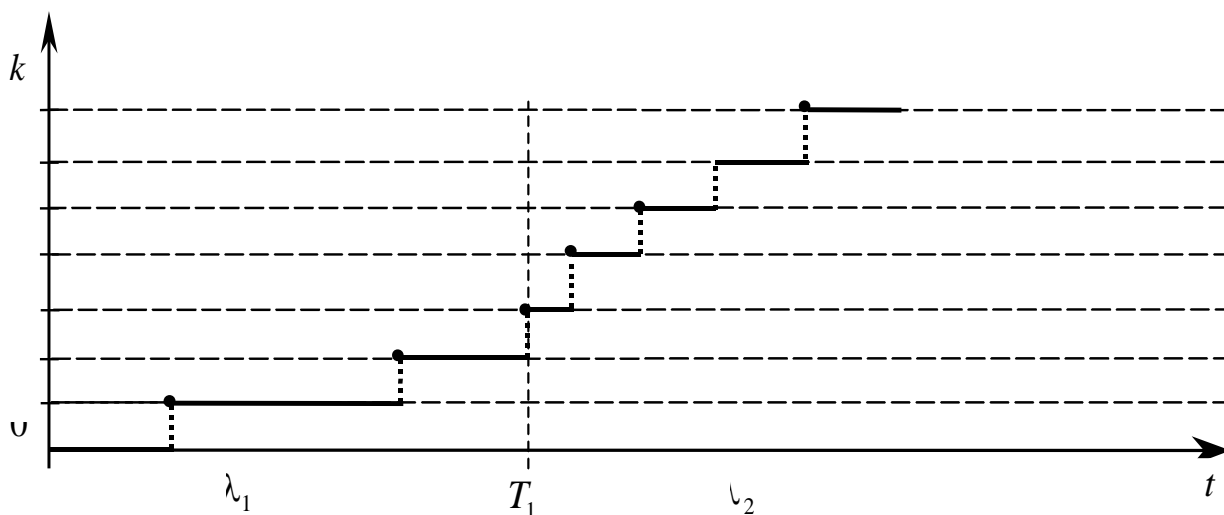


Рис. 4.10 Реалізація кусково-однорідного процесу Пуассона.

Розглянемо  $n$ -вимірний вектор

$$\Pi_n(t) = (\pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t), \dots, \pi_{\lambda_n}(t)), \quad (4.36)$$

компонентами якого є однорідні процеси Пуассона

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t), \dots, \pi_{\lambda_n}(t), \quad t \in [0, \infty), \\ \pi_{\lambda_1}(0) = \pi_{\lambda_2}(0) = \dots = \pi_{\lambda_n}(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

з розподілами ймовірностей

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_1}(t) = k\} = \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t},$$

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_2}(t) = k\} = \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t},$$

.....

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_n}(t) = k\} = \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} e^{-\lambda_n t}.$$
(4.38)

Позначимо через  $T = (T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$  вектор моментів розладки з компонентами (4.34) (коли  $n=1$ , то беремо  $T=0$ ) і  $\Lambda_n = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$  – вектор інтенсивностей з компонентами (4.35). Тоді загальний процес розладки для кусково-однорідного процесу Пуассона можна записати так:

$$\pi_{\Lambda_n}(t) = \pi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)I_{(0, T_1]}(t) + \pi_{\lambda_2}(t)I_{(T_1, T_2]}(t) + \dots + \pi_{\lambda_n}(t)I_{(T_{n-1}, \infty)}(t). \quad (4.39)$$

$$\text{Його інтенсивність } \Lambda_n(t) = \sum_{r=1}^n \lambda_r(t)I_t[T_{r-1}, T_r), \quad n > 1.$$

Вважаємо, що в момент розладки  $\pi_{\lambda_1}(T_1) = \pi_{\lambda_2}(T_1)$ ,  $\pi_{\lambda_2}(T_2) = \pi_{\lambda_3}(T_2), \dots$ ,  $\pi_{\lambda_{n-1}}(T_{n-1}) = \pi_{\lambda_n}(T_{n-1})$  з ймовірністю, що дорівнює 1.

При  $n=1$ ,  $\pi_{\Lambda_1}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)$  є звичайним пуассонівським процесом, а при  $n > 1$  його не можна вважати однорідним, бо в нього параметр  $\lambda$  не є сталим на проміжку  $t \in [0, \infty)$ .



#### 4.5. Стаціонаризація кусково-однорідного процесу Пуассона

*Теорема.* Нехай

$$\Pi_n(t) = (\pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t), \dots, \pi_{\lambda_n}(t)), \quad t \in [0, \infty), \quad (4.40)$$

заданий  $n$ -вимірний вектор, компонентами якого є однорідні пуассонівські процеси (4.37) з розподілами ймовірностей виду (4.26) де  $T = (T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$  – вектор моментів стиковки інтервалів (точки розбиття всього відрізка на підінтервали) і  $\Lambda_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  – відповідний вектор інтенсивностей. Тоді всякий однорідний пуассонівський процес може бути представлений у вигляді кусково-однорідного, а саме:

$$\pi_{\Lambda_n}(t) = \pi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)I_{(0, T_1]}(t) + \pi_{\lambda_2}(t)I_{(T_1, T_2]}(t) + \dots + \pi_{\lambda_n}(t)I_{(T_{n-1}, \infty)}(t), \quad (4.41)$$

де  $I(\cdot)$  визначена згідно (4.1) індикаторна функція, в якій  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  – деяка послідовність множин моментів часу виду  $A_j = (T_{j-1}, T_j)$ ,  $T_0 = 0$ ,  $T_n = \infty$ , а  $t$  – число, яке характеризує час, взятий як точка з множини  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

І навпаки, всякий кусково-однорідний процес виду (4.41) шляхом масштабування на інтервалах однорідності може бути зведений до однорідного пуассонівського процесу.

**Доведення** теореми стаціонаризації.

Нехай  $\pi_{\lambda}(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  – однорідний процес Пуассона незалежними приростами. Очевидно, що для нього  $n = 1$ , а  $T = 0$ .

Розбиваємо піввісь  $[0, \infty)$  довільним вузлом  $T_1 \in [0, \infty)$  і тоді маємо  $n = 2$  (стає два відрізки). На одному з відрізків змінюємо масштаб часу з допомогою масштабного множника  $k_j$ . Тоді отримаємо  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  і  $\pi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)I_{(0, T_1]}(t) + \pi_{\lambda_2}(t)I_{(T_1, \infty)}(t)$ . Останній процес, очевидно, є кусково-

однорідним. Для нього аналогічно при  $n = 3, 4, \dots$  отримуємо нескінченну послідовність виразів виду (4.41), що й доводить першу частину теореми.

Обернена теорема доводиться аналогічно, якщо в послідовності (4.41) підібрати відповідним чином масштабні коефіцієнти.

Уточнення теореми стаціонаризації приростів КОП розкривають наведені нижче приклади.

Зауважимо, що компоненти вектора (4.40) є однорідними процесами з незалежними приростами і в загальному випадку не є стаціонарними випадковими процесами, а значить і вектор не є взагалі стаціонарним. Покажемо, що для такого процесу можна застосувати стаціонаризацію.

## 4.6. Методи стаціонаризації.

### 4.6.1. Метод стаціонаризації за допомогою масштабних коефіцієнтів.

Методи стаціонаризації з допомогою масштабних коефіцієнтів застосовуються в тих випадках, коли нестаціонарність (або неоднорідність) випадкового процесу, що досліджується викликана деформацією шкали часу на певних інтервалах з часової області визначення самого процесу (кускова нестаціонарність або неоднорідність), або неперервно з відомим законом залежності від часу на певних часових відрізках досліджуваного процесу.

У випадку, коли масштаб часу змінюється лише на скінченному числі певних відрізків часу з області визначення процесу, то тоді про загальну картину змін масштабу зручно судити по коефіцієнтах пропорційності між всіма такими відрізками. Ці коефіцієнти пропорційності в роботі названі *масштабними коефіцієнтами* і позначаються як компоненти вектора  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ , де кожна компонента  $k_j$  - це безрозмірний коефіцієнт зміни масштабу шкали часу. При цьому за нову зведену одиницю масштабу шкали часу зручно брати яку завгодно компоненту вектора  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Будемо

називати її зведеною і позначимо через  $k_{звед}$ , а вибір цієї одиниці будемо шукати серед компонент заданого вектора з використанням однієї з умов  $k_{звед} = \min_{j \in \{1, n\}} k_j$  або  $k_{звед} = \max_{j \in \{1, n\}} k_j$ , тоді всі компоненти вектора  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ , або не перевищують 1, або не менші ніж 1. Для визначеності та однозначності викладок далі будемо розглядати тільки випадок коли  $k_{звед} = \min_{j \in \{1, n\}} k_j$ .

#### 4.6.2. Неперервна зміна масштабного коефіцієнта.

Випадки, коли замість постійного вектора  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  масштабних коефіцієнтів розглядається заданий неперервно змінний з часом вектор  $K_n(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))$ , який вважається відомим. Наприклад, найчастіше такий випадок спостерігається, коли відома функціональна залежність від часу математичного сподівання чи дисперсії досліджуваного процесу, або зміни інтенсивності, наприклад, пуассонівського процесу, що буде більш детально розглянуто нижче.

*Стаціонаризація кусково-однорідного процесу Пуассона.* В даному випадку  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  вектор з сталими компонентами. Де  $k_j = \frac{\lambda_{звед}}{\lambda_j}$ ,  $\lambda_{звед}$  як вказувалося вище вибирають як  $\lambda_s$  з одного  $s$ -того інтервалу, як  $\lambda_{звед} = \max_{j \in \{1, n\}} \lambda_j$  або  $\lambda_{звед} = \min_{j \in \{1, n\}} \lambda_j$ . В результаті маємо відношення  $\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = k_1 : k_2 : \dots : k_n$  де  $k_1, \dots, k_n$  компоненти вектора  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Для визначеності та однозначності викладок далі будемо розглядати тільки випадок коли  $\lambda_{звед} = \min_{j \in \{1, n\}} \lambda_j$ .

Використовуючи масштабні множники в залежності від вибору  $\lambda_{звед}$  будемо мати і відповідні йому варіанти стаціонаризованого однорідного пуассонівського процесу у вигляді

$$\pi_{\lambda_{\text{згод}}}(t) = \pi_{\lambda_1}(k_1 t) I_{(0, T_1)}(t) + \pi_{\lambda_2}(k_2 t) I_{(T_1, T_2)}(t) + \dots + \pi_{\lambda_n}(k_n t) I_{(T_{n-1}, \infty)}(t). \quad (4.42)$$

Найчастіше зустрічаються приклади двох і трьох відрізків. Наведемо їх.

*Приклади.*

1. Маємо діагностичний сигнал виду (4.36).

При  $n = 2$  задано вектор інтенсивності  $\Lambda_2 = (\lambda_1, \lambda_2)$ . Нехай виконується умова, що  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Згідно (4.40)

$$\Pi_2(t) = (\pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t)), \quad \pi_{\lambda_1}(0) = \pi_{\lambda_2}(0) = 0, \quad t \in [0, \infty).$$

Так як  $n = 2$ , то маємо одну точку стиковки інтервалів  $T = (T_1)$ .

Треба побудувати стаціонаризований (однорідний) процес Пуассона виду (4.42) для якого інтенсивність на всьому інтервалі спостереження залишається уже незмінною.

Розподіли ймовірностей на інтервалах однорідності

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_1}(t) = k\} = \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t},$$

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_2}(t) = k\} = \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t}.$$

Тоді, згідно (4.41)

$$\pi_{\Lambda_2}(t) = \pi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \pi_{\lambda_1}(t) I_{(0, T_1]}(t) + \pi_{\lambda_2}(t) I_{(T_1, \infty)}(t).$$

Вектор масштабних множників в цьому випадку  $K_2 = (k_1, k_2)$ , де для визначеності взято  $k_1 = 1$  має вид

$$K_2 = \left(1, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right). \quad (4.43)$$

В цьому випадку маємо  $\lambda_{звед} = \lambda_1$ .

Згідно (4.40)

$$\pi_{\lambda_{звед.}}(t) = \begin{cases} \pi_{\lambda_1}(t), & \text{при } t \in [0, T_1]; \\ \pi_{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}(t), & \text{при } t \in (T_1, \infty). \end{cases}$$

На інтервалі  $(T_1, \infty)$   $t$  береться за іншою шкалою часу.

Функція розподілу довжин інтервалів часу між сусідніми стрибками кусково-стаціонарного процесу Пуассона визначається за наступною формулою [63]:

$$F(t; \lambda_1, \lambda_2, T) = [1 - \exp(-\lambda_1 t)]I_{(0, T]}(t) + [[1 - \exp(-\lambda_2(t - T))]\exp(-\lambda_1 T) + \dots + (1 - \exp(-\lambda_1 T))]I_{(T, \infty)}(t). \quad (4.44)$$

Щоб побудувати стаціонаризовану модифікацію процесу (4.44) необхідно скористатися масштабними коефіцієнтами (4.43). З їх допомогою відбувається деформація часу на одному з інтервалів однорідності, в даному випадку на другому інтервалі. В результаті отримуємо стаціонаризований процес Пуассона.

$$F(t; \lambda_1, \lambda_2, T) = [1 - \exp(-\lambda_1 k_1 t)]I_{(0, T]}(t) + [[1 - \exp(-\lambda_2(k_2 t - T))]\exp(-\lambda_1 T) + \dots + (1 - \exp(-\lambda_1 T))]I_{(T, \infty)}(t). \quad (4.45)$$

Функція сплайн-розподілу має всі властивості звичайної функції розподілу, тому на них зупинятися не будемо. Глибше з особливостями

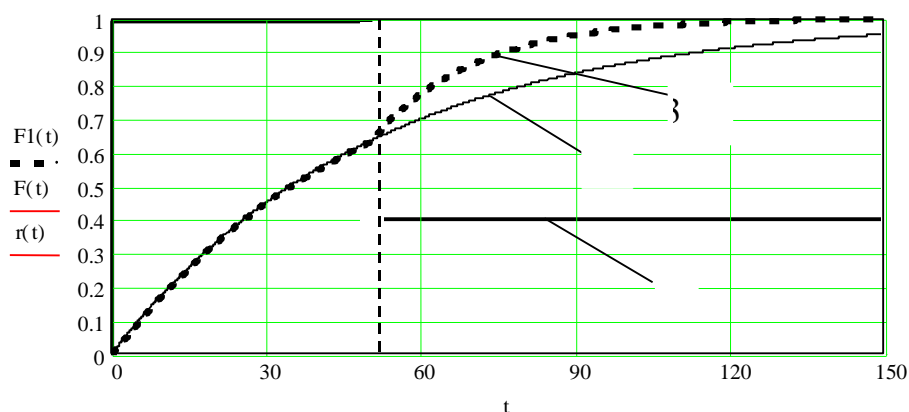
побудови сплайн-функцій розподілу для цього випадку можна ознайомитися в роботі [63].

Для більшої наглядності прикладу наведемо заключний фрагмент програми з числовими даними та відповідні графіки.

$$\lambda_1 = 0.02, \lambda_2 = 0.05, T = 50.$$

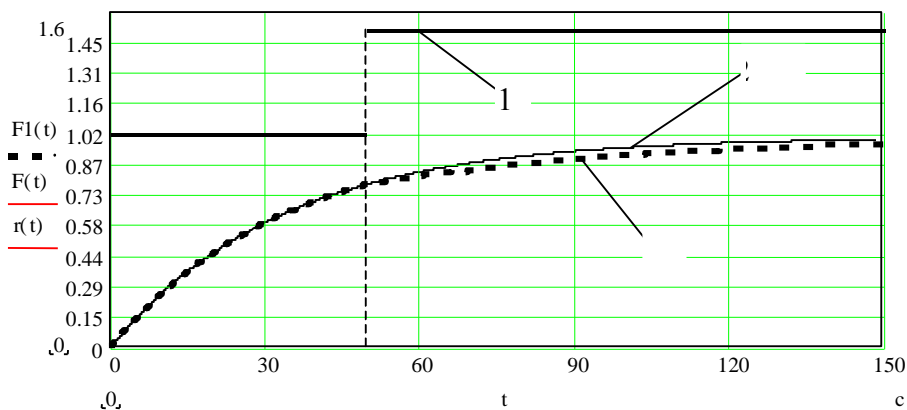
$$F1(t) := (1 - e^{-\lambda_1 \cdot t}) \cdot UP(t, 0, T) + \left[ \left[ 1 - e^{-\lambda_2 \cdot (t-T)} \right] \cdot e^{-\lambda_1 \cdot T} + (1 - e^{-\lambda_1 T}) \right] \cdot U(t, T, c)$$

$$F(t) := (1 - e^{-\lambda_1 \cdot t I(t)}) \cdot UP(t, 0, T) + \left[ \left[ 1 - e^{-\lambda_2 \cdot (t \cdot 2(t-T))} \right] \cdot e^{-\lambda_1 \cdot T} + (1 - e^{-\lambda_1 T}) \right] \cdot U(t, T, c)$$



- 1 – значення масштабного множника на інтервалах однорідності;
- 2 – функція розподілу стаціонаризованого процесу Пуассона;
- 3 – функція розподілу довжин інтервалів часу між стрибками кусково-однорідного процесу Пуассона при  $\lambda_1 = 0.02, \lambda_2 = 0.05, T = 50$ .

Рис 4.11. Графіки функцій розподілу для випадку  $\lambda_1 < \lambda_2$ .



- 1 – значення масштабного множника на інтервалах однорідності;  
 2 – функція розподілу стаціонаризованого процесу Пуассона;  
 3 – функція розподілу довжин інтервалів часу між стрибками кусково-однорідного процесу Пуассона при  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.02$ ,  $T = 50$ .

Рис 4.12. Графіки функцій розподілу для випадку  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

2. При  $n = 3$ , задано вектор інтенсивностей  $\Lambda_3 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , згідно (4.40) маємо

$$\Pi_3(t) = (\pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t), \pi_{\lambda_3}(t)), \quad t \in [0, \infty).$$

$$\pi_{\lambda_1}(0) = \pi_{\lambda_2}(0) = \pi_{\lambda_3}(0) = 0.$$

Розподіли ймовірностей на інтервалах

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_1}(t) = k\} = \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t},$$

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_2}(t) = k\} = \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t},$$

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_3}(t) = k\} = \frac{(\lambda_3 t)^k}{k!} e^{-\lambda_3 t}.$$

Так як  $n = 3$ , то маємо дві точки стикування інтервалів.

Тоді

$$\pi_{\Lambda_3}(t) = \pi_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)I_{(0, t_1]}(t) + \pi_{\lambda_2}(t)I_{(t_1, t_2]}(t) + \pi_{\lambda_3}(t)I_{(t_2, \infty)}(t).$$

Детально зупинятися на цьому випадку не будемо, оскільки алгоритм побудови функцій розподілу процесів типу (4.39) подібний і описаний в роботі [63].

Пуассонівський випадковий процес є представником процесів з незалежними приростами. З допомогою процесу Пуассона описують реальні імпульсні процеси, реалізації яких змінюються стрибкоподібно. Процес Пуассона займає ключове місце в задачах теорії масового обслуговування та теорії надійності. Він належить до класу безмежноподільних законів розподілу, за допомогою якого можна описати реальні фізичні явища.



## РОЗДІЛ 5. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕАЛІЗАЦІЙ КУСКОВО-СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

Цей розділ присвячений імітаційному моделюванню деяких класів процесів які допускають застосування при їх статистичній обробці класичних методів і дозволяють застосовувати до їх модифікацій класичні ергодичні теореми. В ньому наведено основні обчислювальні процедури та алгоритми, що використовувалися автором при проведенні імітаційного моделювання з метою перевірки шляхом статистичного експерименту запропонованої математичної моделі кусково-однорідного процесу Пуассона та методики стаціонаризації його приростів. У додатках вміщено тексти програм, реалізованих в середовищі Machcad, які дозволяють отримувати масиви даних необхідних для статистичних випробувань.

### 5.1. Сутність методів моделювання і область його застосування.

При розв'язуванні багатьох конкретних задач у різноманітних галузях науки і техніки часто зустрічаються випадки, коли аналітичний розв'язок задачі через значні математичні труднощі практично неможливий, а проведення експериментальних досліджень і натурних випробувань потребує дуже великих затрат часу і засобів або ж виключено з інших причин. Одним з ефективних заходів по подоланню цих труднощів є застосування в дослідженнях сучасних швидкодіючих електронних обчислювальних машин (ЕОМ) для моделювання явищ, що досліджуються. Задача моделювання різних систем (радіотехнічних, механічних, економічних і ін.) формулюється як задача розробки алгоритмів, які за відомими характеристиками систем, наприклад, операторами або характеристиками нелінійностей окремих ланок, дозволяють точно або з допустимою похибкою перетворювати на ЕОМ дискретні реалізації відповідних вхідних сигналів систем, що моделюються. Ці алгоритми називаються *цифровими моделями систем*.

Теоретична модель – це сукупність знань, припущень та гіпотез, побудованих у вигляді цілісної, логічно витриманої структури і формульованих у термінах та символах, що притаманні даній науці і є необхідними для

розв'язання цілого класу конкретних задач. Такі задачі пов'язані з об'єктом, для якого і побудована сама модель.

Слово “модель” використовується в научному тексті у поєднанні з назвою об'єкта, до якого ця модель відноситься: наприклад, модель явища, модель прилада чи системи, модель випадкового процесу.

Крім того поняття “модель” часто супроводжується уточнюючими означеннями, що характеризують її суть, різновид, значення, спосіб побудови тощо: наприклад, математична, фізична, якісна або кількісна, аксіоматична модель.

Іншими словами під моделюванням розуміють спосіб вивчення системи (моделі) шляхом її заміни для експериментального дослідження більш зручною, такою, що зберігає суттєві ознаки оригінала і дозволяє проводити випробування моделі методом проб. На рис.5.1 наводиться наочна картина взаємозв'язку об'єктів при моделюванні. Надалі нас, в основному, будуть цікавити так звані імітаційні моделі та теоретичні математичні моделі.

Розрізняють два основних види імітаційних моделей.

*Детермінована модель* - це аналітичне представлення закономірностей системи, при якому для певного фіксованого комплексу початкових умов і множини вхідних детермінованих значень отримують на виході завжди один і той же не випадковий результат, тобто є повна повторюваність отримуваних результатів моделювання.

*Стохастичною (недетермінованою)* є така модель, в якій функціонування окремих її елементів або вхідні значення залежать від випадкових параметрів, тобто описуються ймовірнісними законами (наприклад функціями розподілу випадкових величин, векторів, процесів і ін.). Результат функціонування такої моделі можна передбачити лише у ймовірністному сенсі, тобто використовуючи ті чи інші усереднені характеристики або приймаючи стохастичні рішення.

*Економічне моделювання* визначає залежність економічного показника, що досліджується (максимальний прибуток, мінімальні витрати) від різноманітних економічних факторів.

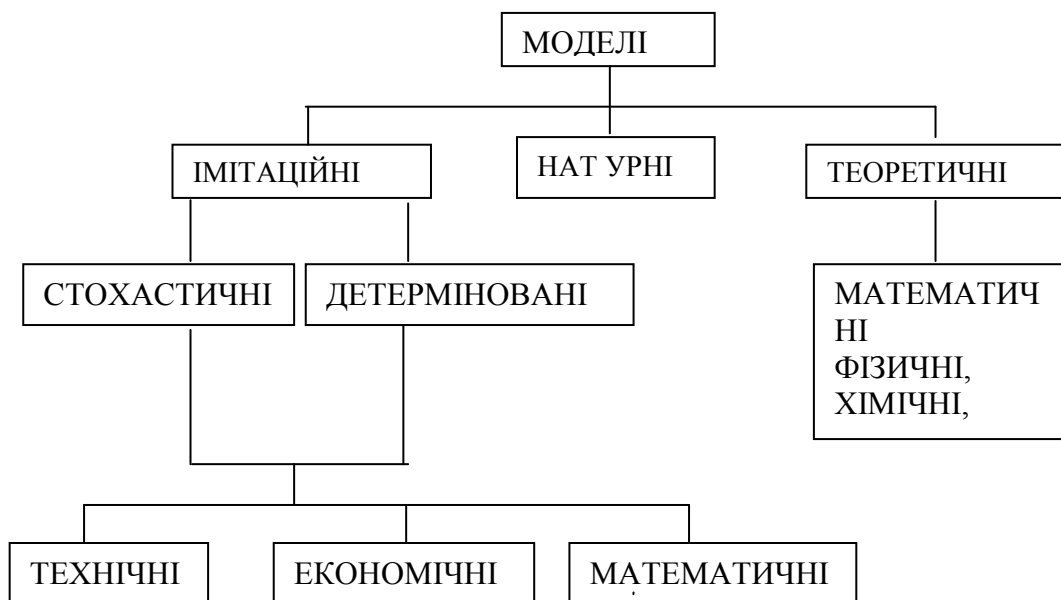


Рис. 5.1. Взаємозв'язок об'єктів при моделюванні

*Технічне моделювання* дозволяє виявити недоліки існуючих систем або систем, що проектуються і знайти шляхи для їхнього виправлення або оцінювання ефективності їх функціонування. Технічне моделювання через складність конструктивного виконання моделей і реальних умов їх роботи значно поступається математичному моделюванню, яке є більш гнучким, ефективним і перспективним.

Від інших моделей *математичні* відрізняються тим, що засобом опису моделей і вивченням їх поведінки є формально-логічний апарат математики. Звідси впливає важлива перевага – можливість кількісного аналізу моделей за допомогою сучасних математичних методів. Важливою перевагою математичних моделей є можливість використання одних і тих же моделей для дослідження різних споріднених систем.

За допомогою математичних моделей можна отримати результати, що відносяться не до окремої конкретної реалізації, яка відповідає певним початковим даним і фіксованим значенням параметрів системи, що досліджується, а до множини можливих поведінок системи.

Модель чи сукупність моделей, що описують дане явище або систему, разом із засобами аналізу їх поведінки утворюють *імітаційну систему*.

На завершення цього розділу слід відмітити, що при математичному моделюванні ключовим моментом всіх методів є етап отримання псевдовипадкових чисел. Від глибини теоретичного обґрунтування цього питання в значній мірі залежить якість та точність побудованих математичних моделей. Тому найближчі наступні розділи роботи якраз і присвячуються висвітленню цього питання.

**Методи отримання псевдовипадкових чисел.** Випадковими числами зводяться цифри, які отримані в результаті повторного незалежного вибору будь-якої цифри з сукупності  $\{0,1,2,\dots,9\}$  з рівною ймовірністю ( $p = 0,1$ ).

На практиці це можна здійснити за допомогою урни, у якій знаходиться 10 кульок, на кожній з яких позначена одна з вказаних цифр. Навмання вибирається куля, записується нанесена на ній цифра, куля повертається в урну, все перемішується і експеримент повторюється далі стільки разів, скільки потрібно отримати цифр для запланованого випадкового числа. Таким чином, будь-яка група з отриманих таким чином  $n$  цифр називається псевдовипадковими числами або просто випадковими числами.

Однак використання готових випадкових чисел в обчислювальних машинах пов'язане з потребою значного розширення пам'яті. Тому при моделюванні виникає необхідність їх отримання детермінованим шляхом. Числа, отримані таким чином зводяться псевдовипадковими числами. Якість псевдовипадкових чисел в сукупності визначається перевіркою їх за допомогою набору статистичних методів, які використовують різні статистичні критерії.

Метою такої перевірки є виявлення властивостей псевдовипадкових чисел, відмінних від властивостей випадкових чисел.

Моделювання випадкових явищ і процесів на ЕОМ має назву статистичного моделювання (метод Монте-Карло). Основною його перевагою у порівнянні з іншими методами моделювання є можливість вирішення задач виняткової складності:

- досліджувана система може містити елементи неперервної і дискретної дії;
- знаходитись під впливом численних випадкових факторів складної природи;
- описуватися дуже громіздкими співвідношеннями і т.д.

Поряд із відзначеними перевагами метод статистичного моделювання, як будь-який чисельний метод, має істотний недолік: результат завжди носить випадковий характер. Він відповідає фіксованим значенням параметрів системи і початковим умовам. Як правило для аналізу системи необхідно багаторазово моделювати її процес функціонування, варіюючи вихідні дані задачі.

Успіх обчислень методом Монте-Карло на ЕОМ визначають два основних фактори:

- а) якість джерела випадкових чисел;
- б) вибір раціонального алгоритму обчислення.

Питання про вибір методу одержання випадкових чисел є першорядним, тому що від його успішного розв'язання багато в чому залежить успіх вирішення всієї задачі.

Для моделювання будь-якого наперед заданого випадкового процесу необхідно вміти достатньо економічно будувати послідовності випадкових чисел, що відповідають деяким фіксованим законам розподілу. Для того, щоб одержати значення випадкової величини за даним законом розподілу, звичайно використовують послідовність значень рівномірно розподілених випадкових чисел (РРЧ).

Один з основних способів одержання РРЧ полягає в наступному. Випадкові числа утворюються в ЕОМ програмним засобом за допомогою деякого рекуррентного співвідношення. Це означає, що кожне наступне число утворюється з попереднього (або групи попередніх чисел) шляхом застосування деякого алгоритму, який складається з арифметичних і логічних операцій. Така послідовність чисел, хоч і не є випадковою, проте може задовольняти різноманітним статистичним критеріям випадковості. Тому такі числа називаються псевдовипадковими.

До основних переваг програмного способу одержання псевдовипадкових чисел відноситься можливість контролю роботи ЕОМ у процесі розв'язування задачі, можливість проведення повторної лічби, а також простота алгоритму одержання псевдовипадкового числа.

Головним недоліком псевдовипадкових чисел є складність теоретичної оцінки їхніх статистичних властивостей. Крім цього, усі вироблені програмним засобом послідовності псевдовипадкових чисел є періодичними. А саме, перші  $L$  послідовно отриманих псевдовипадкових чисел, будуть усі мати різні значення, а  $(L + 1)$ -е псевдовипадкове число співпадає з першим із  $L$  чисел і т.д. Число  $L$  називають довжиною періоду. Величина періоду  $L$  залежить від розрядності слова ЕОМ і способу формування псевдовипадкової послідовності.

Існує багато різноманітних методів генерації послідовностей чисел із рівномірним законом розподілу.

Практика показала, що найбільш придатним для отримання псевдовипадкових чисел з допомогою ЕОМ є *конгруентний метод*, який базується на рекуррентному алгоритмі в основі якого лежать так звані порівняння (конгруенція).

Бінарне відношення  $\mathcal{E}$  на множині  $A$  називається відношенням еквівалентності, якщо воно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Конгруенція (порівняння) – це бінарне співвідношення між двома числами  $a$  та  $b$  за модулем  $m$ , яке записується у вигляді  $a \equiv b \pmod{m}$ . Читається  $a$

порівняно з  $b$  за модулем  $m$  і означає, що при діленні  $a$  на  $m$ ,  $b$  є залишком від ділення.

Тому співвідношення " $\equiv (\text{mod } m)$ " розбиває масив всіх цілих чисел на класи еквівалентності. Ці класи називають "класами лишків по модулю  $m$ ". Кожне ціле число є порівняним по модулю  $m$  лише з одним із цілих чисел  $0, 1, \dots, m-1$ , які лежать в різних класах, тому існує в точності  $m$  класів лишків по модулю  $m$ .

Класи лишків по модулю  $m$  утворюють кільце відносно операцій: додавання, віднімання, множення.

Через  $\{r\}_m$  позначимо множину всіх чисел, при діленні яких на  $m$  отримаємо залишок  $r$ .

*Приклад.* Нехай потрібно обчислити  $23(\text{mod } 7)$ . Ділим 23 на 7 і знаходимо  $k$  - ціле число від ділення, тобто  $k = \left\lfloor \frac{23}{7} \right\rfloor = 3$ , де  $\lfloor \cdot \rfloor$  означає "ціла частина". Потім, віднімаємо від 23 добуток  $3 \times 7$ , одержуємо шуканий результат, тобто  $23(\text{mod } 7) = 23 - 21 = 2$ .

У даній роботі будуть викладені три алгоритми конгруентних методів моделювання РРЧ. Один із перших полягає у тому, що коли  $\{\xi_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , - послідовність псевдовипадкових чисел, що ми хочемо побудувати, то чергове випадкове число  $\xi_n$  одержують із попереднього числа  $\{\xi_{n-1}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\xi_0 = 1$  - послідовність псевдовипадкових чисел із використанням такого правила

$$\xi_{n+1} = [c\xi_n + b](\text{mod } p), \quad (5.1)$$

де  $c$  - відповідним чином вибрана константа, а запис  $\text{mod } p$  означає взяття по модулю  $p$  числа  $c\xi_i + b$ , причому  $p$  - просте або степінь простого, а

$b$  - взаємно просте з  $p$  число. Таким чином,  $\xi_i$  дорівнює залишку від ділення  $c\xi_{i-1} + b$  на  $p$ . Якщо вибрати  $c = \sqrt{p}$ , то кореляція між сусідніми значеннями

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Вибирають  $c = 10^{\delta+1}$ ,  $\delta = 1, 2, \dots$

Вибір  $c$  визначається можливостями машини і прийнятою системою числення,  $b$  вибирається з урахуванням наступних вимог:

- 1) отримана послідовність  $\{\xi_n\}$  повина мати бажані статистичні властивості випадкових чисел,
- 2) період послідовності має бути якомога довшим,
- 3) швидкість утворення повина бути великою. Величини  $p$  і  $b$  потрібно вибирати таким чином, щоб кореляція між числами була близькою до нуля.



Рис. 5.2. Структурна схема рекурентного алгоритму формування масиву псевдовипадкових чисел.

Послідовність, утворена мультиплікативним конгруентним методом, буде мати повний період  $L$  чисел, якщо

- 1)  $L$  і  $b$  взаємно прості;
- 2)  $a = 1(\text{mod } p)$ , якщо  $p$  є простим множником  $L$ ;



3)  $a = 1(\text{mod } 4)$ , якщо 4 є множителем  $L$ .

Отже, якщо  $L = 2^q$ , то  $b$  має бути непарним і  $a = 1(\text{mod } 4)$ .

Якщо  $L = 10^q$ , то  $b$  не повинно ділитися ні на 2, ні на 5 і  $a = 1(\text{mod } 20)$ .

Поставимо задачу формування масиву із РРЧ обсягу  $N$  конгруентним методом, що використовує вираз (5.1). Структурна схема моделюючого алгоритму зображена на рис.5.2.

*Приклад.* Отримання псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених на  $(0,1)$ , методом лишків (конгруентний метод), наприклад, таким чином

$$u_0 = 1, \quad u_n = u_{n-1} 5^{2p+1} (\text{mod } 2^m), \quad \xi_n = u_n 2^{-m}.$$

Тут  $m$  – число розрядів мантиси ЕОМ  $m=8$  або  $16$ .

$$p = \max \{ q : 5^{2p+1} < 2^m \}.$$

$$p = \lceil 0,5(m / \log_2 5 - 1) \rceil, \quad (2q + 1) \log_2 5 < m, \quad 2q < m / \log_2 5 - 1$$

Довжина періоду для вказаного варіанту методу лишків дорівнює  $L = 2^{m-2}$ .

**Методи аналізу якості.** Для перевірки "стохастичних параметрів" послідовностей рівномірно розподілених випадкових чисел можуть використовуватися різноманітні ознаки. Наприклад, при використанні частотного критерію за варіаційним рядом береться  $N$  випадкових чисел і підраховується кількість  $r$  чисел, що лежать між числами  $0,2113$  і  $0,7887$ , тобто розташовуються в межах  $(m \pm \sigma)$  (при  $m = 1/2$ ). Якщо відношення  $r/N$  близьке до  $0,5774$ , то приймається, що випадкові числа розподілені рівномірно. Інший наближений спосіб перевірки рівномірності  $N$  випадкових чисел полягає у обчисленні оцінок математичного сподівання і другого центрального моменту (дисперсії). Відповідно до цього критерію випадкові числа розподілені рівномірно, якщо

$$\nu_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \approx \frac{1}{2}; \quad \mu_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i - \nu_1)^2 \approx 0.083.$$

Значення оцінок матем. сподівання  $\nu_1$  і дисперсії  $\mu_2$  по РРЧ обчислюються при роботі основної програми.

Існують і інші ознаки "стохастичності" рівномірно розподілених чисел. Таким є критерій, що оцінює степінь нерівномірності гістограми, який розглядається нижче.

*Гістограма* є статистичним аналогом щільності розподілу ймовірностей і так само, як і остання, характеризує степінь концентрації випадкових чисел в околі вибраного значення.

При побудові гістограми візьмемо до уваги, що послідовності випадкових чисел, що моделюються розташовуються в інтервалі від 0 до 1. Ці числа ми і приймемо як границі діапазону, в якому розташовані значення випадкової величини. Цей діапазон (ділянка від 0 до 1) розбивається на  $n$  однакових інтервалів і підраховується кількість випадкових чисел  $k_i$ , що потрапили в  $i$ -й інтервал. Величина

$$p_i^* = \frac{k_i}{N},$$

де  $N$  - обсяг вибірки (загальна кількість випадкових чисел), називається частотою або статистичною оцінкою ймовірності попадання значень випадкової величини в  $i$ -й інтервал розбиття всього інтервалу значень на  $n$  частин.

В ідеальному випадку, коли генератор (програмний давач) РРЧ "досить гарний", теоретичні ймовірності  $p_i$  попадання значень випадкової величини в  $i$ -й інтервал дорівнюють

$$p_i = \frac{1}{n},$$

що можливо лише у граничному випадку, при  $N \rightarrow \infty$ .

Позначимо через

$$u = \sum_{i=1}^n (p_i^* - p_i)^2.$$

Сума  $u$  квадратів відхилень частот від теоретичних ймовірностей при фіксованому  $n$  може служити критерієм, що дозволяє оцінити степінь нерівномірності гістограми (чим більше  $u$ , тим нижче якість генератора рівномірно розподілених чисел).

## 5.2. Особливості імітаційного моделювання реалізацій процесу

Математична модель інформаційного сигналу являє собою сукупність знань про досліджуваний об'єкт, а також припущень і гіпотез, висунутих відносно нього, об'єднаних у цілісну, логічно витриману формальну структуру, необхідну для розв'язування певного класу конкретних задач. Формальний характер математичної моделі дає можливість синтезу, на основі відображених у ній закономірностей, деякого технічного чи фізичного об'єкту, який би імітував поведінку або функціонування реального об'єкту.

Зрозуміло, що коли імітаційна модель є практично достатньою для опису досліджуваного об'єкту і формулювання задач, для розв'язування яких цей об'єкт вивчається, то це суттєво спрощує проведення самих досліджень і дозволяє отримувати більш глибокі результати. Найбільш очевидним це є в тих областях, наукового і технічного плану де проведення експериментів пов'язане з великими економічними, часовими, технічними затратами, зокрема в теорії надійності. Це можна пояснити тим, що вже на етапі проектування можна мати

деяку інформацію про майбутній виріб і про умови його експлуатації, а також припущення стосовно статистичних характеристик часу безвідмовної роботи. Подібна апріорна інформація та інформація про окремі вузли, що вже мають визначені показники надійності і становить основу для створення математичної моделі функціонування майбутнього виробу. Подібна інформація знаходить застосування у функціональних блоках ІВС діагностики та пакетах прикладних програм, що розробляються у відповідності до апріорної інформації результатів імітаційного моделювання.

Імітаційні моделі сигналів використовуються для тестування технічних систем, в задачах прогнозування, у різноманітних навчальних системах у тренажерах для диспетчерів станцій енергопостачання та ін.

Імітаційне моделювання випадкових процесів здійснюється в рамках загального підходу, відомого як метод статистичних випробувань або метод Монте-Карло [64]. Відомо, що метод статистичних випробувань базується на теоремі А.М. Колмогорова, суть якої полягає в наступному. Для того щоб середнє арифметичне незалежних реалізацій випадкової величини збігалось з її математичним сподіванням необхідно і достатньо існування такого математичного сподівання.

Найбільш ефективним інструментом для імітаційного моделювання випадкових процесів є використання обчислювальної техніки, зокрема, персональних ЕОМ. Завдяки дискретному характеру представлення інформації в ЕОМ, їх використання дозволяє моделювати, як правило, випадкові послідовності – процеси з дискретним часом, які при потребі з урахуванням додаткових умов можна відповідним чином інтерполювати і отримати випадкові процеси з неперервним часом.

Імітаційне моделювання випадкового процесу методом статистичних випробувань полягає в побудові певного алгоритму для генерування на ЕОМ реалізацій цього процесу і потребує вирішення наступних основних проблем:

- генерування реалізацій найпростішої випадкової послідовності, яка береться як вихідна для імітування;

- зображення імітованого процесу в конструктивній формі для того, щоб можна було отримати його шляхом перетворення згаданої вище найпростішої випадкової послідовності;

- перевірка співпадання ймовірнісних характеристик випадкового процесу який моделюється та його імітаційної моделі.

При проведенні статистичного моделювання експериментатор часто має справу з масивами ВВ які моделюються на ЕОМ за певним алгоритмом створеним експериментатором для одержання масивів даних пов'язаних з певним типом розподілу.

Найчастіше розглядають три способи одержання ВВ: таблиці випадкових чисел, генератори випадкових чисел та метод псевдовипадкових чисел (ПЧ). Кожен з цих методів має свої переваги і свої недоліки.

В дисертації був використаний метод псевдовипадкових чисел.

Завдяки тому, що “якість” ПЧ перевіряється з допомогою спеціальних тестів, то можна не цікавитися як ці числа отримані – треба лише щоб вони відповідали прийнятій системі тестів.

В дисертації тестом такої перевірки був вибраний гістограмний аналіз отриманих послідовностей ПЧ та перевірка параметрів їх розподілів таких як оцінка математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції (по ній степінь корельованості в послідовності), асиметрія та коефіцієнт ексцесу. Проте ці дані були проміжними і не завжди наводяться детальні викладки їх використання.

Псевдовипадковими називають числа отримані з допомогою деякої формули (часто рекурентно), що імітують значення ВВ.

Під словом “імітують” слід розуміти, що ці числа задовольняють тестам так, як це було б при розгляді ВВ.

Найчастіше при моделюваннях описаних в дисертації використовувалися уже відомі програми. Так для моделювання рівномірно розподілених величин в Mathcad було використано вбудований генератор  $rnd(1)$ . Але коли числа,

отримані в такий спосіб, не проходили гістограмного або кореляційного аналізу, то використовувалися і інші методи отримання ПЧ.

Недоліком цього методу є обмеженість кількості ПЧ, бо коли застосовується рекурентна формула  $\xi_{k+1} = F(\xi_k)$ ,  $k \in \overline{0, \infty}$  для одержання послідовності  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ , то така послідовність обов'язково є періодичною. Період такої послідовності зветься довжиною відрізка аперіодичності. Але для найбільш поширених ПЧ цей період настільки великий, що перевищує будь-які практичні потреби.

У основному змісті дисертаційної роботи значна увага приділяється вивченню кусково-однорідного процесу Пуассона, тому в даному розділі ми розглянемо моделювання саме таких процесів. На основі методів імітаційного моделювання проведено статистичні випробування та здійснено перевірку методу масштабних коефіцієнтів та індикаторних функцій, що розроблено в другому розділі дисертаційної роботи.

### 5.3. Моделювання рівномірно розподілених величин

Відомо, що значення довільної ВВ можна отримати шляхом перетворення якоїсь однієї базової випадкової величини (БВВ). Найчастіше роль такої величини грає ВВ рівномірно розподілена на інтервалі  $[0,1]$ . Тому всякий випадковий елемент моделювався як деяка функція від найпростіших БВВ [64, 65, 66]. А в якості БВВ було вибрано випадкову величину, рівномірно розподілену на інтервалі  $[a,b]$ . Щільність розподілу такої БВВ задається виразом (4.3).

Як правило рівномірно розподілену випадкову величину моделюють в інтервалі  $[0,1]$ . При цьому можливе використання декількох алгоритмів моделювання. Це можуть бути програмні алгоритми за конгруентним методом, методом Пономарьова та рн.. Таким чином з метою моделювання масивів рівномірно розподілених випадкових величин використовуємо математичні

цілком не випадкові алгоритми. Числа, що отримані за такими алгоритмами є псевдовипадковими, але при певних значеннях початкових даних вони мають властивості дуже схожі з властивостями реалізацій випадкових чисел. З подібними алгоритмами можна ознайомитися в [64].

Відомо, що кожний програмний давач рівномірно розподілених псевдовипадкових чисел потребує відповідної перевірки на основі використання статистичних тестів (у роботі [24] запропоновано використання одинадцяти тестів). Рішення про відповідність статистичним тестам формуємої послідовності псевдовипадкових величин приймається по результатам перевірки статистичних гіпотез з використанням статистичних критеріїв. При проведенні імітаційного моделювання в рамках дисертаційного дослідження використовувалась штатна функція призначена для моделювання рівномірно розподілених ВВ. У програмному забезпеченні кожної ЕОМ є стандартна функція  $rnd(n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , у процесі послідовного звернення до якої дістаємо незалежні реалізації стохастично незалежних в сукупності випадкових величин з рівномірним законом розподілу. Використання даного методу є розповсюдженим способом моделювання БВВ. Задаючи у функції  $rnd(n)$  відповідне значення  $n$  отримують реалізації рівномірно розподіленої величини на інтервалі  $[0, n]$ . Перевірка послідовності псевдовипадкових чисел була проведена для наступних тестів:

а) визначення числа аперіодичності послідовності було проведено на основі використання критеріях і-квадрат з рівнем значущості  $\alpha=0,05$ . Число аперіодичності для давача використаного в роботі становило  $2^{31}$ .

б) рівномірність розподілу значень чисел послідовності в діапазоні  $[0, 1]$  перевірена з використанням статистичного критерію  $\chi^2$  з рівнем значущості  $\alpha=0,05$  була підтверджена відповідною статистичною гіпотезою.

в) перевірка коефіцієнта кореляції між компонентами псевдовипадкової послідовності з метою перевірки степені некорельованості також була проведена з використанням критерію  $\chi^2$ . По результатам виконаних

розрахунків зроблено висновок про некорельованість компонентів псевдовипадкової послідовності.

В додатках наведено алгоритми моделювання БВВ (рівномірно розподілених) з допомогою математичних не випадкових методів.

#### 5.4. Моделювання неперервних випадкових величин із заданим законом розподілу

В якості БВВ використовують рівномірно розподілену випадкову величину в інтервалі  $[0,1]$  способи моделювання якої розглянуто вище.

При моделюванні ВВ  $\eta$  із потрібним законом розподілу використовують метод *оберненої функції* [13, 64, 66]. При цьому припускають, що БВВ  $\xi$  неперервна випадкова величина із щільністю розподілу  $p_\xi(x)$ . Випадкова величину  $\eta$  пов'язана з нею функціональною залежністю:

$$\eta = u(\xi). \quad (5.2)$$

При цьому функцію  $u(x)$  вибирають таким чином щоб щільність розподілу  $\eta$  отримана з щільності розподілу БВВ задовольняла умовам задачі. Якщо  $u(t)$  неперервна, монотонна на інтервалі  $[a,b]$  функція, то випадкова величина  $\eta$  прийме значення, менше наперед заданого  $y$  з ймовірністю  $\mathbf{P}\{\eta < y\}$ , якщо випадкова величина  $\xi$  прийме значення, менше  $x$ , тобто

$$\mathbf{P}\{\eta < y\} = \mathbf{P}\{\xi < x\}. \quad (5.3)$$

Права і ліва частини останнього виразу є функціями розподілу:  $F_1(x)$ –випадкової величини  $\xi$ , а  $F_2(y)$ –випадкової величини  $\eta$ , отже



$$F_2(y) = F_1(x), \text{ при } y = u(x), x \in (-\infty, \infty). \quad (5.4)$$

Продиференціювавши (5.4) по  $y$  отримаємо

$$\frac{dF_2(y)}{dy} = \frac{dF_1(x)}{dy} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dF_1(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \quad (5.5)$$

або інакше

$$p_2(y) = p_1(x) \cdot J, \quad (5.6)$$

де  $J = \frac{dx}{dy}$  є якобіан перетворення

Для того, щоб визначити  $J$ , попередньо необхідно знайти функцію  $q$ , обернену (5.4), тобто знайти залежність змінної  $\xi$  від  $\eta$

$$\xi = q(\eta). \quad (5.7)$$

Остаточний вираз отримаємо об'єднавши (5.6) і (5.7)

$$p_2(\eta) = |q'(\eta)| p_1(\xi). \quad (5.8)$$

Коли  $\xi$  – рівномірно розподілена в інтервалі  $[0,1]$  випадкова величина із щільністю розподілу ймовірностей  $p_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$  тоді  $p_2(\eta) = |q'(\eta)|$ .

Отже, якщо  $\xi$  – це рівномірно розподілена випадкова величина і вважати, що

$$x = F(y), \quad (5.9)$$

то результат диференціювання правої частини залежності (5.9) дасть щільність розподілу  $p_2(y)$  випадкової величині  $\eta$ .

Розв'язавши (5.9) відносно  $y$ , одержимо аналітичний вираз для функціонального перетворення  $\eta = u(\xi)$ , яке слід застосувати до рівномірно розподіленої в інтервалі  $[0,1]$  величини  $\xi$  для одержання випадкового величини  $\eta$  із заданою щільністю розподілу  $p_2(y)$ . Оскільки у формулі (5.8) якобіан береться по модулю, то його значення не зміниться, якщо у (5.9) запишемо праву частину у вигляді

$$x = 1 - F(y). \quad (5.10)$$

Детальніше з особливостями моделювання і побудови алгоритмів на ЕОМ з метою одержання БВВ та ВВ з заданим законом розподілу можна ознайомитися в роботах [13, 64, 66].

Масив ВВ з показниковим розподілом моделювався за алгоритмом описаним вище. Для формування масиву ВВ з заданим показниковим законом розподілу необхідно мати масив стохастично незалежних БВВ. Масив ВВ розподілених за показниковим розподілом є БВВ для формування випадкової послідовності з розподілом Пуассона, що розглядається в наступному пункті. Зупинимося на задачі одержання масивів ВВ з показниковим розподілом.

Моделювання ВВ з показниковим законом розподілу виконують за методом оберненої функції. Для нього знаходження функції  $F^{-1}(x)$  – оберненої до заданої здійснюється за допомогою простих аналітичних перетворень і дає змогу отримати обернену функцію в наступному вигляді:

$$F^{-1}(x) = -\frac{\ln(1-x)}{\lambda}, \lambda > 0, x \in (-\infty, \infty). \quad (5.11)$$

Виходячи з (5.10) можна отримати наступний алгоритм моделювання ВВ з показниковим розподілом, а саме:

$$\xi_j = -\frac{\ln \eta_j}{\lambda}, \text{ де } \eta_j, j = 1, 2, \dots \text{ – рівномірно розподілена в інтервалі } [0, 1]$$

випадкова величина;  $\lambda > 0$ .

У додатках вміщено тексти програм для моделювання ВВ із заданим (показниковим) законом розподілу. Також в додатках наведено фрагмент програми за допомогою якої здійснювалася перевірка гіпотези про вид розподілу. Взагалі існує три практично застосовні методи вибору теоретичного закону розподілу. Такий вибір можна зробити на підставі апріорних даних, коли вважається, що закон розподілу може бути відомим перед проведенням експерименту; за формою рунтується (реалізації емпіричної щільності розподілу), тобто вид гістограми може служити підставою вибору конкретного закону розподілу і прийняттям гіпотези про те, що отримана в результаті експерименту вибірка, відповідно після побудови варіаційного ряду, може апроксимуватися конкретним типом розподілу; методом моментів, який рунтується на використанні сімейства кривих К.Пірсона

В дисертаційній роботі перевірка наскільки добре вибраний теоретичний закон розподілу узгоджується (згладжує) статистичний, здійснювалася за критерієм згоди хи-квадрат.

## 5.5. Моделювання реалізацій пуассонівських процесів

Пуассонівський випадковий процес є представником процесів з незалежними приростами. З допомогою процесу Пуассона описують реальні імпульсні процеси, реалізації яких змінюються стрибкоподібно. Процес Пуассона займає ключове місце в задачах теорії масового обслуговування та

теорії надійності. Він належить до класу безмежноподільних законів розподілу, за допомогою якого можна описати реальні фізичні явища.

### 5.5.1. Моделі однорідних процесів Пуассона.

Згідно з означенням (див. розд. 3) реалізації пуассонового процесу  $\pi(\omega, t)$  являють собою функції, що складаються з ділянок сталості та стрибків – скінченних приростів  $(\pi(\omega, t_k) - \pi(\omega, t_{k-1}))$ , які відбуваються у випадкові моменти часу  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Для простого однорідного пуассонівського процесу вони детерміновані і всі рівні одиниці, тобто реалізації процесу  $\pi(\omega, t_k)$  набувають лише цілочислових значень  $n = 0, 1, 2, \dots$  (рис. 5.1). Вважаємо, що всі реалізації пуассонівського процесу в початковий момент часу  $t_0 = 0$  виходять з 0.

На рис. 5.3 наводиться одна з можливих реалізацій пуассонівського процесу, що моделювався.

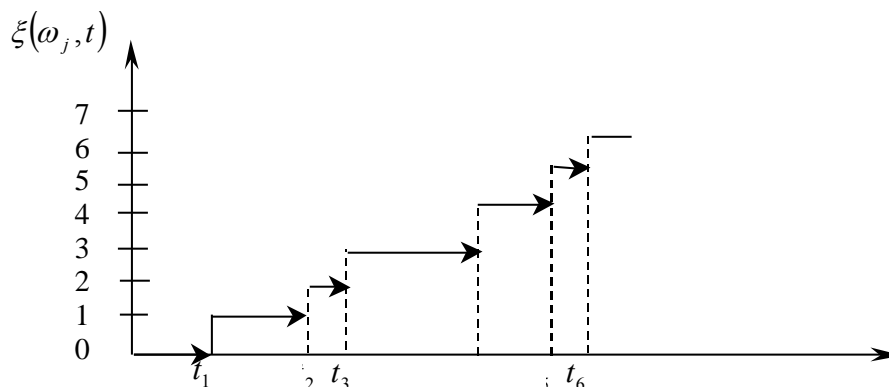


Рис. 5.3. Реалізація пуассонівського процесу

Для однорідного пуассонівського процесу прирости  $(\pi(t_k) - \pi(t_{k-1}))$  стохастично незалежні для будь-яких  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  і мають розподіл Пуассона

$$\mathbf{P}\{\pi(t_k) - \pi(t_{k-1}) = n\} = \frac{\lambda(t_k - t_{k-1})^n}{n!} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При цьому інтервал часу  $\Delta\tau$ ,  $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , між двома сусідніми стрибками пуассонового процесу є випадковою величиною зі щільністю розподілу ймовірності

$$p_\tau(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad (5.12)$$

Отже, моделювання однорідних пуассонівських випадкових процесів полягає в знаходженні послідовності випадкових моментів часу  $t_k$ , в які відбуваються стрибки, та формування самих приростів, які дорівнюють одиниці.

У процесі моделювання випадкові моменти часу  $t_k$  можна обчислювати за рекурентним співвідношенням

$$t_k = t_{k-1} + \Delta\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.13)$$

де  $\Delta\tau$  – ВВ з показниковим розподілом (5.12) та параметром  $\lambda$  який входить в (5.12) і зветься інтенсивністю пуассонівського процесу.

### 5.5.2. Моделі кусково-однорідних процесів Пуассона.

Моделювання кусково-однорідного процесу Пуассона полягає у формуванні вектора однорідних процесів Пуассона виду (4.40) з подальшим переходом до виду (4.42) з використанням індикаторної функції.

