

УДК 519.21

Н.Б. Марченко, к.т.н.

Національний авіаційний університет, м.Київ

E-mail: nadmar@i.ua

Аналіз точності наближених розв'язків при оцінці частоти за положенням максимуму спектра для вагової функції Кайзера-Бесселя

Розглядається проблема оцінки частоти та амплітуди сигналу, що приймається на фоні завад за допомогою вагової функції Кайзера-Бесселя. Описуються залежності максимальних значень методичних похибок від нормованої частоти при використанні вагової функції Кайзера-Бесселя.

Ключові слова: просторо-часовий сигнал, вагова функція, спектр, частота, спектральна щільність, перетворення Фур'є.

Типовими задачами в радіотехнічних та радіолокаційних системах є задачі оцінки частоти та амплітуди сигналу, що приймається на фоні завад. Для оцінки частоти і амплітуди сигналу на фоні завад існують різні методи: класичні методи спектрального аналізу на основі перетворення Фур'є (ПФ), методи, засновані на лінійних моделях, методи компенсації завад, тощо. Чимало загальних питань оцінки параметрів сигналів висвітлено в роботах [2, 5].

Розробка алгоритмів швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) після опублікування в 1965 р. алгоритму Кулі-Тьюкі [4] значно розширила роль спектрального аналізу і перетворило його із засобу вузькоспеціалізованих наукових досліджень в інструмент розв'язку багатьох практичних задач. Основні недоліки класичних методів спектрального аналізу обумовлені низькою роздільною здатністю та дією бічних пелюсток, що спотворюють сигнал. Роздільна здатність за частотою та мінімальна методична похибка оцінки, що забезпечуються класичними методами, не можуть бути менші за величину, обернену довжині запису даних, та не залежать від характеристик даних, що аналізуються. В зв'язку з цим, питання щодо підвищення точності оцінок частоти та амплітуди сигналу на основі перетворення Фур'є є важливим як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Ефективними засобами зниження методичної похибки оцінок є застосування згладжуючи вагових функцій (ВФ). При знаходженні ВФ критеріями оптимальності вважаються: мінімум рівня бокових пелюсток, мінімум ширини головного пелюстка, мінімум помилки оцінювання спектральної щільності потужності. Вибір вагової функції та масштабного множника суттєвим чином залежить від об'єму вибірки, від можливого ступеня гладкості функції та від інших апріорних припущень. Обробка даних за допомогою ВФ дозволяє послабити вплив бокових пелюсток, але лише за рахунок погіршення спектральної здатності. В зв'язку з цим є актуальною задача створення таких ВФ та алгоритмів на їх основі, які при мінімальному зниженні спектральної здатності дозволяють виключити або мінімізувати методичну складову похибки оцінки частоти.

Дослідження ВФ, викладені в [5], показали, що для максимального динамічного діапазону виявлених сигналів оптимальними є ВФ Кайзера-Бесселя, Барсилона-Темеша та Блекмана-Херріса. Вікно Кайзера-Бесселя при обмеженій довжині і обмеженій загальній енергії, забезпечує максимальну енергію в заданій смузі частот. ВФ Кайзера-Бесселя визначається виразом

$$w(n) = \frac{I_0 \left[\pi \alpha \sqrt{1,0 - (2n/N)^2} \right]}{I_0[\pi \alpha]}, \quad 0 \leq |n| \leq N/2,$$

де $I_0[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(X/2)^{2k}}{k!} \right]^2$. Параметр $\pi\alpha$ дорівнює половині добутку довжини ВФ на

смугу частот. Наведемо нормуючий вираз спектральної щільності обмеженої вибірки гармонічного сигналу з ВФ Кайзера-Бесселя:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{KB}(\alpha, x) = \exp(j\Phi) \frac{\pi\alpha}{sh(\pi\alpha)} \left[\frac{sh\sqrt{(\pi\alpha)^2 - (x_p\pi)^2}}{\sqrt{(\pi\alpha)^2 - (x_p\pi)^2}} + \right. \\ \left. + \exp(-j2\Phi) \frac{sh\sqrt{(\pi\alpha)^2 - (x_\Sigma\pi)^2}}{\sqrt{(\pi\alpha)^2 - (x_\Sigma\pi)^2}} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де α – параметр, що визначає ширину головного пелюстка та рівень бічних пелюстків, Φ – фаза, $x_\Sigma = x_n - x_1$.

