Лекция 4: Методи опису складних систем із змінними параметрами. Метод простору станів.

1. Рівняння стану
2. Опис лінійної системи в просторі станів
3. Дискретний опис системи в просторі станів

Диференціальні рівняння, що описують фізичний процес, завжди можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. В цьому випадку говорять, що це опис у вигляді рівнянь стану або в просторі станів (state-space form) . Головна перевага такої форми запису у тому, що для вирішення цих рівнянь можна використовувати числові методи. Крім того, чітко простежується фізична суть процесу, зокрема зв'язок між внутрішніми змінними і зовнішніми вхідним і вихідним сигналами. Вивчення систем управління з більш ніж одним входом і виходом, простіше а формі рівнянь стану. Основою математичного апарату для моделей в просторі станів служить лінійна алгебра — векторна і матричні нотації значно спрощують опис. Проте методи лінійної алгебри не потрібні, щоб одержати основні уявлення про динаміку системи. У загальному випадку рівняння балансу нелінійні і пов'язані один з одним. Таким чином, опис динаміки процесу може бути набором нелінійних, зв'язаних між собою диференціальних рівнянь першого порядку для балансу енергії, загальної маси, маси компонентів, сил і моментів. Рівняння стану є практичним і зручним способом опису динамічних систем. Станом називається набір всіх змінних — так званих **змінних стану** (state variable), похідні першого порядку від яких входять в рівняння опису динамічної системи. Концепція рівнянь стану має фундаментальне значення. Якщо відомий поточний стан системи (змінні стану) і вхідні сигнали, то можна передбачити її подальшу поведінку. Тобто, як був досягнутий поточний стан, знати не потрібно. Іншими словами, стан — це мінімальна кількість інформації про систему, яка необхідна, щоб передбачити її майбутню поведінку. Стан **x** можна представити як вектор-стовпець, компоненти якого — змінні стану:

$$x-(x_1 x_2 \dots x_n)^T$$

Безпосередньо виміряти всі змінні стану можна в окремих випадках, внутрішні змінні, за яким і не вдається стежити за допомогою датчиків. Тому опис в просторі станів називають також **внутрішнім описом** (internal description) Вихідні величини — вимірювання, позначаються через т $y_1, y_2, \dots, y_p$ і утворюють вектор **y**

$$y=(y_1 y_2 \dots y_p)^T$$

У загальному випадку число датчиків p, пов'язаних з технічним процесом, менше числа змінних стану n. Тому обчислення x по y — нетривіальна задача. На будь-яку технічну систему впливають вхідні сигнали двох типів — сигнали, які можна змінювати вручну або автоматично якими-небудь технічними способами, і сигнали, якими управляти неможливо. Сигнали першого типу називаються управляючими сигналами або змінними управління $u_1, u_2, \dots, u_r$ утворюють вектор і $u=(u_1 u_2 \dots u_l)^T$. Вхідні сигнали другого типу можуть впливати на систему, але не піддаються управлінню. Величина цих сигналів відображає вплив зовнішнього середовища на систему, наприклад зміна (збурення) навантаження, викликана температурою, радіацією, небажаною магнітною дією ("наведеннями") і т.д. Всі ці сигнали позначаються вектором v

$$v=(v_1 v_2 \dots v_n)^T$$

Метою системи управління є обчислення на основі вимірювань таких управляючих сигналів u, щоб не дивлячись на вплив v, технічна система виконувала поставлені задачі. Керовану систему можна представити у вигляді блок-схеми, на якій показані управляючі сигнали, збурення і вихідні змінні.

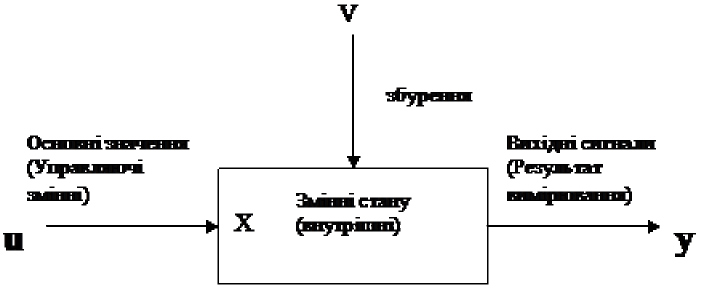

Рис. Блок-схема керованої системи концепція пояснюється на наступному простому прикладі.