Для моделювання кусково-однорідного процесу Пуассона в роботі на базі стохастично незалежних масивів БВВ моделювалися відповідні масиви ВВ з показниковим розподілом та різними параметрами  $\lambda > 0$ . З метою забезпечення стохастичної незалежності масивів експоненційно розподілених ВВ в процесі моделювання здійснювалося розбиття масиву рівномірно розподілених ВВ, які використовуються в якості БВВ. Відповідна процедура розбиття наводиться в

основному тексті програми, Дод. Б, з допомогою якої здійснювалося моделювання масивів ВВ з показниковим розподілом відповідно до наведених вище алгоритмів. На основі отриманих масивів ВВ експоненційного типу формувався вектор пуассонівських процесів та будувалися його реалізації.

### 5.5.3. Точні характеристики моделювання.

Заключний і досить відповідальний етап моделювання, який був здійснений в процесі розробки методу МК та ІФ – це перевірка точності і відповідності тестам (гістограмний аналіз, оцінювання параметрів). В результаті моделювання на ЕОМ були отримані вибірки реалізацій псевдовипадкового вектора  $\{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ . За цією вибіркою перевірялась гіпотеза згоди про те, що функції розподілу випадкового елемента  $F_{\Xi}(y)$  і його моделі  $F_{\Xi^*}(y)$ , реалізованої на ЕОМ, збігаються -  $H_0: F_{\Xi}(y) = F_{\Xi^*}(y)$ . Конкуруючою є гіпотеза  $H_1: F_{\Xi}(y) \neq F_{\Xi^*}(y)$ . Гіпотеза перевірялась з використанням статистичних критеріїв. Перевірялась також гіпотеза згоди про рівність числових ймовірнісних характеристик випадкового елемента, зокрема середніх значень, дисперсій, кореляційних функцій, енергетичних спектрів тощо.

Зауважимо, що остаточний вибір адекватної ймовірнісної моделі можна зробити лише враховуючи якість розв'язання поставленої задачі. Тому перевірка гіпотези згоди про збіг ймовірнісних характеристик випадкового елемента і його моделі на ЕОМ – розглядалася як проміжний етап установлення адекватності вибраної ймовірнісної моделі.

При цьому бралось до уваги, що моделювання на ЕОМ довільного випадкового елемента включає розв'язування двох основних задач:

- моделювання на ЕОМ  $r$  незалежних БВВ;

- відшукування функції  $f(\cdot)$ , яка перетворює  $r$  БВВ так, аби забезпечити близькість у встановленому розумінні ймовірнісних характеристик випадкового елемента і його моделі на ЕОМ.

В ході проведення комп'ютерного моделювання реалізацій процесу Пуассона необхідно було виконати ряд послідовних процедур у відповідності до наведених вище алгоритмів. Відповідно наступним кроком є перевірка збігу ймовірнісних характеристик. У випадку з БВВ таку перевірку можна здійснити порівнюючи оцінки МС та дисперсії з параметрами теоретичного розподілу ймовірностей. Якщо оцінки для МС та дисперсії дорівнюють або близькі до 0,5 та 0,083 відповідно, то ВВ має рівномірний розподіл.

Застосувавши наведене вище функціональне перетворення до рівномірно розподілених чисел було отримано ВВ з показниковим розподілом. Збіг ймовірнісних характеристик для цього випадку було перевірено за критерієм згоди  $\chi^2$  [61].

У кожному конкретному випадку вибір числа  $r$  і функції  $f(\cdot)$  визначав структуру моделюючого алгоритму. У Додатках наведено найпоширеніші на практиці методи і алгоритми моделювання випадкових величин, векторів і процесів із заданими ймовірнісними характеристиками.

#### **5.5.4. Використання отриманих реалізацій пуассонівських процесів для перевірки методу масштабних коефіцієнтів та індикаторних функцій**

Перевірка ефективності методу МК та ІФ для стаціонаризації кусково-однорідного процесу Пуассона.

Вихідні дані при моделюванні були вибрані наступні: основні вирази модельованого процесу Пуассона були взяті з прикладу 1 при  $n = 2$ , (4.28), та при  $n = 3$ , приклад 2 розділу 4. Крім того моделювалися інтервали часу між сусідніми стрибками. Результати моделювання (зокрема статистичні оцінки

функції розподілу) порівнювалися з теоретичними результатами наведених в розділі 4 прикладів.

Другим способом перевірки збігу ймовірнісних характеристик, використаним для порівняння, є перевірка за критерієм Смірнова-Колмогорова. Цей критерій дає відповідь на запитання чи описується емпіричний розподіл теоретичною функцією розподілу.

Перевірка по критерію Колмогорова-Смірнова дала позитивні результати з довірчою ймовірністю не менше 0,9 при об'ємі вибірки порядку  $10^4$ . Відповідні програми обчислення наведено в додатках.



## РОЗДІЛ 6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ВІБРОДІАГНОСТИКИ

В попередніх розділах даної роботи було докладно розглянуто теоретичні питання побудови та аналізу математичних моделей субгауссових процесів. Це створило теоретичну базу для побудови алгоритмічно-програмного забезпечення, яке зокрема призначено для роботи у складі ІВС вібродіагностики вітроелектричних агрегатів. Лабораторний зразок такої ІВС було розроблено на базі відповідної вимірювальної та обчислювальної техніки [51, 67]. До його складу увійшло також спеціальне програмне забезпечення, одним із основних елементів якого є програми перевірки діагностичних сигналів, що вимірювалися на субгауссовість. Внаслідок такої перевірки вдається підвищити точність і достовірність оцінок вимірюваних сигналів, а значить і достовірність діагностики технічного стану вузлів вітроелектричних агрегатів.

В даному розділі наводиться інформація, що стосується побудови, структури, особливостей та принципів роботи **лабораторного зразка** ІВС статистичної вібродіагностики. Крім того, тут проаналізовано основні види похибок, які виникають під час виміру та при обробці інформаційних сигналів [41]. Розглянуто основні елементи методики практичного застосування **лабораторного макета** ІВС вібродіагностики вузлів вітроелектричних агрегатів. Одним з основних елементів якого є програмне забезпечення перевірки оцінювання зареєстрованих сигналів на субгауссовість та ілюстрація використання субгауссового стандарту і коефіцієнту субгауссовості при оцінюванні точносних характеристик.

Основні результати даного розділу опубліковані в роботах [26, 68, 69].

## **6.1. Структура, особливості побудови та використання лабораторного зразка інформаційно-вимірювальних систем вібродіагностики**

Спочатку зупинимося на короткому описі лабораторного зразка ІВС вібродіагностики, що вивчався в процесі виконання даної роботи, особливості його побудови та технічного функціонування [51, 70].

Призначення лабораторного зразка ІВС вібродіагностики вітроагрегатів.

Розроблений зразок ІВС забезпечує:

- вимірювання, реєстрацію, аналогову фільтрацію, та підсилювання вібраційних сигналів, які встановлені на досліджуваних вузлах вітроагрегату;
- перетворення аналогових сигналів у цифровий код та ввід останнього у ПЕОМ;
- перевірку зареєстрованих числових масивів експериментальних даних на субгауссовість;
- визначення субгауссового інтервалу;
- визначення кількісних оцінок границь діагностичних ознак, що відповідають умовно справним вузлам вітроагрегатів, а також вузлам, які мають певні види дефектів;
- навчання і діагностику найбільш типових видів дефектів в окремих вузлах вітроелектричного агрегату.

Вимірювання вібраційних сигналів здійснюється у наступних вузлах вітроагрегатів:

- підшипникові вузли ступиці вітроагрегату;
- підшипникові вузли генератора;
- редуктор (трансмсія); основна рама вітроагрегату.

Створений зразок може бути реалізований у двох варіантах: мобільному (пересувна лабораторія на базі мікроавтобусу) або стаціонарному. Подальший його розгляд проведемо саме для стаціонарного варіанту.

Передбачається, що стаціонарний варіант лабораторного зразку ІВС експлуатується у межах однієї вітроелектростанції.

Організація процесу вимірювання та обробки вібраційних сигналів здійснюється за схемою рис. 6.1. Особливістю й основною перевагою такого варіанту є можливість реєструвати вібраційні сигнали з усіх вітроагрегатів станції з одного центрального модуля вимірювання і збору інформації, який розташовується на одному з вітроагрегатів [71, 72, 73, 74].

Під час вимірювань мобільний модуль створеного зразку ІВС підключається до цього центрального модуля, після чого можна вимірювати сигнали з будь-якого вітроагрегату вітроелектростанції. Такий модуль реалізується за допомогою мікропроцесора або персонального комп'ютера. З'єднання цього блоку з давачами, які встановлені безпосередньо на вузлах вітроагрегату в станції, що діагностується, може здійснюватись через кілька способів: кабельні з'єднання, радіоканал і спеціальні модеми, які працюють по мережі електропередачі.

Передбачається також, що довгострокове накопичення та більш детальна обробка зареєстрованих даних може здійснюватися на стаціонарному інформаційно-обчислювальному центрі.

Розроблений зразок ІВС складається з двох основних модулів:

- модуль вимірювання і збору інформації;
- мобільний модуль перетворення і обробки інформації.

До модуля вимірювання і збору інформації входять:

- вимірювальні давачі (акселерометри)  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ;
- блок збору інформації.

Мобільний модуль перетворення і обробки інформації складається з

- блоку попереднього підсилення сигналів БПП;
- блоку аналогової фільтрації експериментальних даних БАФ;
- блоку перетворення аналогових сигналів у цифровий код БПАС;
- промислового комп'ютера ПЕОМ;

- пакету прикладних програм ППП.

У свою чергу до складу ППП входять наступні програми, які здійснюють обробку експериментальних даних та управління роботою ІВС в режимах навчання та діагностики:

- програма перевірки експериментальних даних на субгауссовість ППС;
- програма обчислення субгауссового інтервалу ПОСІ;
- програма цифрової фільтрації ПЦФ;
- програма спектрально-кореляційного аналізу ПСКА;
- програма гістограмного аналізу ПГА;
- програма побудови діагностичних рішень ППДР.

Склад лабораторного зразку ІВС. Розроблений зразок складається з таких основних модулів і блоків:

- модуль вимірювання, реєстрації та первинної обробки даних;
- модуль накопичення, перетворення та вводу даних до ПЕОМ;
- блок обробки та аналізу експериментальних даних;
- блок побудови вирішуючих правил.

До модулю вимірювання, реєстрації та первинної обробки входять:

- вимірювальні давачі (акселерометри)  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ;
- блок попереднього підсилення сигналів давачів БПП;
- блок аналогової фільтрації експериментальних даних БАФ;
- блок реєстрації експериментальних даних БРЕД.

Модуль накопичення, перетворення та вводу даних до ПЕОМ складається з:

- блоку накопичення інформації БНІ;
- блоку перетворення аналогових сигналів у цифровий код БПАС.

Опис структурної схеми лабораторного зразку ІВС. Апаратурний склад розробленого зразку ІВС (рис.5.2) умовно можна поділити на дві частини: аналогову, що забезпечує вимірювання, реєстрацію, аналогову фільтрацію та

підсилення вібраційного сигналу, і цифрову, основне призначення – перетворення, ввід, реєстрація та обробка на ПЕОМ введених та перетворених у цифровий код експериментальних даних.

До складу аналогової частини входять акселерометри  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ; блок попереднього підсилення сигналів давачів БПП; блок аналогової фільтрації експериментальних даних БАФ. Цифрова частина містить блок аналогової фільтрації експериментальних даних БАФ.

Цифрова частина містить блок перетворення аналогових сигналів у цифровий код БПАС та промисловий комп'ютер ПЕОМ. Конструктивно ці блоки розміщені в одному корпусі.

У якості перетворювачів пружних коливань в електричний сигнал використано акселерометри типів АВС-017, ДН-4, Д-14.

Для попередньої обробки вібраційних сигналів використовується спеціально розроблений блок попереднього підсилювання сигналів БПП.

Цей блок складається з чотирьох незалежних підсилювачів сигналів датчиків зі змінними коефіцієнтами підсилення, що задаються блоком реєстра управління.

Блок аналогової фільтрації БАФ складається з:

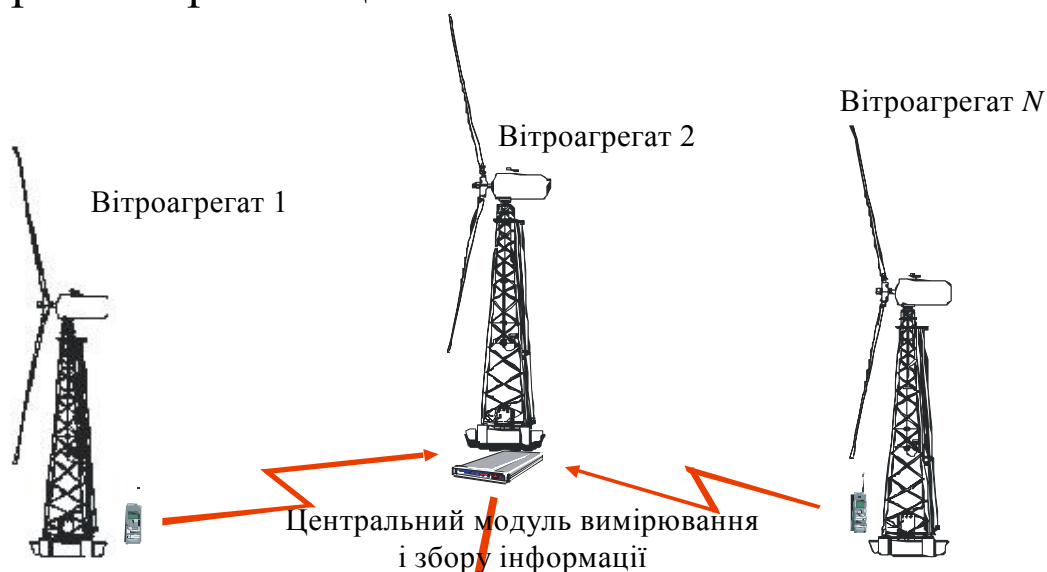
–режекторних фільтрів, які налагоджені на частоти режекції 50 Гц та 100 Гц з глибиною режекції порядку 40 дБ;

–фільтрів верхніх частот з частотами 0,5; 1; 5 і 10 кГц. Затухання характеристики фільтрів у смузі загородження складає приблизно 45 дБ/окт, а затухання у перехідній смузі 36 дБ/окт;

–фільтрів нижніх частот з верхніми граничними частотами 2; 4; 5 і 10 кГц.

Використання систем фільтрів, що переключаються, дозволяє сформувати необхідну смугу частот для дослідження вібраційних сигналів.

## Вітроелектростанція



Інформація з датчиків, розмішених на різних вузлах вітроагрегатів, поступає в центральний модуль реєстрації та передачі даних. Після цього дані можуть бути отримані пересувною лабораторією в одному місці.

## Мобільний модуль перетворення і обробки інформації



Перетворення та статистична обробка сигналів за допомогою модуля, що входить до складу лабораторного зразку ІВС вібродіагностики

## Інформаційно обчислювальний центр

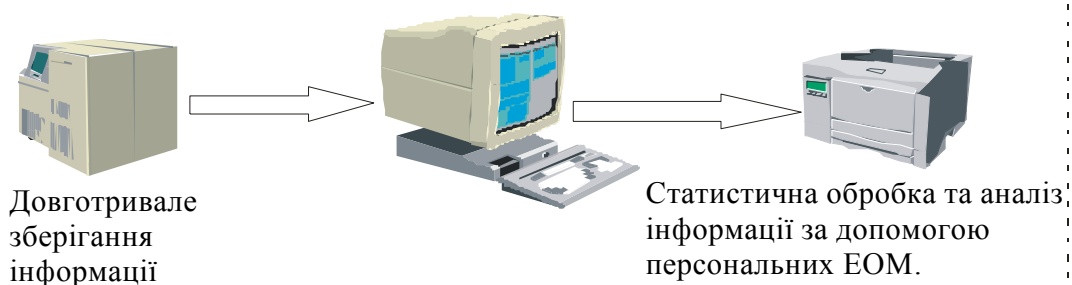


Рис. 6.1. Лабораторний зразок ІВС вібродіагностики

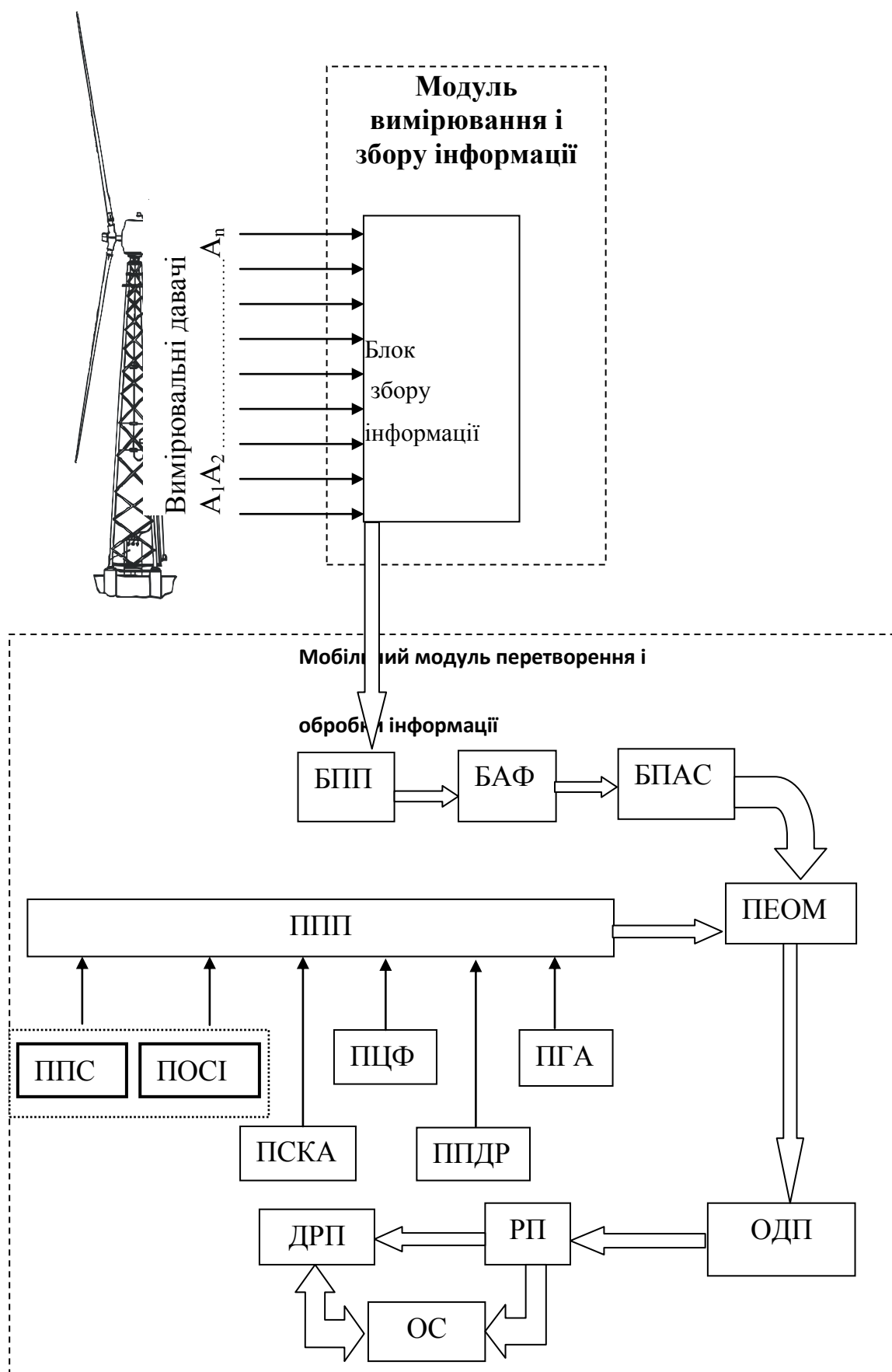


Рис. 6.2. Структурна схема лабораторного зразку ІВС

Основне призначення блоку БПАС – перетворення аналогових сигналів у цифровий код і запис їх у пам'ять ПЕОМ для наступної обробки і збереження. Структурна схема блоку БПАС представлена на рис. 6.3. Її робота здійснюється під впливом керуючих сигналів, які видаються через паралельний порт комп'ютера (LPT) спеціальним програмним забезпеченням. Вхідні дані, які супроводжуються синхроімпульсами “СИ”, заносяться в блок реєстра управління для задання необхідного режиму роботи апаратури.

Вихідна інформація містить:

–коефіцієнти підсилення для чотирьох каналів від підсилювачів блоку БПП;

–задану комутацію підсилювачів блоку БПП;

–вибір частоти перетворення аналогових сигналів у цифровий код.

Узгодження роботи блоку БПАС з блоком БПП здійснюється за допомогою блоку реєстра управління шляхом вибору певного коефіцієнту підсилення у кожного з підсилювачів блоку БПП.

Блок комутації аналогових сигналів здійснює підключення виходу підсилювача заданого датчика до входу аналого-цифрового перетворювача або почергове підключення всіх підсилювачів на протязі одного циклу роботи апаратури.

АЦП перетворює підсилені аналогові сигнали в цифрову форму для запису в буферну пам'ять контролера на заданій частоті дискретизації.

Допустимими є такі частоти дискретизації: 2 МГц, 1 МГц, 500 кГц, 250 кГц, 125 кГц, 62.5 кГц. Розрядність АЦП складає 12 біт.

Блок буферної пам'яті служить для узгодження високої швидкості перетворення зі швидкістю введення даних у комп'ютер через LPT. Загальна ємність буферної пам'яті складає 128 кбайт.

Блок адресного лічильника призначений для адресації буферної пам'яті при записі-відтворенні сигналів датчиків після запуску апаратури.

Блок формування управляючих сигналів виробляє сигнали, що керують роботою блоків, що входять до складу БПАС в певній часовій послідовності.



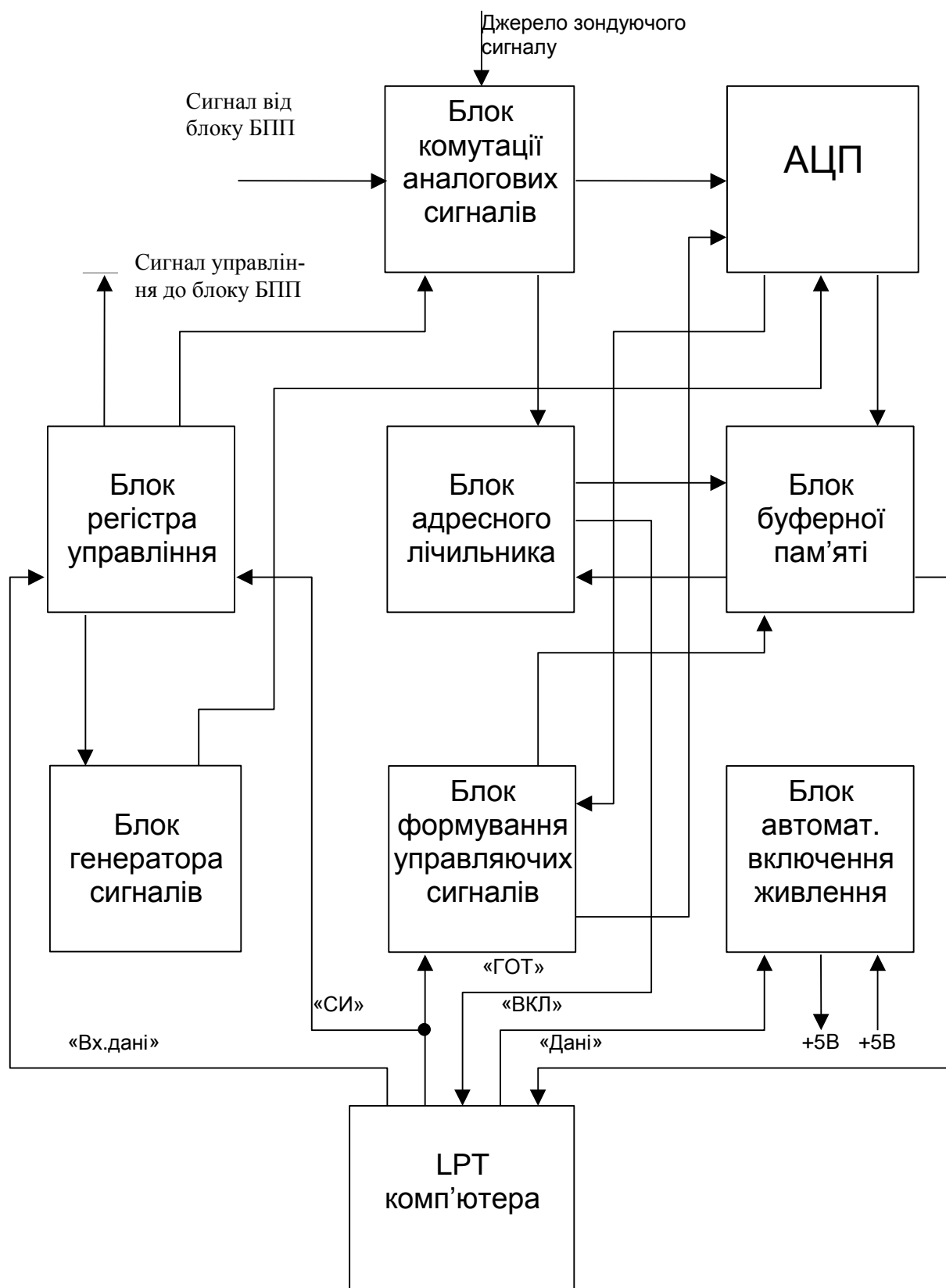


Рис. 6.3. Структурна схема блоку БПАС

Блок генератора сигналів являє собою кварцевий релаксаційний генератор, що виробляє прямокутні імпульси з частотою, заданою в блоці АЦП.

Блок автоматичного включення живлення здійснює вмикання і вимикання живлення БПАС зі сторони комп'ютера з метою збереження електроенергії автономного джерела живлення.

Блок БПАС виконаний у вигляді окремої плати, розміщеної у корпусі промислового комп'ютеру ПЕОМ.

Коротко розглянемо деякі питання, що стосуються схемної реалізації основних блоків, що входять до складу БПАС.

Блок реєстра управління реалізований на мікросхемах типу зсувного реєстра Д0561ИР2. Занесення даних у реєстр здійснюється по паралельному порту LPT сигналом "ВХИ", що супроводжується синхроімпульсами "СИ". У цьому блоці є тригер пуску, котрий дозволяє роботу блоку генератора сигналів, блоку АЦП, блоку формування керуючих сигналів і блоку буферної пам'яті. Установка цього тригера в одиничний стан виробляється по сигналах датчиків або від джерела зондувальних сигналів (зовнішній запуск).

Блок АЦП виконаний за допомогою аналого-цифрового перетворювача AD1672, що має граничну частоту перетворення 3 МГц і 12 двійкових розрядів на виході. Запуск АЦП здійснюється по входу CLK сигналами, що виробляються в блоці формування керуючих сигналів з відповідними частотами, які задаються блоком реєстра управління.

Опорна напруга 2,5 В виробляється в АЦП на виході REFIN, що надходить у блок підсилення сигналів датчиків для задання робочої точки операційних підсилювачів.

Блок буферної пам'яті КМ681000AL служить для узгодження швидкості перетворення АЦП і малої швидкості введення даних через порт LPT комп'ютера. Інформаційна ємність цієї пам'яті складає 128 кбайт.

Адресація пам'яті здійснюється за допомогою двійкового лічильника, зібраного на трьох мікросхемах типу НС393. Запис даних у пам'ять здійснюється по входу WR сигналами, що виробляються в блоці формування

керуючих сигналів. Вибірка даних з буферної пам'яті здійснюється після повного заповнення пам'яті, тобто після переповнення адресного лічильника.

У блоці формування управляючих сигналів виробляються імпульси керування надходженням старших і молодших байтів на виході АЦП. Крім того, у цей блок надходять імпульси СИ, для перебору адрес пам'яті при видачі даних з пам'яті в комп'ютер.

Блок генератора сигналів зібраний на елементах CD4011, HC393, HC4016, що дозволяють виробляти сигнали з частотами 2МГц, 1МГц, 500кГц, 250кГц, 125кГц, 62,5кГц відповідно до стану регістра керування. Сигнали з кварцового генератора, частота якого визначається підключеним у зворотному зв'язку одного з двох резонаторів на 1 МГц і 4 МГц, надходять на двійковий лічильник (D10.2) для одержання зазначеного вище ряду частот.

Вибір визначеної частоти здійснюється за допомогою комутатора струму (D16.1, D16.2). На виході D16 з'являються сигнали з тією частотою, що була задана на регістрі керування.

Блок БПАС має наступні технічні характеристики:

1. Кількість вхідних каналів	5
2. Кількість підсилювачів	4
3. Коефіцієнти підсилення	2, 6, 18, 54, 78
4. Запуск апаратури	внутрішній, зовнішній
5. Частота аналого-цифрового перетворення	2 МГц; 1 МГц; 500 кГц; 250 кГц; 125 кГц; 62,5 кГц
6. Розрядність АЦП складає	12 біт
7. Ємність буферної пам'яті	128 кбайт
8. Включення-виключення живлення	автоматичне
9. Інтерфейс	LPT

10. Габарити контролера	150x150x30 мм
11. Маса контролера	0,3 кг
12. Джерело живлення	4 елементи по 1,2 В
13. Максимальний струм споживання	60 мА

## **6.2. Експерименти з лабораторним макетом інформаційно-вимірювальних систем вібродіагностики**

Під вібродіагностикою в даній роботі розуміємо процес, спрямований на отримання відповіді на питання оцінки технічного стану вітроенергоагрегату як в поточний момент діагностування так і прогноз його надійності на найближчий період експлуатації [75, 76, 77, 78]. Виходячи з того, що найменш надійними в енергоагрегаті є рухомі деталі та вузли, як, наприклад, ротори, підшипники, вузли кріплення рухомих деталей, які знаходяться в обертовому русі або отримують періодичні в часі вібронавантаження, основна увага приділяється дослідженню циклічних механічних процесів, які супроводжують роботу вітроагрегатів. Тому *наступні пункти даної роботи будуть будуватися на дослідженні саме таких процесів.*

З фізичної точки зору вимірюванням при такій діагностиці підлягає переміщення, швидкість та прискорення заміряні в окремих точках вітроенергетичного агрегату. Саме ці величини і процеси є предметом вимірювання і джерелом інформації про стан всього агрегату в цілому. За ними робляться діагностичні висновки, а тому зрозуміло що питання точності та достовірності отримання і попередньої обробки результатів вимірювання таких процесів лежать в основі забезпечення достовірного діагностування всього енергоагрегату.

Випробовувався лабораторний макет, який був побудований на базі лабораторного зразка вітротурбіни USW 56 - 100, яка була встановлена на

стенді ДП “ВО Південмаш”. Під час випробувань розглядались два режими роботи вітротурбіни: пусковий та прокрутки генератором у режимі двигуна.

Глибокому вивченню, відповідно до даної роботи, підлягав режим прокрутки генератора. Саме при роботі у цьому режимі здійснювались експерименти з вимірювань, реєстрації та визначення статистичних характеристик вібрацій окремих вузлів лабораторного макета вітроагрегату.

Слід також відзначити, що пусковий режим є досить коротким у часі (кілька секунд) і являє собою перехідний (нестационарний) процес, який не є характерним для роботи вітроелектричного агрегату. Виходячи з цього, випробування лабораторного макета ІВС по одержанню вібраційних характеристик у пусковому режимі в даній роботі не наводяться. Вони проводились стисло.

Схема з'єднання елементів лабораторного макета ІВС наведена на рисунку 6.4.

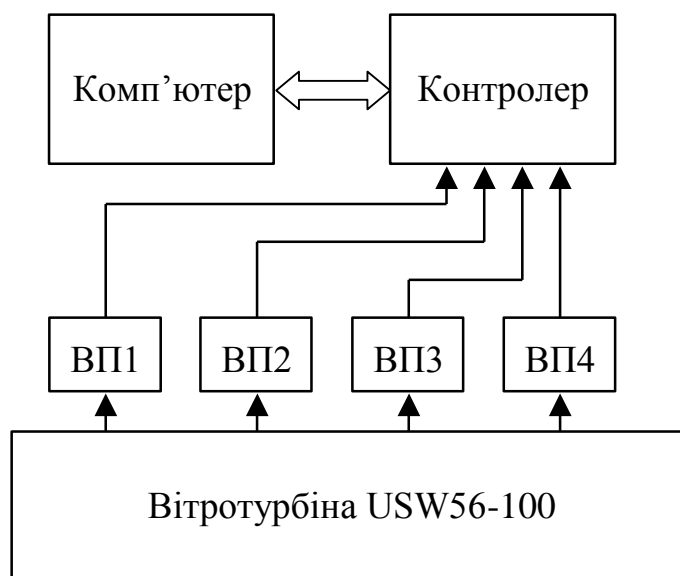


Рис. 6.4. Схема з'єднання елементів лабораторного макета ІВС для проведення вимірювань

При прокрутці вітроелектричного агрегату генератором у режимі двигуна високообертвий вал генератора обертався з середньою кутовою швидкістю 1465 об/хв, а вал ступиці вітроколеса (низькообертвий вал) – з середньою кутовою швидкістю 72 об/хв.

З цього малюнка видно яким чином при проведенні експериментів на вітротурбіні були встановлені датчики ВП1, ВП2, ВП3, ВП4, які перетворювали в електричний сигнал вібраційну хвилю, що збуджувалась в результаті роботи вузлів вітроагрегату. З виходів датчиків ВП1, ВП2, ВП3, ВП4 сигнали поступали на мікроконтролер, який узгоджував параметри цих сигналів зі входами плати перетворення, а також здійснював перетворення аналогових вібросигналів у цифровий код.

В якості згаданих датчиків було використано наступні типи перетворювачів:

- ВП1 - акселерометр ДН - 4;
- ВП2 - акселерометр Д - 14;
- ВП3 - акселерометр АВС - 017;
- ВП4 - сейсмічний датчик СВ-10Ц.

В лабораторному зразку ІВС під час випробувань навмисне було використано різні типи акселерометрів, щоб виявити найбільш придатний тип для проведення вібродіагностики.

В процесі проведення експериментів по вимірюванню і реєстрації вібрацій датчики ВП1, ВП2, ВП3 послідовно розташовувались в певних точках на різних вузлах вітротурбіни (рис. 6.5).

Сейсмічний датчик СВ-10Ц (ВП4) встановлювався на підставці стенду або на рамі вітротурбіни. Результати обробки інформаційних сигналів, що вимірювались цим датчиком, у даній роботі не наведені, оскільки цю інформацію було використано для перевірки роботи низькочастотного каналу в лабораторному зразку ІВС вібродіагностики.

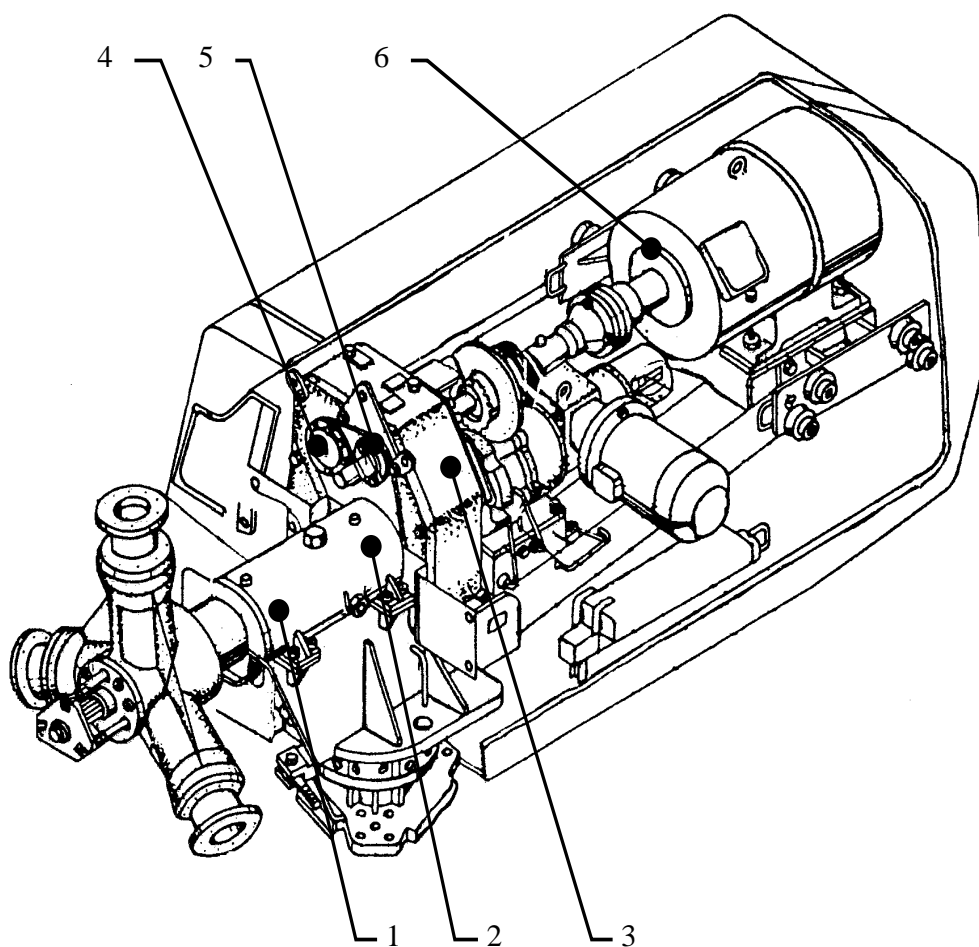


Рис. 6.5. Електромеханічний вузол вітроелектричного агрегату  
 1 – корпус головного валу, 2 – корпус головного валу, 3 – корпус  
 трансмісії, 4 – корпус трансмісії, 5 – корпус трансмісії, 6 – генератор.

Крок дискретизації по часу аналогових сигналів при їх перетворенні у цифровий код складав 64 мкс (частота дискретизації АЦП лабораторного макета 15625 Гц). Об'єм зареєстрованої вибірки складав 16000 відліків.

### 6.3. Особливості реєстрації досліджуваних вібросигналів

Згідно з рис. 6.4, сигнал через контролер поступає на плату АЦП, яка входила в склад комп'ютера. На виході контролера ми маємо сигнали від відповідних датчиків. Для конкретності будемо розглядати сигнал з виходу сейсмічного датчика (датчик ВП4). Цей сигнал описує графік зміни прискорення в радіальному напрямку високообертового валу в залежності від часу. На рис. 4.8 а) наводиться одна з можливих реалізацій такого сигналу. Початок відліку такого сигналу вибрано таким чином, щоб в нульовий момент часу його значення дорівнювало нулеві. На цьому рисунку наведено пунктиром динамічний діапазон сигналу. Виходячи з того, що у відповідності з фізикою явища, яке вивчається, моделлю даного сигналу може бути випадковий періодичний процес загального виду зупинимось коротко на загальних питаннях його математичного опису (математичної моделі). Нагадаємо, що під випадковим періодичним процесом по Слуцькому розуміють процес  $\xi(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , для якого існує таке число  $T$ , що два вектори  $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$  та  $\xi(t_1 + T), \xi(t_2 + T), \dots, \xi(t_n + T)$  є стохастично еквівалентними, при будь-яких  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbf{R}$ . При цьому число  $T$  зветься періодом випадкового процесу  $\xi(t)$ .

При діагностуванні різних електричних пристроїв машин сигнали, що надходять з давачів з різних механічних вузлів як правило носять циклічний характер. Зупинимось на термінології, розглянемо циклічність, періодичність та ритмічність.

*Циклічний процес* – це фізичне визначення стосовно фізичного явища і стосується того випадку, коли з точки зору фізики можна виділити повторюваність характеристик сигналів.

*Поняття ритмічності* вживається тоді, коли спостерігається два фізичних процеси, один з яких має характер циклічності, близький до другого. Тоді ці два



процеси називають ритмічними. Наприклад, різні коливання, викликані одне одним або такі, що відбуваються одне в залежності від іншого, пов'язані з ним.

*Періодичні процеси або функції* поняття чисто математичне абстрактне і вживається при побудові різних математичних моделей реальних циклічних або ритмічних процесів.

Як відомо, основними видами похибок при діагностиці є як інструментальні так і методичні. Виходячи з поставленої в дисертаційній роботі задачі та мети досліджень, основна увага при проведенні експериментів приділяється питанням зменшення методичних похибок. А саме як на базі експериментальних даних

– розв'язати за допомогою методів перевірки на субгауссовість, викладених в попередніх розділах дисертаційної роботи, сам факт існування резерву для зменшення методичної похибки при оцінюванні точності вимірювань,

– практично реалізувати таке оцінювання при вібродіагностиці електроенергетичних установок, в яких вібрації породжуються електромеханічними вузлами, що знаходяться в циклічному (обертovому) русі.

Коротко зупинимося на самій ідеї формування відповідних вибірок для процесів, що пов'язані з циклічністю викликаного обертання різних роторів і валів. Для цього розглянемо наступні рисунки 6.6 та 6.7.

Таким чином спостерігалася деяка реалізація періодичного інформаційного сигналу, що надходив на вхід АЦП одного з описаних вище датчиків. На рисунку 6.6 а) зображена одна з можливих таких реалізацій. Після перетворення аналогових реалізацій за допомогою АЦП отримуємо реалізації періодичного випадкового процесу з дискретним часом рис.6.6 б). Вони синхронізовані з фазами обертovого руху, що зображені на рисунку 6.7.

Процес, який отримується в результаті дискретизації з дискретним часом називається вкладеним по відношенню до аналогового процесу. При цьому аналоговий процес, який є стохастично-періодичним, не може розглядатися як

стаціонарний в загальному випадку. Проте вкладені процеси, отримані в результаті дискретизації при певних умовах можуть виявитися не лише стаціонарними, але і ергодичними. Це може бути досягнуто шляхом певного узгодження початкової фази  $\varphi_k$ -серії вкладеного процесу з періодом  $T$  випадкового процесу.

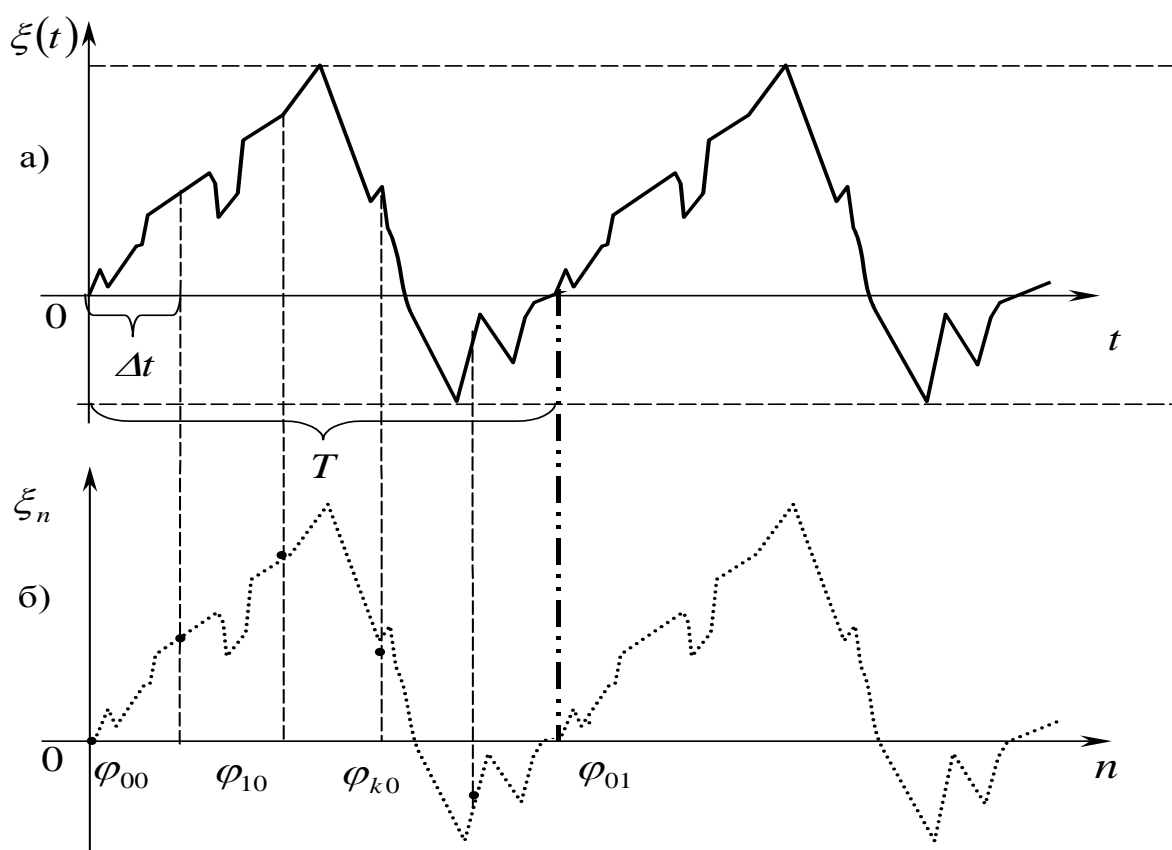


Рис.6.6. Реалізація сигналів: а) аналогового, б) дискретизованого

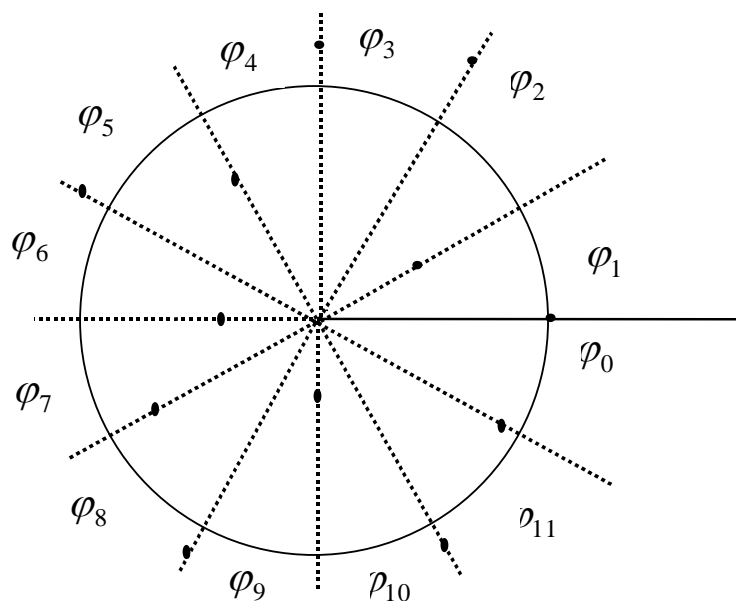


Рис. 6.7. Ілюстрація кутових спостережень обертання валу в полярній системі координат

При аналізі сигналів, що надходили з датчиків, встановлених на лабораторному стенді вітроенергоагрегатів, виходили з моделі періодичних випадкових процесів. Так як відліки кожної  $\varphi$ -серії взяті через період, то для випадку періодичного випадкового процесу вони повинні мати стаціонарні в часі характеристики (математичне сподівання, дисперсію та вищі моменти). А різні  $\varphi$ -серії повинні мати кореляційні функції, що будуть залежати лише від різниці номерів  $\varphi$ -серій. При виконанні даної роботи виходили з того, що вказані вище властивості мають місце для процесів, що спостерігаються. Зокрема кожна  $\varphi_k$ -серія являє собою стаціонарний ергодичний процес з дискретним часом, реалізація якого і фіксувалася за допомогою вимірювальних приладів. В науковій роботі [51] наводиться глибокий всебічний статистичний аналіз процесів на виході перерахованих вище давачів, встановлених у відповідності з описом, що наводиться у тексті. Але в даній дисертації

розглядається лише процес практичного аналізу вібро сигналів отриманих експериментально.

При цьому було проведено стохастичне оцінювання перших чотирьох моментів кожної  $\varphi_k$ -серії в залежності від її номера, а також проведено гістограмний аналіз для кожної  $\varphi_k$ -серії і побудовано оцінки кореляційної функції.

В роботі період  $T$  було вибрано наступним чином – для низькообертової частини агрегата  $T = 60/72 = 0,833$ с, а для високообертової частини  $T = 60/1465 = 0,04096$ с, а крок дискретизації АЦП в обох випадках дорівнював 64 мкс. Спостерігається реалізація, що фіксується у вигляді масиву  $G = \{S_g, g \in 0, N - 1\}$ , де  $N$  – обсяг основної вибірки – загальна кількість усіх відліків, які фіксуються у вигляді масиву  $G$  в пам'яті АЦП з кроком за часом  $\Delta t$ . В роботі було вибрано  $\Delta t = 64 \times 10^{-6}$ с – період квантування по часі, а  $N = 16000$ .

Потім за допомогою окремої розробленої програми формується матриця  $\varphi$ -серій, яку позначимо через  $\Phi$ . Кожен рядок цієї матриці містить всі елементи  $k$ -ї  $\varphi$ -серії, їх в кожному рядку  $z$  – число періодів. Таким чином

$$\Phi = \{\varphi_{k,j}, k \in \overline{0, r-1}, j \in \overline{0, z-1}\}, \quad (6.1)$$

де  $r$  – кількість серій – рядків матриці  $\Phi$ , яка дорівнює кількості відліків на періоді  $h$  або в ціле число разів менше неї. Причому  $\Delta\varphi$  – крок в радіанах між елементами  $\varphi$ -серій на рис. 6.7.

В нашому випадку кількість відліків на періоді в матриці  $S$  дорівнювала  $h = 640$ . Тому тривалість одного періоду (оберту) швидкообертового вала  $T = \Delta t \times h = 0,041$  с. Загальна тривалість  $N$  спостережень, що зафіксовані в  $S$

становить 1,25 с. В нашому випадку для високообертової частини кількість періодів становить  $z = \frac{16000}{h} = 25$ .

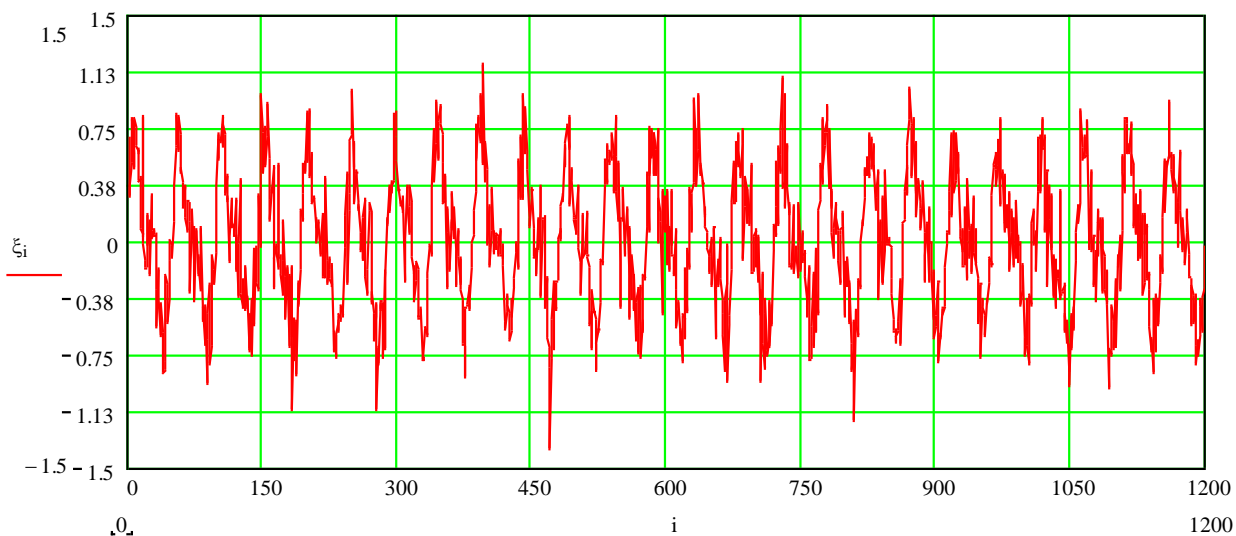


Рис. 6.8. Одна з експериментально отриманих реалізацій віброприскорення за допомогою датчика ВП1

На рисунку 6.8 наводиться одна з реалізацій практично отримана в процесі експеримента з датчика ВП1, схематично зображена на рисунку 6.6 б).

Шляхом обробки матриці  $\Phi$  формується матриця-колонка оцінок математичних сподівань для кожної  $\varphi_k$ -серії

$$v = \{v_k, k = \overline{0, r-1}\},$$

де

$$v_k = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{z-1} \varphi_{kj}. \quad (6.2)$$

На малюнку 6.9 наводиться графік зміни в часі на періоді оцінки математичного сподівання (*тренда*)  $v_k$  при аналізі сигналу з датчика ВПІ.

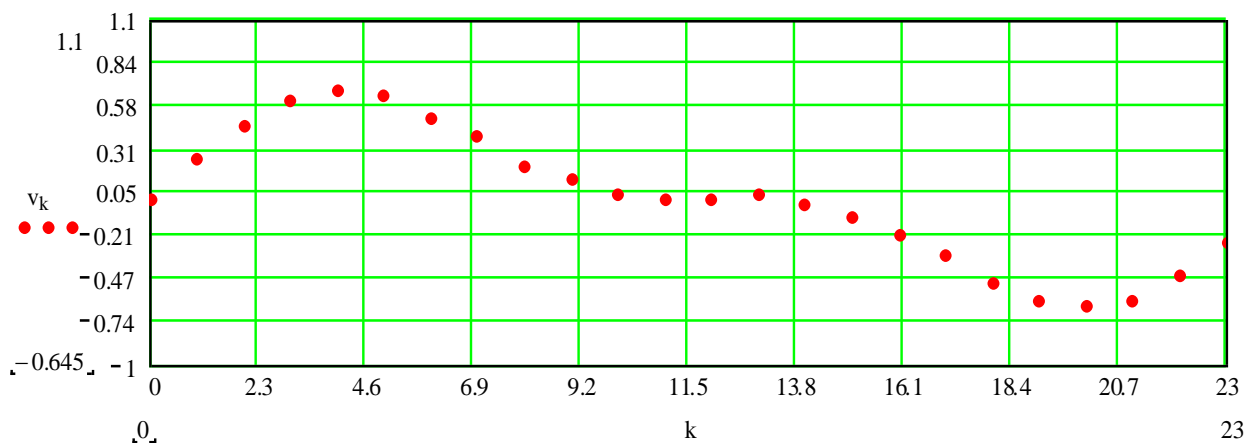


Рис.6.9. Графік зміни в часі (дискретно) оцінки математичного сподівання для віброприскорення на періоді по реалізації рисунка 4.10 (тренд)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
	0	0.012	0.108	0.268	0.377	0.479	0.544	0.608	0.653	0.681	0.636	0.605	0.692	0.48	0.42	0.341	0.271

Рис.6.10. Відрізок числового ряду початкових значень графіка рисунка 6.9

Оцінки точності величин, розрахованих по формулі (6.2) дають наступні результати. Виходячи з того, що величина  $v_k$  належить до  $SSub(\Omega)$  і одночасно належать до класу гільбертових гауссових випадкових величин  $L_2(\Omega)$ , описаних в розділі 2, а це значить, що для них коефіцієнт субгауссовості рівний одиниці, приходимо до висновку, що одночасно мають місце оцінки точності як за допомогою нерівності Чебишева (2.12), так і за формулами оцінок точності на базі субгауссового стандарту (2.17). Тому при довірчому інтервалі  $\pm 3\mu\mu_k$  в кожній точці визначення  $v_k$ ,  $k = \overline{0, r-1}$

нерівності  $|v_k| < 3\mu\mu_k$ ,  $k = \overline{0, r-1}$ , виконуються виходячи з  $L_2(\Omega)$  за нерівністю Чебишева згідно (2.12) при  $\mathbf{D}\xi = \mu\mu_k^2$  з ймовірність 0,89, а виходячи з  $S\text{Sub}(\Omega)$ , згідно (2.17), – з ймовірність 0,98.