Зауважимо, що граничний випадок ВФ Кайзера-Бесселя при $\alpha = 0$ відповідає рівномірній ВФ, що широко використовується в теоретичному аналізі та практичних застосуваннях. Тобто ВФ Кайзера-Бесселя дає можливість аналізу впливу рівня бокових пелюстків спектру від максимального (-13,6 дБ) до будь-яких низьких рівнів [5].

Для оцінки частоти сигналу необхідно розв'язати рівняння

$$\frac{d}{d\Omega} |\dot{S}(\Omega)|^2 = \frac{d}{d\Omega} \left| \sum_{i=1}^N \dot{S}_i(\Omega) \right|^2 = 0, \quad (2)$$

$\dot{S}_i(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) u_i(t) \exp(-j\Omega t) dt$ – спектральна щільність i -ї компоненти зваженої

вибірки сигналу $u(t) = \sum_{i=1}^N U_i(t) \cos[\varphi_i(t)]$, отриманого на симетричному часовому інтервалі $[-0,5T \dots 0,5T]$; $w(t)$ – ВФ, симетрична відносно середини вибірки сигналу; U_i – амплітуда i -ї компоненти сигналу.

Обмежуючись в розкладі квадратичним наближенням, отримаємо перший наближений розв'язок рівняння (2) та, відповідно, похибку

$$\Delta x_1 = x_{\max 1} - x_1 \approx - \left\{ \dot{S}(x_1) \right\}^2 / \left\{ \dot{S}(x_1) \right\}'' . \quad (3)$$

Перший наближений розв'язок для (3) можна привести до вигляду [1, 2]:

$$\Delta x_1 \approx \frac{-[\cos\Phi_\Sigma + S_n(x_1)/S_1(0)]S_n'(x_1)}{S_1''(0) + S_2''(x_1)S_n(x_1)/S_1(0) + \cos\Phi_\Sigma \left[S_1''(0)S_n(x_1)/S_1(0) + S_n''(x_1) \right]}, \quad (4)$$

де $\Phi_\Sigma = \Phi_n - \Phi_1$.

Друге наближення виразимо через перше наближення та поправочний коефіцієнт

$$\Delta x_2 \approx \Delta x_1 K_\Delta, \quad (5)$$

$$\text{де } K_{\Delta} \approx \frac{S'_n(x_1)}{(\Delta x_1)^2 S''_n(x_1)} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{2(\Delta x_1)^2 S'''_n(x_1)}{S'_n(x_1)}} \right\}. \quad (6)$$

Із (1), (4), (5) та (6) після перетворень отримуємо перший наближений розв'язок та поправочний коефіцієнт:

$$\Delta x_{1K} \approx \frac{-[\cos \Phi_{\Sigma} + S_n(\alpha, x_1)] S'_n(\alpha, x_1)}{S''_1(\alpha, 0) + S''_2(\alpha, x_1) S_n(\alpha, x_1) + \cos \Phi_{\Sigma} [S''_1(\alpha, 0) S_n(\alpha, x_1) + S''_n(\alpha, x_1)]}, \quad (7)$$

$$K_{\Delta K} \approx \frac{S'_n(\alpha, x_1)}{(\Delta x_{1K})^2 S''_n(\alpha, x_1)} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{2(\Delta x_{1K})^2 S'''_n(\alpha, x_1)}{S'_n(\alpha, x_1)}} \right\}, \quad (8)$$