2. Опис лінійної системи в просторі станів

Більшість прикладів є лінійними динамічними системами, і тому їх можна змоделювати лінійними диференціальними рівняннями, в яких відсутні члени, що містять добуток змінних станів, вхідних і вихідних сигналів — $x_1^2, x \cdot u$ або $x_1 \cdot x_2$ Лінійна система, що має n змінних стану і r вхідних змінних, описується слідуючими рівняння станів з сталими коефіцієнтами:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r}u_r \;\vdots\; \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nr}u_r$$

де параметри a_{ij} і b_{ij} — константи. Оскільки ці рівняння є диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами, вони володіють рядом привабливих властивостей. Наприклад, завжди можна знайти аналітичне рішення x(t) при довільних вхідних сигналах u(t). Початкові умови визначаються n константами

$$x(0) = (x_{10} x_{20} \dots x_{n0})^T$$

У матричному виді рівняння стани записуються значно простіше

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & \cdots & b_{2r} \\ . & . & . \\ b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

де А і В — матриці, що містять постійні коефіцієнти

При єдиному управляючому сигналі матриця В має тільки один стовпець.

Між внутрішніми змінними стану x і вимірюваннями y існує лінійна залежність. Крім того, іноді є прямий зв'язок між управляючими змінними і вихідними змінними y

$$y_1 = c_{11}x_1 \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1r}u_r \;\vdots\; y_p = c_{p1}x_1 \dots + c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + \dots + d_{pr}u_r$$

де або у векторно-матричних позначеннях

$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & \cdots & d_{2r} \\ . & . & . \\ d_{p2} & \cdots & d_{pr} \end{pmatrix}$$

Якщо є тільки одна вихідна змінна, то С складається з одного рядка. Звичайно немає прямого зв'язку між вхідними і вихідними змінними, і тоді матриця D — нульова. Лінійна система має багато переваг (порівняйте, наприклад, з деякими властивостями нелінійних систем. Найважливішим властивістю лінійних систем є принцип суперпозиції (superposition principle) . Це означає, зокрема, що якщо при якій-небудь зміні амплітуди вхідного сигналу Δu вихідний сигнал зміниться на величину Δy, то при подвоєній зміні вхідного сигналу $2 \cdot \Delta u$ вихідний сигнал зміниться на величину $2 \cdot \Delta y$

Лінійні системи володіють властивістю адитивності вхідних сигналів, якщо вхідний сигнал u1 викликає вихідний сигнал y1, а u2 сигнал y2 то загальний сигнал u1 + u2 на вході, приведе на виході до y1.+ y2 Як наслідок, вплив сигналів управління і можна аналізувати окремо. Не дивлячись на всі переваги лінійного опису, застосовувати його слід з великою обережністю, оскільки більшість технічних процесів істотно нелінійна. Якщо нелінійності "гладкі", тобто відсутні скачки, то за певних умов нелінійну систему можна розглядати як лінійну. Тоді лінійний опис справедливий для малих відхилень навколо точки рівноваги.

Багато параметрів промислових процесів повинні підтримуватися поблизу деяких постійних — опорних — значень; метою систем управління є приведення параметрів процесу до їх опорних значень. Поки відхилення від опорного значення малі, лінійний опис є адекватним. Проте при великих відхиленнях потрібно точніші моделі, оскільки вплив нелінійності буде істотним.

Опис в просторі станів

Нелінійний процес можна апроксимувати різницевим рівнянням

$$x[(k+1)h] \approx x(kh) + h \cdot f(x,u)$$

Апроксимація справедлива, якщо до достатньо малий і похідна "гладка". Різницеве рівняння по суті таке ж, що і при чисельному моделюванні. Лінійна система з постійними коефіцієнтами в дискретному вигляді представляється таким чином

$$x_1[(k+1)h] = (1 + h \cdot a_{11}) \cdot x_1(kh) + \ldots + h \cdot a_{1n} \cdot x_n(kh) + h \cdot b_{11} \cdot u_1(kh) + \ldots + h \cdot b_{1r} \cdot u_r(kh) \; \vdots$$
$$x_1[(k+1)h] = (1 + h \cdot a_{11}) \cdot x_1(kh) + \ldots + h \cdot a_{1n} \cdot x_n(kh) + h \cdot b_{11} \cdot u_1(kh) + \ldots + h \cdot b_{1r} \cdot u_r(kh)$$

