УДК 629.13

О. М. Глазок (Національний Авіаційний Університет, Україна)

МЕТОД СИНТЕЗУ НЕЛІНІЙНИХ ЯКІСНИХ РЕГУЛЯТОРІВ

Запропоновано новий метод синтезу регуляторів для нелінійних динамічних об'єктів. Задача синтезу розв'язується модифікованим методом аналітичного конструювання на основі квадратичного функціоналу якості з послідовним врахуванням нелінійних членів та показниками затухання, що визначають швидкодію. Розглянуто результати імітаційного моделювання при дослідженні якості отриманих керованих систем.

Побудова сучасних динамічних керованих об'єктів поєднує етапи безпосереднього проектування об'єкта і системи керування. Керування має вичерпати всі ресурси об'єкта і забезпечити максимально можливу якість його функціонування, а також при цьому надати проектувальнику можливість перенесення з об'єкта на систему керування максимальної кількості функцій. При цьому поряд з вимогою стійкості при проектуванні систем керування необхідно враховувати і вимоги до якості ([1]). Для широкого класу динамічних систем характерною ознакою є їх функціонування в великому експлуатаційному діапазоні вихідних координат, де не виконуються умови можливості лінеаризації. Такі режими руху як правило не є режимами стабілізації у звичайному розумінні, і звести задачу обчислення траєкторії до задач стабілізації неможливо. Але і задачі стабілізації на цих траєкторіях мають враховувати великі відхилення керувань і вихідних координат від програмних значень, що має місце за умов дії великих збурень. В багатьох випадках спроби побудувати нелінійні регулятори не продемонстрували значних переваг перед лінійними.. Тому актуальним є побудування методів синтезу регуляторів для нелінійних об'єктів, зокрема з поліноміальними правими частинами, які забезпечують задану якість перехідних процесів. Ряд підходів до розв’язання цієї задачі було запропоновано в роботах [1],[2].

Розглянемо синтез регулятора для динамічної системи, що описується системою диференційних рівнянь:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} + \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad (1)\,,$$

у якій останній доданок відображає нелінійності об'єкта. Нелінійну частину $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ цієї системи можна представити у вигляді ступеневого ряду :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(2)} + \mathbf{F}_{(3)} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{F}_i(\mathbf{X}) \qquad (2)$$

по відповідним ступеням компонентів вектора стану $\mathbf{X}$. Керування необхідно обрати таким чином, щоб досягти мінімуму функціонала якості

$$I = \int_{t=0}^{\infty} (w_1(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t)) + w_2(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t))dt = \int_{0}^{\infty} (\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{PX} + \mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{RU} + c_0V_0 + c_1V_1 + \ldots + c_kV_k)dt \qquad (3)\,.$$

Тут $w_1(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t)) = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{PX} + \mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{RU}$ - звичайно вживаний підінтегральний вираз квадратичного функціоналу якості, а V_0, V_1, ...,V_k - компоненти розкладу функції Ляпунова $V(\mathbf{X})$ в ступеневий ряд по компонентах p –мірного вектора $\mathbf{X}$:

$$V(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{k} V_i(\mathbf{X}) \quad , \quad V_m = \sum_{v_1,v_2,\ldots,v_p} a_{v_1,v_2,\ldots,v_p}\, x_1^{v_1} x_2^{v_2} \ldots x_p^{v_p} \quad , \quad \sum_{i=1}^{p} v_i = m+2 \qquad (4)\,.$$

Для розв'язання конкретної задачі щодо керування об'єктом, описаним системою (1), коефіцієнти якої відомі, ми будемо знаходити заздалегідь невідому функцію Ляпунова, або ж коефіцієнти $a_{v_1,v_2,...,v_p}$ її розкладу в ступеневий ряд (4). Зважаючи на те, що на оптимальній траєкторії $V(\mathbf{X}) = \int_0^\infty (\mathbf{X^T P X} + \mathbf{U^T P U} + c_0 V_0 + ... + c_k V_k)dt$, або ж

$$\dot{V} = w_1(\mathbf{X},\mathbf{U}) + c_0 V_0 + ... \ ... + c_k V_k = \mathbf{X^T P X} + \mathbf{U^T R U} + c_0 V_0 + ... + c_k V_k \quad (5),$$

таке визначення функціоналу призведе до того, що під час руху об'єкта, описаного системою (1), поведінка $V(\mathbf{X})$, як функції, що задовольняє диференційному рівнянню (5), матиме складену природу, а саме: на траєкторії руху об'єкта (1) функція $V(\mathbf{X})$ матиме, по-перше, власне "затухання", швидкість якого визначається коефіцієнтами $c_0 ... c_k$ для кожної моди окремо, і, по-друге, "вимушений рух" під впливом частини $\mathbf{X^T P X} + \mathbf{U^T R U}$ підінтегрального виразу , яка щодо $V(\mathbf{X})$ виконуватиме роль керування.