$$\text{де } S_n(\alpha, x_1) = \frac{A\pi\alpha}{sh\pi\alpha} \frac{shY}{Y}; \quad Y = \pi\sqrt{\alpha^2 - (x_n - x_1)^2};$$

$$S'_n(\alpha, x_1) = \frac{A\pi\alpha}{sh\pi\alpha} \frac{\pi^2(x_n - x_1)(shY - YchY)}{Y^3}; \quad S''_n(\alpha, x_1) = \frac{A\pi\alpha}{sh\pi\alpha} \frac{\pi^4(P_1 shY - P_2 YchY)}{Y^5};$$

$$S'''_n(\alpha, x_1) = \frac{A\pi\alpha}{sh\pi\alpha} \frac{\pi^6(x_n - x_1)(P_3 YchY - P_4 shY)}{Y^7}; \quad S''_1(\alpha, 0) = \alpha^{-2}(1 - \pi\alpha th\pi\alpha);$$

$$P_1 = \alpha^2 + (x_n - x_1)^2(2 + Y^2); \quad P_2 = \alpha^2 + 2(x_n - x_1)^2; \quad P_3 = -9\alpha^2 - (x_n - x_1)^2(6 + Y^2);$$

$$P_4 = 9\alpha^2 + 3\pi^2\alpha^4 + 6(x_n - x_1)^2 - 3\pi^2(x_n - x_1)^4. \text{ Індокси відповідають віконній функції, яку застосовують; індекс } K \text{ використовується для ВФ Кайзера-Бесселя.}$$

Враховуючи визначення похибки через вплив бокових пелюсток умова точного обчислення частоти (2) в цьому випадку набуває вигляду:

$$\pi\sqrt{(x_n - x_1)_{TK}^2 - \alpha^2} = tg\left(\pi\sqrt{(x_n - x_1)_{TK}^2 - \alpha^2}\right). \quad (9)$$

Позначимо $k = \sqrt{(x_n - x_1)_{TK}^2 - \alpha^2}$, наведемо перші шість коренів рівняння (9):

$$k_1 = 1,43029666; \quad k_2 = 2,45902403; \quad k_3 = 3,47088972;$$

$$k_4 = 4,47740858; \quad k_5 = 5,48153665; \quad k_6 = 6,48438713. \quad (10)$$

Для ВФ Кайзера-Бесселя положення точок з нульовою похибкою оцінюється на осі нормованої частоти залежить від номера кореня рівняння (9) та параметра ВФ α . При збільшенні номера та параметра α ці точки переміщуються в бік більших частот, так як при цьому розширюється головний пелюсток спектру.

На рис.1 показана залежність положення на осі нормованої частоти перших шести точок з нульовою похибкою оцінювання x_{1TK} від величини α . Цифри біля кожного графіка відповідають номеру точки з нульовою похибкою оцінювання.