Матричних позначеннях це можна записати

$$x_1[(k+1)h] = x(kh) + h \cdot A \cdot x(kh) + h \cdot B \cdot u(kh) = (I + h \cdot A) \cdot x(kh) + B \cdot h \cdot u(kh)$$

Для лінійної або лінеаризованої системи апроксимація не обов'язкова. Оскільки лінійні диференціальні рівняння можна вирішити аналітично, відповідні рівняння для дискретного уявлення можна одержати з рівняння. Передбачається, що сигнал управління і(0 залишається постійним між моментами вибірки, тобто система включає схему утримання. Дискретну модель можна записати в матричному вигляді

$x[(k+1)h] = \Phi \cdot x(kh) + \Gamma \cdot u(kh)$, де Ф — матриця розмірністю nxn, а Г – **матриця** розмірністю nxr. Зв'язок між матрицями А і В і матрицями Ф і Г наступний

$$\Phi = e^{Ah} = I + hA + \frac{(hA)^2}{2!} + \ldots \quad \Gamma = \left(Ih + \frac{(hA)^2}{2!} + \ldots\right) \cdot B$$

де I — одинична матриця. Перетворення між матрицями для безперервної і дискретної моделей можна виконати з використанням стандартних програм. Апроксимація кінцевими різницями

$$\Phi \approx I \cdot h, \Gamma = h \cdot B$$

прагне до точного рішення при малих значеннях інтервалу вибірки А. Оскільки вимірювання відбуваються періодично, для дискретної моделі справедливе тільки в моменти вибірки $y(kh) = C \cdot x(kh) + D \cdot u(kh)$

Рішення рівнянь дискретної моделі на цифровій ЕОМ виходить досить просто: рішення x(kh)в послідовні моменти часу обчислюються крок за кроком на основі різницевих рівнянь. Відносини вхід/вихід і оператор зсуву У дискретних моделях, так само як і в безперервних, часто зручно напряму зв'язати вхід процесу і u його виходом у, особливо, коли регулятор записаний в такій же формі, тобто він оперує вихідною величиною процесу для підрахунку управляючого сигналу. Дискретно-часовий аналіз простіше виконати за допомогою оператора **зсуву q (shift operator)**. Ефект від застосування оператора q дозалежної від часу змінної z(t) такий же, що і зсувом за часом на інтервал h — його також називають зсувом вперед

$$q \cdot z(kh) = z\left|(k+1)h\right|$$

За допомогою оператора зсуву різницеві рівняння можна замінити на алгебру, які простіші перетворювати і вирішувати. Тут використаний принцип, аналогічний перетворенню Лапласа, для спрощення диференціальних рівнянь. Оператор зворотнього q^{-1} (back shrift operator) зрушення зміщує функцію часу на один крок назад.

$$q^{-1} \cdot z(kh) = z\left|(k-1)h\right|$$

У загальному випадку оператора зрушення можна застосовувати кілька разів

$$q \cdot z(kh) = q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = z\left|(k+1)h\right|$$

Оператора зміщення q можна застосовувати і до вектора x(kh), що еквівалентне використовуванню цього оператора до кожного його компоненту. Якщо існує дискретне представлення в просторі станів [рівняння (4.9) і (4.10)], то, виключивши вектор x і привівши подібні члени, одержимо зв'язок між входом і виходом у вигляді

$$y\left|(k+1)h\right| + a_1 \cdot y\left|(k+n-1)h\right| + \ldots + a_n \cdot y(kh) = b_0 \cdot u\left|(k+n)h\right| + \ldots + b_n \cdot u(kh)$$

Застосування оператора зміщення q дає компактніший запис

$$(q^n + a_1 \cdot q^{n-1} + \ldots + q_n) \cdot y(kh) = (b_0 \cdot q^n + b_1 \cdot q^{n-1} + \cdots + b_n) \cdot u(kh) \qquad (4.13)$$

Вище було показано, що залежність між вхідними і вихідними змінними лінійної системи можна представити передавальною функцією G(s), визначуваної як відношення зображень Лапласа вхідних і вихідних сигналів системи. Аналогічний опис можна одержати за допомогою оператора зрушення q і для дискретних систем. Дискретний передатний оператор H(q) визначається з рівняння (4.13) таким чином

$$H(q) = \frac{y(kh)}{u(kh)} = \frac{b_0 \cdot q^n + b_1 \cdot q^{n-1} + \cdots + b_n}{q^n + a_1 \cdot q^{n-1} + \ldots + q_n}$$