Розглянемо спочатку лінеаризовану систему (1) і проведемо для неї синтез лінійного регулятора. Для лінеаризованої системи $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$ функціонал якості (3) матиме вигляд

$$I = \int_0^\infty (\mathbf{X^T P X} + \mathbf{U^T R U} + c_0 V_0)dt \quad (6).$$

Записавши для цієї системи рівняння Беллмана :

$$\min_{u \in \Omega(u)} \{\mathbf{X^T P X} + \mathbf{U^T R U} + c_0 V_0 + \dot{V}_0\} = 0 \quad ,$$

і враховуючи, що, оскільки функція Ляпунова є функцією лише $\mathbf{X}$, в силу системи справедливе співвідношення $\dot{V}_0 = (\partial V_0(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{X})(\mathbf{AX} + \mathbf{BU})$, можна знайти оптимальне керування для лінеаризованої системи : $\mathbf{U}_{opt.lin} = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}(\partial V_0 / \partial \mathbf{X})$.

Функцію V_0 знайдемо як $V_0 = \mathbf{X^T Q_0 X}$, де $\mathbf{Q}_0$ - симетрична, позитивно визначена матриця, що є коренем матричного рівняння Ріккаті

$$\mathbf{Q_0 B R^{-1} B Q_0} - \frac{1}{2}(c_0\mathbf{E} + 2\mathbf{A})^{\mathbf{T}}\mathbf{Q_0} - \frac{1}{2}\mathbf{Q_0}(c_0\mathbf{E} + 2\mathbf{A}) - \mathbf{P} = 0 \quad (7).$$

Ряд методів чисельного розв'язання породжених даною задачею матричних рівнянь (7) було запропоновано в роботах [2],[3]. Як правило, такі методи базуються на процедурах виділення власних векторів або проекторів блочної матриці, складеної з матричних коефіцієнтів рівняння, що розв'язується ([2], [3], [4]) . Слід зазначити, що для деяких об'єктів задачу пошуку оптимального лінійного керування з функціоналом якості (6), що відповідає задачі побудови лінійного регулятора при c_0=0, не вдається розв'язати за допомогою ітераційних чисельних процедур, які звичайно використовують для цієї мети. Так, наприклад, якщо в системі (1) одне з рівнянь містить лише нелінійні доданки, спроба знайти рішення породженого цією задачею рівняння Ріккаті за допомогою алгоритму, що базується на виділенні власних значень і власних векторів блокової матриці, складеної з матричних коефіцієнтів рівняння Ріккаті, закінчується невдачею. На першому ж кроці алгоритму необхідно було б знайти до даної блокової матриці обернену, але це неможливо, бо вона містить нульовий стовпець, а серед її власних чисел відповідно маємо нуль. Вказана обставина привела нас до створення власного алгоритму, який дозволив знайти розв'язок такого рівняння. Метод пошуку рішення є дискретизованим варіантом методу найшвидшого спуску, де чергове наближення до точного розв'язку рівняння шукаємо серед набору точок поверхонь концентричних багатовимірних еліпсоїдів в просторі, координати якого є мінімальним набором координат, що задають матрицю – розв’язок рівняння з урахуванням обмежень на структуру матриці-розв’язку, що випливають з відомої інформації про загальну структуру коефіцієнтів матричного рівняння. Відтак, знайшовши $\mathbf{Q}_0$, ми зможемо знайти $\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{X}}$, після чого отримаємо закон оптимального керування для лінеаризованої системи :

$$\mathbf{U}_{opt.lin} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{0}} \quad .$$

На цьому перший крок синтезу закінчено.