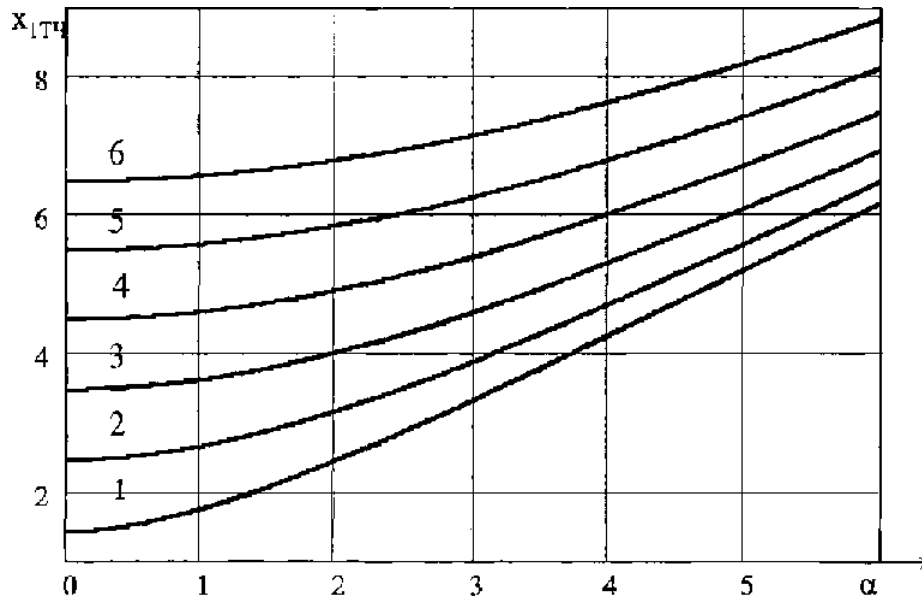


Рис.1. Залежність положення точок різниці частот з нульовою методичною похибкою вимірювання від номера точки і величини α для ВФ Кайзера-Бесселя.

З (7) при $\cos(\Phi_n - \Phi_1) = \pm 1$ отримуємо максимальне значення похибки

$$\Delta x_{1K \max} \approx \frac{(-1)^n S'_n(\alpha, x_1)}{S''_1(\alpha, 0) + (-1)^{n+1} S''_n(\alpha, x_1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

$$\Delta x_{K \max 2} \approx \Delta x_{K \max 1} K_{\Delta K}. \quad (12)$$

Очевидно, чим більший рівень бічних пелюсток ВФ, що застосовується, тим більша можлива невідповідність отриманих наближених розв'язків з дійсними значеннями похибки. Тому доцільно аналіз наближених розв'язків провести спочатку для граничного випадку ВФ Кайзера-Бесселя при $\alpha = 0$, що відповідає рівномірній ВФ, що має високий рівень бічних пелюсток.

Оцінимо ступінь відповідності отриманих розв'язків точним значенням похибки оцінки частоти обмеженої вибірки моногармонічного сигналу. В цьому випадку в отриманих виразах слід прийняти $A = 1$; $x_n - x_1 = \Delta x_p = 2x_1$; $\Phi_n - \Phi_1 = -2\Phi_1$.

На рис.2 суцільною та точковою лініями показані залежності максимальної похибки оцінювання (11) від відносної частоти, відповідно при $n = 1$ або 2 та $\alpha = 0$, а пунктиром та штрих пунктиром – залежності максимальної похибки оцінювання (12). З малюнка видно, що в зоні взаємодії головного пелюстка отриманого спектра додатної області частот похибка оцінювання коливається біля нульового значення, із затухаючою амплітудою коливання.

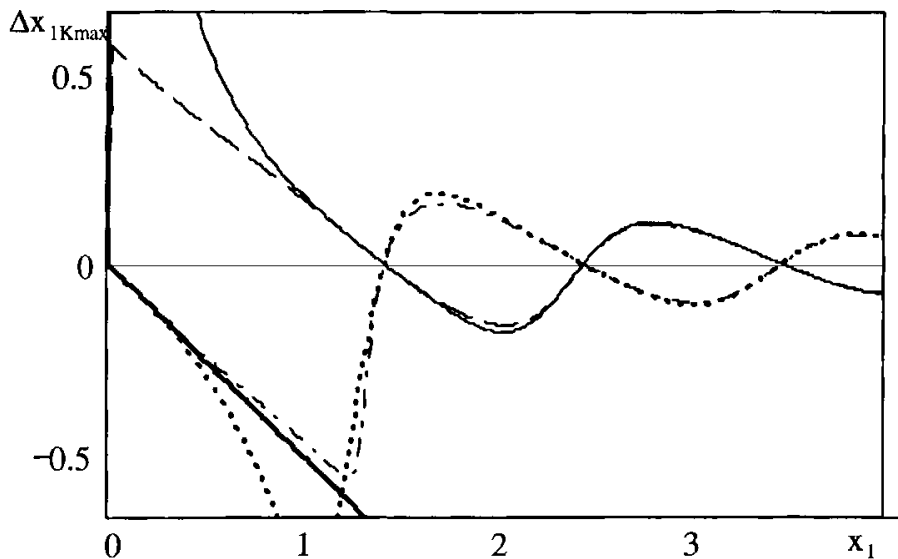


Рис.2. Залежності максимальних значень методичних похибок від нормованої частоти при використанні ВФ Кайзера-Бесселя