Тут величина  $\mu\mu_k^2$  являє собою оцінки дисперсій кожного елемента  $\varphi_k$ -серії і визначається за формулою

$$\mu\mu_k^2 = \frac{1}{r-2} \sum_{j=0}^{r-1} (\varphi_{kj} - v_k)^2. \quad (6.3)$$

На рис. 6.11 наведено графік зміни оцінки СКВ однієї з реалізацій фі-серії отриманої експериментально, для якої на рис. 6.9 наведено графік зміни оцінки математичного сподівання.

Спектральний аналіз функції зміни в часі (рис.6.9) оцінки (6.2) за допомогою базиса дискретного перетворення Фур'є виявив дві основні частотні гармоніки: першу з частотою обертання вала, а другу на подвійній частоті з амплітудою, що становить приблизно 0,4 від амплітуди першої.

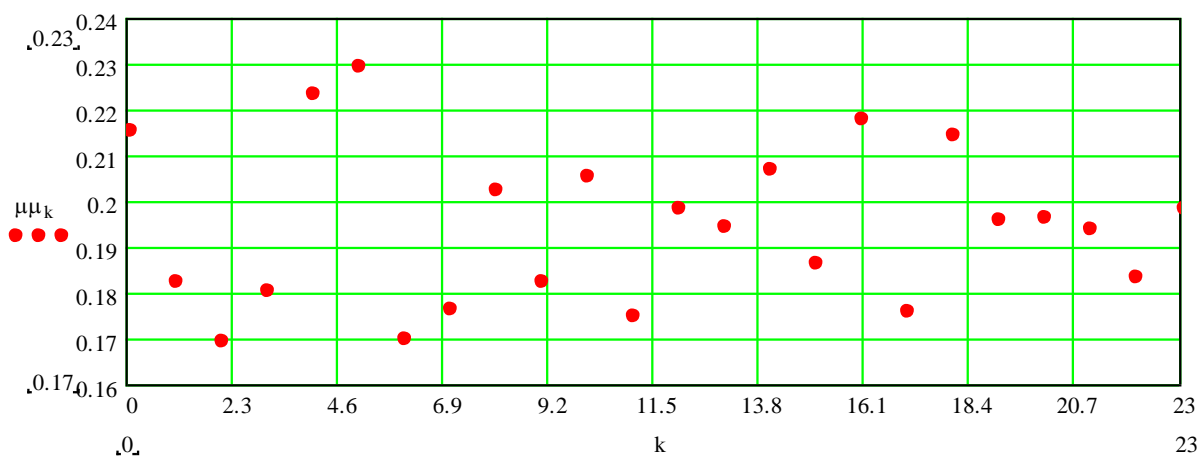


Рис.6.11. Графік зміни в часі оцінки СКВ на періоді,  
що стосується реалізації рисунка 6.8

Через  $\Phi - \nu$  позначимо матрицю, яка отримується з (6.1) шляхом центрування кожного рядка  $\varphi_k$ -серії своєю  $k$ -ю оцінкою математичного сподівання. Вона має вид

$$\Phi - \nu = \begin{vmatrix} \varphi_{00} - \nu_0, & \varphi_{01} - \nu_0, & \dots, & \varphi_{0z-1} - \nu_0 \\ \varphi_{10} - \nu_1, & \varphi_{11} - \nu_1, & \dots, & \varphi_{1z-1} - \nu_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{r-10} - \nu_{r-1}, & \varphi_{r-11} - \nu_{r-1}, & \dots, & \varphi_{r-1z-1} - \nu_{r-1} \end{vmatrix} \quad (6.4)$$

Матрицю кореляційних коефіцієнтів фі-серій знаходимо з врахуванням (6.4) у вигляді

$$\frac{1}{r-2} (\Phi - \nu)(\Phi - \nu)^T = \begin{vmatrix} R_{00}, & R_{01}, \dots, R_{0r-1} \\ R_{10}, & R_{11}, \dots, R_{1r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{r-10}, & R_{r-11}, \dots, R_{r-1r-1} \end{vmatrix} \bullet \quad (6.5)$$

Елементи головної діагоналі цієї матриці  $R_{kk}$  являють собою оцінки других центральних моментів кожної  $\varphi_k$ -серії.

На базі оцінок кореляційних функцій була проведена оцінка енергетичних спектральних характеристик. При цьому основна увага була приділена випадку, коли з результатів гістограмного аналізу, за допомогою методики наведеної в теоретичній частині даної дисертації, визначався субгауссовий стандарт похибок проведених вимірювань, а також порівнювались ці результати з використанням нерівності Чебишева. Вони свідчать, що використання інформації про субгауссовість характеру похибок дає можливість суттєво зменшити величину методичних похибок при оцінюванні точності результатів при такій обробці.



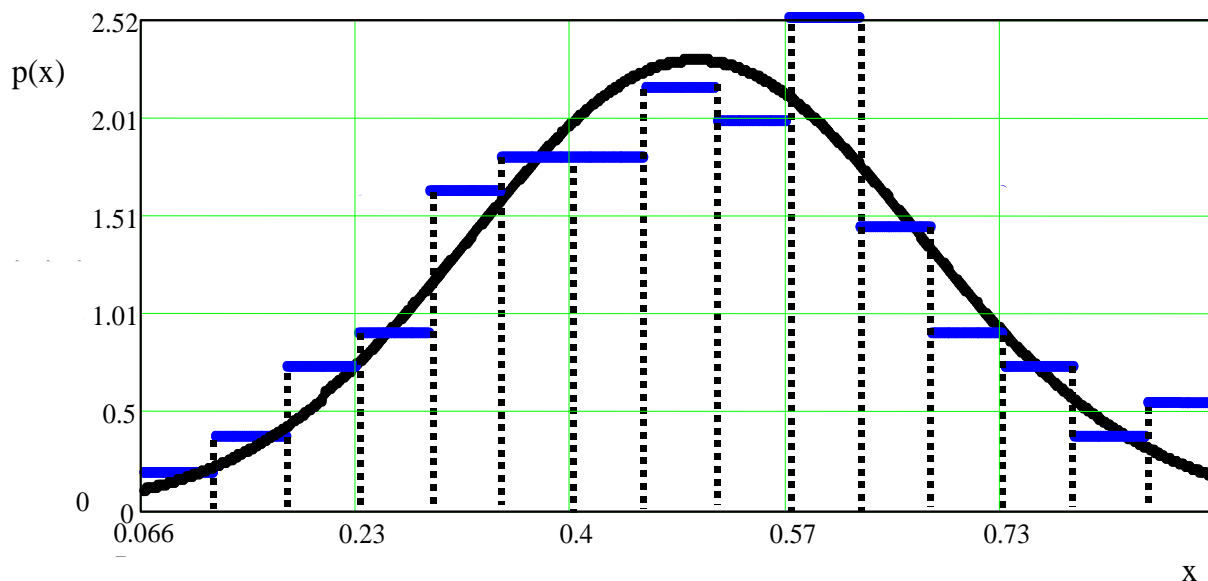


Рис.6.12. Гістограма та згладжуюча її крива 13-го типу по Пірсону, отримані експериментально

На рис. 6.12 наводяться графіки гістограми та згладжуючої її кривої 1-го типу по системі Пірсона (а більш точно 13-го типу) для  $\varphi_k$ -серії отриманої з реалізації рис. 6.8. Гіпотеза про їх близькість перевірялась автоматично по розробленій в дисертації програмі з використанням  $\chi^2$ -критерію і дала позитивний результат. А саме граничне значення  $X_{Гр} = 27.688$ . Величина  $\chi^2 = 9.449$ , тобто  $X_{Гр} > \chi^2$ , при коефіцієнті довіри 0.99, гіпотеза стосовно приналежності до 13 типу вірна. Це значить, що досліджувана  $\varphi_k$ -серія має розподіл що належить до класу  $SSub(\Omega)$

Коефіцієнт субгаусовості отриманий за розробленою методикою  $S \approx 1$ , а це означає, що в кожній точці відліку рис. 6.9 субгаусовий стандарт приблизно дорівнює  $\mu\mu_k$ , графік зміни яких зображено на рис 6.12. Останнє дає можливість побудувати оцінки точності значень наведених на рис 6.9. При

цьому довірчі ймовірності в кожній точці визначені по нерівності Чебишева приблизно дорівнюють 0.89, а по субгаусовому стандарту 0.98, для довірчого інтервалу  $\pm 3\mu_k$ .

## ВИСНОВКИ

В роботі вирішено складну науково-технічну задачу дослідження математичної моделі субгауссових випадкових процесів, результати якого показали, що її використання дає можливість значно зменшити довжину довірчого інтервалу при тій же достовірності або підвищити довірчу ймовірність при тій же довжині довірчого інтервалу. Цей результат надає можливість для створення сучасних засобів вимірювання, які можуть бути використані у таких галузях народного господарства як приладобудування, енергомашинобудування та ін.

На базі розробленої методики, досліджено цілу низку відомих та широко вживаних в теорії ІВС законів розподілу, зокрема таких як арксинус, рівномірний, нормальний і інші, які належать до класу субгауссових процесів, і знайдено у явному вигляді формули для обчислення їх субгауссових стандартів.

Проведений аналіз наукових праць з обробки статистичних даних в умовах не стаціонарності по одній реалізації та огляд існуючих ІВС, що працюють в умовах явної фізичної не стаціонарності показав, що найбільш доцільними є методи стаціонаризації та виділення класів нестаціонарних процесів, для яких його можна застосовувати. Результати цього огляду фактично є рекомендаціями практичної реалізації ІВС діагностики.

Розроблено новий метод попередньої обробки інформаційної статистики, яка надходить з блока датчиків до модуля обробки шляхом використання масштабних множників на відповідних ділянках стаціонарності або шляхом відбору вкладених стаціонарних послідовностей переходить в стаціонаризовану модифікацію придатну для обробки класичними статистичними методами.

Розроблено систему програм, яка дала можливість створити теоретичну базу для побудови алгоритмічно-програмного забезпечення, яке зокрема призначено для роботи у складі ІВС вібродіагностики вітроелектричних агрегатів.

Вперше запропоновано та досліджено матрицю фі-серій, яка дозволяє по одній реалізації обробляти нестационарний періодичний процес, яким є віброприскорення та інші інформаційні сигнали, що вимірюються при діагностиці енергоагрегатів. Це дозволило виділити стаціонарні, вкладені по відношенню до періодичного процесу компоненти і дослідити їх за допомогою гістограмного аналізу та спектрально-кореляційної теорії.

Придатність використання субгауссової моделі та її практична цінність були перевірені при випробуванні лабораторного зразка ІВС вібродіагностики вітроагрегату, що дало позитивні результати.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных систем. – М.: Энергия, 1977. – 536 с.
2. Скрышник В.М. и др. Анализ надежности технических систем по цензурированным выборкам. М.: Радио и связь, 1988. – 184 с.
3. ГОСТ 16263 – 70 Метрология. Термины и обозначения. –М.: Изд-во стандартов, 1978.
4. Коваленко И.Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. –М.: Сов. радио, 1982. – 209 с.
5. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы: Пер. с англ. и дополнения Яглома А.М. –М.: Изд-тво иностранной литературы, 1961. – 167с.
6. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. –М.: Наука, 1980.
7. Броди С.М., Власенко О.Н., Марченко Б. Г. Расчет и планирование испытаний систем на надежность. – К.: Наукова думка, 1970.
8. Кендал М., Стюарт А. Статистические выводы и связи. Пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – 899 с.
9. Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. –М.: Мир, 1961 – 648 с.
10. Державна система забезпечення єдності вимірювань. Метрологія. Терміни та визначення. ДСТУ 2681-94. –Київ: Видання офіційне. Держстандарт України. – 68с.
11. Гриневич Ф.Б., Таранов С.Г., Марченко Б.Г., Мислович М.В. Перспективи розвитку приладобудування, інформаційно-вимірювальних систем та метрологічного забезпечення для електроенергетики України// Тех. електродинаміка. 2000. №6. – с. 3
12. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971. – 326 с.

13. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. –К.: “Техніка”, 2004. – 287 с.
14. ГОСТ 18242–72. Статистический приемочный контроль по альтернативному признаку. Планы контроля. –М.: Изд. – во стандартов, 1972
15. Беляев Ю.К. Статистические методы обработки неполных данных о надежности изделий. “Политехнический музей”. –М.: “Знание” 1987 г. – 112 с.
16. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 411 с.
17. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982. – 296с.
18. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Моделювання випадкових процесів. Навчальний посібник для студентів механіко-математичних спеціальностей. – К.: ВЦ “Київський університет”, 1999. – 223с.
19. Груничев А.С., Кузнецов В.А., Шипов Е.В. Испытания радиоэлектронной аппаратуры. –М.: Сов. радио., 1969. – 288 с.
20. Давенпорт В.Б., Рут В.Л. Введение в теорию случайных сигналов и шума. Пер. с англ. –М.: ИЛ, 1960. – 468 с.
21. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. Пер. с англ. –М.: “Сов. радио”, 1967 г. –299 с.
22. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – Т.1,2,4.
23. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика.–М.: Издательство иностранной литературы, 1960.–434с.
24. Кендал М.Дж., Стюарт А. Теория распределений: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 588 с.
25. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982. – 296с.
26. Марченко Н.Б., Мислович М.В. Особливості використання нестационарних лінійних випадкових процесів для моделювання процесів в

електроенергетиці // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: “Силова електроніка та енергоефективність”. – 2004. – Ч. 3. – С.97-100.

27. Марченко Н.Б. Анализ точностных характеристик при моделировании линейных субгауссовых случайных процессов и их использование в информационно-измерительных системах // Электронное моделирование. –2004. – Т. 26, №6. – С. 63-71.

28. Марченко Н.Б. Використання моделей субгауссівських процесів при моделюванні інформаційних сигналів // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: “Проблеми сучасної електротехніки”. – 2004. – Ч. 5. – С.117-120.

29. Марченко Н.Б. Особенности моделирования субгауссовых случайных величин и процессов // Сборник тезисов докладов по материалам 10-й Юбилейной международной научной конференции “Теория и техника передачи, приема и обработки информации”. – Ч. 2. – Харьков-Туапсе: Харьковский национальный университет радиоэлектроники. – 2004. – С. 159-160.

30. Марченко Н.Б. Деякі особливості використання субгауссових випадкових процесів в інформаційно-вимірювальних системах □ □ // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т.9, №4. – С. 139-146.

31. Марченко Б.Г., Приймак М.В. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем // Праці Інституту електродинаміки. – Київ: ІЕД НАН України. – 1999. – Вип. 1. – С.129-153.

32. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976. – 352с.

33. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496с.

34. Ціделко В.Д., Яремчук Н.А. Невизначеність вимірювання. Обробка даних і подання результату вимірювання: Монографія. – К.: “Видавництво «Політехніка»”, 2002. – 176 с.

35. Марченко Н.Б. Про другий наслідок з нерівності Чебишева та його використання при оцінці точності вимірювань // Тези доповідей V Міжнародної науково-технічної конференції “АВІА-2003”. – Т.1. – Київ: Національний авіаційний університет. – 2003. – С.11.101-11.104.
36. Марченко Б.Г., Марченко Н.Б., Фриз М.Є. Спеціальні глави математики: Навчальний посібник. – Тернопіль: ТДТУ ім. Івана Пулюя, 2004. – 159 с.
37. Кендал М.Дж., Стюарт А. Теория распределений. Пер. с англ. / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1966. – Т.1. – 587с.
38. Лукач Е. Характеристические функции. Пер. с англ. / Под ред. В.М. Золотарьова. – М.: Наука, 1979.–424с.
39. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576с.
40. Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 556с.
41. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – Киев: Выща школа, 1983. – 455с.
42. Цапенко М.П. Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование.: Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 440 с.
43. Тёрнер Д. Вероятность, статистика и исследование операций. – М.: Статистика, 1976. – 432с.
44. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. – Киев: Наукова думка, 1973. – 192с.
45. Марченко Б.Г., Щербак Л.М. Линейные случайные процессы и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1975. – 186с.
46. Марченко В.Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике. – Киев: Наукова думка, 1992. – 212с.
47. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 406с.



48. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496с.
49. Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика. Пер. с франц. / Под ред. Ю.В. Линника. – М.: Наука, 1972. – 383с.
50. Шметтерер Л. Введение в математическую статистику. – М.: Наука, 1976. – 520с.
51. Розробка ефективних методів та засобів визначення і контролю параметрів та характеристик електричних та віброакустичних процесів, що супроводжують роботу вітроелектричних агрегатів, на базі пересувної лабораторії. Договір №1209-02 від 19 листопада 2002 р. Науково-технічний звіт по роботі. – Київ – 2003. – 94с.
52. Андрианов В.Н., Быстрицкий Д.Н., Вашкевич К.П., Секторов В.Р. Ветроэлектрические станции. – М.: Л.: Госэнергоиздат, 1960. – 320с.
53. Де Ренло. Ветроэнергетика. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 280с.
54. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука, 1968. – 548с.
55. Элдертон П. Кривые распределения численностей и корреляция. – М.: Наука, 1924. – 426 с.
56. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. – М.: Мир, 1967. – 498 с.
57. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632с.
58. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1966. – Т.1. – 607 с.
59. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648с.
60. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. –К.: “Техніка”, 2004. – 287 с.
61. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. Пер. с англ. –М.: “Мир”, 1973, – 957 с.

62.Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. –М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.

63.Нечипорук В.В Стаціонаризація кусково-нестационарних пуассонівських процесів відмов. // Тех. електродинаміка, ПСЕ частина 6, - 2004. – с. 115-118.

64.Дуб Дж. Вероятностные процессы. Пер. с англ. –М.: ИЛ, 1956. – 835 с.

65.Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. –М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.

66.Новиков В.С. Техническая эксплуатация и надежность авиационного радиооборудования: Учеб. пособ. –М.: Транспорт, 1970. – 232 с.

67. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974. – 463с.

68. Marchenko N., Myslovitch M., Sysak R. A Prototype of Diagnostic System of Wind-Driven Power Units // VIth International Workshop Computational Problems of Electrical Engineering. – Zakopane (Poland). – 2004. – P.75-78.

69. Marchenko N., Myslovitch M., Sysak R. Vibration Diagnostics of Wind-Driven Power Units with Usage of Statistical Expert System // Prezeglad Elektrotechniczny. – Zakopane (Poland). – 2005. – № 2. – P.53-57.

70. Береговой А.И., Быстриков А.Ф., Котвицкий Н.Н., Марченко Б.Г., Мыслович М.В., Осадчий Е.П. Вибродиагностика электрических машин. Статистический подход и устройство. (Препр. / АН УССР. Ин-т электродинамики; № 364). – Киев, 1984. – 56с.

71. Перфилов О.Л., Шаварин В.Н. Некоторые вопросы развития ветроэнергетики // Энергетическое строительство. – 1991. – № 3. – С. 29 – 33.

72. Пиковский А.В. Аналитический обзор. Электрооборудование для ветроэнергетики. – М.: Аналитика, 1991. – С. 179.

73. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара: Справочник / Под ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 1978. – Кн. 1. – 448 с. – Кн. 2. – 439 с.

74. Беляев Л.С., Санеев Б.Г., Филиппов С.П. и др. под ред. Воропая Н.И. Системные исследования проблем энергетики. –Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 558 с.

75. Зварич В.Н. Приборы и системы вибродиагностики электроэнергетического оборудования// Тех. электродинамика. 2001. №2.– с. 67

76. Зварич В.Н. Системы вибродиагностики и программное обеспечение диагностирования электроэнергетического оборудования// Тех. электродинамика. – 2002. – №6. – с.66

77. Марченко Б.Г., Мыслович М.В. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. –К.: Наукова думка, 1972. – 196 с.

78. Марченко Б.Г., Мыслович М.В. Теория диагностики энергоагрегатов по девиации вращающихся узлов и ее применение для дизель-электрических генераторов // Техн. электродинамика. – Ч.1. – 1998. №5. – С. 36 – 40. Ч.2. Там же. – 1998. №6. – С. 39 – 42. Ч.3. Там же. – 1999. №1 – С. 99 – 63. Ч.4. Там же. – 1999. №4 – С. 40 – 45.

**Додаток А**

*Модель експоненційна (показникова).*

$$p(t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda x^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \lambda > 0.$$

*Модель нормального закону (Гауссівський розподіл).*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0.$$

*Логарифмічно-нормальна модель*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\log e}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - a)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} x \in (0, \infty), \sigma^2 > 0, -\infty < a < \infty.$$

*Модель Ерланга.*

$$p_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} x^n e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} n = 0, 1, 2, \dots$$

$n + 1$  - кількість доданків в сумі випадкових величин експоненційного типу, при  $n = 0$  маємо як частинний випадок одну експоненційно розподілену ВВ.

*Модель Вейбулла – Гніденко.*

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\alpha}{\sigma} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\sigma}}, & x \geq 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \sigma > 0.$$

Криві функції розподілу Вейбулла не належать сімейству кривих Пірсона.

*Модель арксинуса.*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & x \in (-a, a) \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases}.$$

*Модель Гамма-розподілу.*

$$p(t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

## Додаток Б

Алгоритми моделювання рівномірно розподілених величин

--  $\xi_0 \leftarrow 1.2345678$   $\xi_1 \leftarrow 3.16768686$

$$\text{gen2}(n) := \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 \leftarrow 1.2345678 \\ \xi_1 \leftarrow 3.16768686 \\ \text{for } j \in 2..n \\ \quad \xi_j \leftarrow \text{mod}[(\xi_{j-1} + \xi_{j-2}), 4] \\ \text{gen1} \leftarrow \frac{\xi}{4} \end{array} \right.$$

--  $\xi_0 \leftarrow 5.666887876$   $c \leftarrow 37.2345678$

$$\text{gen3}(n) := \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 \leftarrow 5.666887876 \\ c \leftarrow 37.2345678 \\ \text{for } j \in 1..n \\ \quad \xi_j \leftarrow \text{mod}[(c \cdot \xi_{j-1}), 37] \\ \text{gen3} \leftarrow \frac{\xi}{37} \end{array} \right.$$

--  $\xi_0 \leftarrow 0.666887876$   $c \leftarrow 7.2345678$

$$\text{gen4}(n) := \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 \leftarrow 0.666887876 \\ c \leftarrow 7.2345678 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \xi_i \leftarrow c \cdot \xi_{i-1} - \text{floor}((c \cdot \xi_{i-1})) \\ \text{gen4} \leftarrow \xi \end{array} \right.$$

## Додаток В

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad y = \exp(-\lambda x), \quad \ln y = -\lambda x;$$

$$x = -\frac{\ln y}{\lambda}.$$

Імітаційне моделювання

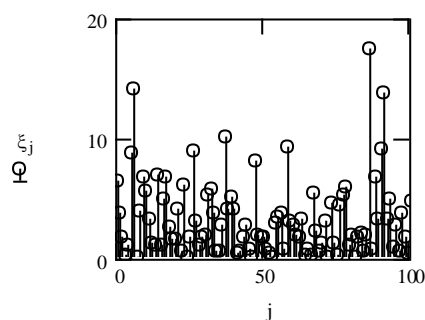
n := 100

j := 0..n

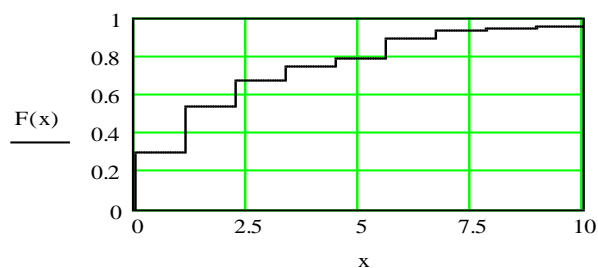
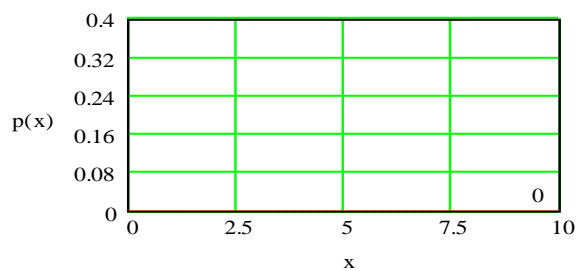
$\eta_j := \text{rnd}(1)$

Імітаційне моделювання  $\lambda$   $\xi_j := \frac{-\ln(\eta_j)}{\lambda}$

$$\lambda := 0.3 \quad \xi_j := \frac{-\ln(\eta_j)}{\lambda}$$



Результат імітаційного моделювання стаціонарного білого шуму з показниковим розподілом.



Гістограма та емпірична функція розподілу.

Àèçìá÷áíý èðèòáð³p Õ³-éâääðàò:

Ð³âáü çìá÷èíñò³:

$$\beta := 0.01 \quad v := m - 2$$

Àèçìá÷áíý ÷èñèà ñòáíá³â ñáíáíè (â³èüíñò³):

$$M := 0 \quad v = 18$$

$$p1(x) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$$

$$s := 0..m - 1$$

$$p_s := \int_{H_s}^{H_{s+1}} p1(x) dx$$

Àèçìá÷áíý ð³-éâääðàò

$$\chi^2 := n \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h \cdot \omega_k)^2}{p_k} - n$$

$$\chi^2 = 26.74$$

Éíâ³ðíñò³ ï ð³-éâääðàò,

$pchisq(p, q)$  -³íòáððàèüíà ðóíèö³ý ðíçíñ³èó ð³-éâääðàò

$$P\chi^2 := pchisq(\chi^2, v) \quad P\chi^2 = 0.916$$

Éðíè ã³ñòíáðàèè  $h = 0.363$

Ðíçìáð  $R = 7.251$

$$F(x) := \sum_{k=0}^{m-1} \omega_k \cdot \Phi(x - H_k) \cdot h$$

Çìá÷áíý ïðíà (éâàíò³èý) ð³áíý  $\beta$

$qchisq(p, q)$  ðóíèö³ý íáðíáíà áí áí³íòáððàèüíí ðóíèö³ ðíçíñ³èó Õ³-éâääðàò

$$X_{gr} := qchisq(1 - \beta, v)$$

$$X_{gr} = 34.805 \quad \chi^2 = 26.74$$

Íáðáððèà ã³íòáçè ï ð³-éâääðàððèòáð³p

Éèè  $X_{gr} \geq \chi^2$  òí ã³íòáçà ïðí ñí³áíàááíý áí³ðè÷ííá³ òáíð. ðíçíñ³èá ã³ðíà

Éèè  $X_{gr} < \chi^2$  òí ã³íòáçà ã³àðèèý°òüñý



## **РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СУБГАУССОВИХ ПРОЦЕСІВ В ТЕОРІЇ ІВС**

В другому розділі йде мова про систему програм для обробки експериментальних даних періодичних випадкових процесів. При розробці цих систем виникла нова проблема їх тестування та оцінювання ефективності. Останнє виявилось складною задачею, яку довелося розв'язувати шляхом статистичного моделювання. Тому даний підпункт є підсумком огляду робіт, які були вивчені, а деякі з них і використані при математичному моделюванні.

Як вказано у [13, 25] під статистичним моделюванням розуміють відтворення за допомогою ЕОМ функціонування ймовірнісної моделі деякого об'єкту. Мета моделювання такого роду полягає в оцінюванні з його допомогою середніх ймовірнісних характеристик моделі об'єкту. Зазвичай це – математичне сподівання величин, що характеризують систему, а також їх дисперсії та коваріації. У більш складних випадках оцінюються функції розподілу.

### **2.1. Особливості використання субгауссових випадкових процесів в ІВС**

Існує багато робіт, присвячених моделюванню реалізацій випадкових величин та процесів і послідовностей з незалежними значеннями [18, 25, 26].

Виходячи з того, що вищезгадана нова математична модель ще не достатньо вивчена та мало відома в прикладному плані, дана робота присвячена більш глибокому дослідженню точносних характеристик та особливостей моделювання з використанням субгауссових випадкових періодичних процесів [27, 28, 29, 30].

Головна мета даної роботи полягає у розробці методів моделювання випадкових величин із заданим законом розподілу (наприклад,  $\Phi$  – серій [31] у випадку нестационарних процесів), що базується на класі субгауссових

процесів, які в прикладних аспектах стосовно аналізу роботи ІВС ще повністю не вивчені. Очевидно, що для того, щоб виконати моделювання, треба мати певні початкові данні. За умови використання ЕОМ ми маємо справу із скінченними послідовностями. Скінченні послідовності випадкових величин задаються скінченновимірними функціями розподілу.

Отже, повна постановка задачі моделювання вимагає, щоб була принаймні задана послідовність  $n$ -вимірних функцій розподілу процесу, що моделюється.

Нас в даній роботі буде цікавити моделювання інформаційних сигналів, а це накладає певні обмеження на вибір функцій розподілу і на повноту їх опису. Як відомо, часто треба моделювати сигнали, коли ми не маємо в повному обсязі функцій розподілу вимірюваних сигналів (наприклад, невідомі деякі багатовимірні функції модельованого процесу). Тоді доводиться мати справу з процесами, для яких відомі лише якісь окремі характеристики.

В такому випадку, в першу чергу можуть бути використані конструктивні моделі процесів, наприклад, лінійні процеси або моментні функції, які можна отримати шляхом математичної формалізації опису структурної схеми роботи тієї чи іншої ІВС.

При оцінці точності моделювання випадкових величин та процесів методом довірчих інтервалів, а також при розв'язуванні різних задач пов'язаних з перевіркою шляхом моделювання та перевіркою статистичних гіпотез часто виникає задача оцінки величини ймовірності  $p = \mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon\}$ , де  $2\varepsilon$  – довжина довірчого інтервалу, а  $\xi$  – значення моделюючого процесу, які ще можуть залежати і від часу  $t$  або значень результатів вимірювання [39].

Щоб оперувати з наведеним вище виразом в ідеальному випадку треба мати функцію розподілу значень величини  $\xi$  і величину  $2\varepsilon$ . На практиці використовують різного виду нерівності для оцінки величини  $p$ . При цьому

найчастіше використовується нерівність Чебишева, яка дає оцінку знизу для величини  $p$ .

Виходячи з того, що при використанні нерівності Чебишева майже не накладаються ніякі апріорні обмеження на клас розподілів випадкової величини  $\xi$ , виникає ідея розглянути задачу оцінки точності моделювання ввівши деякі неістотні з практичної точки зору обмеження, які б дали змогу уточнити оцінку, що отримана на базі нерівності Чебишева.

Зокрема дослідити цю задачу в класі періодичних субгауссових процесів. Цьому дослідженню і приділена увага в даному розділі. Слід зауважити, що для використання нерівності Чебишева необхідно знати дисперсію, що не завжди відома і існує лише для гільбертових випадкових величин і процесів за означенням.

## 2.2. Класи гільбертових та субгауссових процесів

Зупинимось на деяких роботах з аналізу класів процесів, що використовуються при побудові стохастичних моделей різних процесів та на деяких питаннях теорії гільбертових і банахових просторів випадкових величин і процесів. І врешті проаналізуємо деякі роботи, що стосуються статистичного моделювання, ймовірності та дослідження операцій [25].

Вивчення моделей випадкових процесів та їх моделювання за допомогою ЕОМ відіграють важливу роль при розв'язуванні широкого кола прикладних задач. Спосіб моделювання випадкового процесу визначається способом його задання. Найбільш загальним є випадок [25], коли процес заданий своїми скінченновимірними розподілами. В цьому випадку для будь-якого набору моментів часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$  з  $T$  повинна бути відома функція розподілу  $F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbf{P}(\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n)$ . Якщо існує щільність сумісного розподілу  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що відповідає вище наведеній функції розподілу  $F$ , то можна моделювати випадковий вектор

$\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ . Крім деяких частинних випадків, при великих  $n$  ця задача є надзвичайно трудомісткою. Крім того, всі скінченновимірні розподіли процесу, про який не робиться додаткових припущень (наприклад, стаціонарність, гауссовість, марковість), рідко бувають відомими. Зазвичай апріорно робиться ряд припущень про процес, що спостерігається, тобто задається деяка модель процесу. Прийнятність побудованої моделі перевіряється засобами математичної статистики. Крім того, нерідко використовують часові ряди – значення процесу в послідовні дискретні моменти часу.

Розв'язуючи задачу моделювання випадкового процесу за допомогою ЕОМ, потрібно мати апріорну інформацію про процес. Так, якщо процес гауссовий, то необхідно знати його математичне сподівання та коваріаційну функцію. Однорідний ланцюг Маркова повністю визначається своїм початковим розподілом  $F_0(x)$  та перехідною щільністю  $p(x \rightarrow y)$ . Іноді для розв'язування задачі досить моделювати процес за неповними даними. Наприклад, моделювання процесу по заданому математичному сподіванню та коваріаційній функції, але не обов'язково гауссового, може бути достатнім при розв'язуванні задачі, де істотні лише ефекти, пов'язані з моментами не вище другого порядку. Взагалі кажучи моделювання за неповними даними викликає додаткові похибки.

Цікавим є моделювання субгауссових випадкових величин та процесів [17, 18]. Як буде показано нижче, використання класу субгауссових випадкових величин дає можливість звузити границю довірчого інтервалу, порівнюючи з використанням нерівності Чебишева, а також покращити методичну похибку. Слід зауважити, що до цього питання моделювання субгауссових випадкових величин та процесів не розглядалося в технічному плані.

Щоб застосувати нерівність Чебишева [32] при дослідженні випадкового процесу  $\{\xi(t), t \in T\}$  треба знати другий центральний момент

(дисперсію) параметра, що моделюється. Але часто отримати хорошу оцінку дисперсії не вдається і, навіть, маючи її для випадкового процесу ми повинні якимось чином перейти від точкових оцінок для дисперсії в фіксований момент часу до рівномірних оцінок на всьому інтервалі часу  $T$ , де заданий моделюючий процес.

Задачу можна спростити, якщо використати апіорну інформацію, зокрема про те, що процес є субгауссовим. Тоді ми можемо отримати оцінку аналогічну нерівності Чебишева, але рівномірну на всьому інтервалі часу. В цьому випадку роль дисперсії грає субгауссовий стандарт.

Аналогічна задача виникає при оцінюванні точності роботи різних інформаційно-вимірювальних систем та приладів за методом довірчих інтервалів, коли функція розподілу похибки вимірювань невідома.

Зупинимося коротко на аналізі класів процесів, які використовуються при побудові стохастичних моделей різних процесів, і зокрема процесів в електроенергетиці. При цьому детально будемо розглядати два простори:  $L_2(\Omega)$  і  $Sub(\Omega)$  та відповідні їм випадкові величини і процеси. Під  $L_2$ -моделями будемо розуміти стохастичні величини та процеси, які належать лінійним просторам, зокрема гільбертовим просторам випадкових величин і процесів [33, 34]. Як було сказано раніше під  $Sub(\Omega)$  будемо розуміти банахові простори випадкових величин.

Згідно з означенням гільбертового простору випадкових величин чи процесів, норма у них породжується скалярним добутком, в той час як в субгауссовому просторі  $Sub(\Omega)$  норма породжується субгауссовим стандартом, а скалярний добуток там не обов'язково вводиться.

Найчастіше при моделюванні вимагають, щоб розроблювальні моделі мали скінченну дисперсію, щоб дослідити в  $L_2$  збіжність відповідних послідовностей та рядів. Проте часто при розв'язуванні певних задач моделювання досить знати субгауссовий стандарт, для забезпечення

відповідної збіжності рядів, за допомогою яких моделюються випадкові процеси.

Навіть в тому випадку, коли простір є одночасно гільбертовим та банаховим, використання субгауссового стандарту дає можливість отримати більш достовірні в ймовірнісному розумінні оцінки точності розроблювальних моделей при тих же економічних затратах та затратах часу [27, 28, 29, 30, 35].

З наведених вище результатів огляду робіт випливає висновок, що при використанні та аналізі субгауссових моделей треба виходити із взаємного розташування всіх вказаних вище функціональних просторів. Для наочності в цьому випадку може бути корисним рисунок 2.1.

При аналізі взаємного розташування функціональних просторів можна використати відомі нерівності Чебишева [32] і аналогічну нерівність, яку можна розглядати як наслідок первинної нерівності Чебишева, в яку не входить дисперсія, а входить лише субгауссовий стандарт [27, 28, 29, 30, 35].

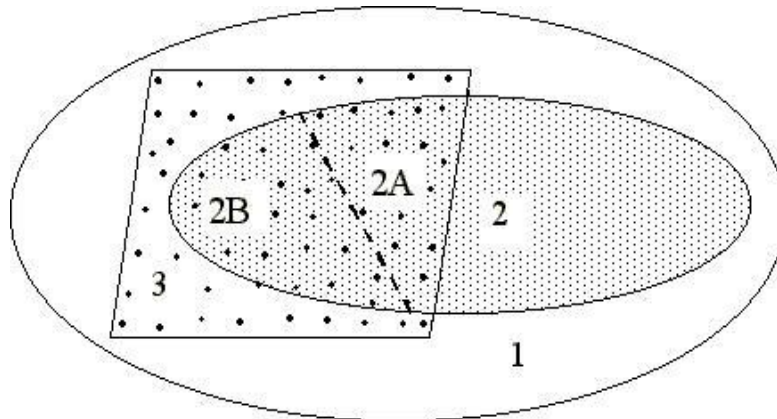


Рис. 1.1. Ілюстрація взаємного розташування функціональних просторів

На рис. 1.1 позначено: 1 – банаховий простір, 2 – субгауссовий простір  $Sub(\Omega)$ , 3 – гільбертовий простір  $L_2(\Omega)$ . Перетин просторів 2 та 3 розбитий на дві підмножини, з яких 2А – множина субгауссових величин, для

яких  $S=1$ , тобто строго субгауссових; а  $2B$  – множина субгауссових величин, для яких  $S > 1$ .

З цього рисунку видно, що банаховий простір (як повний, нескінченновимірний, лінійний, нормований) включає всі класи функцій, які розглядаються в даній дисертаційній роботі. Гільбертовий простір завжди є банаховим (він теж повний, нескінченновимірний, лінійний, нормований), але в ньому норма завжди співпадає з середньоквадратичним відхиленням (СКВ) і визначається за допомогою скалярного добутку. Для випадкових процесів нормою є корінь квадратний із середньої потужності або СКВ, в той час як у банаховому просторі скалярний добуток може бути відомий, а норма може бути задана без скалярного добутку.

Субгауссові величини і процеси обов'язково належать банаховому простору, але не обов'язково мають скінченну дисперсію.

Цікавим для практики є випадок, коли простір одночасно банаховий і гільбертовий. тоді в ньому існують два способи задати норму: як корінь середньої потужності (СКВ) і як субгауссовий стандарт. В цьому випадку цікаво для практики мати відношення квадратів цих двох норм, яке в дисертаційній роботі вводиться вперше, позначається воно через  $S$  і називається коефіцієнтом субгауссовості.

$S$  – це відношення квадрата субгауссового стандарту до дисперсії (відношення квадратів двох норм). Так як дисперсія завжди менша субгауссового стандарту, то  $S \geq 1$  завжди для субгауссових і гільбертових процесів одночасно. При  $S = 1$  процес строго субгауссовий.

В основі характеристики класу субгауссових процесів лежать наступні міркування: виділити клас випадкових величин та процесів, який базується на порівнянні характеристик гауссової випадкової величини і досліджуваної. Це можна зробити шляхом порівняння функцій або щільностей розподілу гауссового закону і досліджуваного. Але для такого порівняння не існує простих співвідношень типу більше або менше, тому при описі класу субгауссових процесів використовується метод характеристичних функцій.

Оскільки характеристична функція є комплекснозначною, то щоб порівнювати дві характеристичні функції треба перейти до функцій дійсного аргументу. Однією з таких функцій може бути твірна функція моментів або її логарифм, тобто твірна функція кумулянт і далі порівнювати або дві однотипні твірні функції моментів, або їх логарифми. А саме: твірну функцію моментів гауссового закону розподілу і твірну функцію моментів досліджуваного закону розподілу. Твірна функція одновимірного гауссового закону розподілу має вигляд  $\exp \frac{\alpha^2 y^2}{2}$ . Таким чином до субгауссових

відносять ті величини, у яких твірна функція моментів  $\psi(y) \leq \exp \frac{\alpha^2 y^2}{2}$ , звідки і виникла назва “субгауссовий”. Детальний розгляд цих питань проводиться в наступному розділі.

### **2.3. Субгауссові випадкові величини та процеси, їх основні характеристики**

При розв’язуванні багатьох конкретних задач у різноманітних галузях техніки вимірювань часто зустрічаються випадки, коли аналітичний розв’язок задачі через значні математичні труднощі практично неможливий, а проведення експериментальних досліджень і натурних випробувань потребує дуже великих затрат часу і засобів. Одним з ефективних заходів по подоланню цих труднощів є застосування в роботі методів моделювання досліджуваних явищ за допомогою сучасних швидкодіючих ЕОМ. Задача моделювання різних ІВС та зокрема діагностичних систем формулюється як задача розробки алгоритмів. Ці алгоритми за відомими характеристиками систем, наприклад, операторами або динамічними характеристиками нелінійностей окремих ланок, дозволяють точно чи з допустимою похибкою перетворювати та обробляти на ЕОМ реалізації відповідних випадкових вхідних інформаційних сигналів в системах, що досліджуються. Такі



алгоритми називаються цифровими моделями сигналів і систем. В роботі використовується одна з таких нових математичних моделей, яка отримала назву субгауссових процесів [17, 18].

Зупинимося на деяких математичних викладках стосовно визначення та властивостей субгауссових величин та процесів.

Трійка  $\{\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P}\}$ , де  $\Omega$  – простір елементарних подій,  $\mathbf{F}$  – деяка алгебра підмножин  $\Omega$ ,  $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}(A), A \in \mathbf{F}\}$  – ймовірнісна міра. Ця трійка формально задає деяку ймовірнісну модель експерименту, яку будемо надалі називати ймовірнісним простором [36].

Позначимо через  $F(x)$  функцію розподілу випадкової величини  $\xi$

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Відповідна їй характеристична функція випадкової величини  $\xi$ , виражається таким чином [32]

$$f(u) = \mathbf{M} \exp(iu\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) dF(x), \quad u \in \mathbf{R}.$$

Позначимо експоненційну генератрису (твірну функцію) кумулянт випадкової величини  $\xi$  [28, 29, 35, 36]

$$g(y) = \ln \mathbf{M} e^{y\xi} = \ln f(-yi), \quad y \in \mathbf{R}. \quad (2.1)$$

За допомогою генератриси (2.1) знаходяться кумулянти випадкової величини  $\xi$  згідно виразу

$$x_k = \left. \frac{d^k g(y)}{dy^k} \right|_{y=0},$$

а моменти

$$\mathbf{M}_{\xi}^{\zeta k} = \left. \frac{d^k e^{g(y)}}{dy^k} \right|_{y=0}. \quad (2.2)$$

Зупинимось коротко на суті математичної формалізації ймовірнісної моделі, яка базується на понятті субгауссовості випадкових величин та процесів.

Випадкову величину  $\xi$  називають субгауссовою [17, 18], якщо знайдеться таке дійсне число  $\alpha \geq 0$ , що для всіх  $y \in \mathbf{R}$  виконується нерівність

$$e^{g(y)} \leq e^{\frac{\alpha^2 y^2}{2}}, \quad (2.3)$$

де  $g(y)$  визначається згідно (2.1).

Зліва в (2.3) стоїть генератриса степеневих моментів випадкової величини  $\xi$  [37], генератриса степеневих моментів на відміну від характеристичної функції існує не для всіх функцій розподілу  $F(x)$ . Вона пов'язана з характеристичною функцією  $f(u) = \mathbf{M}e^{iu\xi}$  співвідношенням (2.1), для характеристичної функції  $u = -iy$  [38].

Клас субгауссових величин позначається  $Sub(\Omega)$  [18].

Введемо позначення

$$\tau(\xi) = \inf \left\{ \alpha \geq 0 : e^{g(y)} \leq e^{\frac{\alpha^2 y^2}{2}}, y \in \mathbf{R} \right\}, \quad (2.4)$$

$\tau(\xi)$  – називається субгауссовим стандартом випадкової величини  $\xi$ . Тобто  $\tau(\xi)$  – це найменше невід’ємне  $\alpha$ , яке задовольняє вираз (2.4) для всіх  $y \in \mathbf{R}$ .

Позначимо через  $\bar{f}_\alpha(y) = \left( \exp(y^2 / 2) \right)^{\alpha^2}$  функцію, яка задає параметричне сімейство залежне від параметра  $\alpha$ . Ця функція стоїть справа у виразі (2.4). За параметром  $\alpha$  при кожному фіксованому значенні  $y$  остання функція не є спадною. Значення  $\tau(\xi)$  вибирається згідно  $\alpha = \alpha_{\min} = \tau(\xi)$ , що забезпечує виконання нерівності (2.4).

Таким чином, квадрат субгауссового стандарту це границя, яка обмежує логарифм генератриси помножений на  $2/y^2$ ,  $\tau^2(\xi) \geq \frac{2}{y^2} g(y)$ , де  $y \in \mathbf{R}$  [38].

**Лема 1.** Має місце співвідношення [19]

$$\tau(\xi) = \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in \mathbf{R}}} \left[ \frac{2g(y)}{y^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

При  $y \in \mathbf{R}$

$$e^{g(y)} \leq \exp \left[ \frac{y^2 \tau^2(\xi)}{2} \right]. \quad (2.6)$$

Ця лема розглядається в [18]. Вираз (2.5) є основною формулою для визначення субгауссового стандарту. Він буде покладений в основу побудови методик в дослідженнях випадкових величин і процесів на субгауссовість та визначення субгауссових стандартів для конкретних видів розподілу.

**Лема 2.** Детермінована відмінна від нуля (вироджена) випадкова величина і детермінована функція не є субгауссовими.

**Доведення.** Зупинимося лише на доведенні даної леми для детермінованої випадкової величини, так як для детермінованої функції твердження леми є очевидним і може розглядатися як наслідок.

Ймовірнісний простір, на якому задана вироджена випадкова величина  $\xi = c$ , описується таким чином:  $\Omega = \{\omega_1\}$ ;  $\mathbf{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ , що складається з достовірної події  $\Omega$  і порожньої множини (це так звана тривіальна алгебра);  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$  і  $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ .

Згідно (2.1) в даному випадку експоненційна генератриса має вигляд  $g(y) = yc$ . Тоді згідно (2.5) маємо:

$$\tau(\xi) = \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in \mathbb{R}}} \left[ \frac{2c}{|y|} \right]^{1/2}.$$

Вираз справа при  $c < 0$  стає комплекснозначним, а субгауссовий стандарт є дійсна величина, тому цей вираз втрачає сенс. В околі нуля ця функція необмежена, за винятком випадку коли  $c = 0$ . При  $c > 0$  в околі нуля функція необмежена по  $y$  і при  $y \rightarrow 0$ ,  $\tau(\xi) \rightarrow \infty$ . Тобто субгауссовий стандарт не існує. Лема доведена.

**Зауваження 2.1.** Іноді випадкову величину, яка після центрування стає субгауссовою, теж будемо називати субгауссовою, за умови, що у неї існує математичне сподівання.

**Зауваження 2.2.** Інколи при дослідженні загального виду функції розподілу цілого класу однотипних випадкових величин параметричної множини, приналежність цієї випадкової величини до класу субгауссових випадкових величин істотно залежать від значень одного або кількох параметрів. При цьому виникає задача визначення діапазонів цих параметрів, при яких ця величина належить до класу субгауссових випадкових величин.

**Лема 3** [18]. Нехай  $\xi \in Sub(\Omega)$ , тоді для будь-якого  $r > 0$  існує абсолютний  $r$ -й момент:

$$\mathbf{M}|\xi|^r < \infty \text{ та } \mathbf{M}\xi = 0;$$

і виконується нерівність (доводиться виходячи з нерівності  $x^r \leq e^x r^r e^{-r}$  при  $r > 0, x > 0$ )

$$\mathbf{M}\xi^2 \leq \tau^2(\xi).$$

**Лема 4** [18]. Якщо  $\xi$  – обмежена центрована випадкова величина та  $|\xi| \leq c$  майже напевно, то  $\xi \in Sub(\Omega)$  та  $\tau(\xi) \leq c$ , де  $c > 0$ .

Субгауссова випадкова величина  $\xi$  називається строго субгауссовою [19], якщо  $\tau^2(\xi) = \mathbf{M}\xi^2$ , тобто при всіх  $y \in \mathbf{R}$  виконується нерівність

$$e^{g(y)} \leq e^{-\frac{a^2 \sigma^2}{2}}, \quad (2.7)$$

де  $\sigma^2 = \mathbf{M}\xi^2$ . Клас строго субгауссових випадкових величин позначатимемо  $SSub(\Omega)$ .

Простір  $Sub(\Omega)$  є повний лінійний нормований простір, тобто є банаховим простором, а  $\tau(\xi)$  – є нормою в цьому просторі, це впливає із наведених вище лем.

Згідно з лемою 1 при  $\xi \in Sub(\Omega)$  впливає, що  $\mathbf{M}\xi = 0$  і виконується нерівність  $\mathbf{M}\xi^2 \leq \tau^2(\xi)$ , тобто  $\mathbf{D}\xi \leq \tau^2(\xi)$ . Тому можна вивести наступний коефіцієнт:

$$S = \frac{\tau^2(\xi)}{\mathbf{D}\xi}, \quad (2.8)$$

який будемо називати коефіцієнтом субгауссовості.

Коефіцієнт субгауссовості, як буде показано нижче, є ефективним ключем для уточнення точносних характеристик випадкових процесів отриманих при моделюванні та при оцінюванні довірчої ймовірності для результатів вимірювання. Він дозволяє проводити порівняльний аналіз інтервальних оцінок точносних характеристик, наприклад, у порівнянні з нерівністю Чебишева.

Для субгауссової величини коефіцієнт субгауссовості  $S \geq 1$ . Тому його не можна задавати довільно. У загальному випадку коефіцієнт субгауссовості невизначений, коли  $\tau^2(\xi) < \mathbf{D}\xi$ . Він не може бути меншим за 1.

Коефіцієнт субгауссовості довільної величини  $\xi$  являє собою квадрат відношення норми величини  $\xi$  в банаховому та гільбертовому просторах.

#### **2.4. Методика перевірки процесу на субгауссовість при відомій твірній функції**

В цьому розділі розроблена методика перевірки різних випадкових величин на субгауссовість. Основна задача на практиці при моделюванні і аналізі роботи ІВС полягає у встановленні субгауссовості процесу.

Послідовність операцій розв'язку такої задачі можна розбити на такі етапи (рис.2.2):

- по заданій одновимірній функції розподілу величин чи процесів знаходимо їх характеристичну функцію;
- переходимо від характеристичної функції до твірної функції згідно (2.1);
- скориставшись лемою 1, знаходимо субгауссовий стандарт (цей пункт можна виконувати як аналітично так і графічно);
- в разі існування субгауссового стандарту робимо аналітичні дослідження його залежності від параметрів заданого закону розподілу.

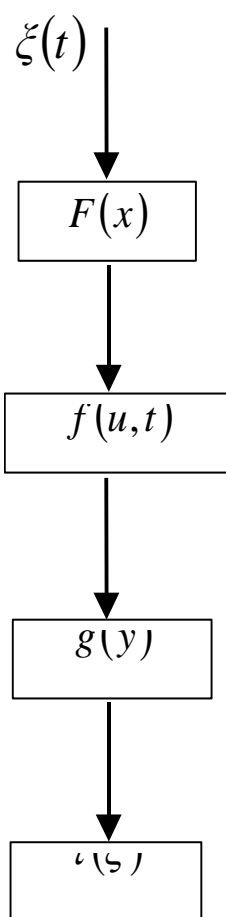


Рис.2.2. Структурна схема алгоритму перевірки процесу на субгауссовість

Зупинимося на деяких прикладах з використанням описаної вище схеми дослідження на субгауссовість.

*Приклади.*

1. Нехай  $\zeta \in \mathbf{N} (0, \sigma^2)$  тоді

$$e^{g(y)} = \mathbf{M} e^{y\zeta} = e^{\frac{y^2\sigma^2}{2}},$$

тобто  $\zeta$  – є гауссова випадкова величина, для якої згідно (2.4)  $\tau(\zeta) = \sigma$ .

Тобто в (2.5) має місце строга рівність [18].

Коефіцієнт субгауссовості при цьому  $S = 1$ .

2. Випадкова величина  $\zeta$  рівномірно розподілена на відріжку  $[-b, b]$ ,  $b > 0$ , її характеристичну функцію отримуємо у вигляді

$$f(u) = \frac{\sin(bu)}{bu}, \quad u \in R.$$

Почнемо з аналітичного розв'язку згідно рис.2.2. Замінюючи в останньому виразі  $u = -iy$ , отримаємо твірну функцію  $g(y)$ . Крім того згідно (2.1) для неї можна записати вираз

$$\exp(g(y)) = \mathbf{M} e^{y\zeta} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b e^{yx} dx = \frac{sh(yb)}{yb}.$$

Також її можна представити у вигляді



$$\exp(g(y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yb)^{2k}}{(2k+1)!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(yb)^{2k}}{6^k k!} = e^{\frac{(yb)^2}{6}} = e^{\frac{y^2 b^2}{3}}.$$

Отже, рівномірно і симетрично розподілена випадкова величина  $\xi$  є субгауссова і згідно з лемою 1,  $\tau^2(\xi) = \mathbf{M} \xi^2 = \frac{b^2}{3}$ , звідки субгауссовий стандарт  $\tau(\xi) = \frac{b}{\sqrt{3}}$ , а згідно (2.8) коефіцієнт субгауссовості в цьому випадку  $S = 1$ , хоча закон розподілу не є строго гауссовим.

Проілюструємо аналітичний розв'язок графічно. Розглянемо функцію  $\exp(g(y)) = \frac{sh(yb)}{yb}$ . Скориставшись лемою 1 позначимо через

$u_1(y, b) = \sqrt{\frac{2}{y^2} g(y)}$ , функцію від  $b$ , яка взята з правої частини (2.5) і яка

при всіх  $y \in \mathbf{R}$ ,  $y \neq 0$  повинна бути менша від деякого поки що невідомого  $\alpha$ , тобто від деякої обмежуючої при всіх  $y \in \mathbf{R}$  функції  $c_1(y, \alpha) = \alpha$ , що впливає із (2.4), якщо під  $\alpha$  розуміти якусь додатню величину, яка не менша за субгауссовий стандарт, коли він існує. Очевидно, що цей мінімум буде залежати і від  $b$ , тому при побудові графіка спочатку вибираємо  $b = 1$ . Потім змінюючи пробні значення  $\alpha$  шляхом зменшення їх значення доки в якийсь момент не порушиться нерівність  $u_1(y, b) < c_1(y, \alpha)$  ми досліджуємо і залежність від параметра розподілу  $b$ .

На рисунку 2.3 наведено графіки  $u_1(y, 1)$  та  $c_1(y; 0, 7)$  звідки видно, що найбільше значення  $u_1(y, 1)$  приймає в точці  $y = 0$ , причому

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u_1(y, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Тому при  $b = 1$  замість пробного  $\alpha = 0,7$  треба взяти меншу величину

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

А це значить, що в цьому випадку вираз  $\tau(\xi) = \frac{b}{\sqrt{3}}$  має місце.