Вирази в обох частинах рівняння (4.13) можна зсунути на n періодів назад, що еквівалентне їх множенню на q^{-n}. Тоді відношення вхід/вихід виражається у вигляді

$$y(kh) + a_1 \cdot y\left|(k-1)h\right| + \ldots + a_n \cdot y((k-n)h) = b_0 \cdot u(kh) + \ldots + b_n \cdot u((k-n)h)$$

Використовуючи оператора зворотного зміщення, це відношення можна записати простіше

$$(1 + a_1 \cdot q^1 + \ldots + q_n^{-n}) \cdot y(kh) = (b_0 + b_1 \cdot q^{-1} + \cdots + b_n q^{-n}) \cdot u(kh)$$

Відповідний дискретний передавальний оператор має вигляд

$$H(q)^* = \frac{y(kh)}{u(kh)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot q^{-1} + \cdots + b_n q^{-n}}{1 + a_1 \cdot q^1 + \ldots + q_n^{-n}}$$

Якщо чисельник і знаменник рівняння (4.15) помножити на q^n, то в результаті одержимо рівняння (4.14), тобто

$$H^*(q^{-1}) = H(q)$$

Дискретного передавального оператора можна одержати безпосередньо з опису в просторі станів [рівняння (4.9) і (4.10)]. Нижче сформульований результат, доказ якого дається в підручниках по теорії управління. Зв'язок між дискретним передавальним оператором і матрицями в просторі станів визначається наступним співвідношенням

$$H(q) = H(q)^{*} = \frac{y(kh)}{u(kh)} = C \cdot (q \cdot I - \Phi)^{1} \cdot \Gamma + D$$

При отриманні цього виразу q розглядається як комплексне число, хоча формально є оператором. Для систем з одним входом u і одним виходом y, матриця C має один рядок, матриця Г — один стовпець, а матриця Ф — розмірність п х п. Переважно матриця D нульова, що означає відсутність алгебраїчних (тобто прямих фізичних) зв'язків між входом і виходом технічного процесу. В дискретному випадку, як і для безперервної передатної функції, коефіцієнти однозначно визначаються з внутрішнього опису в просторі станів. Аналогічно, оскільки вектор змінних стану **x** можна сформувати, використовується різні варіанти уявлення, з H(q) можна одержати безліч матриць Ф, Г, C і D. Опис системи у вигляді передатного оператора є однозначним, а за допомогою матриць змінних стану - ні.

Дискретний опис системи в просторі станів

Як приклад дискретного опису в просторі станів розглянемо ще раз механічну систему з прикладу 4.11. Спочатку визначається крок вибірки h. Після цього можна обчислити матриці Ф і Г

$$\Phi = e^{Ah} = I + Ah + \frac{1}{2}(ah)^2 + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = (Ih + \frac{1}{2}(ah)^2 + \ldots) \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{2m} \\ \frac{h}{m} \end{pmatrix} = \frac{h}{m} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Дискретна модель механічної системи набуває вигляд

$$x[(k+1)h] = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x(kh) + \frac{h}{m} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(kh), \quad y(kh) - C \cdot x(kh) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x(kh)$$

Тепер передавального оператора можна обчислити, використовуючи рівняння (4.16). Помітимо, що q ми розглядаємо як комплексне число. Тоді

$$H(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q-1 & -h \\ 0 & q-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{h^2}{2m} \\ \frac{h}{m} \end{pmatrix} = \frac{h^2}{2m} \frac{q+1}{(q-1)^2}$$

Процеси, в яких перехід в інший стан залежить тільки від поточного стану і вхідних сигналів, називаються марківськими процесами (Markovprocess). У відомому сенсі марківські процеси схожі на диференціальні рівняння, проте між ними є фундаментальна відмінність - у першому випадку кожна змінна стану має амплітуду (наприклад, значення температури або тиску), що безперервно змінюється, але вибірка і обробка відбуваються тільки в певні моменти часу; навпаки, марківський процес "перемикається" між кінцевим числом детермінованих станів. Граф станів можна розглядати як інформаційну структуру процесу автоматизації.