УДК 62.50

О.М. Глазок, к.т.н. (Національний авіаційний університет, Україна)

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДРУГИМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Запропоновано метод чисельного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням допоміжної функції, значення якої є мірою нев'язки отриманого наближеного розв'язку. Для введеної допоміжної функції задається диференційне рівняння, що визначає її поведінку в процесі розв'язку.

Багато задач математичної фізики зводяться до чисельного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Часто задачі математичного моделювання найрізноманітніших процесів із застосуванням ЕОМ, а також чимало чисельних методів вирішення різних (особливо нелінійних) задач включають в себе розв'язання систем лінійних рівнянь як елементарний крок відповідного алгоритму. Теорія отримання точних та наближених розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь є досить старою і дослідженою галуззю обчислювальної математики. Існує обширна література, присвячена методам прикладної лінійної алгебри, а програмні продукти, що реалізують найбільш популярні алгоритми обчислювальної лінійної алгебри, стали невід'ємною частиною прикладного програмного забезпечення, зокрема, сучасних математичних пакетів [1, 2].

Однак алгоритми, реалізовані в такому програмному забезпеченні, як правило, відносяться до класу алгоритмів прямого розв'язання задачі, і орієнтовані на розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь невеликих чи середніх розмірів (до кількох сотень чи тисяч рівнянь), в той час як сучасні прикладні задачі в результаті апроксимації неперервного функційного рівняння кінцево-різницевою задачею нерідко породжують системи, у яких кількість рівнянь може складати сотні тисяч чи навіть мільони, і потреби практики в розв'язанні задач все більшої розмірності зростають. Джерелом таких обчислювальних задач є математичні моделі різноманітних систем з розподіленими параметрами (задачі механіки суцільних середовищ, гідродинаміки, аеродинаміки, міцності та опору матеріалів), а також математичні моделі технічних пристроїв, що складаються з великого числа елементів, сполучених локальними зв'язками – наприклад, задачі розрахунку складних будівельних конструкцій і великих електричних кіл. Математичні моделі, що записуються як системи лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності, зустрічаються також в математичній економіці, біології та інших галузях науки.

Сучасний бурхливий розвиток і розповсюдження обчислювальної техніки надає в розпорядження дослідника обчислювальні потужності, що дозволяють розв'язувати задачі великих розмірностей; в той же час в математичному забезпеченні спостерігається ряд проблем, що мотивує дослідників пропонувати нові методи розв'язання таких задач [3, 4]. Серед труднощів практичного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності найперше слід відзначити обмеженість оперативної пам'яті ЕОМ та значну тривалість розрахунків. Розмірність задач, а відтак і обсяг даних, що необхідно зберігати та обробити при їх розв'язанні, зростають швидше, ніж обсяг оперативної пам'яті доступних обчислювальних машин, і швидше, ніж їх швидкісні характеристики. В значній мірі обмеження на розмірність систем можна б було зняти, якщо використовувати для зберігання елементів матриці зовнішні запам'ятовуючі пристрої. Однак в цьому випадку в багато разів зростають як витрати машинного часу, так і складність відповідних алгоритмів.

Деякою мірою гостроту цієї проблеми пом'якшує той факт, що в системах з великою кількістю елементів зв'язки між елементами найчастіше є локальними, і, відповідно, матриці систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що описують такі системи, найчастіше є розрідженими. Тому є можливість за рахунок раціональної організації обчислювального процесу добитися значного зменшення потреб у оперативній пам'яті для зберігання даних, оскільки немає потреби зберігати в пам'яті нульові елементи (яких у розрідженій матриці переважна більшість), а також зменшення тривалості обчислень – завдяки тому, що немає потреби виконувати над нульовими елементами арифметичні дії, результат яких заздалегідь відомий.

Оцінимо виграш, отриманий від відкидання нульових елементів для m-діагональної матриці розмірності N (так, наприклад, для класичної різницевої схеми, що наближує диференційне рівняння другого порядку щодо функції однієї координати, m=3, а N відповідає кількості вузлів сітки.) У головній діагоналі матриці (що містить ненульові елементи) міститься N елементів, а інші (m–1) діагоналей з ненульовими елементами містять на один чи декілька елементів менше. Оцінимо кількість елементів в цих діагоналях зверху також величиною N. Таким чином, всього у матриці є менше ніж $m \times N$ елементів, що не є завідомо нульовими. А відносний вміст ненульових елементів менший, ніж $\frac{mN}{N^2} = \frac{m}{N}$. Решта елементів – більше ніж $N(N–m)$ елементів – нульові, а відносний вміст нульових елементів більший, ніж $\frac{N-m}{N^2}$. Величина m відповідає кількості зв'язків одного елемента і в більшості задач, де зв'язки між елементами локальні, є невеликим числом. А розмірність задачі N може сягати сотень тисяч і мільонів, отже, видно, що раціоналізація обчислень приносить значну економію. До цього слід додати, що, якщо в задачі задано крайові значення, то і в «ненульових» діагоналях частина елементів можуть виявитись нульовими, оскільки крайові значення враховуються у постійному векторі правих частин.