При $\alpha = 0$ швидкість затухання амплітуди коливання з ростом частоти відповідає швидкості затухання рівня бічних пелюсток. Положення точок з нульовими значеннями похибок визначаються виразом (9) для обох розв'язків. В цих точках обидва наближення розв'язків збігаються до точного і похибки у визначенні похибок $\Delta x_{nox1}(x_1) = x_{\max} - x_{\max1}$, $\Delta x_{nox2}(x_1) = x_{\max} - x_{\max2}$ дорівнюють нулю. В такому випадку, враховуючи осцилюючий характер похибки, можна припустити що помилка у визначенні похибки теж має коливний характер і досягає максимальних значень в області екстремумів похибки. У відповідності з (12) похибка приймає максимальні значення на частотах $\Delta x_p = 1,7247435$ ($x_1 = 0,8623717$) при $\cos(2\Phi) = 1$ та $\Delta x_p = 2,05709025$ та $\cos(2\Phi) = -1$. Для цих частот чисельний розв'язок рівняння

$$\frac{d}{dx} S_{o1}(x) \pm \frac{d}{dx} S_{on}(x) = 0$$

надає значення положення максимуму спектральних щільностей рівних відповідно $x_{\max} = 1,027247$ та $x_{\max} = 0,86367015$ [3]. Відповідні похибки оцінювання частоти з використанням уточнюючого розв'язку (12) мають значення $\Delta x_{2K_{\max}} = 0,3209344$ та $\Delta x_{2K_{\max}} = -0,3244775$.

Отже помилки у визначенні похибки при використанні (12) у відповідних точках складають 1,53% та 2,68%. Причому формула (12) дає занижене значення похибки. Аналогічно визначаємо, що при використанні першопочаткової оцінки (11) в екстремумах похибки помилка досягає 10% та 14,7% відповідно. Причому формула (11) дає завищене значення похибки. Тобто огинаючи точних розв'язків рівняння (2) в області бокових пелюсток спектральної щільності містяться між розв'язками (11) та (12). Враховуючи, що при збільшенні частоти сигналу і, відповідно при зменшенні рівня бокових пелюсток різниця між уточненим розв'язком (12) та початковою оцінкою (11) швидко зменшиться. Знайдені значення помилок визначення похибки оцінки частоти в інтервалі зміни частот сигналу $[1,4302966; \infty)$ близькі до максимальних і зменшуються при збільшенні частоти сигналу.

Література

1. Давыдочкин В.М. Методы снижения погрешности оценки параметров сигнала при наличии помех в ближней частотной радиолокации // Доклады XII Междунар. НТК "Радиолокация, навигация, связь". Воронеж, 2006. Том. 3. ,С. 1641-1650.
2. Дворкович А.В. Ещё об одном методе расчёта эффективных оконных функций, используемых при гармоническом анализе с помощью ДПФ / Цифровая обработка сигналов. 2001. № 3. С. 13-18.
3. Дженкинс Г., Ватте Д. Спектральный анализ и его приложения. Выпуск 1. - М.: Мир, 1972. 316 с. Дженкинс Г., Ватте Д. Спектральный анализ и его приложения в 2-х вып. //Пер. с англ. -М.: Мир, вып.1, 1971, вып.2, 1972.
4. Кожевников Н. И., Краснощекова Т. И., Шишкин Н. Е. Ряды и интегралы Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа.-М., Наука, 1964
5. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье.// ТИЭР. 1978. Т. 66, №1. с. 60-96.