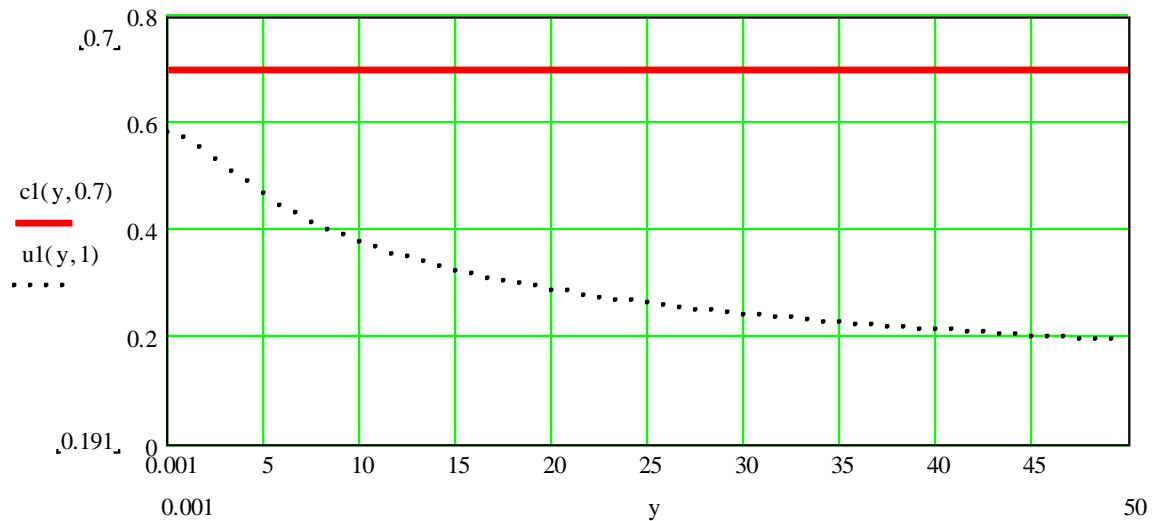


Рис. 2.3. Графічна ілюстрація перевірки на субгауссовість

рівномірного розподілу

3. Випадкова величина  $\xi$  має розподіл арксинуса,  $\xi = b \sin \varphi$ , де  $\varphi$  – рівномірно розподілена на інтервалі  $|x| \leq \pi$  випадкова величина.

Почнемо з аналітичного розв'язку. В цьому випадку твірна функція згідно (2.1) задається виразом

$$\exp(g(y)) = \mathbf{M}e^{y\xi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{yb \sin x} dx.$$

Її можна представити у вигляді

$$\exp(g(y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yb)^{2k}}{2^{2k} k! k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(yb)^{2k}}{2^{2k} k!} = e^{\frac{y^2 \cdot b^2}{2}}.$$

Тобто  $\xi$  – субгауссова випадкова величина і виходячи з останньої нерівності згідно леми 1 маємо  $\tau^2(\xi) = \mathbf{M} \xi^2 = \frac{b^2}{2}$ , звідки субгауссовий стандарт випадкової величини  $\xi$  розподіленої за законом арксинуса  $\tau(\xi) = \frac{b}{\sqrt{2}}$ , а згідно (2.8) коефіцієнт субгауссовості в цьому випадку  $S = 1$ , хоча в цьому випадку графік функції щільності розподілу  $U$  – подібний, тобто його форма далека від форми гауссової кривої.

Цей випадок аналогічний до попереднього, але тепер  $\exp(g(y)) = I_0(y, b)$  (функція Бесселя нульового порядку).

$u_2(y, b) = \sqrt{\frac{2}{y^2} \ln I_0(y, b)}$  та  $c_2(y, \alpha) = \alpha$ , де  $\alpha$  теж буде залежати від величини  $b$ .

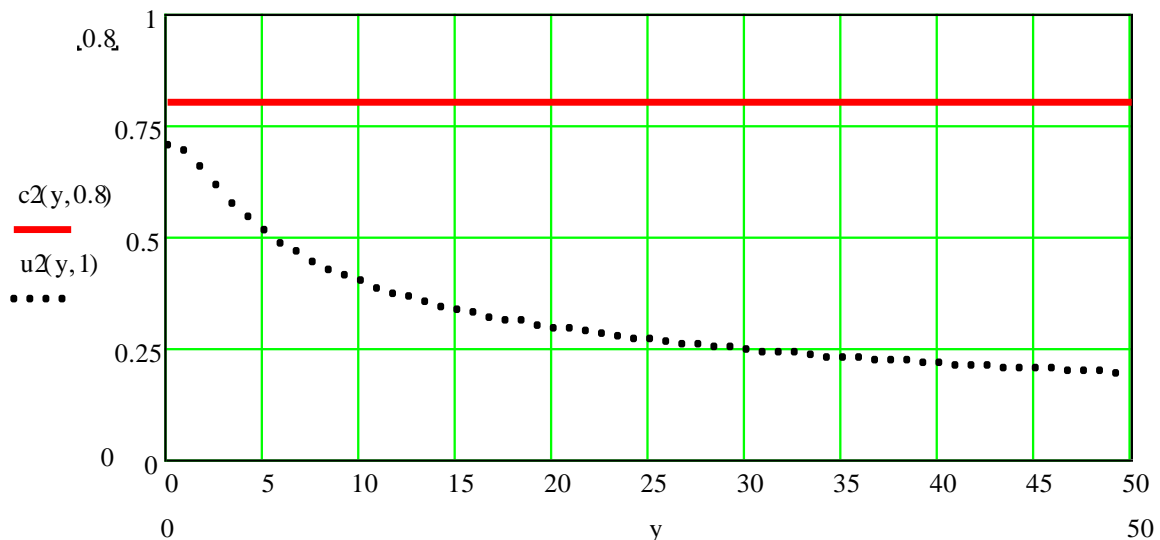


Рис. 2.4. Графічна ілюстрація перевірки на субгауссовість розподілу арксинуса

Аналогічно до попереднього при  $b = 1$  пробне значення  $\alpha$  вибираємо рівним 0,8. Графіки відповідних кривих  $u_2(y,1)$  та  $c_2(y; 0,8)$  наведені на рисунку 2.4 звідки видно, що найбільше значення  $u_2(y,1)$  приймає в точці

$$y = 0, \text{ причому } \lim_{y \rightarrow 0^+} u_2(y,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вище були розглянуті приклади випадкових величин  $\xi$ , що мали розподіли рівномірний та арксинуса, при цьому початкові моменти були нульовими. Тепер перейдемо до розгляду прикладів випадкових величин, які не є центрованими, але після центрування можна встановити їх субгауссовість.

4. Випадкова величина  $\xi$  має розподіл Бернуллі. В цьому випадку твірна функція визначається виразом  $\exp(g(y)) = 1 - p + pe^y$ . Використовуючи лему 1, необхідно від  $g(y)$  відняти перший момент (математичне сподівання) помножений на  $y$ , тобто

$$u_3(y, p) = \sqrt{\frac{2}{y^2} (g(y) - y \cdot p)}.$$

На рисунку 2.5 наведено графіки  $u_3(y, p)$  та  $c_3(y; 0,22)$  з яких видно, що  $\xi$  – субгауссова випадкова величина, а функція  $u_3(y, 0.96)$  найбільше значення приймає в точці  $y = 0$ , причому

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u_3(y, 0.96) = 0.196. \text{ Нехай } p = 0.96.$$

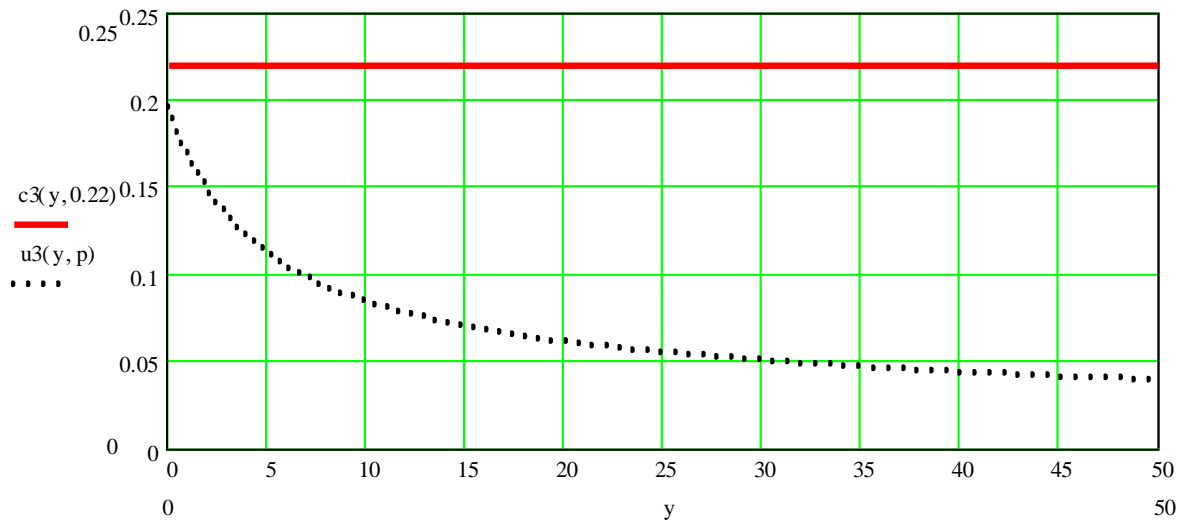


Рис. 2.5. Графічна ілюстрація перевірки на субгауссовість розподілу Бернулi

Аналогічно, графічним методом, можна дослідити і інші випадкові величини на субгауссовість, якщо відома їх характеристична функція.

Випадковий процес  $\{\xi(t), t \in T\}$  називається субгауссовим, якщо при всіх  $t \in T$   $\xi(t) \in Sub(\Omega)$  та  $\sup_{t \in T} \tau(\xi(t)) < \infty$  [18].

## 2.5. Аналіз особливостей використання субгауссових випадкових процесів

Зупинимося коротко на аналізі класів процесів, які використовуються при побудові стохастичних моделей різних процесів, і зокрема процесів в електроенергетиці. При цьому детально будемо розглядати два простори:  $L_2(\Omega)$  і  $Sub(\Omega)$  (рис 2.1) та відповідні їм випадкові величини і процеси [17, 18, 33, 39]. Під  $L_2$ -моделями будемо розуміти стохастичні величини та процеси, які належать лінійним просторам, зокрема гільбертовим просторам випадкових величин і процесів.

Символом  $Sub(\Omega)$  позначається банаховий простір випадкових величин, а  $\tau(\xi)$  – є нормою в цьому просторі. Банаховий простір є повний лінійний нормований простір [32, 33, 39].

Неважко переконатися, що субгауссовий стандарт (визначається виразами (2.4) та (2.5)) задовольняє сформульованим вимогам у першому розділі.

Як вказано в роботах [7,18], простір субгауссових величин, що позначається як  $Sub(\Omega)$ , є банаховим простором, а  $\tau(\xi)$  – є нормою в цьому просторі. Банаховим простором є повний лінійний нормований простір [33, 39].

Нормою в  $L$  (лінійний простір) називається скінченний опуклий функціонал  $p$ , що задовольняє наступним умовам [32, 33, 39]:

- 1)  $p(x) \geq 0$ , причому  $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- 2)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ,  $x, y \in L$ ,
- 3)  $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ ,  $\forall \alpha$ .

Субгауссовий стандарт  $\tau(\xi)$  задовольняє перерахованим вище вимогам.

Зокрема  $\tau(c\xi) = c\tau(\xi)$ ,  $\tau(\xi + \eta) \leq \tau(\xi) + \tau(\eta)$ . Ці вирази мають практичне застосування.

Згідно з означенням гільбертового простору випадкових величин  $L_2(\Omega)$  чи процесів, норма у них породжується скалярним добутком, в той час як в субгауссовому просторі  $Sub(\Omega)$  норма визначається субгауссовим стандартом, а скалярний добуток там не обов'язково вводиться. Хоча найчастіше на практиці вимагають, щоб використовувані та розроблювані моделі мали скінченну дисперсію. Проте часто при розв'язуванні певних задач моделювання досить знати субгауссовий стандарт, для забезпечення відповідної збіжності оцінок та рядів, за допомогою яких моделюються випадкові процеси. Крім того, навіть в тому випадку, коли простір є

одночасно гільбертовим та банаховим (рис 2.1), використання субгауссового стандарту дає можливість отримати більш достовірні в ймовірнісному розумінні оцінки точності розроблювальних моделей (з меншою методичною похибкою).

З вищенаведеного, при використанні та аналізі субгауссових моделей треба виходити із взаємного розташування всіх вказаних вище функціональних просторів (рис 2.1).

Для підтвердження вищевказаного можна скористатися хоча б аналізом використання відомої нерівності Чебишева [32] і аналогічної нерівності, яку можна розглядати як наслідок основної нерівності Чебишева, в яку уже не входить дисперсія, а входить лише субгауссовий стандарт [28, 29, 30, 35].

Зупинимося більш детально на цих питаннях, які є центральними в теоретичному плані в даній роботі і порівняємо два варіанта таких нерівностей. Для цього спочатку наведемо кілька різних форм запису нерівності Чебишева.

Перша форма [38]. Нехай  $\xi$  – випадкова величина і  $h(\xi)$  – функція, що приймає невід’ємні значення і крім того для  $c \geq 0$   $\inf_{|y| \geq c} h(y) = b(c)$ . Якщо

$\mathbf{M}(h(\xi))$  існує і,  $b(c) > 0$ , то

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geq c\} \leq \frac{\mathbf{M}(h(\xi))}{b(c)}. \quad (2.9)$$

Формула (2.9) надалі буде називатися першою або основною формою нерівності Чебишева. Вона в математичній літературі, як правило, наводиться у вигляді теореми з доведенням.

Друга форма [40]. Якою б не була випадкова величина  $\xi$ , яка може приймати лише невід’ємні значення і має скінченне математичне сподівання, завжди має місце нерівність

$$\mathbf{P}\{\xi \geq 1\} \leq \mathbf{M}\xi, \quad (2.10)$$

тобто ймовірність того, що випадкова величина  $\xi$  прийме значення, не менше за одиницю, не більша за її математичне сподівання.

Від наведеної нерівності (2.10) можна перейти до більш загальної. Нехай  $\varepsilon$  – додатне число. Тоді отримаємо для довільної величини, що приймає лише невід’ємні значення

$$\mathbf{P}\{\xi > \varepsilon\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\xi}{\varepsilon} \geq 1\right\} \leq \mathbf{M}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) = \frac{\mathbf{M}\xi}{\varepsilon},$$

тому [32]

$$\mathbf{P}\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{M}\xi}{\varepsilon}. \quad (2.11)$$

Історично, вираз (2.11) і був вперше отриманий Чебишевим.

Перейдемо до розгляду різновиду другої форми нерівності Чебишева.

Якою б не була випадкова величина  $\xi$ , яка має скінченне математичне сподівання і скінченну дисперсію, і якою б не була додатна стала величина  $\varepsilon$ , завжди має місце нерівність

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}. \quad (2.12)$$

Вираз (2.12) досить широко вживаний в теорії вимірювань при оцінці точності і достовірності. Найчастіше він зустрічається в технічній літературі по теорії вимірювань [41, 42]. При оцінці точності довірчих інтервалів під



виразом нерівність Чебишева завжди розуміють вираз (2.12). В (2.12) під  $\varepsilon$  розуміють границю, симетричну відносно математичного сподівання довірчого інтервалу, а під  $1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}$  – величину, яку приймають за нижню границю ймовірностей того, що центрована випадкова величина  $\xi$  потрапить в довірчий інтервал (при цьому сама нижня границя не є точною, тобто найменшою). Вираз (2.12) використовується при моделюванні в гільбертовому просторі  $L_2(\Omega)$ , тобто його можна застосовувати лише до гільбертових випадкових величин і процесів.

В тому випадку коли випадкова величина або процес не є гільбертовим, необхідно шукати інші шляхи побудови оцінок методом довірчих інтервалів. Навіть у випадку гільбертових випадкових величин вираз (2.12) дає лише оцінку нижньої границі довірчої ймовірності, а тому результат може бути покращений (тобто більш наближений до нижньої границі), якщо відомо що випадкова величина належить ще і до інших класів. Виходячи з цього в даній роботі і розглядаються субгауссові випадкові величини та процеси. Показано, що використовуючи (2.11) в цьому класі можна покращити оцінку довірчої ймовірності, тобто частково зменшити методичну похибку при оцінці точності.

В подальшому, щоб позбавитися масштабних різновидів, будемо розглядати в усіх нерівностях нормовані відхилення, тобто величини  $\frac{\xi - \mathbf{M}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}$ , і надалі будемо позначати ці нормовані відхилення лише через  $\xi$ .

Оскільки для центрованих субгауссових випадкових величин коефіцієнт субгауссовості дорівнює квадрату субгауссового стандарту, тобто  $S = \tau^2(\xi)$  та замінивши  $\varepsilon$  на  $x$  отримаємо нерівність (2.12) у вигляді:

$$\mathbf{P}\{|\xi| < x\} \geq 1 - \frac{1}{x^2}. \quad (2.13)$$

Повернення до ненормованих та нецентрованих величин очевидні і не викликають додаткових ускладнень.

Сформулюємо наступну теорему, доведення якої базується на нерівності Чебишева (2.11), а тому її можна розглядати як другий наслідок із основної нерівності Чебишева (2.9). Ця теорема є центральною в даній роботі.

**Теорема** [18]. *Якщо  $\xi$  є субгауссовою випадковою величиною з  $\tau(\xi) > 0$ , то тоді для всіх  $x > 0$  мають місце нерівності*

$$\mathbf{P}\{\xi > x\} \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{P}\{\xi < -x\} \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{P}\{|\xi| > x\} \leq 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right). \quad (2.16)$$

**Доведення.** При  $\lambda > 0$  та  $x > 0$ , з нерівності Чебишева (2.11) випливає, що

$$\mathbf{P}\{\xi > x\} = \mathbf{P}\{e^{u\xi} > e^{ux}\} \leq \frac{\mathbf{M} \exp\{u\xi\}}{\exp\{ux\}} \leq \exp\left\{\frac{u^2 \tau^2(\xi)}{2} - ux\right\},$$

де використано нерівність (2.6).

Продиференціювавши по  $u$  і прирівнявши до нуля праву частину останньої нерівності, маємо

$$\exp\left\{\frac{u^2\tau^2(\xi)}{2} - ux\right\} \cdot (u\tau^2(\xi) - x) = 0.$$

Звідки критична точка  $u = \frac{x}{\tau^2(\xi)}$  і, нарешті, отримуємо

$$\mathbf{P}\{\xi > x\} \leq \exp\left\{\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)} - \frac{x^2}{\tau^2(\xi)}\right\} = \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\}.$$

тобто (2.14).

Друга нерівність (2.15) доводиться аналогічно. Третя (2.16) випливає з того, що  $\mathbf{P}\{|\xi| > x\} = \mathbf{P}\{\xi > x\} + \mathbf{P}\{\xi < -x\}$ . Теорему доведено.

**Зауваження 2.3.** Як вказувалось раніше субгауссова величина є центрованою, а тому (2.16) у випадку не центрованої випадкової величини (зауваження 2.2), якщо після центрування ця випадкова величина є субгауссовою, можна записати таким чином

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < x\} \leq 1 - 2\exp\left(-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right).$$

Скористаємося нерівністю (2.16), яка була детально розглянута та доведена вище. Згідно (2.8)  $\tau^2(\xi) = \mathbf{SD}\xi$ ,  $\mathbf{D}\xi = 1$  то, виконавши відповідні викладки, її можна переписати у вигляді

$$\mathbf{P}\{|\xi| < x\} \leq 1 - 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2S}\right). \quad (2.17)$$

Оскільки для неперервних центрованих випадкових величин

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}, \quad (2.18)$$

рівність (2.18) можна переписати у вигляді

$$\mathbf{P}\{\xi \geq x\} = 1 - F(x), \quad (2.19)$$

де  $F(x)$  – функція розподілу. Тоді праві частини нерівностей (2.12) та (2.17) можна розглядати як оцінки функцій розподілу з використанням нерівності Чебишева та коефіцієнта субгауссовості.

Зауважимо, що для  $S \geq 1$  величина  $2 \exp\left(-\frac{x^2}{2S}\right)$  не повинна бути меншою за значення функції розподілу.

Побудуємо графіки правих частин нерівності Чебишева (2.12), яка широко використовується при оцінці точності вимірювання, та нерівності (2.17), яку можна застосувати у випадку, коли оцінювані величини належать до  $Sub(\Omega)$  та проведемо їх графічний порівняльний аналіз. Для цього побудуємо їх графіки, де позначимо праві частини (2.12) та (2.17) відповідно як  $P_1(x, S) = 1 - 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2S}\right)$  та  $P_2(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .

Як було показано вище, з означення субгауссового стандарту випливає, що він не може бути меншим за дисперсію. Це значить, що коефіцієнт

субгауссовості, за означенням, не може бути меншим за 1. Тому в усіх подальших викладках будемо виходити з умови  $S \geq 1$ . Графіки будемо для трьох випадків  $S = 1; 2; 4$ . Вони зображені на рисунках 2.6; 2.7; 2.8 відповідно.

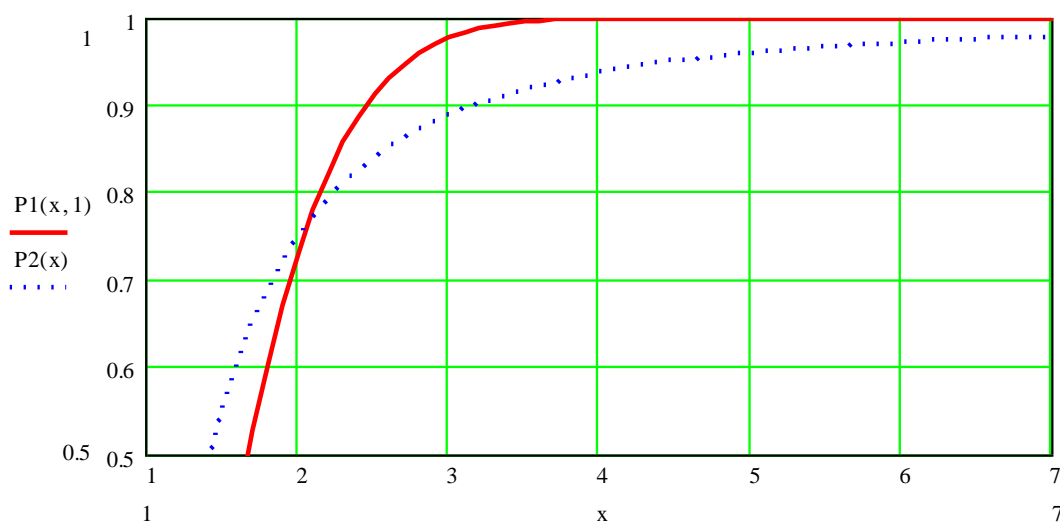


Рис. 2.6. Графік перетину кривих  $P_1(x, S)$  та  $P_2(x)$  при  $S = 1$ .

Аналізуючи рисунок 2.7, бачимо, що існує “особлива” точка – абсциса перетину кривих  $P_1$  та  $P_2$ , до якої  $P_2 > P_1$ , а потім знак нерівності змінюється на протилежний. Це значить, що до цієї точки доцільно використовувати основну нерівність Чебишева, а після неї краще використовувати функцію  $P_1$ , яка має місце для “великих” інтервалів, а це можливо у випадку субгауссового розподілу.

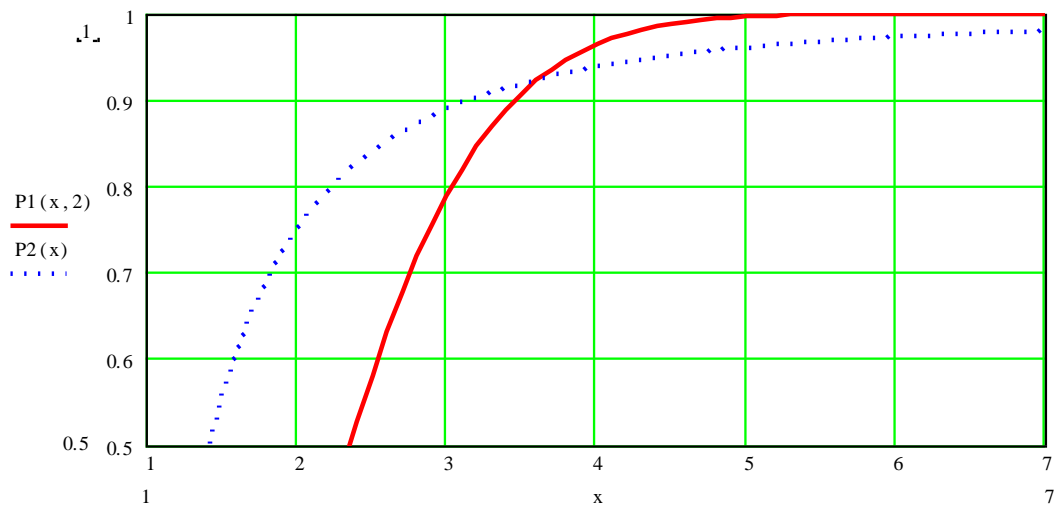


Рис. 2.7. Графік перетину кривих  $P_1(x, S)$  та  $P_2(x)$  при  $S = 2$ .

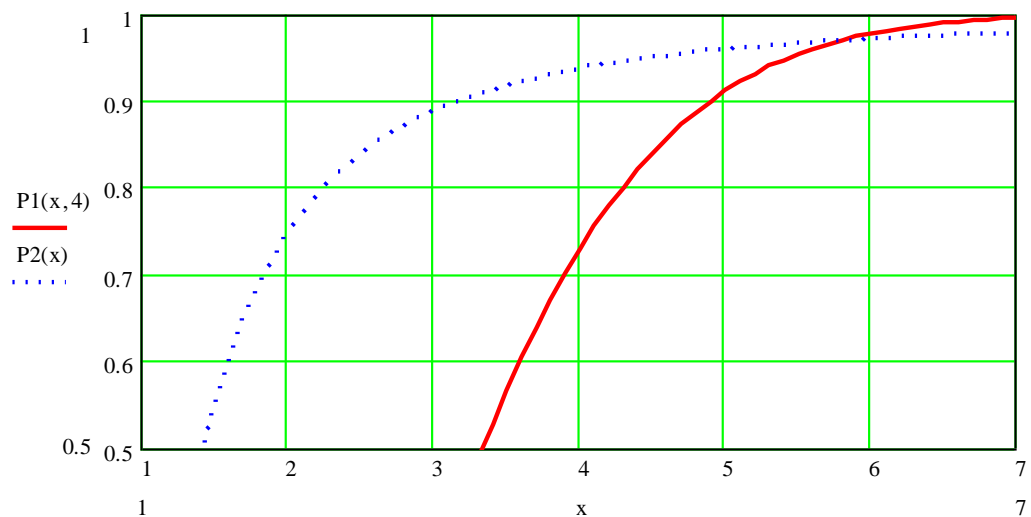


Рис.2.8. Графік перетину кривих  $P_1(x, S)$  та  $P_2(x)$  при  $S = 4$ .

На рисунку 2.7 видно, що починаючи з  $S = 1$  із збільшенням  $S$  величина абсциси точки перетину збільшується, тобто зсувається в бік “великих” інтервалів, тим сильніше, чим більше  $S$ .

Так при  $S = 1$  точка перетину має абсцису 2,08;

при  $S = 2$  відповідно 3,61;

при  $S = 4$  відповідно 5,8.

Цю точку в кожному випадку можна знайти з розв’язку рівняння

$$2 \exp\left(-\frac{x^2}{2S}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Використання субгауссового стандарту у порівнянні з використанням нерівності Чебишева (2.12) дає зменшення ймовірності методичної похибки на величину  $P_1(x) - P_2(x)$ , якщо величина  $x$  лежить справа абсциси точки перетину кривих. Отриманий результат і лежить в основі уточненої нерівності Чебишева у випадку субгауссового процесу. Зауважимо, що цей результат не залежить від конкретного виду субгауссової функції розподілу випадкової величини  $\xi$ , і в цьому сенсі він є загальним.

Проілюструємо використання наведених вище теоретичних обґрунтувань на конкретних прикладах.

*Приклади.*

1. Оцінемо по результатам спостереження  $\xi_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$  математичне сподівання випадкової величини  $\xi \in \mathbf{N}(\theta, 1)$ . Для точкової оцінки математичне сподівання

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Апріорний розподіл  $\xi_k$  – гауссовий. Тому  $v_n \in \mathbf{N}\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ , звідки

$$\frac{v_n - \theta}{\sqrt{n}} \in \mathbf{N}(0, 1).$$

Згідно першому наслідку з нерівності Чебишева (незалежно від розподілу), при  $\varepsilon = 3$ , маємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-2} = \frac{1}{9} \approx 0,11. \quad (2.20)$$

Згідно (2.16), маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} &\leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau\left(\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}}\right)}\right\} = \\ &= 2 \exp\left\{-\frac{9}{2}\right\} \approx 0,02. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Якщо безпосередньо використати інформацію про те, що  $v_n$  має стандартний гауссовий розподіл, то отримуємо значення [43]

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \approx 0,003. \quad (2.22)$$

Отже, використання субгауссового стандарту у порівнянні з нерівністю Чебишева дає можливість в даному випадку підвищити оцінку нижньої межі довірчої ймовірності з 0,89 до 0,98, в той час як теоретично її точне значення становить 0,997.



2. У випадку  $\varepsilon = 2$ , використовуючи (2.20) отримаємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25. \quad (2.23)$$

Згідно (2.16) маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} &\leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau\left(\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}}\right)}\right\} = \\ &= 2 \exp\{-2\} = 0,271. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Якщо безпосередньо використати інформацію про те, що  $v_n$  має стандартний гауссовий розподіл, то отримуємо значення [43]

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \approx 0,046. \quad (2.25)$$

Аналізуючи рівності (2.23) та (2.24), можна зробити висновок що у цьому випадку доцільніше використовувати нерівність Чебишева, ніж субгауссовий стандарт, який в даному випадку не дає можливість підвищити оцінку нижньої межі довірчої ймовірності.

3. У випадку  $\varepsilon = 4$ , використовуючи (2.20) отримаємо:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-2} = \frac{1}{16} = 0,0625. \quad (2.26)$$

Згідно (2.21), маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} &\leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau\left(\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}}\right)}\right\} = \\ &= 2 \exp\{-8\} \approx 6,7 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

У випадку стандартного гауссового розподілу отримаємо [43]:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|v_n - \theta|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\right\} \approx 4 \cdot 10^{-4}. \quad (2.28)$$

При  $\varepsilon = 4$  використання (2.27) має значну перевагу у порівнянні з (2.26). А отриманий результат при використанні субгауссового стандарту становить 0,99933 є досить близьким у порівнянні з використанням (2.28) і становить 0,9996.

При  $\varepsilon \geq 5$  вирази (2.27) та (2.28) стають майже еквівалентними. Отже, як було вказано вище, використання субгауссового стандарту має місце для “великих” інтервалів.

## 2.6. Аналіз точносних оцінок для лінійного субгауссового процесу

Часто при побудові моделі гільбертового процесу використовують різні моделі лінійних формуючих систем. В дискретному випадку це моделі типу ковзного середнього, а в неперервному це різні фільтри. Тобто системи, які формують згортку породжуючих процесів, в якості яких найчастіше беруть білий шум і деякі вагові функції, ядра перетворення або імпульсної реакції

формуючого фільтра. Такі моделі дістали назву лінійних випадкових процесів [44, 45]. Основна їх привабливість і широке використання обумовлюються тим фактом, що у випадку породжуючого процесу з незалежними значеннями або приростами отримується процес з безмежно-подільною функцією розподілу, для якої, як відомо [45], існує канонічна форма характеристичної функції загального виду. Такі процеси не завжди є субгауссовими, але в багатьох випадках вони є гільбертовими.

В тому випадку, коли лінійний процес є субгауссовим, розроблений вище апарат дозволяє оцінити якість їх моделювання або оцінити точність роботи ІВС.

Коротко зупинимось на схемі застосування отриманих вище оцінок до лінійних процесів.

Лінійний процес визначається наступним чином [44, 45, 46]:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\eta(\tau), \quad t \in T, \quad (2.29)$$

де  $T$  – область визначення процесу (2.29) в часі,  $\varphi(\tau, t)$  – функція інтегровна з квадратом по  $\tau$  при всіх  $t \in T$ , яка зветься ядром лінійного процесу, а  $\eta(\tau)$ ,  $\tau \in (-\infty, \infty)$  – процес з незалежними приростами, який зветься породжуючим процесом.

Для того, щоб функція  $f_{\eta}(u; t)$  була одновимірною характеристичною функцією гільбертового процесу  $\eta(\tau)$  з безмежно подільним одновимірним законом розподілу необхідно і достатньо, щоб вона допускала зображення [38, 47, 48]

$$\ln f_{\eta}(u; t) = imu + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \right] d_x K_{\eta}(x, t), \quad (2.30)$$

де  $m$  – дійсна стала,  $K_\eta(x, t)$  – неспадна неперервна зліва обмежена функція, яка носить назву пуасонівського спектру стрибків у формулі Колмогорова, а підінтегральна функція при  $x = 0^+$  рівна  $-\frac{u^2}{2}$ .

Функція  $K_\eta(x, t)$ , що входить у формулу (2.30), визначається однозначно по заданій характеристичній функції  $f_\eta(u; t)$  безмежно подільного розподілу з скінченною дисперсією, як перетворення Фур'є-Стілтєса із співвідношення [47]

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f(u; t) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dK_\eta(x, t), \quad (2.31)$$

звідки в усіх точках неперервності по  $x$   $K_\eta(x, t)$  маємо [48, 49]

$$K_\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-iux} - e^{-iuy}}{iu} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_\eta(u; t) du, \quad (2.32)$$

а в точках розриву права частина (2.32) дорівнює  $0.5[K_\eta(x + 0; t) + K_\eta(x - 0; t)]$ .

Вираз (2.29) має місце як для однорідних так і для не однорідних процесів з незалежними приростами і носить досить загальний характер.

Одновимірною характеристичною функцією гільбертового лінійного випадкового процесу (2.29) визначається виразом [44]

$$\begin{aligned} \ln f_{\xi}(u, t) = iumx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{iux\varphi(\tau, t)} - 1 - iux\varphi(\tau, t)}{x^2} \right] d_x K_{\eta}(x, t) d\tau, \end{aligned} \quad (2.33)$$

де  $m$  – дійсна стала,  $K_{\eta}(x, t)$  – неспадна, неперервна зліва, обмежена функція по  $x$ , при всіх  $t \in (-\infty, \infty)$ , яка носить назву пуассонівського спектру стрибків у формулі Колмогорова, а підінтегральна функція при  $x = 0$  рівна  $-\frac{u^2}{2} \varphi^2(\tau, t)$ .

Якщо в (2.33) замість  $\varphi(\tau, t)$  взяти  $\varphi(t-\tau)$  а  $\eta(\tau)$  вважати однорідним процесом з незалежними приростами, то лінійний процес (2.33) буде стаціонарним у вузькому розумінні.

Аналогічно (2.31) для лінійного процесу маємо [44]

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_{\xi}(u; t) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} d_x K_{\xi}(x; t) = -\mathbf{D}\xi(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} d_x \hat{K}_{\xi}(x; t), \quad (2.34)$$

де  $\hat{K}_{\xi}(x, t)$  - при кожному фіксованому  $t$  є звичайною функцією розподілу, тому

$$-\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_{\xi}(u; t) / \mathbf{D}\xi(t)$$

є характеристичною функцією розподілу  $\hat{K}_{\xi}(x, t)$ .

Це значить, що нормовані відхилення процесу  $\xi(t)$  мають функцію стрибків  $\hat{K}_{\xi}(x, t)$ , що є звичайною функцією розподілу.

Тому, якщо існує похідна по  $x$  для  $K_\xi(x, t)$ , тобто  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_\xi(u; t)$  і вона абсолютно неперервна, то тоді відразу одержуємо

$$K'_\xi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_\xi(u; t) du, \quad (2.35)$$

і завдяки відомій теоремі Леві [47]  $K'_\xi(x, t)$  неперервна по  $x$  і по заданій  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln f_\xi(u; t)$  встановлюється однозначно. Надалі функція  $K_\xi(x, t)$  – пуассонівських стрибків лінійного процесу не використовується, а буде використовуватися лише пуассонівський спектр стрибків породжуючого процесу  $K_\eta(x, t)$ .

Для гільбертового процесу  $\eta(t)$  з незалежними однорідними приростами має місце наступне символічне співвідношення

$$\begin{aligned} \mathbf{M}d\eta(\tau) &= \kappa_1 d\tau, \\ \mathbf{M}[d\eta(\tau) - \kappa_1 d\tau]^2 &= \mathbf{M}[d(\eta(\tau) - \kappa_1 \tau)]^2 = \kappa_2 d\tau, \end{aligned}$$

де  $\kappa_1 = \mathbf{M}\eta(1)$  та  $\kappa_2 = \mathbf{M}\eta^2(1) - \kappa_1^2$ .

З іншого боку, якщо  $\xi(t)$  – центрований лінійний процес, то його кореляційна функція визначається за допомогою виразу

$$R(t_1, t_2) = \kappa_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t_1) \varphi(\tau, t_2) d\tau. \quad (2.36)$$

Не будемо зупинятися детально на цих двох видах розкладу, вони досить широко викладені в літературі, наприклад [28].

Перейдемо до застосування методики перевірки гільбертових лінійних випадкових процесів на субгауссовість, що була викладена раніше в розділі 2.2. Позначимо експоненційну генератрису (твірну функцію) кумулянт випадкової величини  $\zeta(t)$  – значення лінійного процесу в точці  $t$  через

$$g_{\xi}(y) = \ln \mathbf{M} e^{y\zeta(t)} = \ln f_{\xi}(-yi; t) - y \cdot \mathbf{M}\xi, \quad y \in \mathbf{R}. \quad (2.37)$$

Як було показано вище, для перевірки на субгауссовість, необхідно щоб випадкові величини були центрованими, тому у формулі (2.37) потрібно відняти початковий момент.

З врахуванням (2.33) маємо

$$\begin{aligned} g_{\xi}(y) &= \ln f_{\xi}(u; t) = \ln f_{\xi}(-yi; t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{yx\varphi(\tau, t)} - 1 - yx\varphi(\tau, t)}{x^2} \right] d_x K_{\eta}(x, t) d\tau. \end{aligned} \quad (2.38)$$

**Зауваження 2.4.** Згідно (2.2) можна легко провести перевірку, що для (2.38)  $\mathbf{M}\zeta(t) \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\xi^k &= \left. \frac{d^k g_{\xi}(y)}{dy^k} \right|_{y=0} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{x\varphi(\tau, t)e^{yx\varphi(\tau, t)} - x\varphi(\tau, t)}{x^2} \right] d_x K_{\eta}(x, t) d\tau \Big|_{y=0} = 0. \end{aligned}$$

А це означає, що в (2.30)  $m = 0$ .

Таким чином для гільбертового субгауссового лінійного процесу  $\xi(t)$  має місце наступна формула субгауссового стандарту:

$$\begin{aligned} \tau(\xi(t)) = \\ = \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in R}} \left[ \frac{2}{y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{yx\varphi(\tau,t)} - 1 - yx\varphi(\tau,t)}{x^2} \right] d_x K_\eta(x,t) d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

де  $\xi$  – значення лінійного процесу в точці  $t$ .

Нагадаємо, що при  $\xi \in \text{Sub}(\Omega)$  випливає, що  $\mathbf{M}\xi = 0$  і виконується нерівність  $\mathbf{M}\xi^2 \leq \tau^2(\xi)$ , тобто  $\mathbf{D}\xi \leq \tau^2(\xi)$ . Тому можна вивести наступний коефіцієнт (2.8) з урахуванням (2.36) та (2.39) в момент  $t$

$$S_t = \frac{\tau^2(\xi)}{R(t,t)} = \frac{\tau^2(\xi)}{\kappa_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau,t) d\tau}. \quad (2.40)$$

В розділі 2.2 розроблена методика перевірки різних випадкових величин на субгауссовість. Основна задача на практиці при оцінюванні точності моделювання і при аналізі похибок ІВС діагностики полягає у встановленні субгауссовості процесу, який досліджується.

Зупинимося на деяких прикладах з використанням описаної вище схеми дослідження процесів на субгауссовість.

Розглянемо випадок, коли  $\xi(t)$  – лінійний випадковий субгауссовий процес виду



$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) d\pi(\tau), \quad t \in T,$$

ядро якого визначається функцією  $\varphi(\tau)$ , а породжуючий процес  $\eta(t)$  – однорідний з незалежними приростами, що входять в (2.29) є пуассонівський  $\eta(t) = \pi(t)$ .

Тобто це стаціонарний процес у вузькому сенсі, який залежить від ядра. Використовуючи характеристичну функцію цього процесу ми можемо дослідити його на субгауссовість. Відповідь буде залежати від характеристик породжуючого процесу, а більш конкретно від пуассонівського спектру стрибків породжуючого процесу.

$$\begin{aligned} \tau(\xi) &= \\ &= \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in R}} \left[ \frac{2}{y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{yx\varphi(\tau)} - 1 - yx\varphi(\tau)}{x^2} \right] d_x K_{\pi(1)}(x) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\text{де } K_{\eta}(x, t) \equiv K_{\pi(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \lambda, & x \geq 1. \end{cases}$$

Враховуючи останній вираз (2.41) можна представити у вигляді:

$$\tau(\xi) = \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in R}} \left[ \frac{2}{y^2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{y\varphi(\tau)} - 1 - y\varphi(\tau)) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

Модель процесу будується у вигляді згортки або тільки наближено у вигляді дискретної згортки породжуючого процесу з дискретним ядром, як

це описано в [46]. Отримавши формулу (2.42), при відповідних ядрах, можна дослідити її на приналежність до  $Sub(\Omega)$ .

Таким чином, якщо в (2.42) існує права частина, то для такого процесу ми будемо принаймні теоретично мати субгауссовий стандарт, дисперсію, коефіцієнт субгауссовості. Це дає можливість порівнювати між собою різні моделі імпульсних процесів, наприклад, такі як модель RC-шуму – дискретну і неперервну, модель RLC-шуму, різні моделі імпульсних потоків.

В тому випадку, коли теоретичні дослідження моделей виявляються складними доводиться застосовувати чисельні методи, як це було показано в цьому розділі за допомогою графіків. Коли вихідний лінійний процес, що моделюється, не є субгауссовим, то переходять до зрізаних розподілів, тобто до обмежених випадкових значень лінійного процесу. А згідно наведеної вище теорії, обмежена випадкова величина є субгауссова і для неї легко знайти її субгауссовий стандарт або принаймні його оцінку, яка буде дорівнювати обмежуючій константі.

## РОЗДІЛ 3. АЛГОРИТМИ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ТОЧНОСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІВС НА ОСНОВІ СУБГАУССОВИХ ПРОЦЕСІВ

### 3.1. Особливості статистичної обробки результатів вимірювання в інформаційно-вимірювальних системах діагностики

На сьогодні статистична обробка результатів досліджень над випадковими величинами та процесами (сімействами випадкових величин) починається з вироблення планів отримання експериментальних результатів, які найчастіше отримуються у вигляді реалізацій досліджуваних випадкових величин та процесів.

**Зауваження 3.1.** В існуючій літературі досить часто зустрічається твердження про те, що реалізації випадкової величини чи процесу залишаються випадковими після проведення експерименту (aposteriori). Це помилкове уявлення нами не використовується. До експерименту (apriori) ми маємо випадкову величину чи процес (вибірку випадкових величин), після експерименту ми маємо зафіксовану реалізацію (числова послідовність), яка не є випадковою, хоча з нею може бути зв'язана певна міра [50]. Інакше навіщо тоді проводити експеримент, наслідком якого є знову випадкова величина чи процес.

В цьому плані етап отримання реалізації експериментальним шляхом є початковим і суттєво залежить від моделі, яка описує апіорно випадкову величину чи процес, тобто від сукупності тих припущень, які робляться на етапі формування плану проведення вимірювального експерименту та основних положень теоретичних моделей, які при цьому використовуються.

Найчастіше ці припущення стосуються функцій розподілу або еквівалентних їм характеристичних функцій, твірних функцій моментів чи щільностей розподілу. Якщо такі характеристики неможливо апіорі з'ясувати, то використовуючи їх окремі параметри – моменти, семіінваріанти, кореляційні

та спектральні функції, коефіцієнти асиметрії та ексцесу (чотири перші моменти), або лише такі властивості процесу як ергодичність чи стаціонарність, або конструктивні моделі та їх характеристики, як, наприклад клас лінійних випадкових процесів. У випадку нестаціонарних процесів найбільш привабливою є модель періодичного випадкового процесу чи процесу з періодичними кореляційними функціями.

В нашому випадку для використання моделі субгауссових процесів нам потрібно мати оцінку функції або щільності розподілу не обов'язково кожного разу в явному виді. Це можна зробити один раз для даного механізму або виду обладнання, а потім при аналогічних умовах виходити з загального класу розподілів (в нашому випадку класу  $Sub(\Omega)$  та  $L_2(\Omega)$ ), будувати оцінки точності вимірюваних параметрів, а оцінки будемо отримувати на базі гільбертових субгауссових процесів.

В третьому і шостому розділах роботи будемо виходити з моделі періодичних випадкових процесів для вібросигналів.

Для перевірки основних теоретичних результатів роботи, які в основному були викладені в другому розділі, було використано лабораторний макет вітроенергетичної установки [51]. Таке рішення напрямку експериментальних досліджень було вибрано виходячи з наступних міркувань:

1. Досліджувані вібропроцеси, які супроводжують роботу вітрових електростанцій є нестаціонарними в часі, а значить і не ергодичними, бо викликані різними джерелами, механіка яких зв'язана з валами і роторами, які обертаються під силою досить нестійкого і різко змінного в часі і в широкому діапазоні вітрового потоку, а тому в механічну систему вітрових електростанцій входять вузли електромеханічного плану з глибокими зворотними стабілізуючими зв'язками. Тому і віброакустичні процеси треба обробляти таким чином, щоб принаймні у теоретичному плані можна було б на значних часових інтервалах вважати реалізаціями стаціонарних ергодичних процесів. Крім того отримувані послідовності відліків віброакустичних

процесів були синхронізовані з фазовими кутами валів, що обертаються в досліджуваних механізмах.

В науковій літературі з цього приводу не вдалося знайти задовільних рекомендацій щодо методів обробки таких процесів, а тому, хоча дисертація спочатку не була присвячена цим питанням, не була б завершеною без вирішення цих проблем. Тому в останніх розділах з'являються нові результати, які стосуються статистичної обробки випадкових періодичних процесів в класі субгауссових, доведені до алгоритмів та робочих математичних програм.

2. Згідно з Комплексною програмою будівництва вітрових електростанцій, прийнятою в 1997 році, усе більша роль в енергетиці України приділяється вітроелектричним агрегатам. Широке впровадження таких агрегатів вимагає одночасного створення для них засобів контролю та діагностики. Одним із шляхів розв'язання поставленої задачі є створення спеціалізованих інформаційно-вимірювальних систем діагностики.

Розробка таких систем потребує, насамперед, докладного вивчення безпосередньо самого об'єкту діагностики, тобто вітроелектричного агрегату, а також попереднього дослідження (за допомогою математичних моделей) фізичних процесів, що супроводжують роботу вітроелектричних агрегатів.

Сучасна вітроелектрична установка (ВЕУ) є складною інженерною спорудою, у складі якої є механічні, електричні та електронні системи, об'єднані єдиним технологічним процесом перетворення кінетичної енергії вітрового потоку у електричну енергію [52, 53].

З наведених причин дуже важливим є практичне визначення режимів роботи як окремих частин та систем ВЕУ, так і всієї її конструкції в умовах реальної експлуатації. Тому створення вимірювального обладнання, яке забезпечить комплексне вивчення режимів роботи ВЕУ, є нагальним, враховуючи, що в експлуатації знаходяться сотні ВЕУ, та незмінну тенденцію нарощування потужностей вітрових електростанцій (ВЕС) в Україні.

Отримані з допомогою зазначеного вимірювального обладнання дані слугуватимуть вдосконаленню, в першу чергу, експлуатації існуючих ВЕС в

Україні та допоможуть більш ефективно проектувати та споруджувати нові потужності цих станцій.

Методи і програмне забезпечення для ІВС контролю і діагностики ґрунтується на розгляді віброакустичних сигналів, що виникають в окремих вузлах вітроагрегату як випадкових процесів.

Досліджуваний зразок ІВС діагностики орієнтований на вимірювання та обробку як віброакустичних сигналів, так і інших інформаційних сигналів, що супроводжують роботу вітроелектричного агрегату (наприклад, електричних, акустоемісійних тощо).

### **3.2. Методи перевірки вібросигналів в інформаційно-вимірювальних системах діагностики на субгауссовість**

В даному підрозділі розглядаються алгоритми та програмне забезпечення, що базується на методах оцінки розподілу фізичних процесів.

У розроблених програмах при одержанні оцінок моментів застовується метод усереднення за часом. При згладжуванні гістограм використовується метод моментів і система кривих Пірсона. Коротко зупинимось на основних співвідношеннях, які було використано Пірсоном при побудові своєї системи кривих.

Аналізуючи експериментально отримані гістограми, Пірсон виявив, що вони часто мають значну асиметрію та ексцес, тобто сильно відрізняються від нормального розподілу. Асиметрія та ексцес розподілу пов'язані з третім та четвертим моментами, тому для того, щоб теоретична крива з достатньою точністю описувала такий несиметричний експериментальний розподіл, необхідно, щоб вона мала такі ж чисельні значення перших чотирьох моментів, як і експериментальна крива.

Беручи за основу різницеве рівняння, якому задовольняє гіпергеометричний розподіл, і вводячи деякі додаткові припущення, Пірсон отримав диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{x-a}{b_0 + b_1x + b_2x^2} p(x), \quad (3.1)$$

де  $p(x)$  – щільність розподілу.

Розв'язки цього рівняння називаються кривими Пірсона. Параметри  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  та  $b_2$ , що входять в рівняння (3.1), можуть бути виражені через перші чотири моменти розподілу, для якого підбирається аналітичний вираз. А саме, при умові центрування розподілу

$$a = b_1, \quad b_0 = \frac{c_0}{d}, \quad b_1 = \frac{c_1}{d}, \quad b_2 = \frac{c_2}{d}, \quad (3.2)$$

де

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= -\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2), \\ c_1 &= -\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2), \\ c_2 &= -2\mu_2\mu_4 + 6\mu_2^3 + 3\mu_3^2, \\ d &= 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

У виразах (3.3)  $\mu_n$ ,  $n = 2, 3, 4$  – центральні моменти розподілу.

Як відомо [51], загальний розв'язок рівняння (3.1) має вигляд

$$p(x) = Ce^{\varphi(x)}, \quad \varphi(x) = \int \frac{x-a}{b_0 + b_1x + b_2x^2} dx. \quad (3.4)$$

Константа  $C$ , що входить у вираз (3.4), вибирається з умови, якій повинна задовольняти щільність будь-якого розподілу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \quad (3.5)$$

Характер кривої  $\varphi(x)$  може бути дуже різним в залежності від коренів (характеристичного рівняння) знаменника в (3.4)

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 = 0. \quad (3.6)$$

Пірсон ввів величину

$$\kappa = \frac{b_1^2}{4b_0b_2}, \quad (3.7)$$

від значення якої залежать корені рівняння (3.6), а значить і характер кривої розподілу. Величина (3.7) отримала назву “критерій Пірсона” або “каппа Пірсона”.

Каппа Пірсона є основним критерієм при виборі типу апроксимуючої кривої. Всього існує 13 типів кривих, серед яких 3 основних, а інші є їхніми граничними або частинними випадками. Деякі автори, наприклад, [46], виділяють окремо ще нормальний розподіл як 13 тип. Основні типи мають місце при наступних значеннях каппи Пірсона: тип I при  $\kappa < 0$ , тип IV при  $0 < \kappa < 1$ , тип VI при  $\kappa > 1$ .

Тип 13 є розв’язком рівняння



$$\frac{dp(x)}{dx} = -\frac{x-a}{\sigma^2} p(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < p(x) < \infty,$$

яке одержуємо коли в знаменнику (3.1) покласти  $b_0 = -\sigma^2$ ,  $b_1 = b_2 = 0$ .

Далі в цьому розділі наведемо деякі результати, що стосуються досліджень на субгауссовість розподілів К.Пірсона.

В розділі 2 було детально розглянуто деякі важливі частинні розподіли, що належать системі кривих Пірсона і було показано, що тип 13, та такі розподіли як рівномірний і арксинуса, які належать до типу I є субгауссовими. Для них було отримано явні вирази субгауссових стандартів та коефіцієнта субгауссовості. Тепер наведемо з обґрунтуванням основні розрахункові формули для основних трьох типів Пірсона. Розподіли першого типу по Пірсону, при деяких несуттєвих обмеженнях на параметри, всі можна віднести до субгауссових

Інші два основних типи Пірсона IV та VI не завжди в первісному виді є субгауссовими, але в дисертації вони теж детально розглядаються виходячи з тих міркувань, що зрізані варіанти цих розподілів теж будуть субгауссовими, що дає змогу використовувати їх на практиці.

Переходимо до розгляду основних типів розподілів Пірсона, деяку цікаву інформацію з цього питання можна знайти, наприклад, в [54].

### 3.3. Основні співвідношення для згладжування гістограм по Пірсону

Тип I є одним з основних трьох типів і отримується при  $\kappa < 0$ . Його щільність розподілу, що називається бета-розподілом [57], описується наступним виразом

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{q_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{q_2} & -a_1 < x < a_2, \\ 0 & x \notin (-a_1, a_2), \end{cases} \quad (3.8)$$

де  $q_1 > -1, q_2 > -1, a_1 + a_2 > 0$ .

Цей розподіл зосереджений на інтервалі  $x \in [-a_1, a_2]$ ,  $a_1 \in (-\infty, \infty)$ ,  $a_2 \in (-\infty, \infty)$ , при умові, яка вже міститься в (3.8),  $-a_1 < a_2$ , тобто

$$a_1 + a_2 > 0. \quad (3.9)$$

Інакше кажучи, довжина інтервалу, на якому зосереджено розподіл (3.8) завжди має бути додатною.

Якщо  $q_1$  та  $q_2$  одночасно додатні, то щільність розподілу (3.8) унімодальна, тобто має один максимум і на кінцях інтервалу  $[-a_1, a_2]$  перетворюється в нуль. Якщо  $q_1$  та  $q_2$  одночасно від'ємні, то ця щільність розподілу має один мінімум і прямує до нескінченності по мірі наближення до граничних точок, тобто отримуємо  $U$ -подібну криву. Якщо  $q_1$  та  $q_2$  мають різні знаки, то на одному кінці ця щільність розподілу перетворюється в нуль, а на іншому в нескінченність. Тобто отримуємо  $J$ -подібну криву.

Для існування інтегралу від  $p(x)$ , визначеного згідно з формулою (3.8), тобто для існування "момента нульового порядку", необхідно щоб  $q_1 > -1$  і  $q_2 > -1$ . Ці умови виявляються достатніми і для існування вищих моментів.

Оскільки, згідно зроблених вище припущень, значення  $a_1 = 0$  і  $a_2 = 0$  виявляються допустимими у формулі (3.8), то необхідно розкрити її зміст для цих частинних випадків, в зв'язку з тим, що при цьому безпосередньо скористатися виразом (3.8) неможливо через появу нулів у знаменнику.