Наступним кроком до зменшення апаратних вимог є застосування ітераційних методів розв'язання замість прямих. Ітераційні методи застосовують головним чином для розв'язання задач великої розмірності, коли використання прямих методів неможливе через названі вище обмеження. Не вдається до таких задач застосувати і методи з виключенням, оскільки при їх використанні велике число нульових елементів перетворюється на ненульові і матриця втрачає властивість розрідженості. При використанні ж ітераційних методів в ході ітераційного процесу матриця не міняється, і вона, природно, залишається розрідженою. Велика ефективність ітераційних методів в порівнянні з прямими методами тісно пов'язана з можливістю істотного використання розрідженості матриць. Можна зробити висновок, що актуальним є пошук нових ітераційних методів розв'язання названих задач, орієнтованих на роботу з системами рівнянь великої розмірності. Перспективним напрямком такого пошуку виглядає застосування методу функцій Ляпунова. Теорія першого та другого методів Ляпунова продовжує активно розвиватися, зокрема в застосуваннях до розв'язання задач, в яких описується чи визначається поведінка систем з розподіленими параметрами [5, 6].

Метою даної статті є застосування для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь ітераційного методу, заснованого на методі функцій Ляпунова. Поставимо за мету визначити допоміжну функцію, значення якої є мірою нев'язки отриманого наближеного розв'язку, і для введеної допоміжної функції задати диференційне рівняння, що визначає бажану поведінку допоміжної функції в процесі розв'язку.

Розглянемо задачу пошуку розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь, записаної у векторно-матричній формі як

$$AX=B \quad , \tag{1}$$

де A – задана постійна матриця, B – заданий постійний вектор правих частин рівнянь, X – вектор розв'язків, який необхідно знайти.

Визначимо скалярну допоміжну функцію

$$V(X) = (AX–B)^T Q(AX–B)= X^T A^T QAX - X^T A^T QB - B^T QAX + B^T QB \quad , \tag{2}$$

де Q – вагова матриця, $Q=Q^T$. Якщо $X=X_i$ (наближений вектор розв'язків, знайдений на i-й ітерації), то $AX–B$ – це вектор нев'язки знайденого розв'язку системи рівнянь (1), а значення функції $V(X)$ можна розглядати як квадратичну норму вектора нев'язки, знайдену з ваговою матрицею Q.

Розглянемо вектор X як вектор-функцію часу $X(t)$, маючи на увазі мету організувати ітераційний процес так, щоб значення сходилися до точного розв'язку системи (1). Тоді і функція $V(X)$ змінюється в часі. Нехай закон загасания допоміжної функції (2) в часі задано рівнянням

$$\dot{V} + cV = 0 \quad , \tag{3}$$

де c – деяка постійна величина, значення якої можемо обрати довільно, таким чином визначаючи швидкість спадання норми нев'язки.

Залежність $V(X)$ (2) визначає скалярну функцію V багатовимірного вектора X, тому рівняння (3) не визначає вектор-функцію $X(t)$ однозначно, а лише задає один зв'язок між координатами вектора X. З метою визначення однозначного розв'язку системи (1) використаємо в якості додаткового зв'язку наступний закон руху X, виконання якого ми також будемо вимагати:

$$\dot{X} = -k\frac{\partial V}{\partial X} \quad , \tag{4}$$

де k – деяка (не довільна) величина, яку буде визначено нижче.