Тепер перейдемо до синтезу нелінійної частини регулятора. Для цього використаємо метод зворушень. Почнемо послідовно вводити до лінеаризованої системи рівнянь , що описує об’єкт керування, нелінійні члени (2) з (1) : на другому кроці синтезу враховуємо $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(2)}(\mathbf{X})$, на третьому $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(2)}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_{(3)}(\mathbf{X})$, і так далі. Записавши відповідні рівняння для m-го кроку, $m \geq 2$, отримаємо наступне співвідношення :

$$-\frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{X}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}} \frac{\partial V_{m-1}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial V_{m-1}}{\partial \mathbf{X}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}} \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{X}}\right) + c_{m-1}V_{m-1} + \left(\frac{\partial V_{m-1}}{\partial \mathbf{X}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{A}\mathbf{X} + \left(\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{X}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{F}_{(m)} = 0$$

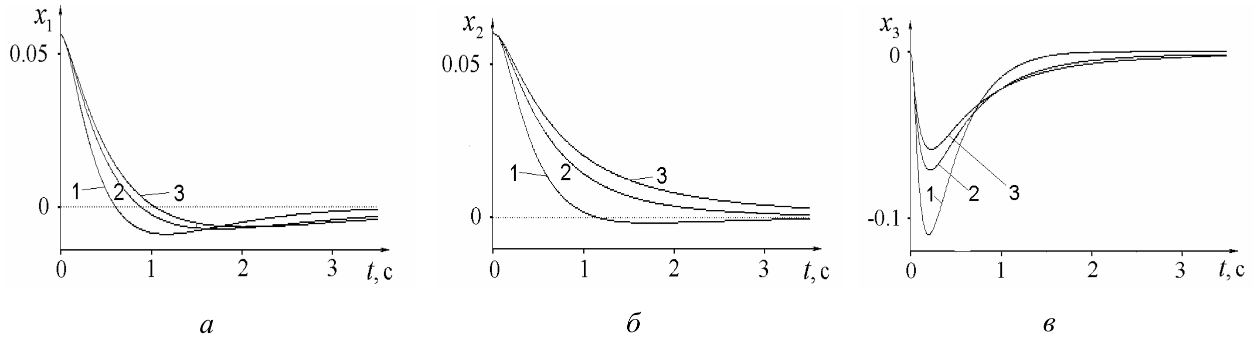
Підставляючи вираз для функції V_0, який можна отримати в явному вигляді, використовуючи розв’язок матричного рівняння (7), можемо знайти з цього співвідношення невідомі коефіцієнти функції V_m . Маючи набір таких співвідношень для m-2, 3, ... , знаходимо з них функції V_1, V_2, що відповідають нелінійним частинам (2) системи (1) другого, третього і т. д. ступенів. Знайшовши , згідно (4), $V(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{k} V_i(\mathbf{X})$., можемо знайти оптимальне керування :

$$\mathbf{U}_{opt} = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right) \quad .$$

Кількість коефіцієнтів, які потрібно знаходити при реалізації такого методу обчислень, суттєво залежить від порядку системи “об’єкт - регулятор” та від порядку нелінійності, що розглядається. Загальну кількість невідомих коефіцієнтів можна визначити з розгляду m-го доданку розкладу в ряд за компонентами вектора $\mathbf{X}$ функції Ляпунова у виразі (4). Запишемо (4) у наступному вигляді :

$$V_m = \sum_{i_1=0}^{m+2} \sum_{i_2=0}^{m+2-i_1} \dots \sum_{i_1=0}^{m+2-i_1-\dots-i_{p-1}} a_{i_1,i_2,\dots i_{p-1}} \; x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{p-1}^{i_{p-1}} x_p^{m+2-i_1-\dots-i_{p-1}} \quad , \; m = 0 \dots k \quad (8) \; .$$