Якщо в якості лівої граничної точки розподілу (3.8) взяти 0, тобто формально в формулі (3.8) здійснити перехід від змінної  $x$  до  $x - a_1$ , що геометрично відповідає зсуву (без деформації) графіка цієї кривої на величину  $|a_1|$  вздовж осі  $x$ , то отримаємо

$$p(x) = \begin{cases} \tilde{p}_0 x^{q_1} \left(1 + \frac{x - a_1}{a_2}\right)^{q_2} & 0 < x < a_1 + a_2, \\ 0 & x \notin (0, a_1 + a_2), \end{cases}$$

Звідки, при  $a_1 = 0$  маємо

$$p(x) = \begin{cases} \tilde{p}_0 x^{q_1} \left(1 + \frac{x}{a_2}\right)^{q_2} & 0 < x < a_2, \\ 0 & x \notin (0, a_2), \end{cases} \quad (3.10)$$

де  $q_1 > -1, q_2 > -1, a_1 + a_2 > 0$ .

Аналогічно, при  $a_2 = 0$  отримуємо частинний випадок виразу (3.8) у вигляді

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{q_1} x^{q_2} & -a_1 < x < 0, \\ 0 & x \notin (-a_1, 0), \end{cases} \quad (3.11)$$

де  $q_1 > -1, q_2 > -1, a_1 + a_2 > 0$ .

Зсуви, що здійснюються таким чином, не впливають на значення центральних моментів порядку другого і вище, а лише ведуть до зміни першого моменту розподілу (3.8).

При  $q_1 = q_2 = 0$  розподіл (3.8) не втрачає змісту і перетворюється у рівномірний розподіл на інтервалі  $[-a_1, a_2]$ .

При  $q_1 = q_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_1 = a_2 = a$  отримуємо "арксинуса-щільність" розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \pi a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} & -a < x < a, \\ 0 & x \notin (-a, a). \end{cases} \quad (3.12)$$

Інші розподіли, що отримуються з (3.8) при  $q_1 + q_2 = -1$  іноді називають "узагальненими арксинус-щільностями". Арксинус-щільність грає важливу роль в задачах статистичної радіотехніки. При  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  з (3.8) з урахуванням (3.10) отримується класичний бета-розподіл першого роду на інтервалі  $[0, 1]$  у вигляді [40]

$$p(x) = B_{q_1 q_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(q_1 + 1, q_2 + 1)} x^{q_1} (1 - x)^{q_2} & 0 < x < 1, \\ 0 & x \notin (0, 1), \end{cases} \quad (3.13)$$

де  $B(x, y)$  – бета функція [57].

Тип IV є основним і отримується при  $0 < \kappa < 1$ . Для цього типу  $S < -3$ ,  $l_1 > 6$ ,  $l_2 < 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_2 \geq 3$ . Його щільність розподілу описується виразом

$$p(x) = p_0 \left( 1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^q e^{-\text{varctg} \frac{x}{a}}; \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (3.14)$$

де  $S < -3$ ,  $q < -2,5$ ,  $-\text{varctg} \frac{x}{a} \in (-\infty, \infty)$ .

Зауважимо, що для того, щоб від  $p(x)$ , визначеної згідно (3.14), існував інтеграл (нульовий момент), досить вимагати виконання умови  $q < -1$  ( $S < 0$ ), при всіх  $-\text{varctg} \frac{x}{a} \in (-\infty, \infty)$ . Проте для існування перших чотирьох моментів розподілу (3.14), за допомогою яких і визначаються всі невідомі параметри щільності, що розглядається, необхідно щоб  $q < -2,5$  ( $S < -3$ ), що і буде припускатися надалі.

Розподіл (3.14) зосереджено на всій прямій і є унімодальним. Практично, без допомоги обчислювальної техніки або спеціальних таблиць, з таким розподілом важко працювати, оскільки параметри, що входять в нього не виражаються за допомогою елементарних функцій через отримані емпіричним шляхом оцінки перших моментів. Крім того, при визначенні чисельних значень  $p_0$  необхідно застосовувати значне збільшення розрядності обчислення.

Зокрема, в нашій обчислювальній практиці такий розподіл отримувався в тих випадках, коли у сукупності спостережень над нормально розподіленою випадковою величиною зустрічалися поодинокі вимірювання, що різко відхилялися (нехарактерні викиди, помилкові спостереження). Виключення з вибірки таких поодиноких спостережень часто приводило до нормального "Згладженого" закону. Крім того IV тип зустрічався і в інших випадках, не пов'язаних з нормальним розподілом.

Зупинимося на з'ясуванні умов існування інтегралу від правої частини в (3.14) і на визначенні  $p_0$ . Припускаючи у (3.14)

$$\text{tg} \theta = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{S - 2}{2}, \quad (3.15)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^q e^{-\text{var} \text{ctg} \frac{x}{a}} dx &= p_0 \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\text{var} \text{ctg} \frac{x}{a}} \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{S}{2}} d \text{arctg} \frac{x}{a} = \\ &= p_0 a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-v\theta} (1 + \text{tg}^2 \theta)^{\frac{S}{2}} d\theta = p_0 a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{-S} \theta e^{-v\theta} d\theta = F(-S, v) p_0 a. \end{aligned}$$

З урахуванням нормування щільності розподілу

$$p_0 = \frac{1}{aF(-S, v)}, \quad (3.16)$$

де через  $F(-S, v)$  позначена трансцендентна функція, для якої К.Пірсоном були складені таблиці її логарифмів, і яка визначається наступним виразом

$$F(x, v) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^x \theta e^{-v\theta} d\theta \equiv e^{-\frac{1}{2}v\pi} \int_0^{\pi} \sin^x \varphi e^{v\varphi} d\varphi, \quad (3.17)$$

де здійснено заміну  $\Theta = \pi/2 - \varphi$ . Зауважимо, що інтеграли в правій частині (3.17) існують при всіх  $x \geq 0$ . З виразу (3.17) випливає, що  $F(x, v) = F(x, -v)$  при всіх  $x \geq 0$ , тобто парність по аргументу  $v$ , тому маємо

$$\begin{aligned} F(x, v) &= \frac{1}{2} [F(x, v) + F(x, -v)] = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^x \theta \frac{e^{-v\theta} + e^{v\theta}}{2} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^x \theta \text{ch}(v\theta) d\theta \end{aligned}$$

або остаточно

$$F(x, \nu) = \int_0^{\pi/2} \cos^x \theta \operatorname{ch}(\nu \theta) d\theta. \quad (3.18)$$

З останнього виразу видно, що

$$\frac{\partial F(x, \nu)}{\partial x} = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^x \theta \ln(\cos \theta) \operatorname{ch}(\nu \theta) d\theta < 0,$$

при  $x \geq 0$ . Тому  $F(x, \nu)$  монотонно спадає як функція  $x$ , причому найбільше її

значення  $F(x, \nu) = \frac{1}{\nu} \operatorname{sh} \frac{\pi \nu}{2}$ .

Має місце співвідношення

$$F(x+2, \nu) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2) + \nu^2} F(x, \nu), \quad (3.19)$$

при  $x > 0$ ,  $\nu \neq 0$ .

При великих значення  $-S$  та  $|\nu|$  замість (3.16) і (3.17) можна скористатися асимптотичною формулою, виведеною К.Пирсоном [55]

$$p_0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{-S}{2\pi}} \frac{e^{\frac{1}{12S} \cos^2 \varphi} \varphi |\nu|}{(\cos \varphi)^{1-S}},$$

де  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{|\nu|}{-S}$ .

Зупинимось на визначенні початкових умов у цьому випадку

$$m_1 = \frac{av}{S}. \quad (3.20)$$

Враховуючи (3.20), а також припускаючи  $m_0 = 1$ , отримуємо перші початкові моменти при  $q < -2,5$ ,  $S < -3$ ,

$$m_2 = \frac{a^2}{S(S+1)}(v^2 - S), \quad (3.21)$$

$$m_3 = \frac{a^3v}{S(S+1)(S+2)}(v^2 - 3S - 2), \quad (3.22)$$

$$m_4 = \frac{a^4}{S(S+1)(S+2)(S+3)}[v^4 - v^2(6S+8) + 3S(S+2)]. \quad (3.23)$$

Перші центральні моменти отримуються з (3.20), (3.21), (3.22) та (3.23) в наступному вигляді

$$\bar{m}_2 = \frac{-a^2}{S^2(S+1)}(v^2 - S), \quad (3.24)$$

$$\bar{m}_3 = \frac{4a^3v(S^2 + v^2)}{S^3(S+1)(S+2)} = -\bar{m}_2 \frac{4av}{S(S+2)}, \quad (3.25)$$

$$\bar{m}_4 = \frac{3a^4(v^2 + S^2)[(S-6)(v^2 + S^2) + 8S^2]}{S^4(S+1)(S+2)(S+3)}. \quad (3.26)$$

Подальші викладки проводяться аналогічно типу I.



Якщо у виразах (3.21), (3.22) та (3.23) замінити  $\bar{m}_j$  на  $\bar{\mu}_j$ ,  $j = 2,3,4$ , то отримуємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими  $a$ ,  $v$  та  $S$ . Зупинимося коротко на визначенні цих параметрів (точніше їх статистичних оцінок).

Враховуючи визначення  $\beta_1$  та  $\beta_2$  і вводячи позначення  $z = S^2 + v^2$ , отримаємо з (3.24), (3.25) та (3.26)

$$\beta_1 = \frac{\bar{\mu}_3^2}{\bar{\mu}_2^3} = \frac{4^2(S^2 - z)(S + 1)}{(S + 2)^2 z},$$

$$\beta_2 = \frac{\bar{\mu}_4^2}{\bar{\mu}_2^2} = \frac{3(S - 6)(S + 1)}{(S + 2)(S + 3)} + \frac{24S^2(S + 1)}{(S + 2)(S + 3)z},$$

або

$$\frac{\beta_1(S + 2)^2}{2(S + 1)} = \frac{8S^2}{z} - 8,$$

$$\frac{\beta_2(S + 2)(S + 3)}{2(S + 1)} = S - 6 + \frac{8S^2}{z}.$$

Віднявши почленно від другої рівності першу та поділивши на  $S + 2$ , отримаємо

$$\frac{\beta_2(S + 3)}{3(S + 1)} - \frac{\beta_1(S + 2)}{2(S + 1)} = 1.$$

Звідки

$$S = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{3\beta_1 - 2\beta_2 + 6} \quad (3.27)$$

та

$$z = \frac{S^2}{1 + \frac{\beta_1(S+2)^2}{16(S+1)}} = \frac{16S^2(S+1)}{w} = \frac{S^2}{1-\kappa}. \quad (3.28)$$

Оскільки  $0 < \kappa < 1$ , то  $z > 0$ . Використовуючи раніше введене позначення  $z = S^2 + v^2$  отримуємо

$$v^2 = -S^2 + \frac{16S^2(S+1)}{w} = -S^2 + \frac{S^2}{1-\kappa} = S^2 \frac{\kappa}{1-\kappa}. \quad (3.29)$$

Оскільки  $S < -3$  для вказаного типу, то маємо  $w < 0$ . Тому

$$|v| = S(S+2) \sqrt{\frac{-\beta_1}{w}} = |S| \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}}. \quad (3.30)$$

З рівняння (3.24), з урахуванням переходу від  $\bar{m}_2$  до оцінки  $\bar{\mu}_2$  отримуємо

$$a^2 = -\frac{\bar{\mu}_2 S^2 (S+1)}{v^2 + S^2} = -\bar{\mu}_2 (S+1)(1-\kappa).$$

Враховуючи  $z = S^2 + v^2$  та формулу (3.29), отримуємо

$$|a| = \frac{1}{4} \sqrt{-\bar{\mu}_2 w} = \sqrt{-\bar{\mu}_2 (S+1)(1-\kappa)}, \quad (3.31)$$

де

$$w = 16(S+1)(1-\kappa).$$

Залишилося тепер з'ясувати знаки при  $a$  і  $\nu$ , які залежать від знаку  $\bar{\mu}_3$ . З виразу (3.18) видно, що  $F(x, \nu) > 0$ , тому що на  $[0, \pi/2]$ ,  $\cos \theta \geq 0$  і  $ch \theta \geq 0$ , а так як у формулі (3.16) завжди  $\frac{1}{aF(-S, \nu)} > 0$ , то звідси випливає, що завжди в (3.14) треба брати  $\alpha > 0$ . Оскільки у визначенні третього центрального моменту (3.25)  $a$  і  $\nu$  входять у вигляді добутку і  $a > 0$ , то  $\nu$  буде мати знак протилежний знаку  $\bar{\mu}_3$ . В формулі (3.25) перед добутком  $a \cdot \nu$  є знак "-", тому у формулі (3.31) будемо брати арифметичне значення кореня квадратного, тоді маємо

$$\nu = \text{sign}(-\bar{\mu}_3) S(S+2) \sqrt{\frac{-\beta_1}{w}}, \quad S < -3. \quad (3.32)$$

Зупинимося на положенні моди для типу, що розглядається.

Диференціюючи (3.14) по  $x$  отримаємо

$$p'(x) = p_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{q-1} e^{-\text{varctg} \frac{x}{a} \left(\frac{2qx}{a^2} - \frac{\nu}{a}\right)}. \quad (3.33)$$

$p'(x)$  перетворюється в нуль при  $x = -\infty$ ,  $x = \infty$  і  $x = \frac{\nu a}{2q}$  (оскільки

$q < -2,5$ ). В точці

$$x = \frac{va}{2q} = \frac{va}{S-2} \quad (3.34)$$

цей закон має один максимум, абсциса якого і визначає положення моди.

Таким чином формули (3.15), (3.31) та (3.32) дозволяють визначити всі числові параметри, що входять в (3.14) якщо є оцінки центральних моментів  $\bar{\mu}_2$ ,  $\bar{\mu}_3$  і  $\bar{\mu}_4$ .

Значення  $x$  "згладженої" кривої та  $x'$  кривої, що спостерігається, з урахуванням (3.20) пов'язані співвідношенням

$$x = x' - \mu_1 + \frac{av}{S}. \quad (3.34)$$

Цей тип в кожному конкретному випадку потребує окремого дослідження на субгауссовість. Але очевидно, що зрізані розподіли IV типу субгауссові.

Тип VI є основним типом і отримується при  $\kappa > 1$ . Для нього  $S < -3$ . Його щільність розподілу, іменована іноді щільністю розподілу Парето [56] визначається у такий спосіб

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \left(\frac{x}{a}\right)^{q_1} \left(\frac{x}{a} - 1\right)^{q_2} & \text{при } \frac{x}{a} > 1, q_1 < -4, a \neq 0, q_2 > -1, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (3.35)$$

Цей розподіл зосереджений на інтервалі  $x \in (a, \infty)$  при  $a > 0$  або на інтервалі  $x \in (-\infty, a)$  при  $a < 0$ .

Якщо  $q_2 > 0$ , то ця щільність унімодальна, тобто має один максимум і в точці  $x = a$  обертається в нуль, а на нескінченності асимптотично

наближається до нуля. Якщо  $q_2 > 0$ , то крива щільності при наближенні аргументу до точки  $a$  іде на нескінченність, і має вид  $j$ -подібної кривої.

Для існування інтеграла від правої частини, тобто для існування моменту "нульового порядку", у (3.35) треба щоб  $q_1 < 0$  і  $q_2 > -1$ . Однак для існування моментів до 4-го порядку включно треба щоб  $q_1 < -4$  при  $q_2 > -1$ .

Тип VI основний і для визначення усіх вхідних у нього параметрів використовуються в загальному випадку всі оцінки перших чотирьох моментів розподілу (3.35). При  $\bar{m}_3 > 0$  параметри  $a$ ,  $q_1$  і  $q_2$  визначаються за тими формулами що і  $a_1 + a_2$ ,  $q_1$  і  $q_2$  у першому типі, однак при  $\bar{m}_3 < 0$  ці формули відрізняються знаками, що входять в них. Останній збіг формул підтверджується і тим фактом, що розподіл VI типу за допомогою простого перетворення  $x = \frac{a}{z}$  зводиться до розподілу I-го типу. Тому багато авторів [57]

цей тип окремо не розглядають. Але нас цікавить не тільки теорія, але і питання практичного застосування цього розподілу, то ми зупинимося на ньому докладніше.

При  $a = 1$ , вираз (3.35) має такий вид

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x^{q_2}}{B(q_2 + 1, -q_2 - q_1)(1+x)^{-q_1}} & \text{при } x \in (0, \infty), \\ 0 & \text{при } x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (3.36)$$

де  $q_1$  і  $q_2$  визначаються за тими формулами, що і для виразу (3.35). Розподіл (3.36) відомий як бета-розподіл другого роду.

Між цими розподілами існує наступний зв'язок [58]

$$\frac{B(-q_1 - q_2 - 2, q_2)}{(1+x)^2} \left( \frac{1}{1+x} \right) = \frac{x^{q_2}}{B(q_2 + 1, -q_1 - q_2 - 1)(1+x)^{-q_1}},$$

де  $x \in (0, \infty)$ .

Іншими словами, якщо випадкова величина  $\xi$  має щільність розподілу (3.13), то величина  $\xi^{-1} - 1$  має щільність (3.36).

Зокрема z-розподіл Фішера, застосовується в дисперсійному аналізі, і обумовлений співвідношенням [59]

$$p_{mn}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}, & x > 0 \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (3.37)$$

де  $m, n = 1, 2, 3, \dots$ , являє собою окремий випадок бета-розподілу другого роду (3.36). За цим законом розподілу частка двох сум, що містять відповідно по  $m$  і  $n$

доданків центрованих незалежних нормально розподілених випадкових величин з однаковими дисперсіями [59].

При  $q_2 = 0$  вираз (3.35) не втрачає змісту і перетворюється в XI-й тип.

Зупинимося на обґрунтуванні формули для  $p_0$ . Маємо

$$\int_a^{\infty} p_0 \left(\frac{x}{a}\right)^{q_1} \left(\frac{x}{a} - 1\right)^{q_2} dx = 1.$$

Увівши заміну змінних  $x = \frac{a}{z}$  одержуємо

$$\int_1^0 p_0 z^{-q_1} \left( \frac{1}{z} - 1 \right)^{q_2} (-az^{-2}) dz = ap_0 \int_0^1 z^{-q_1 - q_2 - 2} (1-z)^{q_2} dz = 1.$$

З огляду на визначення бета-функції і

$$\overline{m_1} = \frac{a_2 - a_1 + a_2 q_1 - a_1 q_2}{S}$$

при  $q_1 + q_2 + 2 = S$  і  $q_2 > -1$  маємо

$$p_0 = \frac{1}{aB(q_2 + 1, 1 - S)} = \frac{\Gamma(-q_1)}{a\Gamma(q_2 + 1)\Gamma(1 - S)}, \quad S < 1. \quad (3.38)$$

У такий спосіб у розглянутому випадку для існування моменту "нульового порядку" параметри, що входять у (3.35), повинні задовольняти умовам

$$q_1 < 0, q_2 > 1, S < 1, -q_1 > q_2 + 1. \quad (3.39)$$

Однак, як буде показано нижче, для існування 4-го моменту виконання умов (3.39) виявляється недостатнім.

Якщо величина  $a$  виходить від'ємною, то тоді маємо

$$\int_{-\infty}^{-|a|} p_0 \left( -\frac{x}{|a|} \right)^{q_1} \left( -\frac{x}{|a|} - 1 \right)^{q_2} dx = \int_{|a|}^{\infty} p_0 \left( \frac{x}{|a|} \right)^{q_1} \left( \frac{x}{|a|} - 1 \right)^{q_2} dx.$$

Останній інтеграл збігається з проаналізованим раніше, якщо в ньому формально замінити  $a$  на  $|a|$ . Тому остаточно для довільного  $a$  маємо

$$p_0 = \frac{1}{aB(q_2 + 1, 1 - S)} = \frac{\Gamma(-q_1)}{|a|\Gamma(q_2 + 1)\Gamma(1 - S)}. \quad (3.40)$$

Зупинимося на визначенні початкових моментів для розподілу (3.35).

У загальному випадку для усіх  $a \neq 0$  з урахуванням (3.38) і (3.40) маємо

$$m_n = \frac{a^n B(q_2 + 1, 1 - S - n)}{B(q_2 + 1, 1 - S)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.41)$$

При  $S < 1 - n$  і  $q_2 > -1$  одержуємо

$$m_n = \frac{a^n \Gamma(1 - S - n)\Gamma(-q_1)}{\Gamma(1 - S)\Gamma(-q_1 - n)} = \frac{a^n \prod_{j=1}^n (-q_1 - j)}{\prod_{j=1}^n (1 - S - j)} = a^n \prod_{j=1}^n \frac{-q_1 + j}{S + j - 1}. \quad (3.42)$$

Таким чином, якщо припустити замість (3.39), що виконуються співвідношення

$$q_1 < -4, \quad q_2 > -1, \quad (S < -3), \quad (3.43)$$

то з урахуванням (3.42) перші початкові моменти розподілу (3.35) виражаються в такий спосіб

$$m_1 = \frac{a(q_1 + 1)}{S}, \quad (3.44)$$

$$m_2 = \frac{a^2(q_1 + 1)(q_1 + 2)}{S(S + 1)},$$



$$m_3 = \frac{a^3 (q_1 + 1)(q_1 + 2)(q_1 + 3)}{S(S + 1)(S + 2)},$$

$$m_4 = \frac{a^4 (q_1 + 1)(q_1 + 2)(q_1 + 3)(q_1 + 4)}{S(S + 1)(S + 2)(S + 3)}.$$

Перші чотири центральних моменти виходять з  $m_1 = m_{01} = \frac{a(q+1)}{q} - a = \frac{a}{q}$ ,

якщо в цих формулах припустити, що  $a_1 + a_2 = a$ , у наступному виді

$$\bar{m}_2 = \frac{a^2 (q_1 + 1)(q_2 + 1)}{S^2 (S + 1)},$$

$$\bar{m}_3 = \frac{2a^3 (q_1 + 1)(q_2 + 1)(q_2 - q_1)}{S^3 (S + 1)(S + 2)}, \quad (3.45)$$

$$\bar{m}_4 = \frac{3a^4 (q_1 + 1)(q_2 + 1)[(q_1 + 1)(q_2 + 1)(S - 6) + 2S^2]}{S^4 (S + 1)(S + 2)(S + 3)},$$

за умови (3.43).

Якщо у виразах (3.45) моменти  $\bar{m}_j$  замінити їхніми оцінками  $\bar{\mu}_j$ ,  $j = 2, 3, 4$ , то в підсумку одержуємо систему трьох рівнянь із трьома невідомими  $a$ ,  $q_1$  і  $q_2$ , у результаті розв'язку якої виходять вираз для статистичних оцінок зазначених параметрів.

У силу того, що одночасно  $q_2 > -1$  і  $q_1 < -4$  параметр  $\varepsilon$ , уведений при розгляді першого типу, для VI-го типу задовольняє умові  $\varepsilon < 0$ . За умов (3.43) одержуємо для розглянутого випадку нерівність  $w < 0$ . Маємо

$$\varepsilon < 0, \quad S < -3, \quad w > 0. \quad (3.46)$$

Згідно (3.45) для оцінок моментів маємо

$$\bar{\mu}_3 = a(q_2 - q_1) \frac{2\bar{\mu}_2}{S(S+2)},$$

звідси, у силу того, що  $\bar{\mu}_2 > 0$  і  $S(S+2) > 0$ , знак  $\bar{\mu}_3$  і добутки  $a(q_2 - q_1)$  – завжди збігаються, а для того, щоб мало місце (3.43) треба щоб  $q_2 - q_1 > 0$ , у такий спосіб знаки і  $\bar{\mu}_3$  і  $a$  повинні збігатися. Отже, з першого виразу (3.45) відразу одержуємо формули

$$a = \frac{1}{2} \text{sign}(\bar{\mu}_3) \sqrt{\bar{\mu}_2 w}, \quad (3.47)$$

а тому що  $q_2 > q_1$ , то одержуємо

$$q_1 = \frac{S-2}{2} - \frac{S(S+2)}{2} \sqrt{\frac{\beta_1}{w}},$$

$$q_2 = \frac{S-2}{2} + \frac{S(S+2)}{2} \sqrt{\frac{\beta_1}{w}},$$
(3.48)

Зупинимося на співвідношенні, що зв'язує абсциси  $x'$  вибіркової кривої (гістограми) з абсцисами  $x$  кривої "згладжування"

$$x = x' - \mu_1 + \frac{a(q_1 + 1)}{q_1 + q_2 + 2} = x' - \mu_1 + \frac{a(q_1 + 1)}{S}. \quad (3.49)$$

Вхідні дані програми представляють собою ряд послідовних упорядкованих у часі рівновіддалених відліків ергодичних випадкових процесів. Вхідні дані оформляються у виді текстового файлу (у кодах ASCII).

Вихідні дані програми видаються в текстовий файл і на екран монітора. Вихідна інформація складається зі значень змінних, повідомлень, таблиць і графіків, у яких міститься наступне:

1. Вид гістограми: центрована, нормована чи ні;
2. Обсяг вибірки, кількість інтервалів у гістограмі;
3. Оцінки початкових моментів;
4. Оцінка дисперсії, середньоквадратичного відхилення, інтервал гістограми, найменше і найбільше спостереження;
5. Оцінки центральних моментів, коефіцієнти асиметрії й ексцесу, каппа Пірсона;
6. Тип згладжуючої кривої, її параметри;
7. Таблиці значень згладжуючої кривої і гістограми, відповідні їм графіки.

Схема алгоритму програми наведена на рис. 3.1.

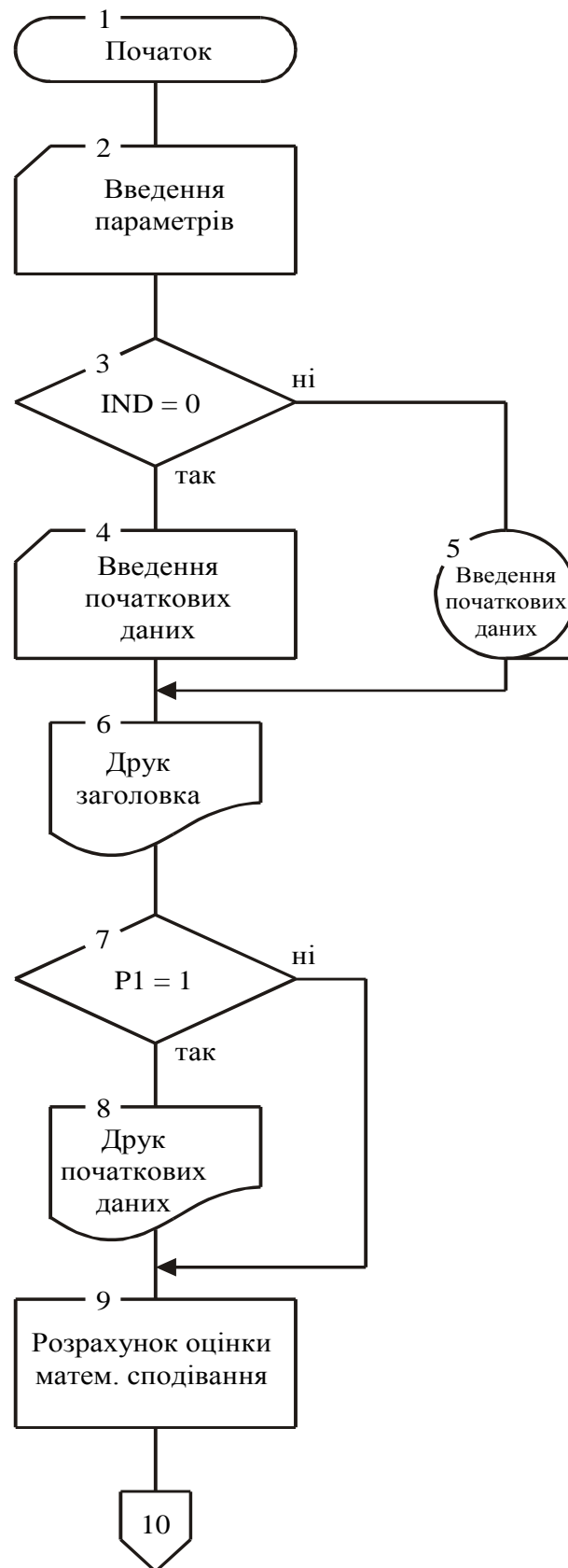
**Алгоритм програми для підбору кривих Пірсона**

Рис. 3.1.Схема алгоритму програми для підбору кривих Пірсона

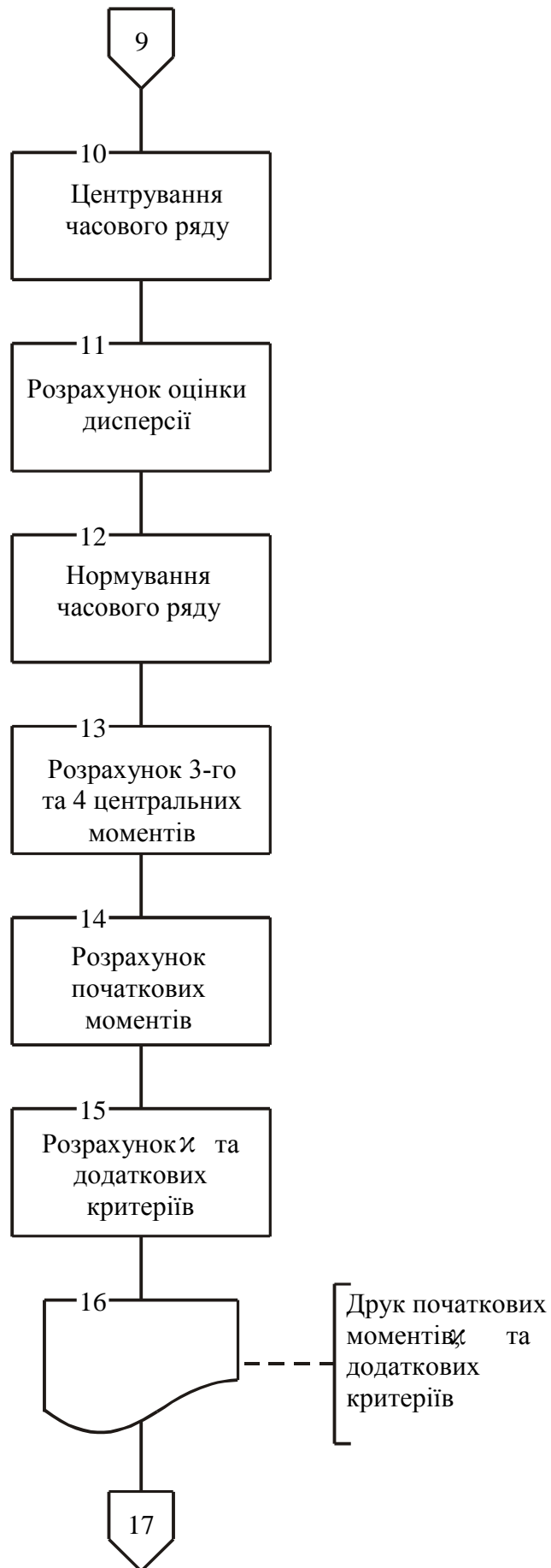


Рис. 3.1 (продовження).

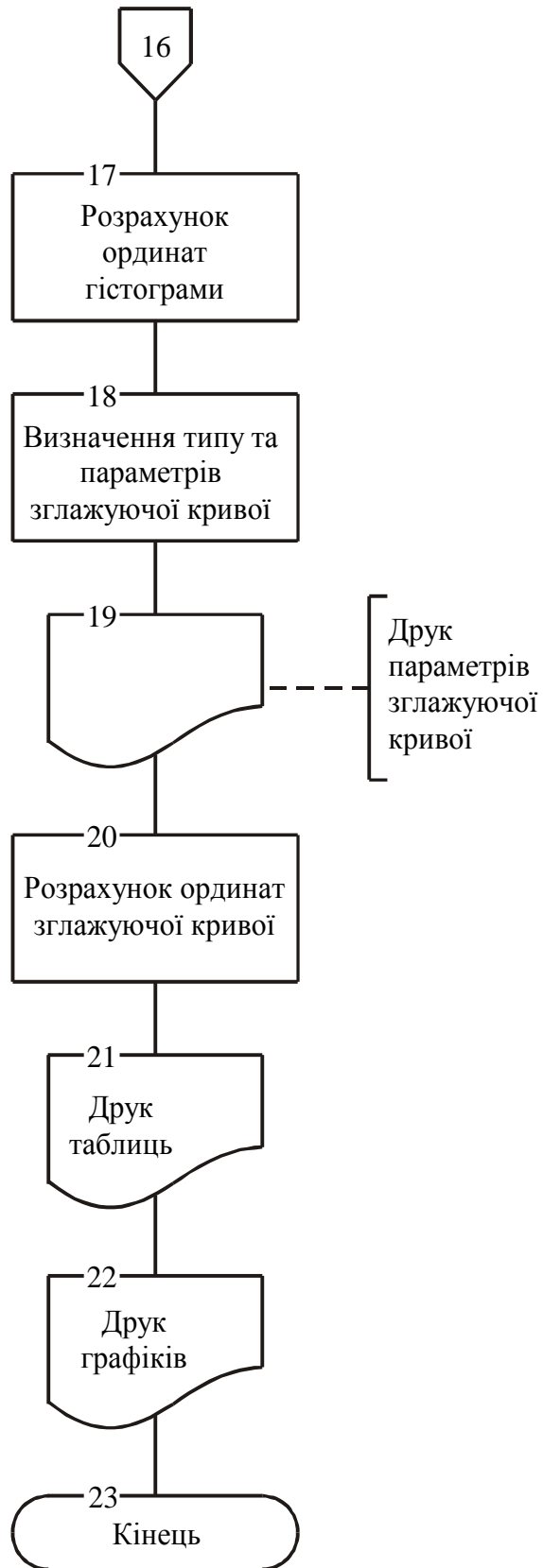


Рис. 3.1 (закінчення).

## РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ СИСТЕМ ДІАГНОСТИКИ НА ОСНОВІ СТАЦІОНАРИЗАЦІЇ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

### 4.1. Роль стаціонаризації при обробці вимірювальної інформації

В наш час не можливо уявити жодну галузь народного господарства, де б не використовувалось різноманітне ТО. Це в першу чергу електроприлади, енергогенеруючі установки, електроприводи та агрегати. Споживач зацікавлений у високій надійності використовуваного технічного обладнання. Особливо гостро це питання постає в останні роки в зв'язку із значним періодом експлуатації та високою вартістю обладнання. Найбільш важливою задачею є попередження відмов, які в деяких випадках можуть призвести до значних матеріальних збитків і навіть катастроф.

Одним із методів підвищення надійності роботи технічного обладнання є технічна діагностика обладнання з використанням сучасних ІВС на базі ЕОМ, що значно розширює можливості ІВС діагностики. Використання потужних ЕОМ докорінно змінило уявлення про роль і структуру ІВС. Зараз ІВС діагностики являють собою найчастіше цілий комплекс, функціонально об'єднаних в логічні структури, засобів які не лише призначені для збору інформації, контролю і діагностування [10], а і потужна база по обробці інформації, її зберіганню та прийняттю рішень (керування об'єктом).

При розробці ІВС діагностики необхідно мати добре розроблені статистичні і обчислювальні методи, які б дозволяли з необхідною точністю обробляти на ЕОМ експериментальні дані, а також математичні моделі, які з фізичної точки зору з достатньою достовірністю описували б процеси функціонування виробів.

На даному етапі розвитку науки створення таких систем діагностики не викликає значних труднощів, але їх розробка ведеться виходячи з припущення про **стаціонарність** досліджуваного процесу. В даній роботі пропонується

методика побудови ІВС діагностики, що значно розширює можливості діагностування. Базуючись на статистичному підході, який розглянуто в роботах [15, 60], розглядається модель кусково-однорідного процесу Пуассона, як типова та найбільш вживана модель для класу процесів з незалежними приростами, а також виділяються класи процесів які характеризуються параметрами положення та масштабу.

ІВС діагностики, як правило, працюють в умовах випадкових вхідних процесів тому алгоритм роботи таких систем тісно пов'язані з теорією побудови статистичних оцінок діагностичних параметрів та аналізом діагностичних просторів. А це в свою чергу вимагає, щоб при аналізі ІВС використовувалися моделі стаціонарних і ергодичних вхідних інформаційні сигнали. Але часто інформаційні сигнали в найбільш цікавих ситуаціях, що спостерігаються на практиці, з фізичної точки зору не можна безпосередньо описати стаціонарними моделями. І тоді дослідники на практиці повинні шукати шляхи такої попередньої обробки інформаційних сигналів, яка б дозволяла при обробці явно нестационарних з фізичної точки зору сигналів використовувати математичні методи, які застосовуються при обробці стаціонарних випадкових процесів. На практиці це досягається різними шляхами. Один із найчастіше вживаних це *пошук вкладених стаціонарних процесів*. Другий це пошук і *стаціонаризація* спеціальних класів процесів. Тут мова йде не про заміну або переведення нестационарних процесів в стаціонарні, а про пошук шляхів та методів математичної обробки певних класів нестационарних з фізичної точки зору процесів.

Слід особливо зауважити, що в даній роботі під терміном **стаціонаризація** завжди розуміється наступне: це процедура яка полягає в тому, що шляхом попередньої обробки, отриманого з ІВС нестационарного з фізичної точки зору процесу, отримується або будується новий стаціонарний випадковий процес, котрий зберігає повну інформацію про вимірюваний параметр, величину чи функцію вимірюваного фізичного процесу.



В подальших викладках буде суттєво викривуватися відома *характеристична функція множини* або так звана *індикаторна функція* [61]. Тому перш ніж формулювати основну теорему стаціонаризації кусково-стаціонарних випадкових процесів дамо означення цієї функції.

*Індикаторна функція.* В даній роботі індикаторна функція визначається так

$$I_A(t) = \begin{cases} 0, & t \notin A, \\ 1, & t \in A, \end{cases} \quad (4.1)$$

де  $A$  – деяка множина моментів часу, що належить деякій системі множин (більш точно кільцю множин), а  $t$  – число яке характеризує час, взятий з множини, на якій задається процес відповідно.

## 4.2. Класи процесів

Розробка, вивчення та обґрунтування математичної моделі фізичних сигналів є один із найважливіших етапів дослідження функціонування різних ІВС діагностики. Саме від того, наскільки математична модель відповідає фізичному явищу, в значній мірі залежить точність визначення характеристик реального процесу. В даній роботі моделі досліджуваних процесів розбиті на класи. Наведемо короткий опис цих класів.

*Клас процесів, що характеризуються положенням і масштабом (клас ППМ).* Як вказувалося вище при обробці нестационарних сигналів можна піти шляхом стаціонаризації інформаційних сигналів, якщо наперед відомо характер їх нестационарності. А це вимагає пошуку і вивчення певних класів математичних моделей нестационарних випадкових вимірюваних сигналів для яких в принципі можливо провести стаціонаризацію, а також і відповідних методів її успішної реалізації. В результаті проведення дисертаційних досліджень був детально досліджений один з таких класів. Зупинимося на його означенні, та короткому дослідженні.

**Означення.** Дві щільності  $p_1(x)$  та  $p_2(x)$  належать до одного типу коли між ними існує співвідношення

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma} p_2\left(\frac{x-t}{\sigma}\right), \quad \sigma > 0, \quad (4.2)$$

$t$  – параметр положення;  $\sigma$  – параметр масштабу.

Надалі такий клас (тип) будемо називати класом процесів, що характеризуються положення і масштабом.

Зупинимося на деяких важливих типах розподілів, що характеризуються параметрами положення та масштабу.

*Рівномірний розподіл.*

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \frac{1}{a+b}, & x \in [a, b], \end{cases} \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a < b. \quad (4.3)$$

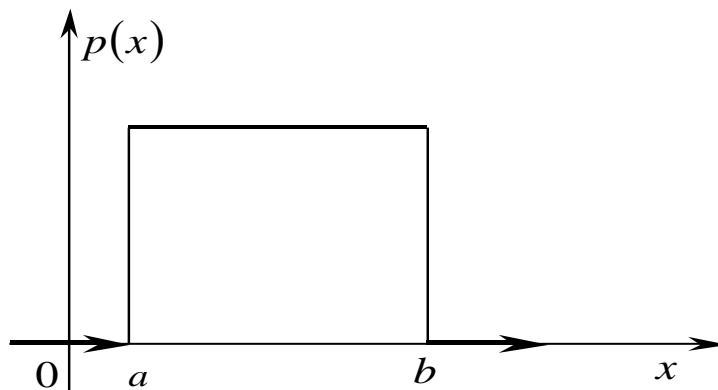


Рис. 4.1 Щільність рівномірного розподілу

*Гауссівський розподіл.* Нормальний закон є типовим прикладом з класу ПМ.

При дослідженні різних технічних систем використовують нормальний закон із щільністю розподілу, що визначається формулою наступного виду:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a \in \mathbf{R}, \quad \sigma > 0, \quad (4.4)$$

де  $a$  - параметр положення,  $\sigma$  - параметр масштабу.

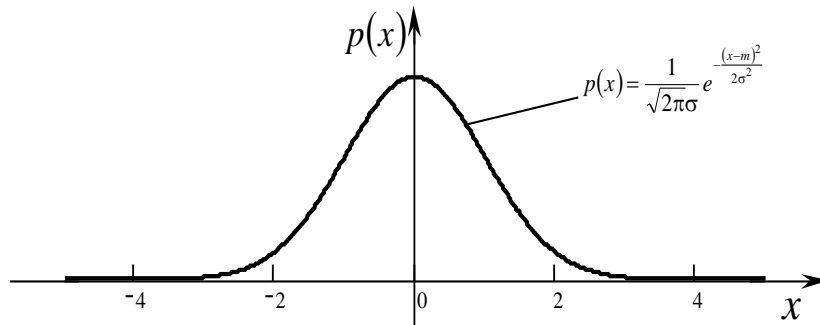


Рис. 4.2 Щільність нормального розподілу, при  $a = 0$ ,  $\sigma = 1$ .

Параметр  $a$  характеризує положення цієї щільності розподілу і значить зміна величини  $a$  приводить до зсуву графіку без деформації в напрямку вісі  $x$ , а зміна  $\sigma$  приводить до масштабної деформації без зміщення вершини кривої. На рис. 4.2 приводиться стандартна крива щільності розподілу гауссівської випадкової величини, а відповідні її числові значення зазвичай наводяться в таблицях.

*Показниковий розподіл.* Функція розподілу показникової випадкової величини має наступний вигляд

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x \in [0, \infty), \quad (4.5)$$

а щільність розподілу, що відповідає (2.5)

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (4.6)$$

відповідно параметр положення і масштабу дорівнює  $\frac{1}{\lambda}$ ,

$\lambda^{-1}$  – є одночасно і параметром положення і параметром масштабу.

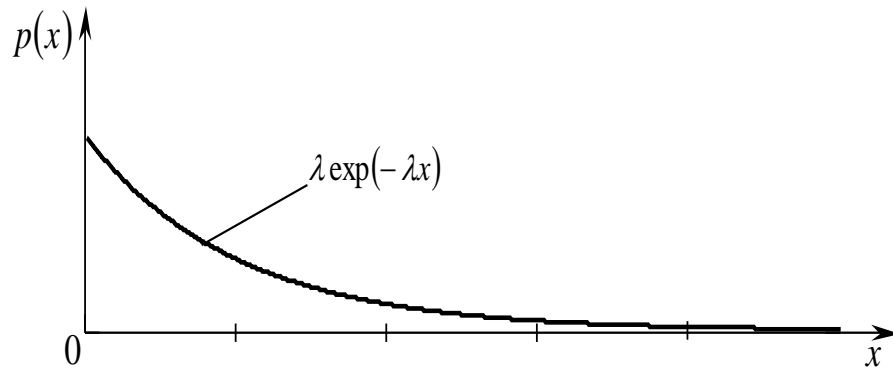


Рис. 4.3 Щільність ймовірностей показникового розподілу.

Показників розподіл часто використовують в теорії надійності, а саме, в тих випадках, коли елемент не старіє, тобто його залишковий час життя не залежить від того, скільки часу він пропрацював до даного моменту часу.

*Розподіл арксинуса.*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & x \in (-a, a); \\ 0, & x \notin [-a, a], \end{cases} \quad a > 0, \quad (4.7)$$

де  $a$  параметр положення,  $t$  параметр масштабу.

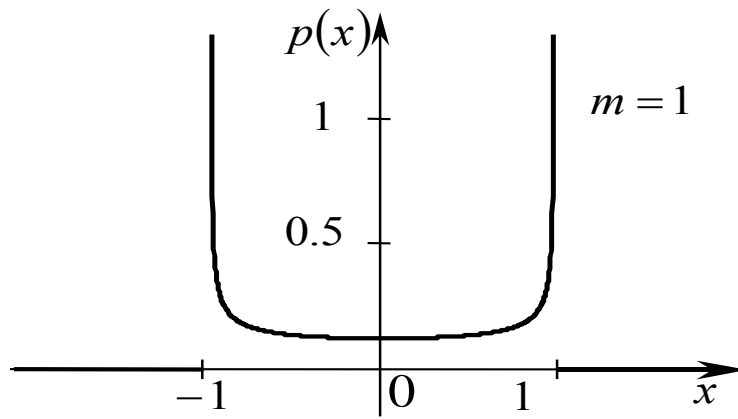


Рис. 4.4 Щільність розподілу арксинуса при  $a=0$  і  $m=1$ .

*Розподіл Вейбулла.* Щільність розподілу Вейбулла визначається наступним виразом:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\alpha}{\sigma} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\sigma}}, & x \geq 0, \quad \alpha > 0, \sigma > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

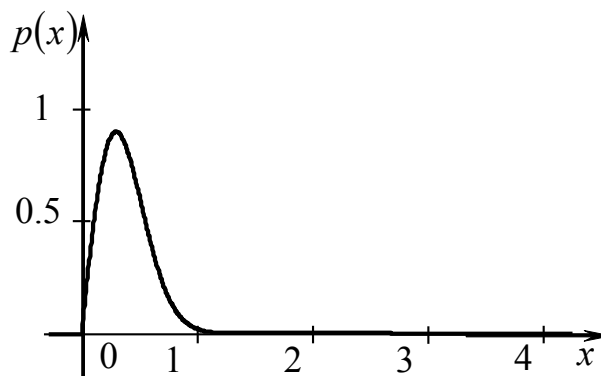


Рис. 4.5 Щільність розподілу Вейбулла, при  $\sigma=1$  і  $\alpha=2$ .

- параметр положення,
- параметр масштабу.

При  $\alpha=1$ , як частинний випадок, маємо показниковий розподіл, а при  $\alpha=2$  – релеївський.

Криві функції розподілу Вейбулла не належать сімейству кривих Пірсона.

*Розподіл Релея.* Щільність розподілу Релея визначається виразом

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0, \sigma > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Щільність розподілу Релея має властивість характерну для класу ПМ.

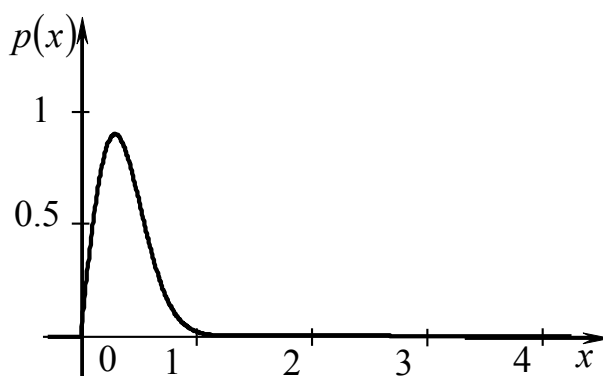


Рис. 4.6 Щільність розподілу Релея.

*Розподіл Ерланга.* Щільність розподілу Ерланга

$$p_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} x^n e^{-\lambda x}, & x \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (4.10)$$

$n + 1$  - кількість доданків в сумі випадкових величин експоненційного типу, які формують закон Ерланга.

При  $n = 0$  маємо як частинний випадок одну експоненційно розподілену ВВ з показниковим типом розподілу.

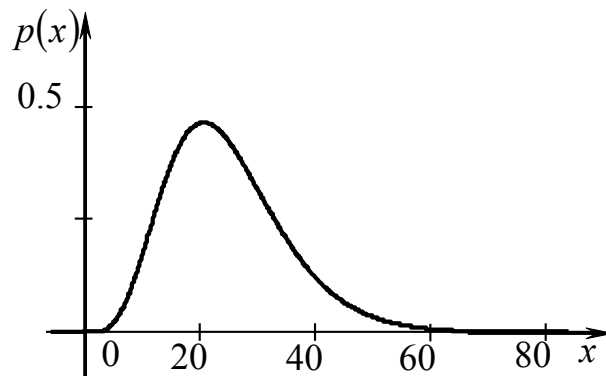


Рис. 4.7 Щільність розподілу Ерланга, при  $\lambda = 0,2$  і  $n = 5$

$\mathbf{M}\xi = \frac{n+1}{\lambda}$  - параметр положення,  $\mathbf{D}\xi = \frac{n+1}{\lambda^2}$  - параметр масштабу.

Якщо відомо, що нестационарність випадкового процесу, у якого одновимірна функція розподілу процесу належить ПМ класу, викликана зміною параметрів положення, то такий клас процесів можна стаціонаризувати методом масштабних коефіцієнтів який розроблено в даній роботі.

*Приклад.* Випадкова величина  $\xi$  має щільність рівномірного розподілу на відріжку  $[a, b]$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x),$$

де  $I$  – індикаторна функція (1).

Для цього закону  $m = \frac{b-a}{2}$ ,  $\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$ , нормовані відхилення  $\frac{(\xi - m)\sqrt{12}}{(b-a)}$ , а

щільність  $\hat{p}(x) = \frac{\sqrt{12}}{b-a} p_{\xi} \left( \frac{x - \frac{b-a}{2}}{b-a} \sqrt{12} \right)$ .

Таким чином, якщо для кожного відріку  $\xi_t$  нестационарного процесу

ППМ зробити перехід до нового процесу згідно  $\frac{(\xi_t - m_t)\sqrt{12}}{b_t - a_t}$ , то отримаємо стаціонарну модифікацію ППМ з нормованим рівномірним розподілом. Множник  $\frac{\sqrt{12}}{b_t - a_t}$  – є масштабним множителем з неперервним часом для даного випадку. Коли процес ППМ одночасно є і процесом КСП (див. нижче), то в цьому випадку масштабні множники будуть з дискретним часом (тобто буде їх послідовність).

**Клас кусково-стаціонарних процесів (клас КСП).** Розглянемо випадковий вектор-процес

$$\Xi_n(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)) \quad (4.11)$$

з стохастично незалежними стаціонарними компонентами, заданий на інтервалі  $t \in [a, b]$  і нехай послідовність множин  $B_k, k = \overline{1, n}$  є розбиттям інтервалу  $[a, b]$  точками  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , а  $I_{B_k}(t)$  індикаторна функція, визначена згідно (4.1), множини  $B_k$ , тоді випадковий процес

$$\xi_{\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(t) I_{B_k}(t) \quad (4.12)$$

зветься *процесом розладки*, а моменти  $t_1, t_2, \dots, t_n$  *моментами розладки*.

Якщо для компонент вектора (4.11) задано одновимірну  $F_k(x; t), t \in [a, b]$  і двовимірну  $F_k(x_1, x_2; t_1, t_2), t_1, t_2 \in [a, b]$  функції розподілу, то тоді на відрізок  $[a, b]$  можна розглядати загальну одновимірну функцію розподілу процесу (4.12)

$$F_{\Sigma}(x_1; t_1) = \sum_{k=1}^n p_k F_k(x_1; t_1) I_{B_k}(t) \quad (4.13)$$



та двовимірну

$$F_{\Sigma}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \sum_{k=1}^n p_k F_k(x_1, x_2; t_1, t_2), \quad (4.14)$$

де  $p_k$ ,  $k \in [1, n]$  вагові коефіцієнти, для яких  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ .

**Клас кусково-однорідних процесів (клас КОП).** Опис цього класу подібний до опису наведеного вище з тією відмінністю, що тепер розглядається *нестационарний* випадковий вектор-процес

$$\Xi_n(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)), \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (4.15)$$

з стохастично незалежними *однорідними* компонентами, заданий на нескінченному інтервалі  $t \in (-\infty, \infty)$ , де кожна компонента вектора має свою одновимірну функцію розподілу  $F_k(x; t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  і двовимірну  $F_k(x_1, x_2; t_1, t_2)$ ,  $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ , то тоді на інтервалі  $(-\infty, \infty)$  можна розглядати загальну одновимірну функцію в вигляді (4.13), та двовимірну виду (4.14).

**Стохастично періодичний процес (клас СПП).**

Слід відзначити, що теорія стохастично періодичних випадкових процесів, це теорія вимірних функцій двох змінних, одна з яких, розглядається як параметр, - по ній процес є періодичним, а по другій змінній процес завжди розглядається як функція *невпорядкованої* множини, яка задана на деякому ймовірносному просторі. Саме завдяки цій другій змінній і з'являються у випадкового процесу властивості, не притаманні детермінованим функціям двох впорядкованих змінних. По другій змінній випадковий процес не може

мати періодичних властивостей, бо вона не упорядкована подібно числам на числовій вісі.

Слідуючи Слуцькому наведемо означення періодичних випадкових процесів

**Означення.** *Сепарабельний випадковий процес  $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$ , (включаючи і комплекснозначний) називається періодичним (коротко  $T$ -періодичним), якщо існує таке число  $T > 0$ , що скінченновимірні вектори  $(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))$  і  $(\xi(t_1 + T), \xi(t_2 + T), \dots, \xi(t_n + T))$ , де  $t_1, t_2, \dots$  – множина сепарабельності процесу  $\xi(t)$ , при всіх цілих  $n > 1$  є стохастично еквівалентними в широкому розумінні. У випадку комплекснозначних періодичних процесів  $\xi(t)$  і  $\xi(t + T)$  вважається, що їх дійсні та уявні частини мають одну і ту ж послідовність скінченновимірних функцій розподілу.*

Нагадаємо, що два дійсних випадкових процеси  $\xi_1(t)$  і  $\xi_2(t), t \in (-\infty, \infty)$ , задані на одному і тому ж ймовірносному просторі називаються:

а) стохастично еквівалентними (в точному сенсі), якщо для будь-якого  $t \in (-\infty, \infty)$   $\mathbf{P}\{\xi_1(t) \neq \xi_2(t)\} = 0$ ;

б) стохастично еквівалентними в широкому розумінні, якщо ці процеси мають однакові послідовності скінченновимірних розподілів.

**Побудова моделі.** Модель будемо будувати виходячи із співвідношень між процесом  $\xi(t)$  і вкладеним до нього процесом  $\hat{\xi}(t)$ .

Введемо вектор

$$\Xi_n(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)), \quad (4.16)$$

де  $t \in (-\infty, \infty)$  або  $t \in (\overline{0}, \infty)$ , у якого всі компоненти стохастично незалежні. Тоді

$$\Xi_n(t) = (\xi(t + T), \xi(t + 2T), \dots, \xi(t + nT)) \quad (4.17)$$

вектор з незалежними компонентами.

Для стохастично-періодичного процесу вектори-колонки  $\Xi^{(n \times 1)}(t)$  та  $\Xi^{(n \times 1)}(t + kT)$  визначені згідно (4.14) і (4.15) є стохастично-еквівалентні,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , тобто кожна компонента першого з них є стохастично-еквівалентна відповідній компоненті другого.