Використовуючи визначення (2), а також властивості $\frac{\partial}{\partial X}\left(X^T C\right) = C$, $\frac{\partial}{\partial X}\left(SX\right) = S^T$, знайдемо похідну допоміжної функції по вектору X:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}\left(X^T A^T QAX\right) - \frac{\partial}{\partial X}\left(X^T A^T QB\right) - \frac{\partial}{\partial X}\left(B^T QAX\right) + 0 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial X}\left(X^T\left[A^T QAX\right]\right) + \frac{\partial}{\partial X}\left(\left[X^T A^T QA\right]X\right) - \frac{\partial}{\partial X}\left(X^T\left[A^T QB\right]\right) - \frac{\partial}{\partial X}\left(\left[B^T QA\right]X\right) =$$

$$= A^T QAX + \left[X^T A^T QA\right]^T - A^T QB - \left[B^T QA\right]^T =$$

$$= A^T QAX + A^T QAX - A^T QB - A^T QB = 2A^T Q\left(AX - B\right) . \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial X^T} = \left[\frac{\partial V}{\partial X}\right]^T = \left[2A^T Q\left(AX - B\right)\right]^T = 2\left(AX - B\right)^T QA \quad . \tag{6}$$

Зокрема, в скалярному випадку (одновимірний вектор X) співвідношення (2) та (5) набудуть вигляду:

$$v(x) = (ax - b)q(ax - b) = q(ax - b)^2 \quad ;$$

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = 2qa(ax - b) \quad .$$

Підставимо до рівняння (3) похідну $\dot{V}$, знайдену в силу X, при цьому використаємо співвідношення (6) і (4):

$$\dot{V}\Big|_{\dot{X}} + cV = \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T \dot{X} + cV = \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T\left(-k\frac{\partial V}{\partial X}\right) + cV = 0 .$$

Тепер можна визначити значення k, при якому є сумісними рівняння (3) і (4):

$$k\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)=cV \quad ; \quad k=\frac{cV}{\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)} \quad ;$$

$$k=\frac{c(AX\text{-}B)^T Q(AX\text{-}B)}{\left(2A^T Q(AX-B)\right)^T\left(2A^T Q(AX-B)\right)}=\frac{c(AX\text{-}B)^T Q(AX\text{-}B)}{4(AX-B)^T QAA^T Q(AX-B)}=k(X)\,.$$

Як бачимо, вимога сумісності рівнянь (1)–(4) призвела до того, що величина k виявилася функцією вектора стану.

Тепер перейдемо безпосередньо до пошуку розв’язку системи рівнянь (1). Оскільки нашою метою є побудувати вектор-функцію , яка сходиться до точного розв’язку, то для знаходження цього розв’язку необхідно інтегрувати рівняння (4), у якому похідна $\frac{\partial V}{\partial X}$ задана співвідношенням (5).

$$\dot{X}=-k\frac{\partial V}{\partial X}=-\frac{c}{4}\cdot\frac{(AX\text{-}B)^T Q(AX\text{-}B)}{(AX-B)^T QAA^T Q(AX-B)}\cdot 2A^T Q(AX-B)\ ;$$

$$\dot{X}=-k\frac{\partial V}{\partial X}=-\frac{c}{2}\cdot\frac{(AX\text{-}B)^T Q(AX\text{-}B)}{(AX-B)^T QAA^T Q(AX-B)}\cdot A^T Q(AX-B)\quad . \qquad (7)$$

Можна зробити висновок, що мети побудови досягнуто: співвідношення (7) є диференційним рівнянням щодо вектор-функції X, яке не містить інших невідомих величин, і його легко розв’язати шляхом чисельного інтегрування на ЕОМ за одним з відомих методів, обравши деяке початкове наближення вектора X. Величина c, на яку не було накладено ніяких обмежень, може бути обрана довільно і визначатиме швидкість наближення послідовності отриманих значень до точного розв’язку.

Напрямки подальших досліджень наступні: вивчити умови збіжності алгоритму (7); вивчити можливості забезпечення чи пришвидшення збіжності за рахунок маніпулювання в ході пошуку розв’язку величиною c (константою загасання в рівнянні (3)) та ваговою матрицею Q; з’ясувати, чи можливе застосування інших форм умов (3) і (4) і як це відіб’ється на вигляді розв’язку; розробити раціональні з погляду обсягу обчислень методи чисельного інтегрування диференційного рівняння (7); з’ясувати питання обумовленості методу та можливий вплив похибок чисельного розв’язання на точність результату; порівняти обчислювальну ефективність запропонованого методу та існуючих.

Список літератури

1. *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 523 с.

2. *Форсайт М.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1969. – 167 с.

3. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 333 с.

4. *Ерёмин М.А.* Определитель Ерёмина в линейной и нелинейной алгебре. Линейное и нелинейное программирование. – М: КомКнига, 2006. – 120 стр.

5. *Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: КомКнига, 2007. – 320 с.

6. *Анашкин О.В.* Развитие второго метода Ляпунова в теории устойчивости дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений: Дис... д-ра физ.-мат. наук. – Симф., 2002. – 307 с.