Формула (8) є одним з кількох можливих шляхів комбінаторної репрезентації структури доданку V_m (4). Проте за алгоритмом своєї побудови наведений у (8) запис відображає найбільш практично зручний, з усіх, що були випробувані, підхід до організації доволі складних за своєю структурою обчислень невідомих коефіцієнтів функції Ляпунова. Згідно з принципом поділу функції Ляпунова на доданки розкладу (4), сума ступенів, до яких піднесено компоненти вектора $\mathbf{X}$, для всіх компонентів, що увійшли до доданку (4) V_m, дорівнює точно $m+2$. Послідовно визначаючи в (8) ступені компонентів вектора $\mathbf{X}$, починаючи з першого, ми тим самим дедалі більше обмежуємо свободу подальшого вибору ступенів компонентів x_i, що залишилися. Після того, як буде визначено ступені компонентів $x_1 \dots x_{p-1}$ (усіх компонентів вектора $\mathbf{X}$, крім останнього), ми повністю вичерпаємо надану свободу вибору, що й відображає останній множник в (8). Записавши таким чином один з унікальних доданків (8), маємо пов'язаний з ним невідомий множник, що є однією з величин, які необхідно знайти для знаходження m-го доданку функції Ляпунова .



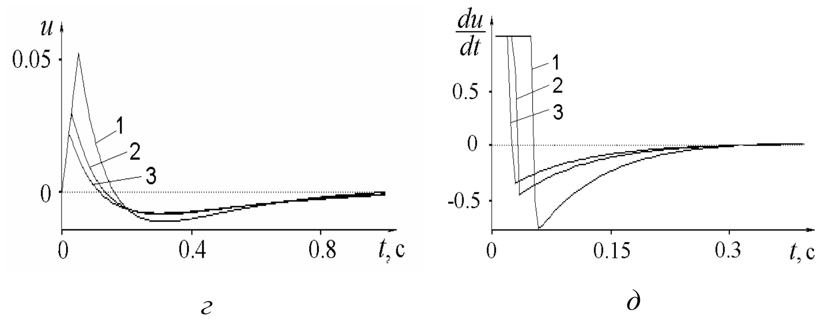


Рис.1. Приклади руху системи з різними значеннями коефіцієнтів затухання.

а-x_1, б-x_2, в-x_3, г-u , д-$\frac{du}{dt}$.

Криві 1 – при c_0=1.5, c_1=1.5, c_2=1.5; 2 – при c_0=0.5, c_1=0.5, c_2=0.5; 3 – при c_0=0, c_1=0, c_2=0.

В силу нелінійності об’єкта, а також через наявність обмежень по керуванню, при різних початкових умовах руху характер руху системи може виявитися принципово різним. Тому, зафіксувавши параметри об’єкта та знайшовши регулятор для певних значень коефіцієнтів затухання c_0, c_1, c_2 , слід вивчити його поведінку при різноманітних початкових умовах. Представляє інтерес як вивчення характеру перехідних процесів в окремих точках, в залежності від початкових значень фазових координат та параметрів затухання, так і вивчення областей фазового простору, в яких рух об’єкта відповідає певним вимогам якості. Проводилося, зокрема, вивчення множин початкових точок фазових траєкторій, на яких швидкість руху до точки рівноваги не менше заданої, та залежності цих множин від вибору параметрів затухання.

На наведених графіках (рис.1) представлено порівняльні результати, отримані в результаті чисельного моделювання об'єкта виду (1)-(2) з трьома різними регуляторами. Два з цих регуляторів були отримані за методикою, описаною вище, з коефіцієнтами затухання $c_0 = 1.5, c_1 = 1.5, c_2 = 1.5$ (криві 1 на графіках) та $c_0 = 0.5, c_1 = 0.5, c_2 = 0.5$ (криві 2). Перехідні процеси порівнювались (при однакових початкових умовах руху) з перехідними процесами в системі з регулятором при $c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0$ (криві 3), що відповідає синтезу регулятора за класичною методикою. Під час моделювання було враховано обмеження на максимальне абсолютне значення управляючої величини та максимально допустиму швидкість її зміни? накладені на керування конструктивними особливостями системи керування об’єктом. Як видно з графіків, регулятори, синтезовані за розглянутою методикою, мають істотну перевагу щодо швидкості перехідних процесів, порівняно з регуляторами, отриманими за класичною схемою.

Список літератури

1. *Антонов В.К.* Аналитическое конструирование качественных регуляторов // Проблемы инфор-матизации и управления. - К.: КМУГА, 1997.- С. 77-80.

2. *Антонов В.К.* Методы синтеза регуляторов с заданным качеством переходных процессов. - К.: КМУГА, 1995. - 120 с.

3. *Валеев К.Г., Финин Г.С.* Построение функций Ляпунова. - К, "Наукова Думка", 1981. - 412 с.

4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. - М., "Наука", 1966.- 576 с.