Нехай  $t \in \mathbf{T}$ , і  $\mathbf{T}$ - неперевна множина. Припустимо, що на  $\mathbf{T}$  є розбиття виду

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m, \quad t_j \in \mathbf{T}, \quad j = \overline{0, m},$$

*Ступінчастою* - називають всяку функцію, яка приймає скінченне або зліченне число значень, а *простою функцією*, коли число значень скінченне. Зауважимо, що кусково-стала функція із скінченою кількістю ступеньок (точок) називається *простою* функцією.

За допомогою кусково-сталої функції можна записати яку завгодно суму чисел, якщо використати інтеграл Стілтєса або дельта-функцію.

### 4.3. Вінеровські випадкові процеси.

Дослідження різних фізичних явищ, наприклад, руху броунівської частинки, шумової напруги, що виникає в провіднику при тепловому русі носіїв заряду показали, багато явищ можна описати виходячи з єдиної математичної моделі, числові характеристики якої набувають той або інший конкретний фізичний зміст в залежності від досліджуваного явища.

Однією з таких математичних моделей може бути вінеровський процес, що є класичним прикладом випадкових процесів з незалежними приростами. З історії його відкриття й дослідження заслуговують на увагу наступні факти.

На початку XIX століття (1828 рік) англійський ботанік Роберт Броун (R. Brown) вивчаючи в рух мікроскопічної частинки в рідині, згодом названий його ім'ям, помітив, що її рух в результаті випадкових зіткнень із молекулами рідини, число яких при нормальних умовах досягає порядку  $10^{21}$  (зіткнень) у секунду, носить хаотичний характер.

У 1900 році Башельє, а потім у 1905 році А. Ейнштейн (A.Einstein) молодший і польський учений М. Смолуховський (M.Smoluchowski) встановили, що траєкторії броунівського руху частинки в часі описуються функціями, які можна розглядати як реалізації деякого випадкового процесу [8]. Н.Вінер (N.Wiener) побудував і докладно дослідив математичну модель такого випадкового процесу, що дозволила кількісно описати броунівський рух. Згодом ця модель знайшла широке поширення при описі гауссівських процесів і одержала назву "вінерівський процес". Значний внесок у побудову математичної моделі броунівського руху вніс П.Леві. Зустрічаються й інші назви розглянутого випадкового процесу, наприклад, процес Вінера-Леві або процес Башельє-Вінера [5], що менш уживані. По термінології П.Леві, вінерівський процес названий лінійним броунівським рухом, що належить до класу однорідних неперервних з ймовірністю 1 випадкових процесів з незалежними приростами [5].

Розрізняють вінерівський і стандартний вінерівський процеси.

**Означення.** Вінерівським випадковим процесом називають однорідний гауссів випадковий процес з незалежними приростами, якщо характеристична функція його приростів визначається виразом:

$$f(u_1; t_1, t_2) = \mathbf{M} \exp \{iu[\bar{w}(t_2) - \bar{w}(t_1)]\} = \exp \left[ iu(t_2 - t_1)a - \frac{\sigma^2 u^2}{2}(t_2 - t_1) \right] \quad (4.18)$$

Таким чином, прирости вінерівського процесу розподілені за законом Гаусса з параметрами  $\mathbf{N} \{a(t_2 - t_1), \sigma\sqrt{t_2 - t_1}\}$ , що зветься коефіцієнтом зносу і дифузії відповідно.

Частинним випадком вінерівського – є стандартний вінерівський випадковий процес.

**Означення.** Дійсний випадковий процес називається стандартним вінеровським процесом якщо він має наступні властивості:

1.  $\mathbf{P}[w(0)=0]=1$ ;

2. випадкова величина має гауссівський розподіл з параметрами  $\{0, \sqrt{t_2-t_1}\}$ , тобто з нульовим математичним сподіванням і дисперсією, рівною  $t_2-t_1$ ;

3. для будь-яких  $0=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  випадкові величини  $w(t_1)$ ,  $w(t_2)-w(t_1), \dots, w(t_n)-w(t_{n-1})$  взаємно незалежні.

Коротко – це процес  $\mathbf{N} \{0, \sqrt{t}\}$ .

**Означення.** Процес  $w^\circ(t) = w(t) - tw(1)$ ,  $t \in [0,1]$ , де  $w(t)$  стандартний вінеровський процес, називається броуновським мостом.

Ця назва походить з того, що в процесі  $w^\circ(t)$ ,  $t \in [0,1]$  закріплені (детерміновані) обидва кінці  $w^\circ(0) = w^\circ(1) = 0$ .

Зупинимося на деяких характеристиках стандартного вінеровського процесу.

На підставі властивостей 2) і 3) процесу  $w(t)$ , його початкові моменти дорівнюють центральним моментам і дисперсія

$$\mathbf{M}[w^2(t_n)] = t_n, \quad t_n \in [0, \infty), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Автокореляційна функція двох значень стандартного вінеровського процесу  $w(t)$  у моменти часу  $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ , при  $t_2 > t_1$

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \mathbf{M}[w(t_1)w(t_2)] = \mathbf{M}\{w(t_1)[w(t_2) - w(t_1) + w(t_1)]\} = \\ &= \mathbf{M}[w_1^2(t_1)] + \mathbf{M}\{w(t_1)[w(t_2) - w(t_1)]\} = \mathbf{M}[w^2(t_1)] \end{aligned}$$

і відповідно до властивостей 3)

$$R(t_1, t_2) = t_1.$$

Провівши аналогічні міркування для випадку  $t_2 < t_1$  одержимо

$$R(t_1, t_2) = t_2, \quad t_2 < t_1.$$

Отже

$$R(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{w(t_1)w(t_2)\} = \min(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1, & t_2 \geq t_1, \\ t_2, & t_2 \leq t_1, \end{cases} \quad (4.19)$$

а кореляційну матрицю для  $n$ -значень процесу  $w(t)$ , взятих у моменти часу  $t_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , з використанням (4.18) і незалежності приростів одержуємо у вигляді:

$$\|R\|_1^n = \begin{vmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 & \dots & t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 & \dots & t_2 & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_j & \dots & t_j & t_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_j & \dots & t_{n-1} & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_j & \dots & t_{n-1} & t_n \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.20)$$

Скінченновимірна щільність ймовірностей приростів стандартного вінеровського процесу  $w(t)$  для довільної розбивки часового інтервалу  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  з урахуванням властивостей 1) і 2) має такий вигляд:

$$p_{\Delta w}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n [2\pi(t_j - t_{j-1})]^{-0.5} \exp\left\{-\frac{x_j^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.21)$$

а скінченновимірна щільність ймовірностей значень процесу  $w(t)$  узятих у моменти часу  $t_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  гаусівська і записується у виді

$$p_w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n [2\pi(t_j - t_{j-1})]^{-0.5} \exp\left\{-\sum \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.22)$$

де  $x_0 = 0$ .

Скінченновимірна характеристична функція значень стандартного вінеровського процесу визначається з урахуванням (4.21) наступним виразом

$$f_w(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n R_{kj} u_k u_j\right], \quad n = 2, \dots,$$

де  $R_{kj}$  – відповідні елементи кореляційної матриці (4.20).

Справедливість формул для щільності розподілу приростів, для щільності розподілу  $w(t)$  і його характеристична функція легко встановлюється за допомогою методу математичної індукції.

Вінеровський процес може бути заданий на всій часовій вісі. Такий процес, як відзначалося наприкінці другої глави першого розділу, задовольняє умові  $P\{w(0)=0\}=1$  і його еволюція стохастично еквівалентна узятому з мінусом процесові заданому на позитивній піввісі щодо початкової точки  $t_0 = 0$ . Двовимірна характеристична функція такого вінеровського процесу  $\{w(t), t \in [0, \infty)\}$  має вигляд для довільних  $t_1$  і  $t_2 \in (-\infty, \infty)$

$$f_w(u_1, u_2; t_1, t_2) = \exp\left\{-\frac{u_1^2 |t_1| + u_2^2 |t_2| + 2u_1 u_2 \text{sign}(t_1 t_2) + \min(|t_1|, |t_2|)}{2}\right\} \quad (4.23)$$

Розглянемо деякі властивості реалізацій вінеровського випадкового процесу.

Як уже відзначалось вінеровський процес неперервний, з ймовірністю 1, а це значить, що його реалізації неперервні. Цей факт у ряді робіт, наприклад [47], сформульований і доведений у виді теореми. Зауважимо, що в загальному випадку на тому самому фіксованому ймовірнісному просторі, можна задати декілька (принаймні два) стохастично еквівалентних випадкових процеси, у тому числі і процес, реалізації якого вже не є неперервними функціями. Але, надалі ми будемо використовувати вінеровський випадковий процес з неперервними реалізаціями.

Незважаючи на те, що реалізації вінеровського процесу мають властивість неперервності, вони не диференційовні. З ймовірністю 1 не існує ні однієї точки, де реалізація  $w_\omega(t)$  вінеровського процесу  $w(t)$  мала б похідну. Це означає, що при будь-якому фіксованому  $t_1 \in [0, \infty)$  з ймовірністю 1

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{w_\omega(t) - w_\omega(t_1)}{t - t_1} = \begin{cases} +\infty & t < t_1, \\ -\infty & t > t_1. \end{cases}$$

Реалізації вінеровського процесу з ймовірністю 1 мають необмежену варіацію, що фізично можна інтерпретувати в такий спосіб: траєкторія кожної з реалізацій має нескінченну довжину на скінченному інтервалі часу.

Закон повторного логарифма установлює верхню і нижню границі для всіх реалізацій стандартного вінеровського процесу. Реалізації попадають у внутрішню область, утворену двома гілками кривої  $y = \pm \sqrt{2t \ln |\ln t|}$  при  $t \rightarrow 0$  і при  $t \rightarrow \infty$ . Локальний закон повторного логарифма встановлює співвідношення для  $w(t)$  поблизу  $t = 0$



$$\mathbf{P} \left\{ \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = -1 \right\} = 1, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1 \right\} = 1,$$

Які справедливі з ймовірністю 1 для всіх реалізацій процесу  $w(t)$ .

В іншому граничному випадку справедливі вирази

$$\mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right\} = 1, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \right\} = 1, \quad t \geq 0.$$

Для ілюстрації співвідношень (4.24) і (4.25), на мал. 4.8 зображена заштрихована область, у яку з ймовірністю 1 попадають реалізації процесу  $w(t)$ . Відзначимо, що зображені рис. 4.8 графіки носять чисто ілюстративний характер, але при цьому масштаби інших областей  $t$  і  $w(t)$  дотримувалися, причому  $t$  відкладено в логарифмічному масштабі.

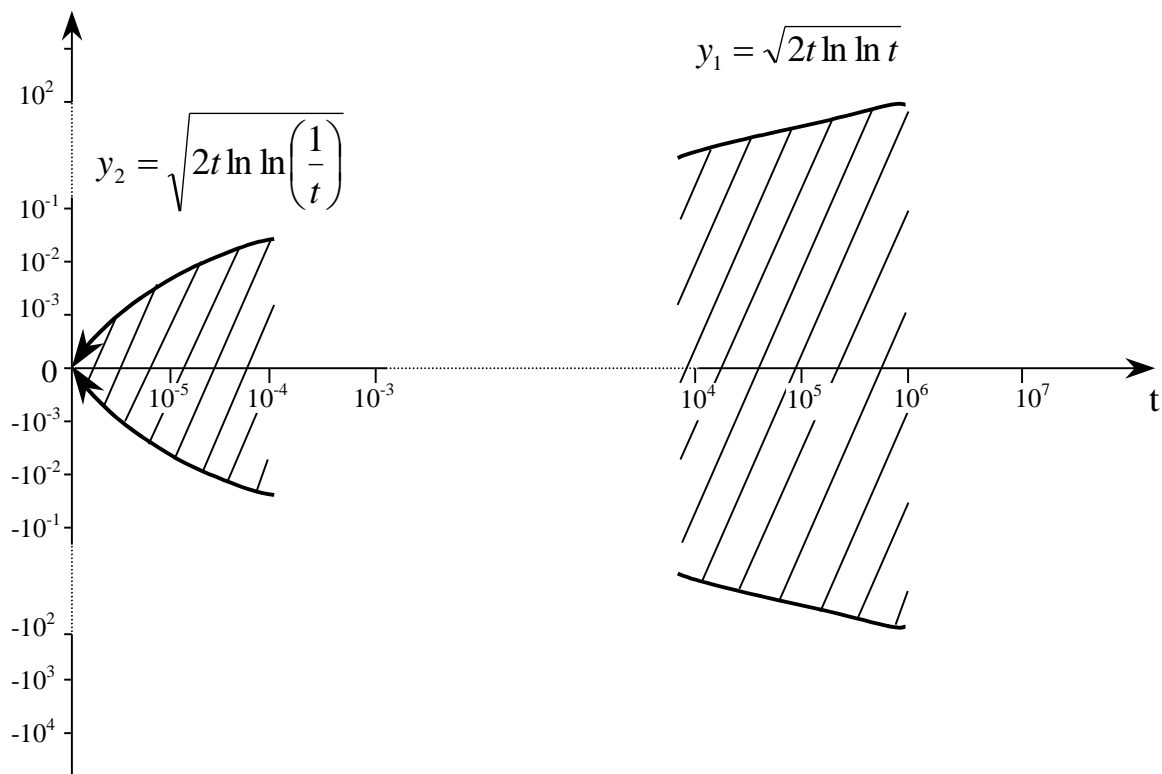


Рис. 4.8. Ілюстрація співвідношень (4.24) і (4.25).

Розглянемо приклади представлень вінеровського процесу, що мають цікаві властивості.

1. Нехай випадковий процес  $\{w_1(t), t \in [0,1]\}$  задається в такий спосіб
- 2.

$$w_1(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ tw\left(\frac{1}{t}\right), & 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

де  $w(t)$  – стандартний вінеровський процес.

Тоді кореляційна функція випадкового процесу  $w_1(t)$  дорівнює

$$R_1(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{w_1(t_1)w_1(t_2)\} = t_1 t_2 \min\left(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}\right) = \min(t_1, t_2), t_1 t_2 \in [0,1],$$

а його прирости на інтервалах часу, що неперетинаються незалежні і розподілені по гаусівському закону, тобто випадковий процес  $w_1(t)$  є теж вінеровським. За допомогою цього представлення легко установити, що з (4.19) відразу випливає (4.20) і навпаки.

2. Кореляційна функція випадкового процесу  $w_2(t) = \sigma w\left(\frac{t}{\sigma^2}\right)$ ,

де  $w(t)$  – стандартний вінеровський процес, що визначається виразом

$$R_2(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{w_2(t_1)w_2(t_2)\} = \sigma^2 \min\left(\frac{t_1}{\sigma^2}, \frac{t_2}{\sigma^2}\right) = \min(t_1, t_2), \quad (4.26)$$

тобто випадковий процес  $w_2(t)$  також вінеровський.

3. Вінеровський процес  $\{w_1(t), t \in [0,1]\}$  може розглядатися як функція в гільбертовому просторі  $L_2[0,1]$ , що допускає наступне канонічне представлення

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n \varphi_n(t),$$

де  $\{\zeta_n\}$  – послідовність незалежних гаусівських випадкових величин з параметрами

$$\mathbf{M}\{\zeta_n\} = 0, \quad \mathbf{M}\{\zeta_n^2\} = \left[\frac{\pi}{2}(2n+1)\right]^{-2},$$

а

$$\varphi_n(t) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)t\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

є власними функціями інтегрального оператора

$$\mathbf{B}\varphi(t) = \int_0^1 R(s,t)\varphi(s)ds,$$

де

$$R(s,t) = \min(s,t), \quad s,t \in [0,1].$$

Вінеровський процес  $\{w(t), w(0)=0, t \in [0, \infty)\}$  є однорідним марковським випадковим процесом, а також мартингалом щодо неперервно спадаючого породженого ним сімейства  $\sigma$ -алгебр  $\mathbf{B}_{\leq t}$ , так як, при  $0 \leq s \leq t$  одержуємо

$$\mathbf{M}\left\{\frac{w(t)}{\mathbf{B}_{\leq s}}\right\} = w(s) + \mathbf{M}\left\{\frac{w(t) - w(s)}{\mathbf{B}_{\leq s}}\right\} = w(s) + \mathbf{M}\{w(t) - w(s)\} = w(s),$$

що співпадає з визначенням мартингала як випадкового процесу  $\{w(t), w(0)=0, t \in [0, \infty)\}$  погодженого із сімейством  $\sigma$ -алгебр  $\mathbf{B}_{\leq t}$ .

Означення вінеровського процесу може бути узагальнене на випадок декількох змінних. Так, наприклад, дослідження плоского броунівського руху, як траєкторії рухливої точки на площині з координатами  $w_x(t)$  і  $w_y(t)$  що є незалежними одна від одної випадковими функціями лінійного броунівського руху. Результати аналізу багатопараметричного броунівського руху, як випадкового поля (випадкового поля Леві) приведені в роботах.

Наприкінці зупинимося коротко на фізичних явищах, які можна описати за допомогою вінеровського процесу. Відзначимо, що при відомому значенні  $\sigma^2$  рівному швидкості зміни дисперсії броунівського руху молекул газу, можна обчислити число Авогадро (кількість молекул газу в одному молі).

Звичайно, що на першому місці йде броунівський рух мікроскопічної частинки в рідині або газі. Графіки знятих експериментальним шляхом траєкторій руху частинки при броунівському русі, який можна розглядати як реалізації вінеровського процесу, приведені на рис. 4.9. Але як і будь-яка

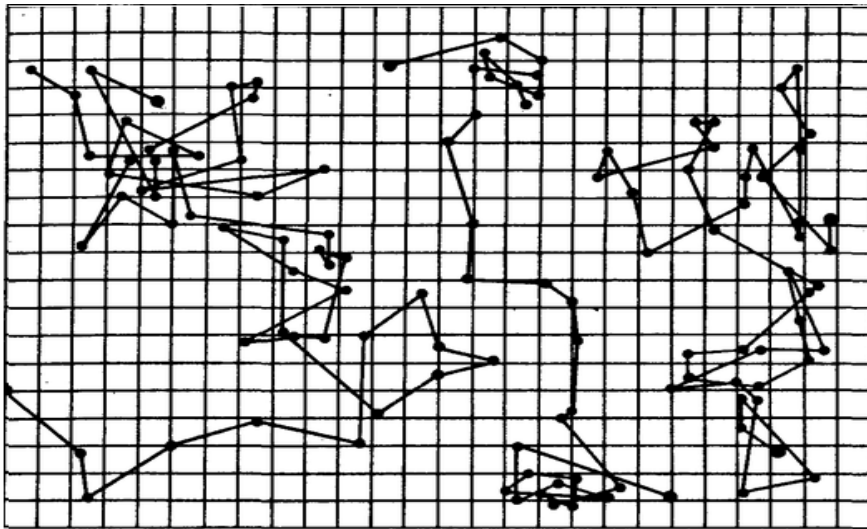


Рис.4.9. Реалізації вінеровського процесу

математична модель вінеровський процес описує лише основні властивості броунівського руху. Такий, наприклад, факт, як вільний пробіг, при якому частинка рухається прямолінійно і з постійною скінченою швидкістю, не вписується в цю модель. Хоча, до речі, Орнштейн Л.С. і Уленбек Дж. Э. розробили модель броунівського руху, у якій швидкості скінчені, а прискорень не існує.

У цілому можна сказати, що вінеровський процес задовільно описує реальний процес броунівського руху на деякому інтервалі часу.

Процес зростання або зменшення кількості тепла однорідного прямолінійного бруска нескінченно малого перетину, описуваний рівнянням теплопровідності, можна досліджувати ґрунтуючись на математичній моделі вінеровського процесу. При цьому, потік, що переносить визначену кількість тепла, представляється як переміщення деякого числа частинок (молекул). Кожна з яких рухається незалежно відносно іншої за законами броунівського руху. Спостерігається велика аналогія процесу передачі тепла й процесу дифузії. Якщо дивитися на дифундуючу речовину, як на речовину, що складається з великого числа частинок, кожна з яких знаходиться в броунівському русі, то тоді процес дифузії можна розглядати як мікроскопічний варіант броунівського руху.

#### 4.4. Пуассонівські випадкові процеси

В багатьох областях природничих наук, в техніці і економіці часто виникає необхідність статистичної обробки послідовності випадкових подій, які виникають в деякі моменти часу. Таку послідовність подій часто називають *випадковим потоком* (переважно в роботах по теорії масового обслуговування) або випадковим *точковим* процесом, так як реалізації такого процесу являють собою випадкову послідовність окремих точок на числовій вісі, в яких задані відмінні від нуля прирости значення функції у вказаних точках. Багато важливих результатів у теорії точкових процесів належать А.Я. Хінчину і Ю.К. Беляєву.

Точковий випадковий процес з незалежними приростами є окремим випадком точкових процесів. Він описує події, які відбуваються випадково, незалежно і послідовно в часі. Прикладами таких подій можуть бути процеси надходження листів, телефонних викликів, радіоактивного розпаду речовини, несправностей (збоїв) електронних пристроїв та інше.

Нехай в випадкові моменти часу відбуваються деякі однакові у ймовірнісному сенсі події. Якщо послідовність таких подій задовольняє умовам:

а) ймовірність  $p_n(\Delta t)$  того, що на інтервалі часу тривалості  $\Delta t$  відбудеться рівно  $n$  подій, залежить від  $\Delta t$  і  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , але не залежить від положення цього інтервалу на вісі часу (умова однорідності);

б) кількість подій, що відбуваються протягом інтервалів часу, які не перетинаються є незалежними випадковими величинами;

в) ймовірність того, що на малому інтервалі часу тривалості  $\Delta t$  відбудеться більше однієї події, є величина рівна  $o(\Delta t)$  (ця властивість називається ординарністю).

Тоді, така послідовність подій є однорідним простим пуассонівським випадковим процесом з незалежними приростами. [5, 8]. Наведемо коротке зведення позначень різновидів пуассонівських процесів у даній главі.

$\pi(t)$  – однорідний пуассонівський процес;

$\pi_\lambda(t)$  – неоднорідний пуассонівський процес;

$\pi_o(t)$  – складний пуассонівський процес;

$\pi^\circ(t)$  – пуассонівський міст.

**Пуассонівський процес (клас III).** Пуассонівський процес означається як випадковий процес з незалежними стаціонарними приростами, розподіленими за законом Пуассона.

Цілочисельний точковий процес  $\{\pi(t), 0 \leq t < \infty\}$  означається трьома властивостями [45].

В загальному випадку процес Пуассона  $\pi_\lambda(t)$   $t \in [0, \infty)$  визначається як процес з незалежними приростами, який має наступні властивості:

1)  $\mathbf{P}[\pi_\lambda(0) = 0] = 1$ ;

2) приріст  $\pi_\lambda(t_2) - \pi_\lambda(t_1)$ ,  $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ ,  $t_2 > t_1$  має розподіл Пуассона з

параметром  $\int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau) d\tau = \beta(t_2) - \beta(t_1)$ ,  $\lambda(0) \geq 0$ ,  $\tau \in [0, \infty)$ , (де  $\beta(t)$  – провідна функція

[16]) тобто

$$\mathbf{P}[\pi_\lambda(t_2) - \pi_\lambda(t_1) = n] = \frac{1}{n!} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau) d\tau \right]^n \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau) d\tau \right], \quad n = 1, 2, \dots; \quad (4.27)$$

3) для будь-яких  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  прирости

$\pi_\lambda(t_1) - \pi_\lambda(t_0)$ ,  $\pi_\lambda(t_2) - \pi_\lambda(t_1)$ , ...,  $\pi_\lambda(t_n) - \pi_\lambda(t_{n-1})$  взаємно незалежні.

Значення такого процесу є безмежно подільними випадковими величинами які мають розподіл ймовірностей залежний від  $t$  виду

$$\mathbf{P}\{\pi_\lambda(t) = k\} = \frac{\lambda^k(t)}{k!} \exp\{-\lambda(t)\}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

Якщо  $\lambda(t) = \lambda$  – постійна величина, то пуассонівський процес називається **однорідним**, а якщо  $\lambda$  – залежить від часу, то пуассоновський процес називають **неоднорідним**.

Очевидно, що пуассонівський процес є нестационарним процесом, бо завжди розподіл (4.27) залежить від часу.

Пуассонівський процес належить до класу безмежно подільних законів розподілу.

**Означення.** Функція розподілу  $F(x)$  називається безмежно подільною, якщо для кожного натурального  $n \geq 1$  вона може бути представлена у вигляді стілт'есівської згортки функцій розподілу  $F_1(x) \# F_2(x) \# \dots \# F_n(x)$  при умові, що  $F_1(x) \equiv F_2(x) \equiv \dots \equiv F_n(x)$ . Наприклад, згортка перших двох

$$F(x) = F_1(x) \# F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) dF_2(x-y).$$

Характеристична функція значень пуассонівського процесу  $\pi(t)$  у формі Леві записується у вигляді

$$f(u;t) = \mathbf{M}\{\exp[iu\pi(t)]\} = \exp[t\lambda(e^{iu} - 1)],$$

або

$$f(u;t) = \exp\left\{t\left[iu\frac{\lambda}{2}\right] + \int_0^{\infty}\left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right)dN(x)\right\}, \quad (4.29)$$

де  $\lambda > 0$ .

Математичне сподівання і дисперсія  $\pi(t)$  однакові і рівні  $\lambda t$ . Більше того семіінваріанти  $n$  – порядку пуассонівського процесу

$$\chi_n[\pi(t)] = \lambda t, \quad n = 1, 2, \dots .$$



Стала  $\lambda$  носить розмірність кількості стрибків в одиницю часу і тому вона називається інтенсивністю стрибків або просто інтенсивністю пуассонівського процесу.

Для процесу  $\pi(t)$  автокореляційна функція

$$R(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{\pi(t_1)\pi(t_2)\} - \lambda^2 t_1 t_2 = \begin{cases} \lambda t_1, & t_1 < t_2, \\ \lambda t_2, & t_2 \leq t_1. \end{cases}$$

Скінченновимірний розподіл ймовірностей значень пуассонівського процесу  $\pi(t)$  для довільного розбиття  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  з урахуванням (4.28) визначається наступним чином

$$\mathbf{P}[\pi(t_1) = k_1, \dots, \pi(t_n) = k_n] = \lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n} \prod_{j=1}^n \frac{(t_j - t_{j-1})^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $k_0 = 0, k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$  - цілі невід'ємні числа. Логарифм скінченновимірної характеристичної функції простого пуассонівського процесу для розбиття  $0 = t_0 < t_1, \dots, t_n$  визначається наступним чином

$$\begin{aligned} \ln f_\pi(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) &= \ln \prod_{j=1}^n \exp[\lambda(t_j - t_{j-1})(e^{i u_j} - 1)] = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \left[ \exp\left(i \sum_{k=j}^n u_k\right) - 1 \right] = \lambda \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \exp\left(i \sum_{k=j}^n u_k\right) - \lambda t_n. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Скінченновимірний розподіл приростів  $\pi(t_j) - \pi(t_{j-1})$  процесу  $\pi(t)$  згідно (4.27) на цьому ж розбитті визначається виразом

$$\mathbf{P}[\pi(t_j) - \pi(t_{j-1}) = k_j, j=1, 2, \dots, n] = e^{-\lambda t_n} \frac{\lambda^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \prod_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^{k_j}.$$

Пуассонівський процес можна розглядати на всій часовій вісі  $t \in (-\infty, \infty)$ , як це описано в попередньому розділі.

Пуассонівським мостом називається процес  $\pi^0(t), t \in [0, 1]$ , що визначається як

$$\pi^0(t) = \pi(t) - t\pi(1), \quad (4.31)$$

де  $\pi(t)$  - простий пуассонівський процес.

Цікава властивість пуассонівського процесу  $\pi(t)$  випливає з розгляду величини проміжку часу  $\tau \in [0, \infty)$  між двома сусідніми стрибками процесу  $\pi(t)$ . Якщо за час  $t$  не з'явиться жодного стрибка, то це еквівалентно тому, що  $\tau > t$ , а як показано раніше, ймовірність такої події

$$\mathbf{P}[\tau > t] = e^{-\lambda t}.$$

Тоді функція розподілу проміжку  $\tau$

$$F_\tau(t) = \mathbf{P}[\tau < t] = 1 - e^{-\lambda t},$$

а щільність ймовірності

$$p_\tau(t) = F'_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

У події, які мають функцію розподілу  $F_\tau(t)$ , можна вкладати різний фізичний зміст. Зокрема,  $F_\tau(t)$  характеризує розподіл ймовірності часу між

двома відмовами елементів в радіоелектронному приладі, розподіл терміну служби електричних лампочок і т.д.

Однорідний пуассонівський процес є марковським.

Розглянемо поведінку пуассонівського процесу  $\pi(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  і його реалізацій.

Процес  $\pi(t)$  при кожному  $t$  приймає лише цілочислові значення  $0, 1, 2, \dots$ , тобто він являє собою чисто стрибкоподібний процес зі стрибками, рівними одиниці. Проте, процес  $\pi(t)$  так як і розглянутий у попередній главі  $\tilde{\pi}(t)$ , є стохастично неперервним і ймовірність появи стрибка у наперед заданій точці  $t_j \in [0, \infty)$  дорівнює нулю.

Реалізації процесу  $\pi(t)$  на скінченному інтервалі часу неперервні всюди, за винятком скінченного числа точок, для яких існують скінченні границі справа і зліва. Реалізації являють собою монотонно неспадні ступінчаті функції, які зростають ізольованими стрибками на величину, рівну одиниці.

**Неоднорідний процес Пуассона.** Процес відмов  $\pi_\lambda(t)$  можна вважати неоднорідним пуассонівським з ведучою функцією  $\beta(t)$ .

Для нього, як видно з наведеного вище

$$\mathbf{P}\{\pi_\lambda(t) = n\} = \frac{1}{n!} \left[ \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]^n \exp \left[ - \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right] = \frac{\beta^n(t)}{n!} \exp[-\beta(t)].$$

При цьому логарифм характеристичної функції

$$\ln f(u; t) = \beta(t)(e^{iu} - 1),$$

а функція пуассонівського спектра стрибків у формулі Леві-Хінчина [13]

$$N(x,t) = \begin{cases} -\beta(t) & x \in (0,1); \\ 0 & x > 1. \end{cases} \quad (4.32)$$

В загальному випадку проміжок часу між двома сусідніми стрибками процесу  $\pi_\lambda(t)$  (функція надійності) визначається виразом

$$F(t) = \mathbf{P}\{\tau < t\} = [1 - e^{-\beta(t)}] I_{(0,\infty)}(t). \quad (4.33)$$

Більш детально це питання розглядається в [62].

**Кусково-однорідний процес Пуассона** В даній роботі вважається, що параметр  $\lambda$  – інтенсивність появи стрибків, є кусково-сталою функцією. Виходячи з цього припущення розглядатимемо  $n$  інтервалів часу на яких інтенсивність залишається незмінною, а моменти часу в яких інтенсивність стрибкоподібно змінюється позначимо через

$$T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-1}, \text{ де } n \in 2, 3, \dots \quad (4.34)$$

Значення інтенсивності між точками росту будемо позначати через

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n. \quad (4.35)$$

На рис. 4.9 наведена одна з можливих реалізацій кусково-однорідного процесу Пуассона,  $n = 2$ .

Припускаємо, що елементи послідовності (4.34) задані (будемо називати їх вузлами), а також повністю задана послідовність (4.35).

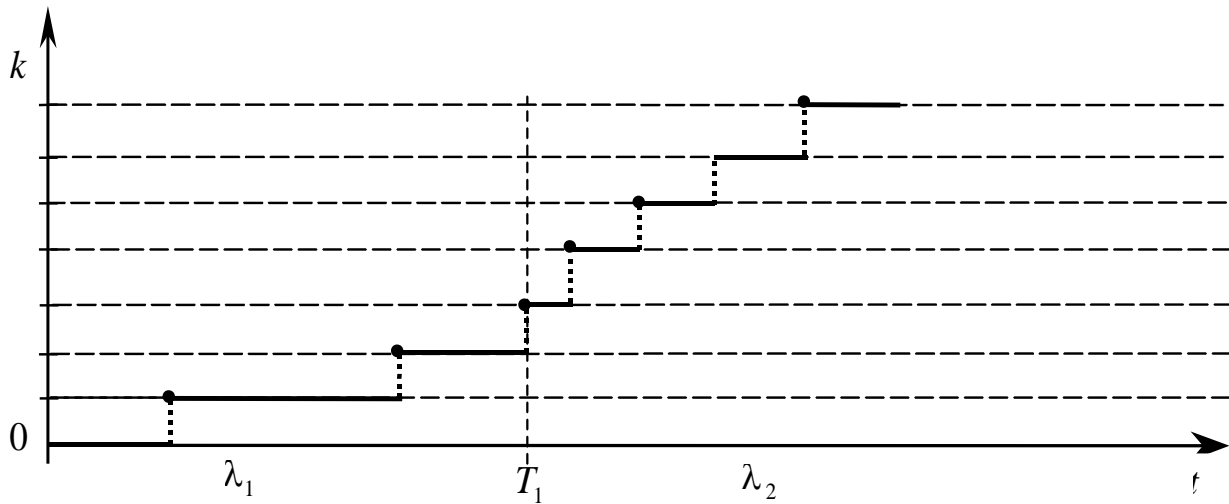


Рис. 4.9 Реалізація кусково-однорідного процесу Пуассона.

Розглянемо  $n$  – вимірний вектор

$$\Pi_n(t) = (\pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t), \dots, \pi_{\lambda_n}(t)), \quad (4.36)$$

компонентами якого є однорідні процеси Пуассона

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t), \dots, \pi_{\lambda_n}(t), \quad t \in [0, \infty), \\ \pi_{\lambda_1}(0) = \pi_{\lambda_2}(0) = \dots = \pi_{\lambda_n}(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

з розподілами ймовірностей

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\pi_{\lambda_1}(t) = k\} &= \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t}, \\ \mathbf{P}\{\pi_{\lambda_2}(t) = k\} &= \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

.....

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_n}(t) = k\} = \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} e^{-\lambda_n t}.$$

Позначимо через  $T = (T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$  вектор моментів розладки з

компонентами (4.34) (коли  $n=1$ , то беремо  $T=0$ ) і  $\Lambda_n = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$  – вектор інтенсивностей з компонентами (4.35). Тоді загальний процес розладки для кусково-однорідного процесу Пуассона можна записати так:

$$\pi_{\Lambda_n}(t) = \pi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)I_{(0, T_1]}(t) + \pi_{\lambda_2}(t)I_{(T_1, T_2]}(t) + \dots + \pi_{\lambda_n}(t)I_{(T_{n-1}, \infty)}(t). \quad (4.39)$$

$$\text{Його інтенсивність } \Lambda_n(t) = \sum_{r=1}^n \lambda_r(t)I_r[T_{r-1}, T_r), \quad n > 1.$$

Вважаємо, що в момент розладки  $\pi_{\lambda_1}(T_1) = \pi_{\lambda_2}(T_1)$ ,  $\pi_{\lambda_2}(T_2) = \pi_{\lambda_3}(T_2), \dots$ ,  $\pi_{\lambda_{n-1}}(T_n) = \pi_{\lambda_n}(T_{n-1})$  з ймовірністю, що дорівнює 1.

При  $n=1$ ,  $\pi_{\Lambda_1}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)$  є звичайним пуассонівським процесом, а при  $n > 1$  його не можна вважати однорідним, бо в нього параметр  $\lambda$  не є сталим на проміжку  $t \in [0, \infty)$ .

#### 4.5. Стаціонаризація кусково-однорідного процесу Пуассона

*Теорема. Нехай*

$$\Pi_n(t) = (\pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t), \dots, \pi_{\lambda_n}(t)), \quad t \in [0, \infty), \quad (4.40)$$

заданий  $n$ -вимірний вектор, компонентами якого є однорідні пуассонівські процеси (4.37) з розподілами ймовірностей виду (4.26) де  $T = (T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$  – вектор моментів стиковки інтервалів (точки розбиття всього відрізка на підінтервали) і  $\Lambda_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  – відповідний вектор інтенсивностей. Тоді всякий однорідний пуассонівський процес може бути представлений у вигляді кусково-однорідного, а саме:

$$\pi_{\Lambda_n}(t) = \pi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)I_{(0, T_1]}(t) + \pi_{\lambda_2}(t)I_{(T_1, T_2]}(t) + \dots + \pi_{\lambda_n}(t)I_{(T_{n-1}, \infty)}(t), \quad (4.41)$$

де  $I(\cdot)$  визначена згідно (4.1) індикаторна функція, в якій  $A_j, j=1, \dots, n$  – деяка послідовність множин моментів часу виду  $A_j = (T_{j-1}, T_j)$ ,  $T_0 = 0, T_n = \infty$ , а  $t$  – число, яке характеризує час, взятий як точка з множини  $A_j, j=1, \dots, n$ .

І навпаки, всякий кусково-однорідний процес виду (4.41) шляхом масштабування на інтервалах однорідності може бути зведений до однорідного пуассонівського процесу.

**Доведення** теореми стаціонаризації.

Нехай  $\pi_\lambda(t), t \in [0, \infty)$  – однорідний процес Пуассона незалежними приростами. Очевидно, що для нього  $n=1$ , а  $T=0$ .

Розбиваємо піввісь  $[0, \infty)$  довільним вузлом  $T_1 \in [0, \infty)$  і тоді маємо  $n=2$  (стає два відрізки). На одному з відрізків змінюємо масштаб часу з допомогою масштабного множника  $k_j$ . Тоді отримаємо  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  і  $\pi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)I_{(0, T_1]}(t) + \pi_{\lambda_2}(t)I_{(T_1, \infty)}(t)$ . Останній процес, очевидно, є кусково-однорідним. Для нього аналогічно при  $n=3, 4, \dots$  отримуємо нескінченну послідовність виразів виду (4.41), що й доводить першу частину теореми.

Обернена теорема доводиться аналогічно, якщо в послідовності (4.41) підібрати відповідним чином масштабні коефіцієнти.

Уточнення теореми стаціонаризації приростів КОП розкривають наведені нижче приклади.

Зауважимо, що компоненти вектора (4.40) є однорідними процесами з незалежними приростами і в загальному випадку не є стаціонарними випадковими процесами, а значить і вектор не є взагалі стаціонарним. Покажемо, що для такого процесу можна застосувати стаціонаризацію.

## **4.6. Методи стаціонаризації.**

### **4.6.1. Метод стаціонаризації за допомогою масштабних коефіцієнтів.**

Методи стаціонаризації з допомогою масштабних коефіцієнтів застосовуються в тих випадках, коли нестационарність (або неоднорідність) випадкового процесу,

що досліджується викликана деформацією шкали часу на певних інтервалах з часової області визначення самого процесу (кускова нестационарність або неоднорідність), або неперервно з відомим законом залежності від часу на певних часових відрізках досліджуваного процесу.

У випадку, коли масштаб часу змінюється лише на скінченному числі певних відрізків часу з області визначення процесу, то тоді про загальну картину змін масштабу зручно судити по коефіцієнтах пропорційності між всіма такими відрізками. Ці коефіцієнти пропорційності в роботі названі *масштабними коефіцієнтами* і позначаються як компоненти вектора  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ , де кожна компонента  $k_j$  - це безрозмірний коефіцієнт зміни масштабу шкали часу. При цьому за нову зведену одиницю масштабу шкали часу зручно брати яку завгодно компоненту вектора  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Будемо називати її зведеною і позначимо через  $k_{звед}$ , а вибір цієї одиниці будемо шукати серед компонент заданого вектора з використанням однієї з умов  $k_{звед} = \min_{j \in \{1, n\}} k_j$  або  $k_{звед} = \max_{j \in \{1, n\}} k_j$ , тоді всі компоненти вектора  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ , або не перевищують 1, або не менші ніж 1. Для визначеності та однозначності викладок далі будемо розглядати тільки випадок коли  $k_{звед} = \min_{j \in \{1, n\}} k_j$ .

**4.6.2. Неперервна зміна масштабного коефіцієнта.** Випадки, коли замість постійного вектора  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  масштабних коефіцієнтів розглядається заданий неперервно змінний з часом вектор  $K_n(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))$ , який вважається відомим. Наприклад, найчастіше такий випадок спостерігається, коли відома функціональна залежність від часу математичного сподівання чи дисперсії досліджуваного процесу, або зміни інтенсивності, наприклад, пуассонівського процесу, що буде більш детально розглянуто нижче.



*Стаціонаризація кусково-однорідного процесу Пуассона.* В даному випадку  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  вектор з сталими компонентами. Де  $k_j = \frac{\lambda_{звед.}}{\lambda_j}$ ,  $\lambda_{звед.}$  як вказувалося вище вибирають як  $\lambda_s$  з одного  $s$ -того інтервалу, як  $\lambda_{звед.} = \max_{j \in \{1, n\}} \lambda_j$  або  $\lambda_{звед.} = \min_{j \in \{1, n\}} \lambda_j$ . В результаті маємо відношення  $\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = k_1 : k_2 : \dots : k_n$  де  $k_1, \dots, k_n$  компоненти вектора  $K_n = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Для визначеності та однозначності викладок далі будемо розглядати тільки випадок коли  $\lambda_{звед.} = \min_{j \in \{1, n\}} \lambda_j$ .

Використовуючи масштабні множники в залежності від вибору  $\lambda_{звед.}$  будемо мати і відповідні йому варіанти стаціонаризованого однорідного пуасонівського процесу у вигляді

$$\pi_{\lambda_{звед.}}(t) = \pi_{\lambda_1}(k_1 t) I_{(0, T_1)}(t) + \pi_{\lambda_2}(k_2 t) I_{(T_1, T_2)}(t) + \dots + \pi_{\lambda_n}(k_n t) I_{(T_{n-1}, \infty)}(t). \quad (4.42)$$

Найчастіше зустрічаються приклади двох і трьох відрізків. Наведемо їх.

*Приклади.*

1. Маємо діагностичний сигнал виду (4.36).

При  $n = 2$  задано вектор інтенсивності  $\Lambda_2 = (\lambda_1, \lambda_2)$ . Нехай виконується умова, що  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Згідно (4.40)

$$\Pi_2(t) = (\pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t)), \quad \pi_{\lambda_1}(0) = \pi_{\lambda_2}(0) = 0, \quad t \in [0, \infty).$$

Так як  $n = 2$ , то маємо одну точку стиковки інтервалів  $T = (T_1)$ .

Треба побудувати стаціонаризований (однорідний) процес Пуассона виду (4.42) для якого інтенсивність на всьому інтервалі спостереження залишається уже незмінною.

Розподіли ймовірностей на інтервалах однорідності

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_1}(t) = k\} = \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t},$$

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_2}(t) = k\} = \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t}.$$

Тоді, згідно (4.41)

$$\pi_{\Lambda_2}(t) = \pi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)I_{(0, T_1]}(t) + \pi_{\lambda_2}(t)I_{(T_1, \infty)}(t).$$

Вектор масштабних множників в цьому випадку  $K_2 = (k_1, k_2)$ , де для визначеності взято  $k_1 = 1$  має вид

$$K_2 = \left(1, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right). \quad (4.43)$$

В цьому випадку маємо  $\lambda_{\text{звезд}} = \lambda_1$ .

Згідно (4.40)

$$\pi_{\lambda_{\text{звезд}}}(t) = \begin{cases} \pi_{\lambda_1}(t), & \text{при } t \in [0, T_1]; \\ \pi_{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}(t), & \text{при } t \in (T_1, \infty). \end{cases}$$

На інтервалі  $(T_1, \infty)$   $t$  береться за іншою шкалою часу.

Функція розподілу довжин інтервалів часу між сусідніми стрибками кусково-стаціонарного процесу Пуассона визначається за наступною формулою [63]:

$$F(t; \lambda_1, \lambda_2, T) = [1 - \exp(-\lambda_1 t)]I_{(0, T]}(t) + \{[1 - \exp(-\lambda_2(t - T))]\exp(-\lambda_1 T) + \dots + (1 - \exp(-\lambda_1 T))\}I_{(T, \infty)}(t). \quad (4.44)$$

Щоб побудувати стаціонаризовану модифікацію процесу (4.44) необхідно скористатися масштабними коефіцієнтами (4.43). З їх допомогою відбувається

деформація часу на одному з інтервалів однорідності, в даному випадку на другому інтервалі. В результаті отримуємо стаціонаризований процес Пуассона.

$$F(t; \lambda_1, \lambda_2, T) = [1 - \exp(-\lambda_1 k_1 t)] I_{(0, T]}(t) + \left[ [1 - \exp(-\lambda_2 (k_2 t - T))] \exp(-\lambda_1 T) + \dots + (1 - \exp(-\lambda_1 T)) \right] I_{(T, \infty)}(t). \quad (4.45)$$

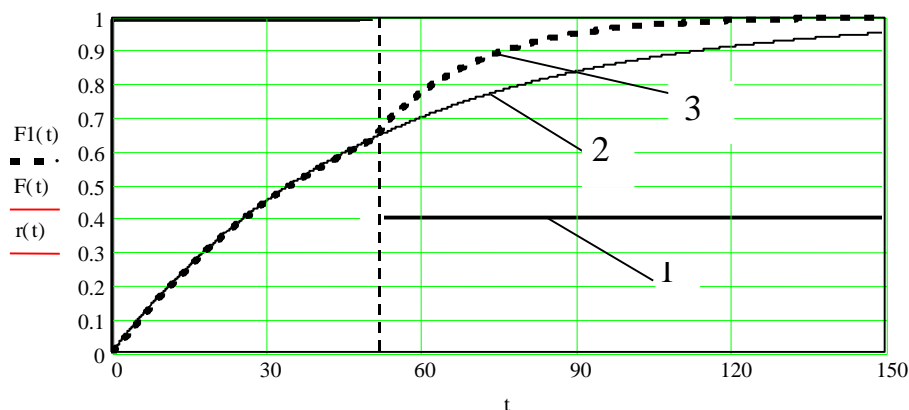
Функція сплайн-розподілу має всі властивості звичайної функції розподілу, тому на них зупинятися не будемо. Глибше з особливостями побудови сплайн-функцій розподілу для цього випадку можна ознайомитися в роботі [63].

Для більшої наглядності прикладу наведемо заключний фрагмент програми з числовими даними та відповідні графіки.

$$\lambda_1 = 0.02, \lambda_2 = 0.05, T = 50.$$

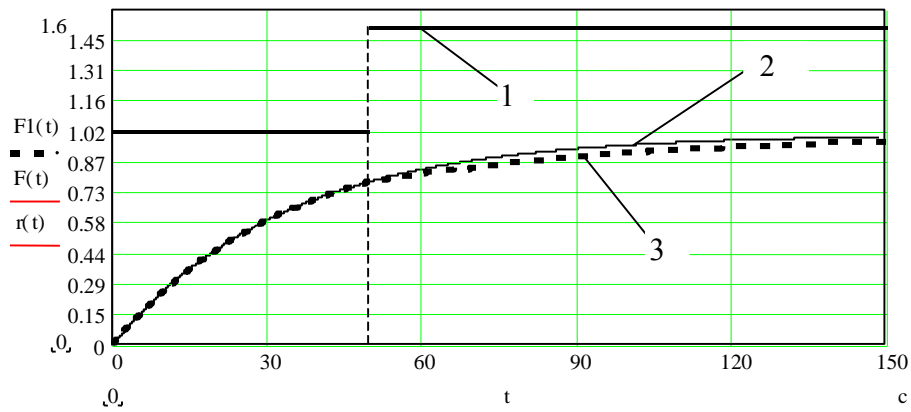
$$F1(t) := (1 - e^{-\lambda_1 \cdot t}) \cdot UP(t, 0, T) + \left[ [1 - e^{-\lambda_2 \cdot (t - T)}] \cdot e^{-\lambda_1 \cdot T} + (1 - e^{-\lambda_1 T}) \right] \cdot U(t, T, c)$$

$$F(t) := (1 - e^{-\lambda_1 \cdot t1(t)}) \cdot UP(t, 0, T) + \left[ [1 - e^{-\lambda_2 \cdot (t2(t - T))}] \cdot e^{-\lambda_1 \cdot T} + (1 - e^{-\lambda_1 T}) \right] \cdot U(t, T, c)$$



- 1 – значення масштабного множника на інтервалах однорідності;
- 2 – функція розподілу стаціонаризованого процесу Пуассона;
- 3 – функція розподілу довжин інтервалів часу між стрибками кусково-однорідного процесу Пуассона при  $\lambda_1 = 0.02, \lambda_2 = 0.05, T = 50$ .

Рис 4.8 Графіки функцій розподілу для випадку  $\lambda_1 < \lambda_2$ .



- 1 – значення масштабного множника на інтервалах однорідності;  
 2 – функція розподілу стаціонаризованого процесу Пуассона;  
 3 – функція розподілу довжин інтервалів часу між стрибками кусково-однорідного процесу Пуассона при  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.02$ ,  $T = 50$ .

Рис 4.9 Графіки функцій розподілу для випадку  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

2. При  $n = 3$ , задано вектор інтенсивностей  $\Lambda_3 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , згідно (4.40) маємо

$$\Pi_3(t) = (\pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t), \pi_{\lambda_3}(t)), \quad t \in [0, \infty).$$

$$\pi_{\lambda_1}(0) = \pi_{\lambda_2}(0) = \pi_{\lambda_3}(0) = 0.$$

Розподіли ймовірностей на інтервалах

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_1}(t) = k\} = \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t},$$

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_2}(t) = k\} = \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t},$$

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_3}(t) = k\} = \frac{(\lambda_3 t)^k}{k!} e^{-\lambda_3 t}.$$

Так як  $n = 3$ , то маємо дві точки стиковки інтервалів.

Тоді

$$\pi_{\Lambda_3}(t) = \pi_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(t) = \pi_{\lambda_1}(t)I_{(0, t_1]}(t) + \pi_{\lambda_2}(t)I_{(t_1, t_2]}(t) + \pi_{\lambda_3}(t)I_{(t_2, \infty)}(t).$$

Детально зупинятися на цьому випадку не будемо, оскільки алгоритм побудови функцій розподілу процесів типу (4.39) подібний і описаний в роботі [63].

Пуассонівський випадковий процес є представником процесів з незалежними приростами. З допомогою процесу Пуассона описують реальні імпульсні процеси, реалізації яких змінюються стрибкоподібно. Процес Пуассона займає ключове місце в задачах теорії масового обслуговування та теорії надійності. Він належить до класу безмежноподільних законів розподілу, за допомогою якого можна описати реальні фізичні явища.

## РОЗДІЛ 5. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕАЛІЗАЦІЙ КУСКОВО-СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

Цей розділ присвячений імітаційному моделюванню деяких класів процесів які допускають застосування при їх статистичній обробці класичних методів і дозволяють застосовувати до їх модифікацій класичні ергодичні теореми. В ньому наведено основні обчислювальні процедури та алгоритми, що використовувалися автором при проведенні імітаційного моделювання з метою перевірки шляхом статистичного експерименту запропонованої математичної моделі кусково-однорідного процесу Пуассона та методики стаціонаризації його приростів. У додатках вміщено тексти програм, реалізованих в середовищі Machcad, які дозволяють отримувати масиви даних необхідних для статистичних випробувань.

### 5.1. Сутність методів моделювання і область його застосування.

При розв'язуванні багатьох конкретних задач у різноманітних галузях науки і техніки часто зустрічаються випадки, коли аналітичний розв'язок задачі через значні математичні труднощі практично неможливий, а проведення експериментальних досліджень і натурних випробувань потребує дуже великих затрат часу і засобів або ж виключено з інших причин. Одним з ефективних заходів по подоланню цих труднощів є застосування в дослідженнях сучасних швидкодіючих електронних обчислювальних машин (ЕОМ) для моделювання явищ, що досліджуються. Задача моделювання різних систем (радіотехнічних, механічних, економічних і ін.) формулюється як задача розробки алгоритмів, які за відомими характеристиками систем, наприклад, операторами або характеристиками нелінійностей окремих ланок, дозволяють точно або з допустимою похибкою перетворювати на ЕОМ дискретні реалізації відповідних вхідних сигналів систем, що моделюються. Ці алгоритми називаються *цифровими моделями систем*.

Теоретична модель – це сукупність знань, припущень та гіпотез, побудованих у вигляді цілісної, логічно витриманої структури і формульованих у термінах та символах, що притаманні даній науці і є необхідними для

розв'язання цілого класу конкретних задач. Такі задачі пов'язані з об'єктом, для якого і побудована сама модель.

Слово “модель” використовується в научному тексті у поєднанні з назвою об'єкта, до якого ця модель відноситься: наприклад, модель явища, модель прилада чи системи, модель випадкового процесу.

Крім того поняття “модель” часто супроводжується уточнюючими означеннями, що характеризують її суть, різновид, значення, спосіб побудови тощо: наприклад, математична, фізична, якісна або кількісна, аксіоматична модель.

Іншими словами під моделюванням розуміють спосіб вивчення системи (моделі) шляхом її заміни для експериментального дослідження більш зручною, такою, що зберігає суттєві ознаки оригіналу і дозволяє проводити випробування моделі методом проб. На рис.5.1 наводиться наочна картина взаємозв'язку об'єктів при моделюванні. Надалі нас, в основному, будуть цікавити так звані імітаційні моделі та теоретичні математичні моделі.

Розрізняють два основних види імітаційних моделей.

*Детермінована модель* - це аналітичне представлення закономірностей системи, при якому для певного фіксованого комплексу початкових умов і множини вхідних детермінованих значень отримують на виході завжди один і той же не випадковий результат, тобто є повна повторюваність отримуваних результатів моделювання.

*Стохастичною (недетермінованою)* є така модель, в якій функціонування окремих її елементів або вхідні значення залежать від випадкових параметрів, тобто описуються ймовірнісними законами (наприклад функціями розподілу випадкових величин, векторів, процесів і ін.). Результат функціонування такої моделі можна передбачити лише у ймовірністному сенсі, тобто використовуючи ті чи інші усереднені характеристики або приймаючи стохастичні рішення.

*Економічне моделювання* визначає залежність економічного показника, що досліджується (максимальний прибуток, мінімальні витрати) від різноманітних економічних факторів.

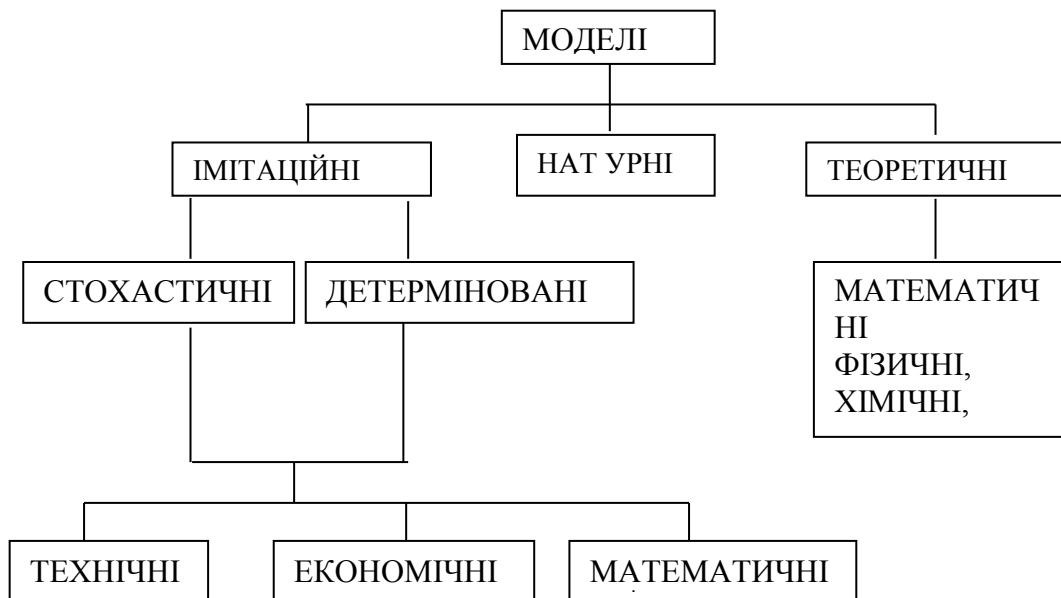


Рис. 5.1. Взаємозв'язок об'єктів при моделюванні

*Технічне моделювання* дозволяє виявити недоліки існуючих систем або систем, що проектуються і знайти шляхи для їхнього виправлення або оцінювання ефективності їх функціонування. Технічне моделювання через складність конструктивного виконання моделей і реальних умов їх роботи значно поступається математичному моделюванню, яке є більш гнучким, ефективним і перспективним.

Від інших моделей *математичні* відрізняються тим, що засобом опису моделей і вивченням їх поведінки є формально-логічний апарат математики. Звідси випливає важлива перевага – можливість кількісного аналізу моделей за допомогою сучасних математичних методів. Важливою перевагою математичних моделей є можливість використання одних і тих же моделей для дослідження різних споріднених систем.



За допомогою математичних моделей можна отримати результати, що відносяться не до окремої конкретної реалізації, яка відповідає певним початковим даним і фіксованим значенням параметрів системи, що досліджується, а до множини можливих поведінок системи.

Модель чи сукупність моделей, що описують дане явище або систему, разом із засобами аналізу їх поведінки утворюють *імітаційну систему*.

На завершення цього розділу слід відмітити, що при математичному моделюванні ключовим моментом всіх методів є етап отримання псевдовипадкових чисел. Від глибини теоретичного обґрунтування цього питання в значній мірі залежить якість та точність побудованих математичних моделей. Тому найближчі наступні розділи роботи якраз і присвячуються висвітленню цього питання.

**Методи отримання псевдовипадкових чисел.** Випадковими числами зводяться цифри, які отримані в результаті повторного незалежного вибору будь-якої цифри з сукупності  $\{0,1,2,\dots,9\}$  з рівною ймовірністю ( $p = 0,1$ ).

На практиці це можна здійснити за допомогою урни, у якій знаходиться 10 кульок, на кожній з яких позначена одна з вказаних цифр. Навмання вибирається куля, записується нанесена на ній цифра, куля повертається в урну, все перемішується і експеримент повторюється далі стільки разів, скільки потрібно отримати цифр для запланованого випадкового числа. Таким чином, будь-яка група з отриманих таким чином  $n$  цифр називається псевдовипадковими числами або просто випадковими числами.

Однак використання готових випадкових чисел в обчислювальних машинах пов'язане з потребою значного розширення пам'яті. Тому при моделюванні виникає необхідність їх отримання детермінованим шляхом. Числа, отримані таким чином зводяться псевдовипадковими числами. Якість псевдовипадкових чисел в сукупності визначається перевіркою їх за допомогою набору статистичних методів, які використовують різні статистичні критерії. Метою такої перевірки є виявлення властивостей псевдовипадкових чисел, відмінних від властивостей випадкових чисел.

Моделювання випадкових явищ і процесів на ЕОМ має назву статистичного моделювання (метод Монте-Карло). Основною його перевагою у порівнянні з іншими методами моделювання є можливість вирішення задач виняткової складності:

- досліджувана система може містити елементи неперервної і дискретної дії;
- знаходитись під впливом численних випадкових факторів складної природи;
- описуватися дуже громіздкими співвідношеннями і т.д.

Поряд із відзначеними перевагами метод статистичного моделювання, як будь-який чисельний метод, має істотний недолік: результат завжди носить випадковий характер. Він відповідає фіксованим значенням параметрів системи і початковим умовам. Як правило для аналізу системи необхідно багаторазово моделювати її процес функціонування, варіюючи вихідні дані задачі.

Успіх обчислень методом Монте-Карло на ЕОМ визначають два основних фактори:

- а) якість джерела випадкових чисел;
- б) вибір раціонального алгоритму обчислення.

Питання про вибір методу одержання випадкових чисел є першорядним, тому що від його успішного розв'язання багато в чому залежить успіх вирішення всієї задачі.

Для моделювання будь-якого наперед заданого випадкового процесу необхідно вміти достатньо економічно будувати послідовності випадкових чисел, що відповідають деяким фіксованим законам розподілу. Для того, щоб одержати значення випадкової величини за даним законом розподілу, звичайно використовують послідовність значень рівномірно розподілених випадкових чисел (РРЧ).

Один з основних способів одержання РРЧ полягає в наступному. Випадкові числа утворюються в ЕОМ програмним засобом за допомогою

деякого рекуррентного співвідношення. Це означає, що кожне наступне число утворюється з попереднього (або групи попередніх чисел) шляхом застосування деякого алгоритму, який складається з арифметичних і логічних операцій. Така послідовність чисел, хоч і не є випадковою, проте може задовольняти різноманітним статистичним критеріям випадковості. Тому такі числа називаються псевдовипадковими.

До основних переваг програмного способу одержання псевдовипадкових чисел відноситься можливість контролю роботи ЕОМ у процесі розв'язування задачі, можливість проведення повторної лічби, а також простота алгоритму одержання псевдовипадкового числа.

Головним недоліком псевдовипадкових чисел є складність теоретичної оцінки їхніх статистичних властивостей. Крім цього, усі вироблені програмним засобом послідовності псевдовипадкових чисел є періодичними. А саме, перші  $L$  послідовно отриманих псевдовипадкових чисел, будуть усі мати різні значення, а  $(L + 1)$ -е псевдовипадкове число співпадає з першим із  $L$  чисел і т.д. Число  $L$  називають довжиною періоду. Величина періоду  $L$  залежить від розрядності слова ЕОМ і способу формування псевдовипадкової послідовності.

Існує багато різноманітних методів генерації послідовностей чисел із рівномірним законом розподілу.

Практика показала, що найбільш придатним для отримання псевдовипадкових чисел з допомогою ЕОМ є *конгруентний метод*, який базується на рекуррентному алгоритмі в основі якого лежать так звані порівняння (конгруенція).

Бінарне відношення  $\varepsilon$  на множині  $A$  називається відношенням еквівалентності, якщо воно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Конгруенція (порівняння) – це бінарне співвідношення між двома числами  $a$  та  $b$  за модулем  $m$ , яке записується у вигляді  $a \equiv b \pmod{m}$ . Читається  $a$  порівняно з  $b$  за модулем  $m$  і означає, що при діленні  $a$  на  $m$ ,  $b$  є залишком від ділення.

Тому співвідношення  $x \equiv (\text{mod } m)$  розбиває масив всіх цілих чисел на класи еквівалентності. Ці класи називають “класами лишків по модулю  $m$ ”. Кожне ціле число є порівняним по модулю  $m$  лише з одним із цілих чисел  $0, 1, \dots, m-1$ , які лежать в різних класах, тому існує в точності  $m$  класів лишків по модулю  $m$ .

Класи лишків по модулю  $m$  утворюють кільце відносно операцій: додавання, віднімання, множення.

Через  $\{r\}_m$  позначимо множину всіх чисел, при діленні яких на  $m$  отримаємо залишок  $r$ .

**Приклад.** Нехай потрібно обчислити  $23(\text{mod } 7)$ . Ділим 23 на 7 і знаходимо  $k$  - ціле число від ділення, тобто  $k = \left\lfloor \frac{23}{7} \right\rfloor = 3$ , де  $\lfloor \cdot \rfloor$  означає "ціла частина". Потім, віднімаємо від 23 добуток  $3 \times 7$ , одержуємо шуканий результат, тобто  $23(\text{mod } 7) = 23 - 21 = 2$ .

У даній роботі будуть викладені три алгоритми конгруентних методів моделювання РРЧ. Один із перших полягає у тому, що коли  $\{\xi_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , - послідовність псевдовипадкових чисел, що ми хочемо побудувати, то чергове випадкове число  $\xi_n$  одержують із попереднього числа  $\{\xi_{n-1}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\xi_0 = 1$  - послідовність псевдовипадкових чисел із використанням такого правила

$$\xi_{n+1} = [c\xi_n + b](\text{mod } p), \quad (5.1)$$

де  $c$  - відповідним чином вибрана константа, а запис  $\text{mod } p$  означає взяття по модулю  $p$  числа  $c\xi_i + b$ , причому  $p$  - просте або степінь простого, а  $b$  - взаємно просте з  $p$  число. Таким чином,  $\xi_i$  дорівнює залишку від ділення

$c\xi_{i-1} + b$  на  $p$ . Якщо вибрати  $c = \sqrt{p}$ , то кореляція між сусідніми значеннями

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{p}}. \text{ Вибирають } c = 10^{\delta+1}, \delta = 1, 2, \dots$$

Вибір  $c$  визначається можливостями машини і прийнятою системою числення,  $b$  вибирається з урахуванням наступних вимог:

- 1) отримана послідовність  $\{\xi_n\}$  повина мати бажані статистичні властивості випадкових чисел,
- 2) період послідовності має бути якомога довшим,
- 3) швидкість утворення повина бути великою. Величини  $p$  і  $b$  потрібно вибирати таким чином, щоб кореляція між числами була близькою до нуля.



Рис. 5.2. Структурна схема рекурентного алгоритму формування масиву псевдовипадкових чисел.

Послідовність, утворена мультиплікативним конгруентним методом, буде мати повний період  $L$  чисел, якщо

- 1)  $L$  і  $b$  взаємно прості;
- 2)  $a = 1 \pmod{p}$ , якщо  $p$  є простим множником  $L$ ;
- 3)  $a = 1 \pmod{4}$ , якщо  $4$  є множником  $L$ .

Отже, якщо  $L = 2^q$ , то  $b$  має бути непарним і  $a = 1(\text{mod } 4)$ .  
 Якщо  $L = 10^q$ , то  $b$  не повинно ділитися ні на 2, ні на 5 і  $a = 1(\text{mod } 20)$ .

Поставимо задачу формування масиву із РРЧ обсягу  $N$  конгруентним методом, що використовує вираз (5.1). Структурна схема моделюючого алгоритму зображена на рис.5.2.

**Приклад.** Отримання псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених на  $(0,1)$ , методом лишків (конгруентний метод), наприклад, таким чином

$$u_0 = 1, \quad u_n = u_{n-1} 5^{2p+1} (\text{mod } 2^m), \quad \xi_n = u_n 2^{-m}.$$

Тут  $m$  – число розрядів мантиси ЕОМ  $m=8$  або  $16$ .

$$p = \max \{ q : 5^{2p+1} < 2^m \} .$$

$$p = ]0,5(m / \log_2 5 - 1)[, \quad (2q + 1) \log_2 5 < m, \quad 2q < m / \log_2 5 - 1$$

Довжина періоду для вказаного варіанту методу лишків дорівнює  $L = 2^{m-2}$ .

**Методи аналізу якості.** Для перевірки "стохастичних параметрів" послідовностей рівномірно розподілених випадкових чисел можуть використовуватися різноманітні ознаки. Наприклад, при використанні частотного критерію за варіаційним рядом береться  $N$  випадкових чисел і підраховується кількість  $r$  чисел, що лежать між числами  $0,2113$  і  $0,7887$ , тобто розташовуються в межах  $(m \pm \sigma)$  (при  $m = 1/2$ ). Якщо відношення  $r/N$  близьке до  $0,5774$ , то приймається, що випадкові числа розподілені рівномірно. Інший наближений спосіб перевірки рівномірності  $N$  випадкових чисел полягає у обчисленні оцінок математичного сподівання і другого центрального моменту ( дисперсії ). Відповідно до цього критерію випадкові числа розподілені рівномірно, якщо

$$\nu_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \approx \frac{1}{2}; \quad \mu_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i - \nu_1)^2 \approx 0.083.$$

Значення оцінок матем. сподівання  $\nu_1$  і дисперсії  $\mu_2$  по РРЧ обчислюються при роботі основної програми.

Існують і інші ознаки "стохастичності" рівномірно розподілених чисел. Таким є критерій, що оцінює степінь нерівномірності гістограми, який розглядається нижче.

*Гістограма* є статистичним аналогом щільності розподілу ймовірностей і так само, як і остання, характеризує степінь концентрації випадкових чисел в околі вибраного значення.

При побудові гістограми візьмемо до уваги, що послідовності випадкових чисел, що моделюються розташовуються в інтервалі від 0 до 1. Ці числа ми і приймемо як границі діапазону, в якому розташовані значення випадкової величини. Цей діапазон (ділянка від 0 до 1) розбивається на  $n$  однакових інтервалів і підраховується кількість випадкових чисел  $k_i$ , що потрапили в  $i$ -й інтервал. Величина

$$p_i^* = \frac{k_i}{N},$$

де  $N$  - обсяг вибірки (загальна кількість випадкових чисел), називається частотою або статистичною оцінкою ймовірності попадання значень випадкової величини в  $i$ -й інтервал розбиття всього інтервалу значень на  $n$  частин.

В ідеальному випадку, коли генератор (програмний давач) РРЧ "досить гарний", теоретичні ймовірності  $p_i$  попадання значень випадкової величини в  $i$ -й інтервал дорівнюють

$$p_i = \frac{1}{n},$$

що можливо лише у граничному випадку, при  $N \rightarrow \infty$ .

Позначимо через

$$u = \sum_{i=1}^n (p_i^* - p_i)^2 .$$

Сума  $u$  квадратів відхилень частот від теоретичних ймовірностей при фіксованому  $n$  може служити критерієм, що дозволяє оцінити степінь нерівномірності гістограми (чим більше  $u$ , тим нижче якість генератора рівномірно розподілених чисел).

## 5.2. Особливості імітаційного моделювання реалізацій процесу

Математична модель інформаційного сигналу являє собою сукупність знань про досліджуваний об'єкт, а також припущень і гіпотез, висунутих відносно нього, об'єднаних у цілісну, логічно витриману формальну структуру, необхідну для розв'язування певного класу конкретних задач. Формальний характер математичної моделі дає можливість синтезу, на основі відображених у ній закономірностей, деякого технічного чи фізичного об'єкту, який би імітував поведінку або функціонування реального об'єкту.

Зрозуміло, що коли імітаційна модель є практично достатньою для опису досліджуваного об'єкту і формулювання задач, для розв'язування яких цей об'єкт вивчається, то це суттєво спрощує проведення самих досліджень і дозволяє отримувати більш глибокі результати. Найбільш очевидним це є в тих областях, наукового і технічного плану де проведення експериментів пов'язане з великими економічними, часовими, технічними затратами, зокрема в теорії надійності. Це можна пояснити тим, що вже на етапі проектування можна мати деяку інформацію про майбутній виріб і про умови його експлуатації, а також припущення стосовно статистичних характеристик часу безвідмовної роботи. Подібна апріорна інформація та інформація про окремі вузли, що вже мають визначені показники надійності і становить основу для створення математичної моделі функціонування майбутнього виробу. Подібна інформація знаходить застосування у функціональних блоках ІВС діагностики та пакетах прикладних



програм, що розробляються у відповідності до апріорної інформації результатів імітаційного моделювання.

Імітаційні моделі сигналів використовуються для тестування технічних систем, в задачах прогнозування, у різноманітних навчальних системах у тренажерах для диспетчерів станцій енергопостачання та ін.

Імітаційне моделювання випадкових процесів здійснюється в рамках загального підходу, відомого як метод статистичних випробувань або метод Монте-Карло [64]. Відомо, що метод статистичних випробувань базується на теоремі А.М. Колмогорова, суть якої полягає в наступному. *Для того щоб середнє арифметичне незалежних реалізацій випадкової величини збігалось з її математичним сподіванням необхідно і достатньо існування такого математичного сподівання.*

Найбільш ефективним інструментом для імітаційного моделювання випадкових процесів є використання обчислювальної техніки, зокрема, персональних ЕОМ. Завдяки дискретному характеру представлення інформації в ЕОМ, їх використання дозволяє моделювати, як правило, випадкові послідовності – процеси з дискретним часом, які при потребі з урахуванням додаткових умов можна відповідним чином інтерполювати і отримати випадкові процеси з неперервним часом.

Імітаційне моделювання випадкового процесу методом статистичних випробувань полягає в побудові певного алгоритму для генерування на ЕОМ реалізацій цього процесу і потребує вирішення наступних основних проблем:

- генерування реалізацій найпростішої випадкової послідовності, яка береться як вихідна для імітування;

- зображення імітованого процесу в конструктивній формі для того, щоб можна було отримати його шляхом перетворення згаданої вище найпростішої випадкової послідовності;

- перевірка співпадання ймовірнісних характеристик випадкового процесу який моделюється та його імітаційної моделі.

При проведенні статистичного моделювання експериментатор часто має

справу з масивами ВВ які моделюються на ЕОМ за певним алгоритмом створеним експериментатором для одержання масивів даних пов'язаних з певним типом розподілу.

Найчастіше розглядають три способи одержання ВВ: таблиці випадкових чисел, генератори випадкових чисел та метод псевдовипадкових чисел (ПЧ). Кожен з цих методів має свої переваги і свої недоліки.

В дисертації був використаний метод псевдовипадкових чисел.

Завдяки тому, що “якість” ПЧ перевіряється з допомогою спеціальних тестів, то можна не цікавитися як ці числа отримані – треба лише щоб вони відповідали прийнятій системі тестів.

В дисертації тестом такої перевірки був вибраний гістограмний аналіз отриманих послідовностей ПЧ та перевірка параметрів їх розподілів таких як оцінка математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції (по ній степінь корельованості в послідовності), асиметрія та коефіцієнт ексцесу. Проте ці дані були проміжними і не завжди наводяться детальні викладки їх використання.

*Псевдовипадковими називають числа отримані з допомогою деякої формули (часто рекурентно), що імітують значення ВВ.*

Під словом “імітують” слід розуміти, що ці числа задовольняють тестам так, як це було б при розгляді ВВ.

Найчастіше при моделюваннях описаних в дисертації використовувалися уже відомі програми. Так для моделювання рівномірно розподілених величин в Mathcad було використано вбудований генератор  $rnd(1)$ . Але коли числа, отримані в такий спосіб, не проходили гістограмного або кореляційного аналізу, то використовувалися і інші методи отримання ПЧ.

Недоліком цього методу є обмеженість кількості ПЧ, бо коли застосовується рекурентна формула  $\xi_{k+1} = F(\xi_k)$ ,  $k \in \overline{0, \infty}$  для одержання послідовності  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ , то така послідовність обов'язково є періодичною. Період такої послідовності зветься довжиною відрізка аперіодичності. Але для найбільш поширених ПЧ цей період настільки великий, що перевищує будь-які

практичні потреби.

У основному змісті дисертаційної роботи значна увага приділяється вивченню кусково-однорідного процесу Пуассона, тому в даному розділі ми розглянемо моделювання саме таких процесів. На основі методів імітаційного моделювання проведено статистичні випробування та здійснено перевірку методу масштабних коефіцієнтів та індикаторних функцій, що розроблено в другому розділі дисертаційної роботи.

### **5.3. Моделювання рівномірно розподілених величин**

Відомо, що значення довільної ВВ можна отримати шляхом перетворення якоїсь однієї базової випадкової величини (БВВ). Найчастіше роль такої величини грає ВВ рівномірно розподілена на інтервалі  $[0,1]$ . Тому всякий випадковий елемент моделювався як деяка функція від найпростіших БВВ [64, 65, 66]. А в якості БВВ було вибрано випадкову величину, рівномірно розподілену на інтервалі  $[a,b]$ . Щільність розподілу такої БВВ задається виразом (4.3).

Як правило рівномірно розподілену випадкову величину моделюють в інтервалі  $[0,1]$ . При цьому можливе використання декількох алгоритмів моделювання. Це можуть бути програмні алгоритми за конгруентним методом, методом Пономарьова та ри.. Таким чином з метою моделювання масивів рівномірно розподілених випадкових величин використовуємо математичні цілком не випадкові алгоритми. Числа, що отримані за такими алгоритмами є псевдовипадковими, але при певних значеннях початкових даних вони мають властивості дуже схожі з властивостями реалізацій випадкових чисел. З подібними алгоритмами можна ознайомитися в [64].

Відомо, що кожний програмний давач рівномірно розподілених псевдовипадкових чисел потребує відповідної перевірки на основі використання статистичних тестів (у роботі [24] запропоновано використання одинадцяти тестів). Рішення про відповідність статистичним тестам формуємої

послідовності псевдовипадкових величин приймається по результатам перевірки статистичних гіпотез з використанням статистичних критеріїв. При проведенні імітаційного моделювання в рамках дисертаційного дослідження використовувалась штатна функція призначена для моделювання рівномірно розподілених ВВ. У програмному забезпеченні кожної ЕОМ є стандартна функція  $rnd(n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , у процесі послідовного звернення до якої дістаємо незалежні реалізації стохастично незалежних в сукупності випадкових величин з рівномірним законом розподілу. Використання даного методу є розповсюдженим способом моделювання БВВ. Задаючи у функції  $rnd(n)$  відповідне значення  $n$  отримують реалізації рівномірно розподіленої величини на інтервалі  $[0, n]$ . Перевірка послідовності псевдовипадкових чисел була проведена для наступних тестів:

а) визначення числа аперіодичності послідовності було проведено на основі використання критерію і-квадрат з рівнем значущості  $\alpha = 0,05$ . Число аперіодичності для даних використаних в роботі становило  $2^{31}$ .

б) рівномірність розподілу значень чисел послідовності в діапазоні  $[0, 1]$  перевірена з використанням статистичного критерію  $\chi^2$  з рівнем значущості  $\alpha = 0,05$  була підтверджена відповідною статистичною гіпотезою.

в) перевірка коефіцієнта кореляції між компонентами псевдовипадкової послідовності з метою перевірки степені некорельованості також була проведена з використанням критерію  $\chi^2$ . По результатам виконаних розрахунків зроблено висновок про некорельованість компонентів псевдовипадкової послідовності.

В додатках наведено алгоритми моделювання БВВ (рівномірно розподілених) з допомогою математичних не випадкових методів.

#### 5.4. Моделювання неперервних випадкових величин із заданим законом розподілу

В якості БВВ використовують рівномірно розподілену випадкову величину в інтервалі  $[0,1]$  способи моделювання якої розглянуто вище.

При моделюванні ВВ  $\eta$  із потрібним законом розподілу використовують метод *оберненої функції* [13, 64, 66]. При цьому припускають, що БВВ  $\xi$  неперервна випадкова величина із щільністю розподілу  $p_\xi(x)$ . Випадкова величину  $\eta$  пов'язана з нею функціональною залежністю:

$$\eta = u(\xi). \quad (5.2)$$

При цьому функцію  $u(x)$  вибирають таким чином щоб щільність розподілу  $\eta$  отримана з щільності розподілу БВВ задовольняла умовам задачі. Якщо  $u(t)$  неперервна, монотонна на інтервалі  $[a, b]$  функція, то випадкова величина  $\eta$  прийме значення, менше наперед заданого  $y$  з ймовірністю  $\mathbf{P}\{\eta < y\}$ , якщо випадкова величина  $\xi$  прийме значення, менше  $x$ , тобто

$$\mathbf{P}\{\eta < y\} = \mathbf{P}\{\xi < x\}. \quad (5.3)$$

Права і ліва частини останнього виразу є функціями розподілу:  $F_1(x)$ –випадкової величини  $\xi$ , а  $F_2(y)$ –випадкової величини  $\eta$ , отже

$$F_2(y) = F_1(x), \text{ при } y = u(x), x \in (-\infty, \infty). \quad (5.4)$$

Продиференціювавши (5.4) по  $y$  отримаємо

$$\frac{dF_2(y)}{dy} = \frac{dF_1(x)}{dy} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dF_1(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \quad (5.5)$$

або інакше

$$p_2(y) = p_1(x) \cdot J, \quad (5.6)$$

де  $J = \frac{dx}{dy}$  є якобіан перетворення

Для того, щоб визначити  $J$ , попередньо необхідно знайти функцію  $q$ , обернену (5.4), тобто знайти залежність змінної  $\xi$  від  $\eta$

$$\xi = q(\eta). \quad (5.7)$$

Остаточний вираз отримаємо об'єднавши (5.6) і (5.7)

$$p_2(\eta) = |q'(\eta)| p_1(\xi). \quad (5.8)$$

Коли  $\xi$  – рівномірно розподілена в інтервалі  $[0,1]$  випадкова величина із щільністю розподілу ймовірностей  $p_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$  тоді  $p_2(\eta) = |q'(\eta)|$ .

Отже, якщо  $\xi$  – це рівномірно розподілена випадкова величина і вважати, що

$$x = F(y), \quad (5.9)$$

то результат диференціювання правої частини залежності (5.9) дасть щільність розподілу  $p_2(y)$  випадкової величині  $\eta$ .

Розв'язавши (5.9) відносно  $y$ , одержимо аналітичний вираз для функціонального перетворення  $\eta = u(\xi)$ , яке слід застосувати до рівномірно розподіленої в інтервалі  $[0,1]$  величини  $\xi$  для одержання випадкового величини  $\eta$  із заданою щільністю розподілу  $p_2(y)$ . Оскільки у формулі (5.8) якобіан береться по модулю, то його значення не зміниться, якщо у (5.9) запишемо праву частину у вигляді

$$x = 1 - F(y). \quad (5.10)$$

Детальніше з особливостями моделювання і побудови алгоритмів на ЕОМ з метою одержання БВВ та ВВ з заданим законом розподілу можна ознайомитися в роботах [13, 64, 66].

Масив ВВ з показниковим розподілом моделювався за алгоритмом описаним вище. Для формування масиву ВВ з заданим показниковим законом розподілу необхідно мати масив стохастично незалежних БВВ. Масив ВВ розподілених за показниковим розподілом є БВВ для формування випадкової послідовності з розподілом Пуассона, що розглядається в наступному пункті. Зупинимося на задачі одержання масивів ВВ з показниковим розподілом.

Моделювання ВВ з показниковим законом розподілу виконують за методом оберненої функції. Для нього знаходження функції  $F^{-1}(x)$  – оберненої до заданої здійснюється за допомогою простих аналітичних перетворень і дає змогу отримати обернену функцію в наступному вигляді:

$$F^{-1}(x) = -\frac{\ln(1-x)}{\lambda}, \lambda > 0, x \in (-\infty, \infty). \quad (5.11)$$

Виходячи з (5.10) можна отримати наступний алгоритм моделювання ВВ з показниковим розподілом, а саме:

$$\xi_j = -\frac{\ln \eta_j}{\lambda}, \text{ де } \eta_j, j = 1, 2, \dots \text{ – рівномірно розподілена в інтервалі } [0, 1]$$

випадкова величина;  $\lambda > 0$ .

У додатках вміщено тексти програм для моделювання ВВ із заданим (показниковим) законом розподілу. Також в додатках наведено фрагмент програми за допомогою якої здійснювалася перевірка гіпотези про вид розподілу. Взагалі існує три практично застосовні методи вибору теоретичного закону розподілу. Такий вибір можна зробити на підставі апріорних даних, коли вважається, що закон розподілу може бути відомим перед проведенням експерименту; за формою рунтується (реалізації емпіричної щільності розподілу), тобто вид гістограми може служити підставою вибору конкретного закону розподілу і прийняттям гіпотези про те, що отримана в результаті експерименту вибірка, відповідно після побудови варіаційного ряду, може апроксимуватися конкретним типом розподілу; методом моментів, який рунтується на використанні сімейства кривих К.Пірсона

В дисертаційній роботі перевірка наскільки добре вибраний теоретичний закон розподілу узгоджується (згладжує) статистичний, здійснювалася за критерієм згоди хи-квадрат.

## **5.5. Моделювання реалізацій пуассонівських процесів**

Пуассонівський випадковий процес є представником процесів з незалежними приростами. З допомогою процесу Пуассона описують реальні імпульсні процеси, реалізації яких змінюються стрибкоподібно. Процес



Пуассона займає ключове місце в задачах теорії масового обслуговування та теорії надійності. Він належить до класу безмежноподільних законів розподілу, за допомогою якого можна описати реальні фізичні явища.

**5.5.1. Моделі однорідних процесів Пуассона.** Згідно з означенням (див. розд. 3) реалізації пуассонового процесу  $\pi(\omega, t)$  являють собою функції, що складаються з ділянок сталості та стрибків – скінченних приростів  $(\pi(\omega, t_k) - \pi(\omega, t_{k-1}))$ , які відбуваються у випадкові моменти часу  $t_k, k = 1, 2, \dots$ . Для простого однорідного пуассонівського процесу вони детерміновані і всі рівні одиниці, тобто реалізації процесу  $\pi(\omega, t_k)$  набувають лише цілочислових значень  $n = 0, 1, 2, \dots$  (рис. 5.1). Вважаємо, що всі реалізації пуассонівського процесу в початковий момент часу  $t_0 = 0$  виходять з 0.

На рис. 5.3 наводиться одна з можливих реалізацій пуассонівського процесу, що моделювався.

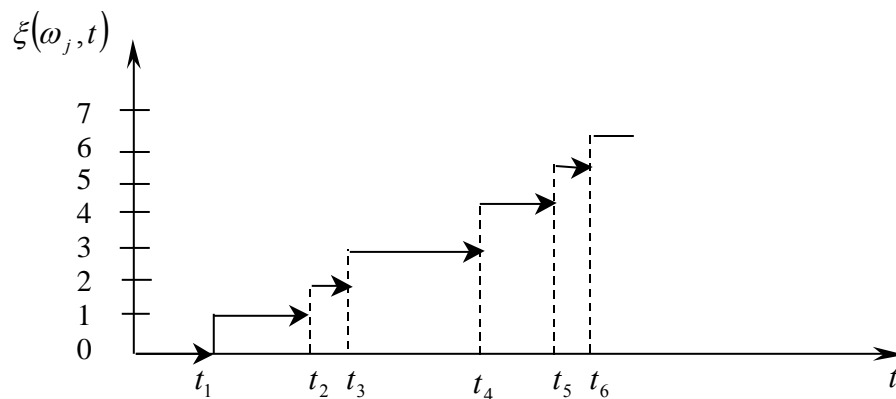


Рис. 5.3. Реалізація пуассонівського процесу

Для однорідного пуассонівського процесу прирости  $(\pi(t_k) - \pi(t_{k-1}))$  стохастично незалежні для будь-яких  $t_k, k = 1, 2, \dots$  і мають розподіл Пуассона

$$\mathbf{P}\{\pi(t_k) - \pi(t_{k-1}) = n\} = \frac{\lambda(t_k - t_{k-1})^n}{n!} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})}, n = 0, 1, 2, \dots$$

При цьому інтервал часу  $\Delta\tau$ ,  $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , між двома сусідніми стрибками пуассонового процесу є випадковою величиною зі щільністю розподілу ймовірності

$$p_\tau(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad (5.12)$$

Отже, моделювання однорідних пуассонівських випадкових процесів полягає в знаходженні послідовності випадкових моментів часу  $t_k$ , в які відбуваються стрибки, та формування самих приростів, які дорівнюють одиниці.

У процесі моделювання випадкові моменти часу  $t_k$  можна обчислювати за рекурентним співвідношенням

$$t_k = t_{k-1} + \Delta\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.13)$$

де  $\Delta\tau$  – ВВ з показниковим розподілом (5.12) та параметром  $\lambda$  який входить в (5.12) і зветься інтенсивністю пуассонівського процесу.

**5.5.2. Моделі кусково-однорідних процесів Пуассона.** Моделювання кусково-однорідного процесу Пуассона полягає у формуванні вектора однорідних процесів Пуассона виду (4.40) з подальшим переходом до виду (4.42) з використанням індикаторної функції.

Для моделювання кусково-однорідного процесу Пуассона в роботі на базі стохастично незалежних масивів БВВ моделювалися відповідні масиви ВВ з показниковим розподілом та різними параметрами  $\lambda > 0$ . З метою забезпечення стохастичної незалежності масивів експоненційно розподілених ВВ в процесі моделювання здійснювалося розбиття масиву рівномірно розподілених ВВ, які використовуються в якості БВВ. Відповідна процедура розбиття наводиться в

основному тексті програми, Дод. Б, з допомогою якої здійснювалося моделювання масивів ВВ з показниковим розподілом відповідно до наведених вище алгоритмів. На основі отриманих масивів ВВ експоненційного типу формувався вектор пуассонівських процесів та будувалися його реалізації.

**5.5.3. Точносні характеристики моделювання.** Заключний і досить відповідальний етап моделювання, який був здійснений в процесі розробки методу МК та ІФ – це перевірка точності і відповідності тестам (гістограмний аналіз, оцінювання параметрів). В результаті моделювання на ЕОМ були отримані вибірки реалізацій псевдовипадкового вектора  $\{\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ . За цією вибіркою перевірялась гіпотеза згоди про те, що функції розподілу випадкового елемента  $F_{\Xi}(y)$  і його моделі  $F_{\Xi^*}(y)$ , реалізованої на ЕОМ, збігаються -  $H_0: F_{\Xi}(y) = F_{\Xi^*}(y)$ . Конкуруючою є гіпотеза  $H_1: F_{\Xi}(y) \neq F_{\Xi^*}(y)$ . Гіпотеза перевірялась з використанням статистичних критеріїв. Перевірялась також гіпотеза згоди про рівність числових ймовірнісних характеристик випадкового елемента, зокрема середніх значень, дисперсій, кореляційних функцій, енергетичних спектрів тощо.

Зауважимо, що остаточний вибір адекватної ймовірнісної моделі можна зробити лише враховуючи якість розв'язання поставленої задачі. Тому перевірка гіпотези згоди про збіг ймовірнісних характеристик випадкового елемента і його моделі на ЕОМ – розглядалася як проміжний етап установлення адекватності вибраної ймовірнісної моделі.

При цьому бралось до уваги, що моделювання на ЕОМ довільного випадкового елемента включає розв'язування двох основних задач:

- моделювання на ЕОМ  $r$  незалежних БВВ;
- відшукування функції  $f(\cdot)$ , яка перетворює  $r$  БВВ так, аби забезпечити близькість у встановленому розумінні ймовірнісних характеристик випадкового елемента і його моделі на ЕОМ.

В ході проведення комп'ютерного моделювання реалізацій процесу Пуассона необхідно було виконати ряд послідовних процедур у відповідності до наведених вище алгоритмів. Відповідно наступним кроком є перевірка збігу ймовірнісних характеристик. У випадку з БВВ таку перевірку можна здійснити порівнюючи оцінки МС та дисперсії з параметрами теоретичного розподілу ймовірностей. Якщо оцінки для МС та дисперсії дорівнюють або близькі до 0,5 та 0,083 відповідно, то ВВ має рівномірний розподіл.

Застосувавши наведене вище функціональне перетворення до рівномірно розподілених чисел було отримано ВВ з показниковим розподілом. Збіг ймовірнісних характеристик для цього випадку було перевірено за критерієм згоди  $\chi^2$  [61].

У кожному конкретному випадку вибір числа  $r$  і функції  $f(\cdot)$  визначав структуру моделюючого алгоритму. У Додатках наведено найпоширеніші на практиці методи і алгоритми моделювання випадкових величин, векторів і процесів із заданими ймовірнісними характеристиками.

#### **5.5.4. Використання отриманих реалізацій пуассонівських процесів для перевірки методу масштабних коефіцієнтів та індикаторних функцій**

Перевірка ефективності методу МК та ІФ для стаціонаризації кусково-однорідного процесу Пуассона.

Вихідні дані при моделюванні були вибрані наступні: основні вирази модельованого процесу Пуассона були взяті з прикладу 1 при  $n = 2$ , (4.28), та при  $n = 3$ , приклад 2 розділу 4. Крім того моделювалися інтервали часу між сусідніми стрибками. Результати моделювання (зокрема статистичні оцінки функції розподілу) порівнювалися з теоретичними результатами наведених в розділі 4 прикладів.

Другим способом перевірки збігу ймовірнісних характеристик, використаним для порівняння, є перевірка за критерієм Смірнова-Колмогорова.

Цей критерій дає відповідь на запитання чи описується емпіричний розподіл теоретичною функцією розподілу.

Перевірка по критерію Колмогорова-Смірнова дала позитивні результати з довірчою ймовірністю не менше 0,9 при об'ємі вибірки порядку  $10^4$ .

Відповідні програми обчислення наведено в додатках.

## РОЗДІЛ 6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ВІБРОДІАГНОСТИКИ

В попередніх розділах даної роботи було докладно розглянуто теоретичні питання побудови та аналізу математичних моделей субгауссових процесів. Це створило теоретичну базу для побудови алгоритмічно-програмного забезпечення, яке зокрема призначено для роботи у складі ІВС вібродіагностики вітроелектричних агрегатів. Лабораторний зразок такої ІВС було розроблено на базі відповідної вимірювальної та обчислювальної техніки [51, 67]. До його складу увійшло також спеціальне програмне забезпечення, одним із основних елементів якого є програми перевірки діагностичних сигналів, що вимірювалися на субгауссовість. Внаслідок такої перевірки вдається підвищити точність і достовірність оцінок вимірюваних сигналів, а значить і достовірність діагностики технічного стану вузлів вітроелектричних агрегатів.

В даному розділі наводиться інформація, що стосується побудови, структури, особливостей та принципів роботи **лабораторного зразка** ІВС статистичної вібродіагностики. Крім того, тут проаналізовано основні види похибок, які виникають під час виміру та при обробці інформаційних сигналів [41]. Розглянуто основні елементи методики практичного застосування **лабораторного макета** ІВС вібродіагностики вузлів вітроелектричних агрегатів. Одним з основних елементів якого є програмне забезпечення перевірки оцінювання зареєстрованих сигналів на субгауссовість та ілюстрація використання субгауссового стандарту і коефіцієнту субгауссовості при оцінюванні точносних характеристик.

Основні результати даного розділу опубліковані в роботах [26, 68, 69].

## **6.1. Структура, особливості побудови та використання лабораторного зразка інформаційно-вимірювальних систем вібродіагностики**

Спочатку зупинимося на короткому описі лабораторного зразка ІВС вібродіагностики, що вивчався в процесі виконання даної роботи, особливості його побудови та технічного функціонування [51, 70].

### Призначення лабораторного зразка ІВС вібродіагностики вітроагрегатів.

Розроблений зразок ІВС забезпечує:

- вимірювання, реєстрацію, аналогову фільтрацію, та підсилювання вібраційних сигналів, які встановлені на досліджуваних вузлах вітроагрегату;
- перетворення аналогових сигналів у цифровий код та ввід останнього у ПЕОМ;
- перевірку зареєстрованих числових масивів експериментальних даних на субгауссовість;
- визначення субгауссового інтервалу;
- визначення кількісних оцінок границь діагностичних ознак, що відповідають умовно справним вузлам вітроагрегатів, а також вузлам, які мають певні види дефектів;
- навчання і діагностику найбільш типових видів дефектів в окремих вузлах вітроелектричного агрегату.

Вимірювання вібраційних сигналів здійснюється у наступних вузлах вітроагрегатів:

- підшипникові вузли ступиці вітроагрегату;
- підшипникові вузли генератора;
- редуктор (трансмсія); основна рама вітроагрегату.

Створений зразок може бути реалізований у двох варіантах: мобільному (пересувна лабораторія на базі мікроавтобусу) або стаціонарному. Подальший його розгляд проведемо саме для стаціонарного варіанту.

Передбачається, що стаціонарний варіант лабораторного зразку ІВС експлуатується у межах однієї вітроелектростанції.

Організація процесу вимірювання та обробки вібраційних сигналів здійснюється за схемою рис. 6.1. Особливістю й основною перевагою такого варіанту є можливість реєструвати вібраційні сигнали з усіх вітроагрегатів станції з одного центрального модуля вимірювання і збору інформації, який розташовується на одному з вітроагрегатів [71, 72, 73, 74].

Під час вимірювань мобільний модуль створеного зразку ІВС підключається до цього центрального модуля, після чого можна вимірювати сигнали з будь-якого вітроагрегату вітростанції. Такий модуль реалізується за допомогою мікропроцесора або персонального комп'ютера. З'єднання цього блоку з давачами, які встановлені безпосередньо на вузлах вітроагрегату в станції, що діагностується, може здійснюватись через кілька способів: кабельні з'єднання, радіоканал і спеціальні модеми, які працюють по мережі електропередачі.

Передбачається також, що довгострокове накопичення та більш детальна обробка зареєстрованих даних може здійснюватися на стаціонарному інформаційно-обчислювальному центрі.

Розроблений зразок ІВС складається з двох основних модулів:

- модуль вимірювання і збору інформації;
- мобільний модуль перетворення і обробки інформації.

До модуля вимірювання і збору інформації входять:

- вимірювальні давачі (акселерометри)  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ;
- блок збору інформації.

Мобільний модуль перетворення і обробки інформації складається з

- блоку попереднього підсилення сигналів БПП;
- блоку аналогової фільтрації експериментальних даних БАФ;
- блоку перетворення аналогових сигналів у цифровий код БПАС;
- промислового комп'ютера ПЕОМ;
- пакету прикладних програм ППП.



У свою чергу до складу ППП входять наступні програми, які здійснюють обробку експериментальних даних та управління роботою ІВС в режимах навчання та діагностики:

- програма перевірки експериментальних даних на субгауссовість ППС;
- програма обчислення субгауссового інтервалу ПОСІ;
- програма цифрової фільтрації ПЦФ;
- програма спектрально-кореляційного аналізу ПСКА;
- програма гістограмного аналізу ПГА;
- програма побудови діагностичних рішень ППДР.

Склад лабораторного зразку ІВС. Розроблений зразок складається з таких основних модулів і блоків:

- модуль вимірювання, реєстрації та первинної обробки даних;
- модуль накопичення, перетворення та вводу даних до ПЕОМ;
- блок обробки та аналізу експериментальних даних;
- блок побудови вирішуючих правил.

До модулю вимірювання, реєстрації та первинної обробки входять:

- вимірювальні давачі (акселерометри)  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ;
- блок попереднього підсилення сигналів давачів БПП;
- блок аналогової фільтрації експериментальних даних БАФ;
- блок реєстрації експериментальних даних БРЕД.

Модуль накопичення, перетворення та вводу даних до ПЕОМ складається з:

- блоку накопичення інформації БНІ;
- блоку перетворення аналогових сигналів у цифровий код БПАС.

Опис структурної схеми лабораторного зразку ІВС. Апаратурний склад розробленого зразку ІВС (рис.5.2) умовно можна поділити на дві частини: аналогову, що забезпечує вимірювання, реєстрацію, аналогову фільтрацію та підсилення вібраційного сигналу, і цифрову, основне призначення – перетворення, ввід, реєстрація та обробка на ПЕОМ введених та перетворених у

цифровий код експериментальних даних.

До складу аналогової частини входять акселерометри  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ; блок попереднього підсилення сигналів давачів БПП; блок аналогової фільтрації експериментальних даних БАФ. Цифрова частина містить блок аналогової фільтрації експериментальних даних БАФ.

Цифрова частина містить блок перетворення аналогових сигналів у цифровий код БПАС та промисловий комп'ютер ПЕОМ. Конструктивно ці блоки розміщені в одному корпусі.

У якості перетворювачів пружних коливань в електричний сигнал використано акселерометри типів АВС-017, ДН-4, Д-14.

Для попередньої обробки вібраційних сигналів використовується спеціально розроблений блок попереднього підсилювання сигналів БПП.

Цей блок складається з чотирьох незалежних підсилювачів сигналів датчиків зі змінними коефіцієнтами підсилення, що задаються блоком реєстра управління.

Блок аналогової фільтрації БАФ складається з:

–режекторних фільтрів, які налагоджені на частоти режекції 50 Гц та 100 Гц з глибиною режекції порядку 40 дБ;

–фільтрів верхніх частот з частотами 0,5; 1; 5 і 10 кГц. Затухання характеристики фільтрів у смузі загородження складає приблизно 45 дБ/окт, а затухання у перехідній смузі 36 дБ/окт;

–фільтрів нижніх частот з верхніми граничними частотами 2; 4; 5 і 10 кГц.

Використання систем фільтрів, що переключаються, дозволяє сформувати необхідну смугу частот для дослідження вібраційних сигналів.



Рис. 6.1. Лабораторний зразок ІВС вібродіагностики

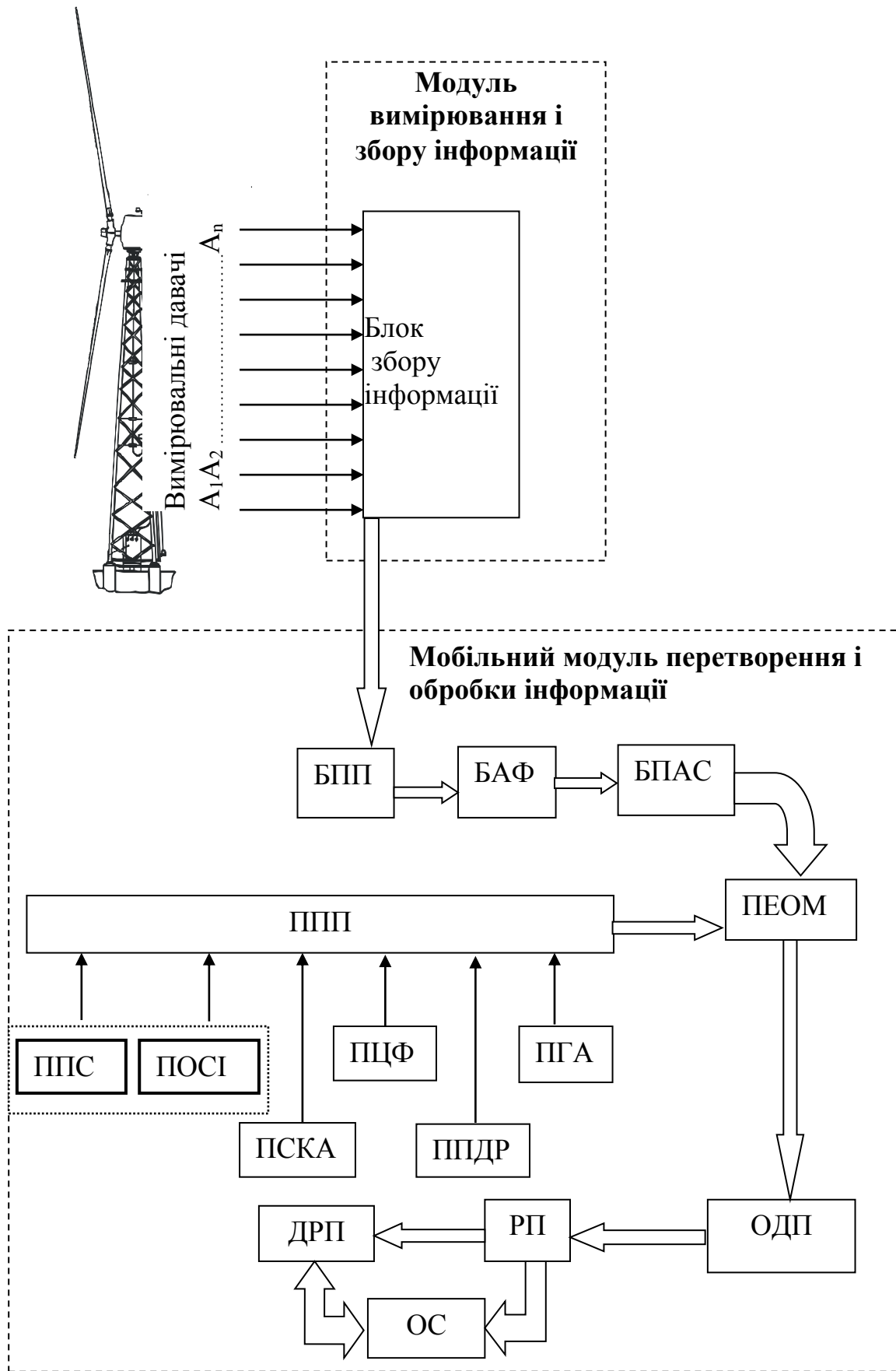


Рис. 6.2. Структурна схема лабораторного зразку ІВС

Основне призначення блоку БПАС – перетворення аналогових сигналів у цифровий код і запис їх у пам'ять ПЕОМ для наступної обробки і збереження. Структурна схема блоку БПАС представлена на рис. 6.3. Її робота здійснюється під впливом керуючих сигналів, які видаються через паралельний порт комп'ютера (LPT) спеціальним програмним забезпеченням. Вхідні дані, які супроводжуються синхроімпульсами “СИ”, заносяться в блок реєстра управління для задання необхідного режиму роботи апаратури.

Вихідна інформація містить:

–коефіцієнти підсилення для чотирьох каналів від підсилювачів блоку БПП;

–задану комутацію підсилювачів блоку БПП;

–вибір частоти перетворення аналогових сигналів у цифровий код.

Узгодження роботи блоку БПАС з блоком БПП здійснюється за допомогою блоку реєстра управління шляхом вибору певного коефіцієнту підсилення у кожного з підсилювачів блоку БПП.

Блок комутації аналогових сигналів здійснює підключення виходу підсилювача заданого датчика до входу аналого-цифрового перетворювача або почергове підключення всіх підсилювачів на протязі одного циклу роботи апаратури.

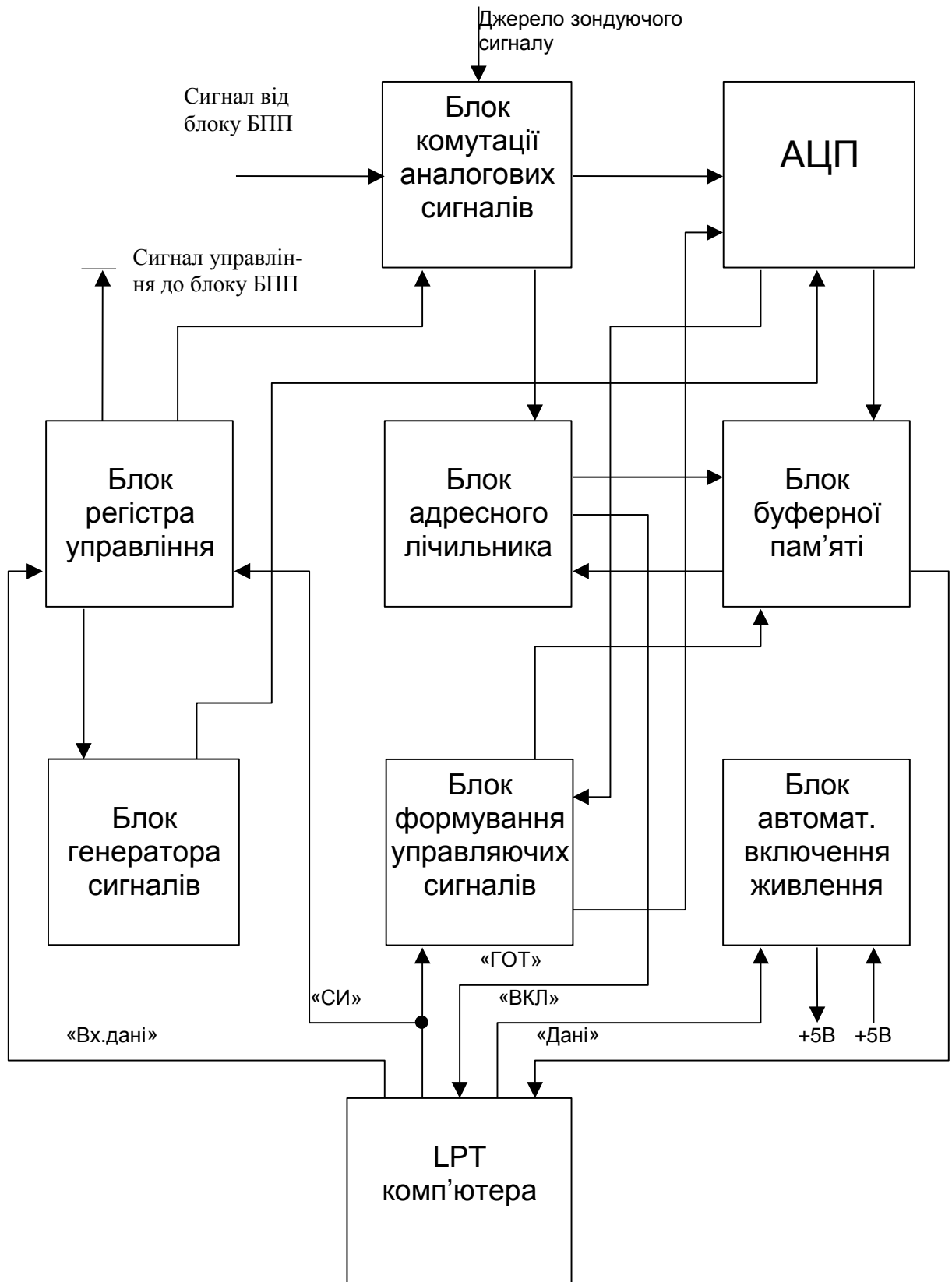
АЦП перетворює підсилені аналогові сигнали в цифрову форму для запису в буферну пам'ять контролера на заданій частоті дискретизації.

Допустимими є такі частоти дискретизації: 2 МГц, 1 МГц, 500 кГц, 250 кГц, 125 кГц, 62.5 кГц. Розрядність АЦП складає 12 біт.

Блок буферної пам'яті служить для узгодження високої швидкості перетворення зі швидкістю введення даних у комп'ютер через LPT. Загальна ємність буферної пам'яті складає 128 кбайт.

Блок адресного лічильника призначений для адресації буферної пам'яті при записі-відтворенні сигналів датчиків після запуску апаратури.

Блок формування управляючих сигналів виробляє сигнали, що керують роботою блоків, що входять до складу БПАС в певній часовій послідовності.



## Рис. 6.3. Структурна схема блоку БПАС

Блок генератора сигналів являє собою кварцевий релаксаційний генератор, що виробляє прямокутні імпульси з частотою, заданою в блоці АЦП.

Блок автоматичного включення живлення здійснює вмикання і вимикання живлення БПАС зі сторони комп'ютера з метою збереження електроенергії автономного джерела живлення.

Блок БПАС виконаний у вигляді окремої плати, розміщеної у корпусі промислового комп'ютеру ПЕОМ.

Коротко розглянемо деякі питання, що стосуються схемної реалізації основних блоків, що входять до складу БПАС.

Блок реєстра управління реалізований на мікросхемах типу зсувного реєстра Д0561ИР2. Занесення даних у реєстр здійснюється по паралельному порту LPT сигналом "ВХИ", що супроводжується синхроімпульсами "СИ". У цьому блоці є тригер пуску, котрий дозволяє роботу блоку генератора сигналів, блоку АЦП, блоку формування керуючих сигналів і блоку буферної пам'яті. Установка цього тригера в одиничний стан виробляється по сигналах датчиків або від джерела зондувальних сигналів (зовнішній запуск).

Блок АЦП виконаний за допомогою аналого-цифрового перетворювача AD1672, що має граничну частоту перетворення 3 МГц і 12 двійкових розрядів на виході. Запуск АЦП здійснюється по входу CLK сигналами, що виробляються в блоці формування керуючих сигналів з відповідними частотами, які задаються блоком реєстра управління.

Опорна напруга 2,5 В виробляється в АЦП на виході REFIN, що надходить у блок підсилення сигналів датчиків для задання робочої точки операційних підсилювачів.

Блок буферної пам'яті КМ681000AL служить для узгодження швидкості перетворення АЦП і малої швидкості введення даних через порт LPT комп'ютера. Інформаційна ємність цієї пам'яті складає 128 кбайт.

Адресація пам'яті здійснюється за допомогою двійкового лічильника, зібраного на трьох мікросхемах типу HC393. Запис даних у пам'ять здійснюється по входу WR сигналами, що виробляються в блоці формування керуючих сигналів. Вибірка даних з буферної пам'яті здійснюється після повного заповнення пам'яті, тобто після переповнення адресного лічильника.

У блоці формування управляючих сигналів виробляються імпульси керування надходженням старших і молодших байтів на виході АЦП. Крім того, у цей блок надходять імпульси СИ, для перебору адрес пам'яті при видачі даних з пам'яті в комп'ютер.

Блок генератора сигналів зібраний на елементах CD4011, HC393, HC4016, що дозволяють виробляти сигнали з частотами 2МГц, 1МГц, 500кГц, 250кГц, 125кГц, 62,5кГц відповідно до стану регістра керування. Сигнали з кварцового генератора, частота якого визначається підключенням у зворотному зв'язку одного з двох резонаторів на 1 МГц і 4 МГц, надходять на двійковий лічильник (D10.2) для одержання зазначеного вище ряду частот.

Вибір визначеної частоти здійснюється за допомогою комутатора струму (D16.1, D16.2). На виході D16 з'являються сигнали з тією частотою, що була задана на регістрі керування.

Блок БПАС має наступні технічні характеристики:

1. Кількість вхідних каналів	5
2. Кількість підсилювачів	4
3. Коефіцієнти підсилення	2, 6, 18, 54, 78
4. Запуск апаратури	внутрішній, зовнішній
5. Частота аналого-цифрового перетворення	2 МГц; 1 МГц; 500 кГц; 250 кГц; 125 кГц; 62,5 кГц
6. Розрядність АЦП складає	12 біт
7. Ємність буферної пам'яті	128 кбайт
8. Включення-виключення живлення	автоматичне
9. Інтерфейс	LPT



10. Габарити контролера	150x150x30 мм
11. Маса контролера	0,3 кг
12. Джерело живлення	4 елементи по 1,2 В
13. Максимальний струм споживання	60 мА

## **6.2. Експерименти з лабораторним макетом інформаційно-вимірювальних систем вібродіагностики**

Під вібродіагностикою в даній роботі розуміємо процес, спрямований на отримання відповіді на питання оцінки технічного стану вітроенергоагрегату як в поточний момент діагностування так і прогноз його надійності на найближчий період експлуатації [75, 76, 77, 78]. Виходячи з того, що найменш надійними в енергоагрегаті є рухомі деталі та вузли, як, наприклад, ротори, підшипники, вузли кріплення рухомих деталей, які знаходяться в обертовому русі або отримують періодичні в часі вібронавантаження, основна увага приділяється дослідженню циклічних механічних процесів, які супроводжують роботу вітроагрегатів. Тому *наступні пункти даної роботи будуть будуватися на дослідженні саме таких процесів.*

З фізичної точки зору вимірюванням при такій діагностиці підлягає переміщення, швидкість та прискорення заміряні в окремих точках вітроенергетичного агрегату. Саме ці величини і процеси є предметом вимірювання і джерелом інформації про стан всього агрегату в цілому. За ними робляться діагностичні висновки, а тому зрозуміло що питання точності та достовірності отримання і попередньої обробки результатів вимірювання таких процесів лежать в основі забезпечення достовірного діагностування всього енергоагрегату.

Випробовувався лабораторний макет, який був побудований на базі лабораторного зразка віротурбіни USW 56 - 100, яка була встановлена на стенді ДП "ВО Південмаш". Під час випробувань розглядались два режими роботи віротурбіни: пусковий та прокрутки генератором у режимі двигуна.

Глибокому вивченню, відповідно до даної роботи, підлягав режим прокрутки генератора. Саме при роботі у цьому режимі здійснювались експерименти з вимірювань, реєстрації та визначення статистичних характеристик вібрацій окремих вузлів лабораторного макета вітроагрегату.

Слід також відзначити, що пусковий режим є досить коротким у часі (кілька секунд) і являє собою перехідний (нестационарний) процес, який не є характерним для роботи вітроелектричного агрегату. Виходячи з цього, випробування лабораторного макета ІВС по одержанню вібраційних характеристик у пусковому режимі в даній роботі не наводяться. Вони проводились стисло.

При прокрутці вітроелектричного агрегату генератором у режимі двигуна високообертвий вал генератора обертався з середньою кутовою швидкістю 1465 об/хв, а вал ступиці вітроколеса (низькообертвий вал) – з середньою кутовою швидкістю 72 об/хв.

Схема з'єднання елементів лабораторного макета ІВС наведена на рисунку 6.4.

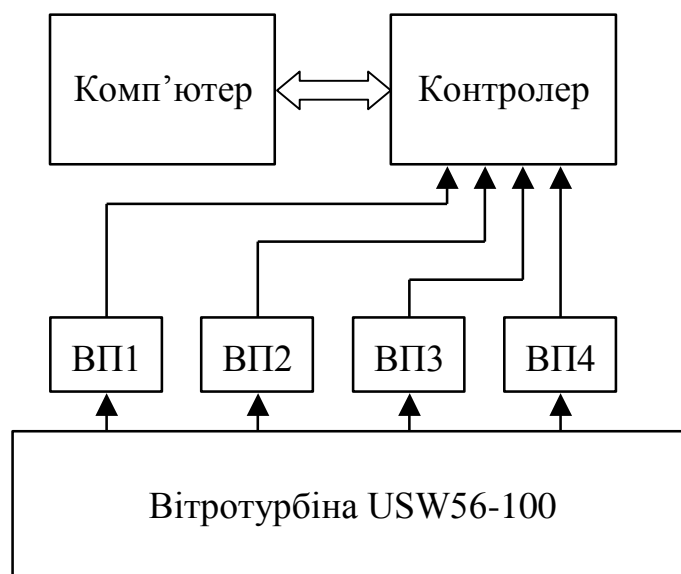


Рис. 6.4. Схема з'єднання елементів лабораторного макета ІВС  
для проведення вимірювань

З цього малюнка видно яким чином при проведенні експериментів на вітротурбіні були встановлені датчики ВП1, ВП2, ВП3, ВП4, які перетворювали в електричний сигнал вібраційну хвилю, що збуджувалась в результаті роботи вузлів вітроагрегату. З виходів датчиків ВП1, ВП2, ВП3, ВП4 сигнали поступали на мікроконтролер, який узгоджував параметри цих сигналів зі входами плати перетворення, а також здійснював перетворення аналогових вібросигналів у цифровий код.

В якості згаданих датчиків було використано наступні типи перетворювачів:

- ВП1 - акселерометр ДН - 4;
- ВП2 - акселерометр Д - 14;
- ВП3 - акселерометр АВС - 017;
- ВП4 - сейсмічний датчик СВ-10Ц.

В лабораторному зразку ІВС під час випробувань навмисне було використано різні типи акселерометрів, щоб виявити найбільш придатний тип для проведення вібродіагностики.

В процесі проведення експериментів по вимірюванню і реєстрації вібрацій датчики ВП1, ВП2, ВП3 послідовно розташовувались в певних точках на різних вузлах вітротурбіни (рис. 6.5).

Сейсмічний датчик СВ-10Ц (ВП4) встановлювався на підставці стенду або на рамі вітротурбіни. Результати обробки інформаційних сигналів, що вимірювались цим датчиком, у даній роботі не наведені, оскільки цю інформацію було використано для перевірки роботи низькочастотного каналу в лабораторному зразку ІВС вібродіагностики.

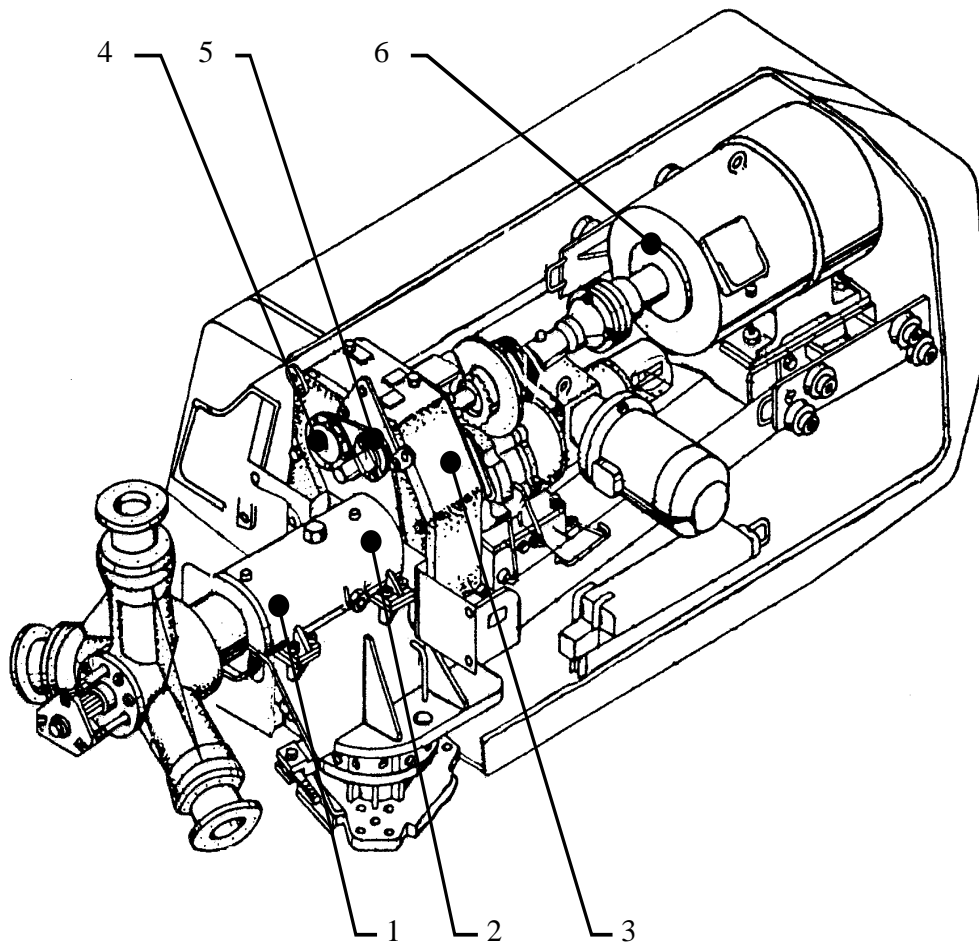


Рис. 6.5. Електромеханічний вузол вітроелектричного агрегату  
 1 – корпус головного валу, 2 – корпус головного валу, 3 – корпус трансмісії, 4 – корпус трансмісії, 5 – корпус трансмісії, 6 – генератор.

Крок дискретизації по часу аналогових сигналів при їх перетворенні у цифровий код складав 64 мкс (частота дискретизації АЦП лабораторного макета 15625 Гц). Об'єм зареєстрованої вибірки складав 16000 відліків.

### 6.3. Особливості реєстрації досліджуваних вібросигналів

Згідно з рис. 6.4, сигнал через контролер поступає на плату АЦП, яка входила в склад комп'ютера. На виході контролера ми маємо сигнали від відповідних датчиків. Для конкретності будемо розглядати сигнал з виходу

сейсмічного датчика (датчик ВП4). Цей сигнал описує графік зміни прискорення в радіальному напрямку високообертового валу в залежності від часу. На рис. 4.8 а) наводиться одна з можливих реалізацій такого сигналу. Початок відліку такого сигналу вибрано таким чином, щоб в нульовий момент часу його значення дорівнювало нулеві. На цьому рисунку наведено пунктиром динамічний діапазон сигналу. Виходячи з того, що у відповідності з фізикою явища, яке вивчається, моделлю даного сигналу може бути випадковий періодичний процес загального виду зупинимося коротко на загальних питаннях його математичного опису (математичної моделі). Нагадаємо, що під випадковим періодичним процесом по Слуцькому розуміють процес  $\xi(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , для якого існує таке число  $T$ , що два вектори  $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$  та  $\xi(t_1 + T), \xi(t_2 + T), \dots, \xi(t_n + T)$  є стохастично еквівалентними, при будь-яких  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbf{R}$ . При цьому число  $T$  зветься періодом випадкового процесу  $\xi(t)$ .

При діагностуванні різних електричних пристроїв машин сигнали, що надходять з давачів з різних механічних вузлів як правило носять циклічний характер. Зупинимося на термінології, розглянемо циклічність, періодичність та ритмічність.

*Циклічний процес* – це фізичне визначення стосовно фізичного явища і стосується того випадку, коли з точки зору фізики можна виділити повторюваність характеристик сигналів.

*Поняття ритмічності* вживається тоді, коли спостерігається два фізичних процеси, один з яких має характер циклічності, близький до другого. Тоді ці два процеси називають ритмічними. Наприклад, різні коливання, викликані одне одним або такі, що відбуваються одне в залежності від іншого, пов'язані з ним.

*Періодичні процеси або функції* поняття чисто математичне абстрактне і вживається при побудові різних математичних моделей реальних циклічних або ритмічних процесів.

Як відомо, основними видами похибок при діагностиці є як інструментальні так і методичні. Виходячи з поставленої в дисертаційній роботі задачі та мети досліджень, основна увага при проведенні експериментів приділяється питанням зменшення методичних похибок. А саме як на базі експериментальних даних

– розв’язати за допомогою методів перевірки на субгауссовість, викладених в попередніх розділах дисертаційної роботи, сам факт існування резерву для зменшення методичної похибки при оцінюванні точності вимірювань,

– практично реалізувати таке оцінювання при вібродіагностиці електроенергетичних установок, в яких вібрації породжуються електромеханічними вузлами, що знаходяться в циклічному (обертovому) русі.

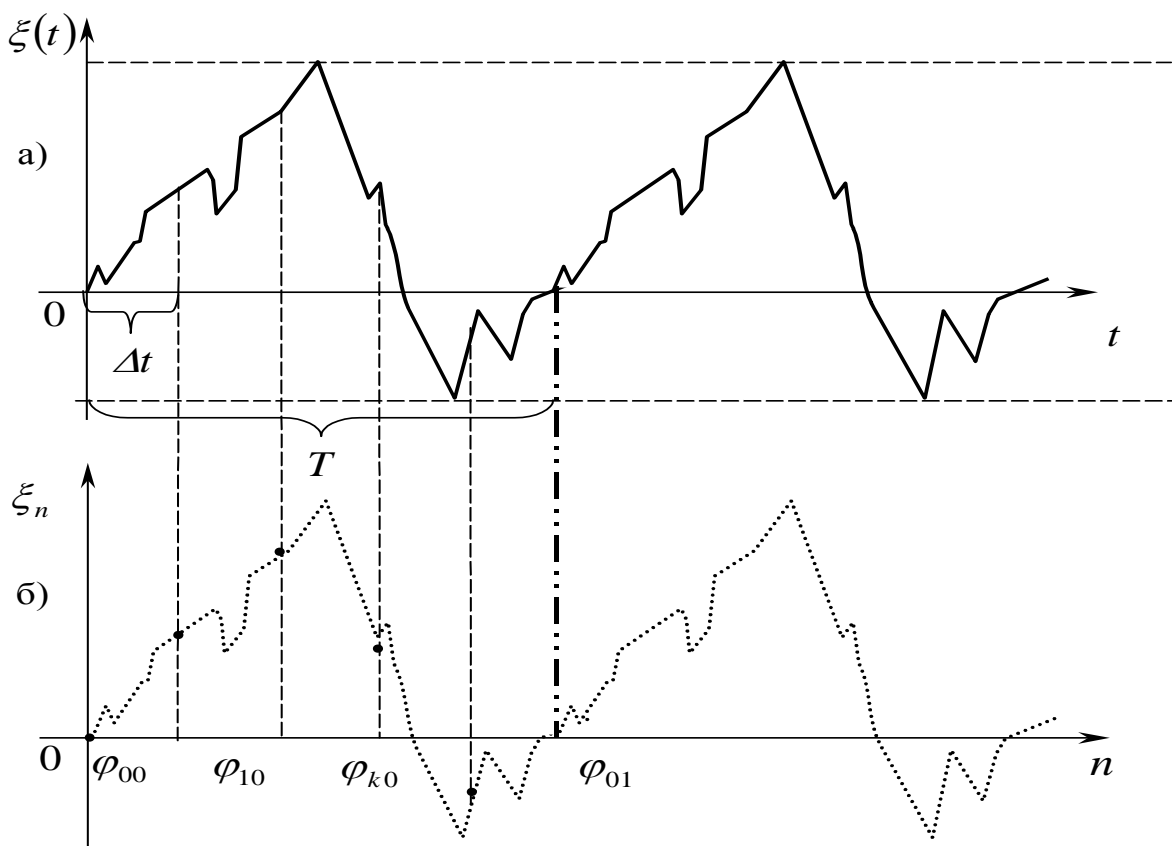


Рис.6.6. Реалізація сигналів: а) аналогового, б) дискретизованого

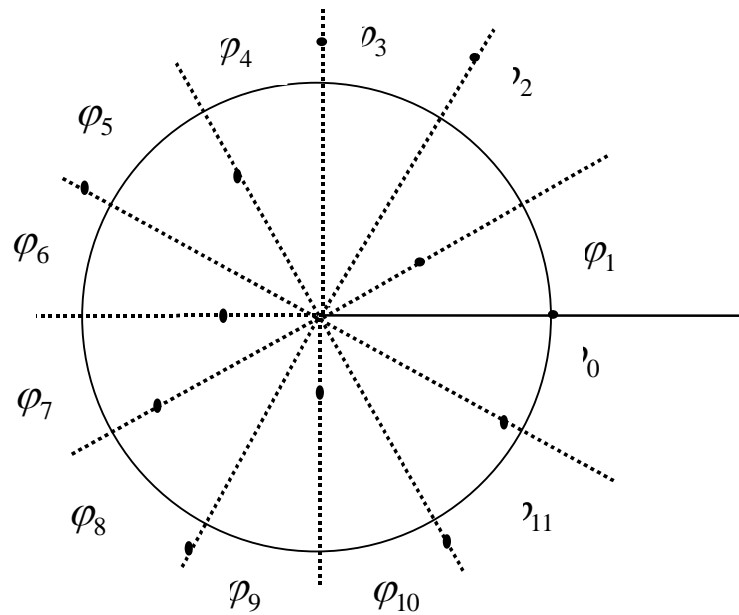


Рис. 6.7. Ілюстрація кутових спостережень обертання валу в полярній системі координат

Коротко зупинимося на самій ідеї формування відповідних вибірок для процесів, що пов'язані з циклічністю викликаною обертання різних роторів і валів. Для цього розглянемо наступні рисунки 6.6 та 6.7.

Таким чином спостерігалася деяка реалізація періодичного інформаційного сигналу, що надходив на вхід АЦП одного з описаних вище датчиків. На рисунку 6.6 а) зображена одна з можливих таких реалізацій. Після перетворення аналогових реалізацій за допомогою АЦП отримуємо реалізації періодичного випадкового процесу з дискретним часом рис.6.6 б). Вони синхронізовані з фазами обертового руху, що зображені на рисунку 6.7.

Процес, який отримується в результаті дискретизації з дискретним часом називається вкладеним по відношенню до аналогового процесу. При цьому аналоговий процес, який є стохастично-періодичним, не може розглядатися як стаціонарний в загальному випадку. Проте вкладені процеси, отримані в результаті дискретизації при певних умовах можуть виявитися не лише стаціонарними, але і ергодичними. Це може бути досягнуто шляхом певного

узгодження початкової фази  $\varphi_k$ -серії вкладеного процесу з періодом  $T$  випадкового процесу.

На рис 6.6 наведено реалізації за допомогою яких ілюструється можливість такого узгодження. На рис. 6.6 а) зображена аналогова реалізація, а на рис. 6.6 б) наводиться графік вкладеної, по відношенню до першої дискретної реалізації. На рис. 6.6 б) буквою  $\varphi_{k0}$  з відповідним індексом  $k$  позначається початок групи відліків дискретних реалізацій, взятих по часу через період  $T$ . Кожну таку групу, яка очевидно є теж вкладеним процесом, в залежності від її початкової фази  $\varphi_k$  (рис. 6.7) будемо називати  $k$ -ою  $\varphi$ -серією. Таким чином,  $\varphi_k$ -серія – це послідовність спостережень віднесених до кутів в радіанах  $\varphi_k$  при послідовних відліках взятих через один оберт для валів, що обертаються.

При аналізі сигналів, що надходили з датчиків, встановлених на лабораторному стенді вітроенергоагрегатів, виходили з моделі періодичних випадкових процесів. Так як відліки кожної  $\varphi$ -серії взяті через період, то для випадку періодичного випадкового процесу вони повинні мати стаціонарні в часі характеристики (математичне сподівання, дисперсію та вищі моменти). А різні  $\varphi$ -серії повинні мати кореляційні функції, що будуть залежати лише від різниці номерів  $\varphi$ -серій. При виконанні даної роботи виходили з того, що вказані вище властивості мають місце для процесів, що спостерігаються. Зокрема кожна  $\varphi_k$ -серія являє собою стаціонарний ергодичний процес з дискретним часом, реалізація якого і фіксувалася за допомогою вимірювальних приладів. В науковій роботі [51] наводиться глибокий всебічний статистичний аналіз процесів на виході перерахованих вище давачів, встановлених у відповідності з описом, що наводиться у тексті. Але в даній дисертації розглядається лише процес практичного аналізу вібросигналів отриманих експериментально.

При цьому було проведено стохастичне оцінювання перших чотирьох моментів кожної  $\varphi_k$ -серії в залежності від її номера, а також проведено



гістограмний аналіз для кожної  $\varphi_k$ -серії і побудовано оцінки кореляційної функції.

В роботі період  $T$  було вибрано наступним чином – для низькообертової частини агрегата  $T = 60/72 = 0,833\text{с}$ , а для високообертової частини  $T = 60/1465 = 0,04096\text{с}$ , а крок дискретизації АЦП в обох випадках дорівнював 64 мкс. Спостерігається реалізація, що фіксується у вигляді масиву  $G = \{S_g, g \in 0, N-1\}$ , де  $N$  – обсяг основної вибірки – загальна кількість усіх відліків, які фіксуються у вигляді масиву  $G$  в пам'яті АЦП з кроком за часом  $\Delta t$ . В роботі було вибрано  $\Delta t = 64 \times 10^{-6}\text{с}$  – період квантування по часі, а  $N = 16000$ .

Потім за допомогою окремої розробленої програми формується матриця  $\varphi$ -серій, яку позначимо через  $\Phi$ . Кожен рядок цієї матриці містить всі елементи  $k$ -ї  $\varphi$ -серії, їх в кожному рядку  $z$  – число періодів. Таким чином

$$\Phi = \{\varphi_{k,j}, k \in \overline{0, r-1}, j \in \overline{0, z-1}\}, \quad (6.1)$$

де  $r$  – кількість серій – рядків матриці  $\Phi$ , яка дорівнює кількості відліків на періоді  $h$  або в ціле число разів менше неї. Причому  $\Delta\varphi$  – крок в радіанах між елементами  $\varphi$ -серій на рис. 6.7.

В нашому випадку кількість відліків на періоді в матриці  $S$  дорівнювала  $h = 640$ . Тому тривалість одного періоду (оберту) швидкообертового вала  $T = \Delta t \times h = 0,041\text{с}$ . Загальна тривалість  $N$  спостережень, що зафіксовані в  $S$  становить 1,25 с. В нашому випадку для високообертової частини кількість періодів становить  $z = \frac{16000}{h} = 25$ .

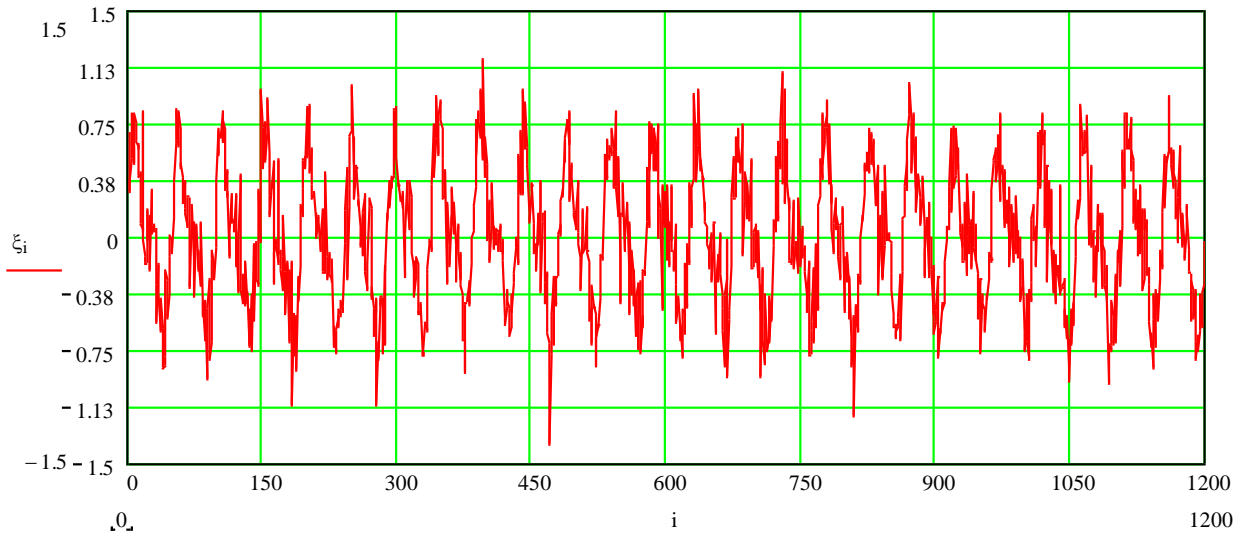


Рис. 6.8. Одна з експериментально отриманих реалізацій віброприскорення за допомогою датчика ВП1

На рисунку 6.8 наводиться одна з реалізацій практично отримана в процесі експеримента з датчика ВП1, схематично зображена на рисунку 6.6 б).

Шляхом обробки матриці  $\Phi$  формується матриця-колонка оцінок математичних сподівань для кожної  $\varphi_k$ -серії

$$v = \{v_k, k = \overline{0, r-1}\},$$

де

$$v_k = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{z-1} \varphi_{kj}. \quad (6.2)$$

На малюнку 6.9 наводиться графік зміни в часі на періоді оцінки математичного сподівання (*тренда*)  $v_k$  при аналізі сигналу з датчика ВП1.

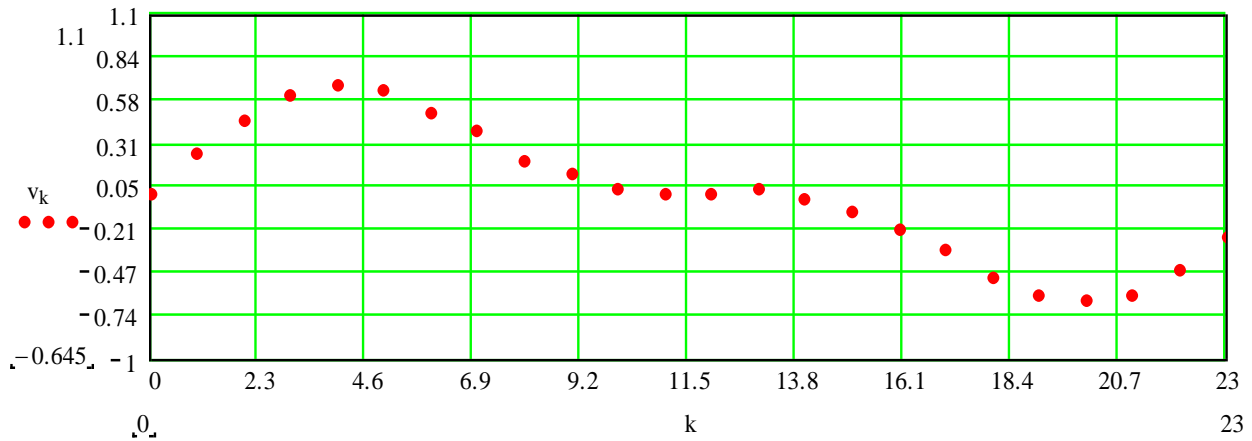


Рис.6.9. Графік зміни в часі (дискретно) оцінки математичного сподівання для віброприскорення на періоді по реалізації рисунка 4.10 (тренд)

$v^T =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
	0	0.012	0.108	0.268	0.377	0.479	0.544	0.608	0.653	0.681	0.636	0.605	0.692	0.48	0.42	0.341	0.271

Рис.6.10. Відрізок числового ряду початкових значень графіка рисунка 6.9

Оцінки точності величин, розрахованих по формулі (6.2) дають наступні результати. Виходячи з того, що величина  $v_k$  належить до  $SSub(\Omega)$  і одночасно належать до класу гільбертових гауссових випадкових величин  $L_2(\Omega)$ , описаних в розділі 2, а це значить, що для них коефіцієнт субгауссовості рівний одиниці, приходимо до висновку, що одночасно мають місце оцінки точності як за допомогою нерівності Чебишева (2.12), так і за формулами оцінок точності на базі субгауссового стандарту (2.17). Тому при довірчому інтервалі  $\pm 3\mu\mu_k$  в кожній точці визначення  $v_k$ ,  $k = \overline{0, r-1}$  нерівності  $|v_k| < 3\mu\mu_k$ ,  $k = \overline{0, r-1}$ , виконуються виходячи з  $L_2(\Omega)$  за нерівністю Чебишева згідно (2.12) при  $\mathbf{D}\xi = \mu\mu_k^2$  з ймовірність 0,89, а виходячи з  $SSub(\Omega)$ , згідно (2.17), – з ймовірність 0,98.

Тут величина  $\mu\mu_k^2$  являє собою оцінки дисперсій кожного елемента  $\varphi_k$ -серії і визначається за формулою

$$\mu\mu_k^2 = \frac{1}{r-2} \sum_{j=0}^{r-1} (\varphi_{kj} - v_k)^2. \quad (6.3)$$

На рис. 6.11 наведено графік зміни оцінки СКВ однієї з реалізацій фі-серії отриманої експериментально, для якої на рис. 6.9 наведено графік зміни оцінки математичного сподівання.

Спектральний аналіз функції зміни в часі (рис.6.9) оцінки (6.2) за допомогою базиса дискретного перетворення Фур'є виявив дві основні частотні гармоніки: першу з частотою обертання вала, а другу на подвійній частоті з амплітудою, що становить приблизно 0,4 від амплітуди першої.

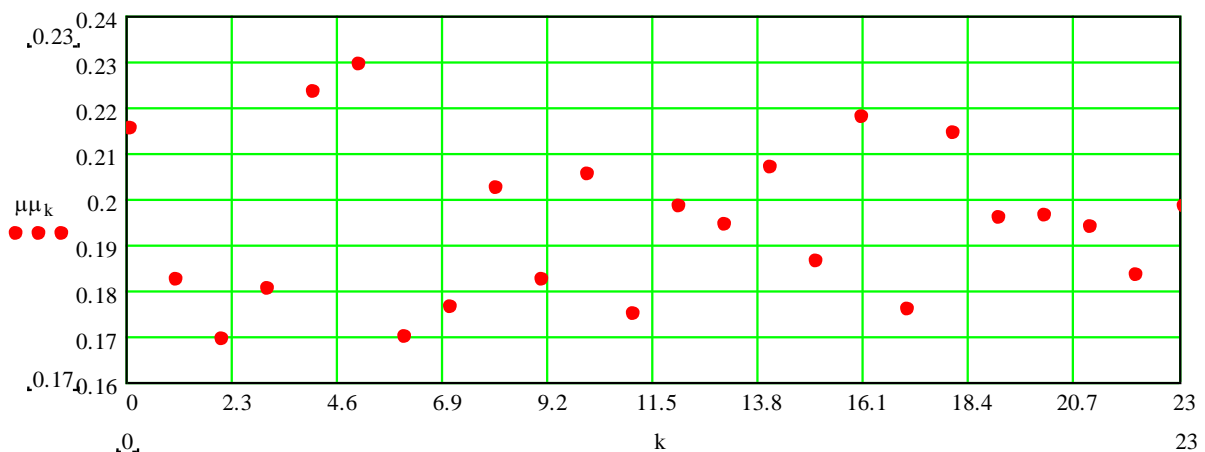


Рис.6.11. Графік зміни в часі оцінки СКВ на періоді, що стосується реалізації рисунка 6.8

Через  $\Phi - v$  позначимо матрицю, яка отримується з (6.1) шляхом центрування кожного рядка  $\varphi_k$ -серії своєю  $k$ -ю оцінкою математичного сподівання. Вона має вид

$$\Phi - \nu = \begin{vmatrix} \varphi_{00} - \nu_0, & \varphi_{01} - \nu_0, & \dots, & \varphi_{0z-1} - \nu_0 \\ \varphi_{10} - \nu_1, & \varphi_{11} - \nu_1, & \dots, & \varphi_{1z-1} - \nu_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{r-10} - \nu_{r-1}, & \varphi_{r-11} - \nu_{r-1}, & \dots, & \varphi_{r-1z-1} - \nu_{r-1} \end{vmatrix} \quad (6.4)$$

Матрицю кореляційних коефіцієнтів фі-серій знаходимо з врахуванням (6.4) у вигляді

$$\frac{1}{r-2} (\Phi - \nu)(\Phi - \nu)^T = \begin{vmatrix} R_{00}, & R_{01}, \dots, & R_{0r-1} \\ R_{10}, & R_{11}, \dots, & R_{1r-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{r-10}, & R_{r-11}, \dots, & R_{r-1r-1} \end{vmatrix}. \quad (6.5)$$

Елементи головної діагоналі цієї матриці  $R_{kk}$  являють собою оцінки других центральних моментів кожної  $\varphi_k$ -серії.

На базі оцінок кореляційних функцій була проведена оцінка енергетичних спектральних характеристик. При цьому основна увага була приділена випадку, коли з результатів гістограмного аналізу, за допомогою методики наведеної в теоретичній частині даної дисертації, визначався субгауссовий стандарт похибок проведених вимірювань, а також порівнювались ці результати з використанням нерівності Чебишева. Вони свідчать, що використання інформації про субгауссовість характеру похибок дає можливість суттєво зменшити величину методичних похибок при оцінюванні точності результатів при такій обробці.

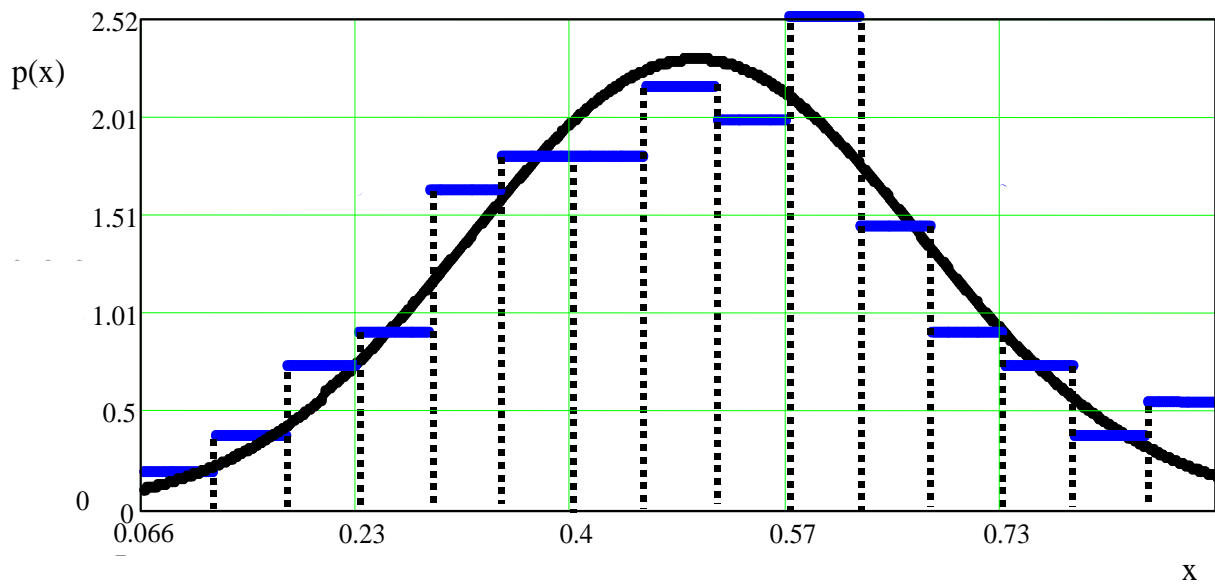


Рис.6.12. Гістограма та згладжуюча її крива 13-го типу по Пірсону,  
отримані експериментально

На рис. 6.12 наводяться графіки гістограми та згладжуючої її кривої 1-го типу по системі Пірсона (а більш точно 13-го типу) для  $\varphi_k$ -серії отриманої з реалізації рис. 6.8. Гіпотеза про їх близькість перевірялась автоматично по розробленій в дисертації програмі з використанням  $\chi^2$ -критерію і дала позитивний результат. А саме граничне значення  $X_{Гр} = 27.688$ . Величина  $\chi^2 = 9.449$ , тобто  $X_{Гр} > \chi^2$ , при коефіцієнті довіри 0.99, гіпотеза стосовно приналежності до 13 типу вірна. Це значить, що досліджувана  $\varphi_k$ -серія має розподіл що належить до класу  $SSub(\Omega)$

Коефіцієнт субгаусовості отриманий за розробленою методикою  $S \approx 1$ , а це означає, що в кожній точці відліку рис. 6.9 субгаусовий стандарт приблизно дорівнює  $\mu\mu_k$ , графік зміни яких зображено на рис 6.12. Останнє дає можливість побудувати оцінки точності значень наведених на рис 6.9. При цьому довірчі ймовірності в кожній точці визначені по нерівності Чебишева

119

приблизно дорівнюють 0.89, а по субгаусовому стандарту 0.98, для довірчого інтервалу  $\pm 3\mu_k$ .

## ВИСНОВКИ

В роботі вирішено складну науково-технічну задачу дослідження математичної моделі субгауссових випадкових процесів, результати якого показали, що її використання дає можливість значно зменшити довжину довірчого інтервалу при тій же достовірності або підвищити довірчу ймовірність при тій же довжині довірчого інтервалу. Цей результат надає можливість для створення сучасних засобів вимірювання, які можуть бути використані у таких галузях народного господарства як приладобудування, енергомашинобудування та ін.

На базі розробленої методики, досліджено цілу низку відомих та широко вживаних в теорії ІВС законів розподілу, зокрема таких як арксинус, рівномірний, нормальний і інші, які належать до класу субгауссових процесів, і знайдено у явному вигляді формули для обчислення їх субгауссових стандартів.

Проведений аналіз наукових праць з обробки статистичних даних в умовах не стаціонарності по одній реалізації та огляд існуючих ІВС, що працюють в умовах явної фізичної не стаціонарності показав, що найбільш доцільними є методи стаціонаризації та виділення класів нестационарних процесів, для яких його можна застосовувати. Результати цього огляду фактично є рекомендаціями практичної реалізації ІВС діагностики.

Розроблено новий метод попередньої обробки інформаційної статистики, яка надходить з блока датчиків до модуля обробки шляхом використання масштабних множників на відповідних ділянках стаціонарності або шляхом відбору вкладених стаціонарних послідовностей переходить в стаціонаризовану модифікацію придатну для обробки класичними статистичними методами.

Розроблено систему програм, яка дала можливість створити теоретичну базу для побудови алгоритмічно-програмного забезпечення, яке зокрема призначено для роботи у складі ІВС вібродіагностики вітроелектричних агрегатів.

Вперше запропоновано та досліджено матрицю фі-серій, яка дозволяє по одній реалізації обробляти нестационарний періодичний процес, яким є



віброприскорення та інші інформаційні сигнали, що вимірюються при діагностиці енергоагрегатів. Це дозволило виділити стаціонарні, вкладені по відношенню до періодичного процесу компоненти і дослідити їх за допомогою гістограмного аналізу та спектрально-кореляційної теорії.

Придатність використання субгауссової моделі та її практична цінність були перевірені при випробуванні лабораторного зразка ІВС вібродіагностики вітроагрегату, що дало позитивні результати.

**Додаток А**

*Модель експоненційна (показникова).*

$$p(t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda x^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \lambda > 0.$$

*Модель нормального закону (Гауссівський розподіл).*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0.$$

*Логарифмічно-нормальна модель*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\log e}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - a)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad x \in (0, \infty), \sigma^2 > 0, -\infty < a < \infty.$$

*Модель Ерланга.*

$$p_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} x^n e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$n + 1$  - кількість доданків в сумі випадкових величин експоненційного типу, при  $n = 0$  маємо як частинний випадок одну експоненційно розподілену ВВ.

*Модель Вейбулла – Гніденко.*

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\alpha}{\sigma} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\sigma}}, & x \geq 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \sigma > 0.$$

Криві функції розподілу Вейбулла не належать сімейству кривих Пірсона.

*Модель арксинуса.*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & x \in (-a, a) \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases}.$$

*Модель Гамма-розподілу.*

$$p(t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

## Додаток Б

Алгоритми моделювання рівномірно розподілених величин

### Б.1 $\xi_j \leftarrow \text{mod}[(\xi_{j-1} + \xi_{j-2}), 4]$

$$\text{gen2}(n) := \left| \begin{array}{l} \xi_0 \leftarrow 1.2345678 \\ \xi_1 \leftarrow 3.16768686 \\ \text{for } j \in 2..n \\ \quad \xi_j \leftarrow \text{mod}[(\xi_{j-1} + \xi_{j-2}), 4] \\ \text{gen1} \leftarrow \frac{\xi}{4} \end{array} \right.$$

### Б.2 $\xi_j \leftarrow \text{mod}[(c \cdot \xi_{j-1}), 37]$

$$\text{gen3}(n) := \left| \begin{array}{l} \xi_0 \leftarrow 5.666887876 \\ c \leftarrow 37.2345678 \\ \text{for } j \in 1..n \\ \quad \xi_j \leftarrow \text{mod}[(c \cdot \xi_{j-1}), 37] \\ \text{gen3} \leftarrow \frac{\xi}{37} \end{array} \right.$$

### Б.3 $\xi_i \leftarrow c \cdot \xi_{i-1} - \text{floor}(c \cdot \xi_{i-1})$

$$\text{gen4}(n) := \left| \begin{array}{l} \xi_0 \leftarrow 0.666887876 \\ c \leftarrow 7.2345678 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \xi_i \leftarrow c \cdot \xi_{i-1} - \text{floor}(c \cdot \xi_{i-1}) \\ \text{gen4} \leftarrow \xi \end{array} \right.$$

**Додаток В**

**В.1**

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad y = \exp(-\lambda x), \quad \ln y = -\lambda x;$$

$$x = -\frac{\ln y}{\lambda}.$$

Імітаційне моделювання

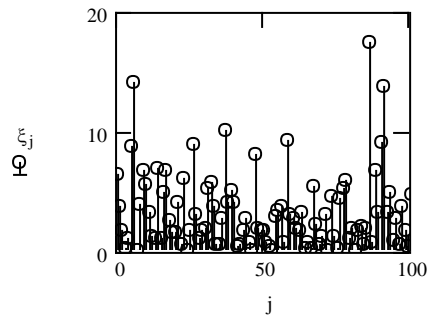
n := 100

j := 0..n

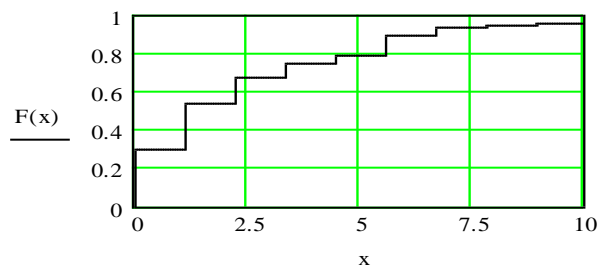
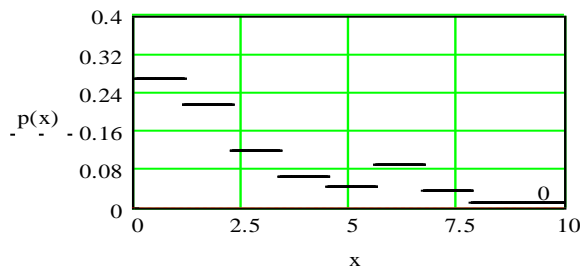
$\eta_j := \text{rnd}(1)$

Імітаційне моделювання  $\xi_j$  з експоненціальним розподілом

$$\lambda := 0.3 \quad \xi_j := \frac{-\ln(\eta_j)}{\lambda}$$



Результат імітаційного моделювання стаціонарного білого шуму з показниковим розподілом.



Гістограма та емпірична функція розподілу.

B.2

Άεçía÷áíÿ êðèòáð³ð Õ³-êáääðàò:  
 Ð³âáü çía÷èíñò³:

$\beta := 0.01$        $v := m - 2$

Άεçía÷áíÿ ÷èñèà ñòáíá³â ñâíáíæ (â³ëüíñò³):

$M := 0$        $v = 18$

$$p1(x) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$$

$s := 0.. m - 1$

$$p_s := \int_{H_s}^{H_{s+1}} p1(x) dx$$

Άεçía÷áíÿ ð³-êáääðàò

$$\chi^2 := n \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h \cdot \omega_k)^2}{p_k} - n$$

$\chi^2 = 26.74$

Éíñáðíñò³ ïí ð³-êáääðàò,  
 pchisq(p, q) ð³íòáððàèüíà ðóíéö³ÿ ðíçíñá³éò ð³-êáääðàò

$P\chi^2 := pchisq(\chi^2, v)$        $P\chi^2 = 0.916$

Éðíè ã³ñòíáðàèè  $h = 0.363$

Ðíçíað³.251

$$F(x) := \sum_{k=0}^{m-1} \omega_k \cdot \Phi(x - H_k) \cdot h$$

Çía÷áíÿ ïðíñà (êáàíð³ëÿ) ð³áíÿ  $\beta$

qchisq(p, q) ðóíéö³ÿ íáððíáíà áí áí ð³íòáððàèüííç ðóíéö³ç ðíçíñá³éò Õ³-êáääðàò

$Xgr := qchisq(1 - \beta, v)$

$Xgr = 34.805$        $\chi^2 = 26.74$

Íáðáððèà ã³íòáçè ïí ð³-êáääðàððèòáð³ð

Éíèè  $Xgr \geq \chi^2$  ðí ã³íòáçà ïðí ñíñáíáááíÿ áíððè÷ííáí³ ðáíð. ðíçíñá³è³á á³ðía

Éíèè  $Xgr < \chi^2$  ðí ã³íòáçà á³áðèèÿðüñÿ

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных систем. – М.: Энергия, 1977. – 536 с.
2. Скрыпник В.М. и др. Анализ надежности технических систем по цензурированным выборкам. М.: Радио и связь, 1988. – 184 с.
3. ГОСТ 16263 – 70 Метрология. Термины и обозначения. –М.: Изд-во стандартов, 1978.
4. Коваленко И.Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. –М.: Сов. радио, 1982. – 209 с.
5. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы: Пер. с англ. и дополнения Яглома А.М. –М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 167с.
6. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. –М.: Наука, 1980.
7. Броди С.М., Власенко О.Н., Марченко Б. Г. Расчет и планирование испытаний систем на надежность. – К.: Наукова думка, 1970.
8. Кендал М., Стюарт А. Статистические выводы и связи. Пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – 899 с.
9. Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. –М.: Мир, 1961 – 648 с.
10. Державна система забезпечення єдності вимірювань. Метрологія. Терміни та визначення. ДСТУ 2681-94. –Київ: Видання офіційне. Держстандарт України. – 68с.
11. Гриневич Ф.Б., Таранов С.Г., Марченко Б.Г., Мислович М.В. Перспективи розвитку приладобудування, інформаційно-вимірювальних систем та метрологічного забезпечення для електроенергетики України// Тех. електродинаміка. 2000. №6. – с. 3
12. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971. – 326 с.

13. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. –К.: “Техніка”, 2004. – 287 с.
14. ГОСТ 18242–72. Статистический приемочный контроль по альтернативному признаку. Планы контроля. –М.: Изд. – во стандартов, 1972
15. Беляев Ю.К. Статистические методы обработки неполных данных о надежности изделий. “Политехнический музей”. –М.: “Знание” 1987 г. – 112 с.
16. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 411 с.
17. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982. – 296с.
18. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Моделювання випадкових процесів. Навчальний посібник для студентів механіко-математичних спеціальностей. – К.: ВЦ “Київський університет”, 1999. – 223с.
19. Груничев А.С., Кузнецов В.А., Шипов Е.В. Испытания радиоэлектронной аппаратуры. –М.: Сов. радио., 1969. – 288 с.
20. Давенпорт В.Б., Рут В.Л. Введение в теорию случайных сигналов и шума. Пер. с англ. –М.: ИЛ, 1960. – 468 с.
21. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. Пер. с англ. –М.: “Сов. радио”, 1967 г. –299 с.
22. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – Т.1,2,4.
23. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика.–М.: Издательство иностранной литературы, 1960.–434с.
24. Кендал М.Дж., Стюарт А. Теория распределений: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 588 с.
25. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982. – 296с.
26. Марченко Н.Б., Мислович М.В. Особливості використання нестационарних лінійних випадкових процесів для моделювання процесів в



електроенергетиці // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: “Силова електроніка та енергоефективність”. – 2004. – Ч. 3. – С.97-100.

27. Марченко Н.Б. Анализ точностных характеристик при моделировании линейных субгауссовых случайных процессов и их использование в информационно-измерительных системах // Электронное моделирование. –2004. – Т. 26, №6. – С. 63-71.

28. Марченко Н.Б. Використання моделей субгауссівських процесів при моделюванні інформаційних сигналів // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: “Проблеми сучасної електротехніки”. – 2004. – Ч. 5. – С.117-120.

29. Марченко Н.Б. Особенности моделирования субгауссовых случайных величин и процессов // Сборник тезисов докладов по материалам 10-й Юбилейной международной научной конференции “Теория и техника передачи, приема и обработки информации”. – Ч. 2. – Харьков-Туапсе: Харьковский национальный университет радиоэлектроники. – 2004. – С. 159-160.

30. Марченко Н.Б. Деякі особливості використання субгауссових випадкових процесів в інформаційно-вимірювальних системах □□// Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т.9, №4. – С. 139-146.

31. Марченко Б.Г., Приймак М.В. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем // Праці Інституту електродинаміки. – Київ: ІЕД НАН України. – 1999. – Вип. 1. – С.129-153.

32. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976. – 352с.

33. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496с.

34. Ціделко В.Д., Яремчук Н.А. Невизначеність вимірювання. Обробка даних і подання результату вимірювання: Монографія. – К.: “Видавництво «Політехніка»”, 2002. – 176 с.

35. Марченко Н.Б. Про другий наслідок з нерівності Чебишева та його використання при оцінці точності вимірювань // Тези доповідей V Міжнародної науково-технічної конференції “АВІА-2003”. – Т.1. – Київ: Національний авіаційний університет. – 2003. – С.11.101-11.104.
36. Марченко Б.Г., Марченко Н.Б., Фриз М.Є. Спеціальні глави математики: Навчальний посібник. – Тернопіль: ТДТУ ім. Івана Пулюя, 2004. – 159 с.
37. Кендал М.Дж., Стюарт А. Теория распределений. Пер. с англ. / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1966. – Т.1. – 587с.
38. Лукач Е. Характеристические функции. Пер. с англ. / Под ред. В.М. Золотарьова. – М.: Наука, 1979.–424с.
39. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576с.
40. Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 556с.
41. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – Киев: Выща школа, 1983. – 455с.
42. Цапенко М.П. Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование.: Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 440 с.
43. Тёрнер Д. Вероятность, статистика и исследование операций. – М.: Статистика, 1976. – 432с.
44. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. – Киев: Наукова думка, 1973. – 192с.
45. Марченко Б.Г., Щербак Л.М. Линейные случайные процессы и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1975. – 186с.
46. Марченко В.Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике. – Киев: Наукова думка, 1992. – 212с.
47. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 406с.

48. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496с.
49. Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика. Пер. с франц. / Под ред. Ю.В. Линника. – М.: Наука, 1972. – 383с.
50. Шметтерер Л. Введение в математическую статистику. – М.: Наука, 1976. – 520с.
51. Розробка ефективних методів та засобів визначення і контролю параметрів та характеристик електричних та віброакустичних процесів, що супроводжують роботу вітроелектричних агрегатів, на базі пересувної лабораторії. Договір №1209-02 від 19 листопада 2002 р. Науково-технічний звіт по роботі. – Київ – 2003. – 94с.
52. Андрианов В.Н., Быстрицкий Д.Н., Вашкевич К.П., Секторов В.Р. Ветроэлектрические станции. – М.: Л.: Госэнергоиздат, 1960. – 320с.
53. Де Ренло. Ветроэнергетика. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 280с.
54. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука, 1968. – 548с.
55. Элдerton П. Кривые распределения численностей и корреляция. – М.: Наука, 1924. – 426 с.
56. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. – М.: Мир, 1967. – 498 с.
57. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632с.
58. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1966. – Т.1. – 607 с.
59. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648с.
60. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. –К.: “Техніка”, 2004. – 287 с.
61. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. Пер. с англ. –М.: “Мир”, 1973, – 957 с.

62. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
63. Нечипорук В.В. Стаціонаризація кусково-нестационарних пуассонівських процесів відмов. // Тех. електродинаміка, ПСЕ частина 6, - 2004. – с. 115-118.
64. Дуб Дж. Вероятностные процессы. Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1956. – 835 с.
65. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
66. Новиков В.С. Техническая эксплуатация и надежность авиационного радиооборудования: Учеб. пособ. – М.: Транспорт, 1970. – 232 с.
67. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974. – 463 с.
68. Marchenko N., Myslovitch M., Sysak R. A Prototype of Diagnostic System of Wind-Driven Power Units // VIth International Workshop Computational Problems of Electrical Engineering. – Zakopane (Poland). – 2004. – P.75-78.
69. Marchenko N., Myslovitch M., Sysak R. Vibration Diagnostics of Wind-Driven Power Units with Usage of Statistical Expert System // Przegląd Elektrotechniczny. – Zakopane (Poland). – 2005. – № 2. – P.53-57.
70. Береговой А.И., Быстриков А.Ф., Котвицкий Н.Н., Марченко Б.Г., Мыслович М.В., Осадчий Е.П. Вибродиагностика электрических машин. Статистический подход и устройство. (Препр. / АН УССР. Ин-т электродинамики; № 364). – Киев, 1984. – 56 с.
71. Перфилов О.Л., Шаварин В.Н. Некоторые вопросы развития ветроэнергетики // Энергетическое строительство. – 1991. – № 3. – С. 29 – 33.
72. Пиковский А.В. Аналитический обзор. Электрооборудование для ветроэнергетики. – М.: Аналитика, 1991. – С. 179.
73. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара: Справочник / Под ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 1978. – Кн. 1. – 448 с. – Кн. 2. – 439 с.

74. Беляев Л.С., Санеев Б.Г., Филиппов С.П. и др. под ред. Воропая Н.И. Системные исследования проблем энергетики. –Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 558 с.

75. Зварич В.Н. Приборы и системы вибродиагностики электроэнергетического оборудования// Тех. электродинамика. 2001. №2.– с. 67

76. Зварич В.Н. Системы вибродиагностики и программное обеспечение диагностирования электроэнергетического оборудования// Тех. электродинамика. – 2002. – №6. – с.66

77. Марченко Б.Г., Мыслович М.В. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. –К.: Наукова думка, 1972. – 196 с.

78. Марченко Б.Г., Мыслович М.В. Теория диагностики энергоагрегатов по девиации вращающихся узлов и ее применение для дизель-электрических генераторов // Техн. электродинамика. – Ч.1. – 1998. №5. – С. 36 – 40. Ч.2. Там же. – 1998. №6. – С. 39 – 42. Ч.3. Там же. – 1999. №1 – С. 99 – 63. Ч.4. Там же. – 1999. №4 – С. 40 – 45.