МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

УДОСКОНАЛЕННЯ МЕХАНІЗМУ ПІДГОТОВКИ ДО ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ В СИСТЕМІ ОЦІНКИ ЯКОСТІ ОСВІТИ

Матеріали
IV міжрегіонального
семінару

3 квітня 2009 року

Київ
Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»
2010

УДК 378.14(045)

Удосконалення механізму підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання в системі оцінки якості освіти: матеріали IV міжрегіонального семінару, (Київ, 3 квітня 2009 р.) / М-во освіти і науки України; Нац. авіа. ун-т. – К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2010. – 160 с.

До збірника увійшли матеріали доповідей семінару, у яких висвітлено основні проблеми впровадження технологій тестування як основного засобу перевірки знань абітурієнтів та можливі шляхи підвищення якості знань, умінь, навичок. Пропонується методика використання тестових завдань, впровадження якої в навчальний процес поліпшить його ефективність, якість змісту доуніверситетської підготовки як найважливішої ознаки вступу до ВНЗ. Відображено реальний досвід, подано рекомендації щодо вдосконалення методики та методологічних підходів до викладання навчальних дисциплін.

Для викладачів та учнів загальноосвітніх навчальних закладів, а також слухачів підготовчих курсів.

Організаційний комітет:

Голова оргкомітету

Н.П. Муранова – кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри базових і спеціальних дисциплін ІДП НАУ.

Заступник голови

Л.О. Кацан – методист навчально-методичного відділу ІДП НАУ

Члени оргкомітету:

Л.М. Ломонос – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри базових і спеціальних дисциплін ІДП НАУ;

Т.В. Козлова – кандидат технічних наук, доцент кафедри базових і спеціальних дисциплін ІДП НАУ

Рекомендовано до друку науково-методично-редакційною радою Інституту доуніверситетської підготовки Національного авіаційного університету (протокол № 6 від 11.06.2009)

УДК-514.116(075.8)

Л.М. Ломонос
Н.П. Муранова

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

Для розв'язування систем алгебраїчних раціональних рівнянь вищих степенів не існує універсального практично зручного методу, а тому при розв'язанні кожної конкретної системи потрібно застосовувати спеціальні прийоми розв'язання, які базуються на використанні особливостей алгебраїчних рівнянь, що складають дану систему.

Мета даної роботи – показати методи розв'язання алгебраїчних раціональних систем вищих степенів. В роботі ці методи систематизовані.

При розв'язуванні систем раціональних рівнянь вищих степенів доцільно використовувати наступні теореми.

Теорема 1. Якщо деяке рівняння системи рівнянь замінити еквівалентним рівнянням, то дістанемо систему рівнянь, еквівалентну даній системі.

Теорема 2. Якщо одне з рівнянь системи еквівалентне сукупності двох рівнянь, то система еквівалентна сукупності двох систем, тобто

$$\begin{cases} f(x,y)\cdot g(x,y) = f(x,y)\cdot p(x,y), \\ \varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y), \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,y) = 0, \\ \varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x,y) = p(x,y), \\ \varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y). \end{cases} \end{array} \right.$$

Для розв'язання систем раціональних рівнянь вищих степенів застосовують відомі загальні методи, такі як метод підстановки, метод алгебраїчного додавання. Але коло застосування цих методів суттєво обмежене, тому розглянемо інші спеціальні методи розв'язування вказаних систем.

Приклади розв'язування систем потрібно підбирати такі, які будуть корисні слухачам підготовчих курсів при їх підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання. Далі при розв'язанні приклада в дужках біля умови вказано, до якого рівня можна віднести заданий приклад згідно з вимогами ЗНО.

І. Системи з одним лінійним рівнянням

Якщо в системі одне рівняння є лінійним, а друге – цілим раціональним рівнянням n-го степеня

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ P(x,y) = 0, \end{cases}$$

то використовуємо метод підстановки, а саме: з першого рівняння виражаємо одну невідому через іншу і підставляємо у друге рівняння. Одержимо ціле раціональне рівняння n-го степеня з однією невідомою.

Частинний випадок. При розв'язуванні системи $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b \end{cases}$ складаємо квадратне рівняння, використовуючи обернену теорему Вієта.

Приклад 1. (I рівень) Знайти 125% від $2x+y$, якщо x і y задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$

А) 4 і 5; Б) 8,75 і 10; В) 6 і 7,5; Г) інша відповідь, записати її.

Приклад 2. (I рівень) Знайти $x-y$, якщо x і y задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0, \\ x+y+8=0. \end{cases}$

А) 2 і 3; Б) 0 і -4; В) 5 і 7; Г) інша відповідь, записати її.

II. Системи двох рівнянь другого степеня.

Загальний вигляд системи:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+m_1=0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+m_2=0. \end{cases}$$

Така система може мати не більше чотирьох розв'язків.

Методи розв'язування: 1) розкладання на множники одного з рівнянь; 2) виключення в одному з рівнянь члена, що містить x^2 або y^2.

Частинний випадок. При розв'язуванні системи $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ xy=b \end{cases}$ друге рівняння множимо на 2, додаємо до першого рівняння, а потім віднімаємо.

Приклад 3. (II рівень) Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2. \end{cases}$$

Відповідь: $\{X, Y\} = \{(2;1);(1;2);(-1;-2);(-2;-1)\}$.

Приклад 4. (II рівень) Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=x^2-y^2, \\ 5x^2-6xy+5y^2=29. \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння даної системи дістаємо $(x+y)(x-y-1)=0$. Таким чином, початкова система буде еквівалентна сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=0, \\ 5x^2-6xy+5y^2=29, \end{cases} \\ \begin{cases} x-y-1=0, \\ 5x^2-6xy+5y^2=29, \end{cases} \end{array}\right.$$

для розв'язання яких використовуємо метод підстановки.

Приклад 5. (II рівень) Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2-xy-3y^2+5y-2=0, \\ 2xy+y^2+y-1=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння системи розв'язуємо відносно x як квадратне. Дістаємо сукупність двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1-y, \\ 2xy+y^2+y-1=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{3y-2}{2}, \\ 2xy+y^2+y-1=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:

$$\{X,Y\}=\left\{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{3\sqrt{17}-13}{16};\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right);\right.$$
$$\left.\left(\frac{-3\sqrt{17}-13}{16};\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)\right\}.$$

III. Симетричні системи

Означення 1. Многочлен $P(x, y)$ називається симетричним, якщо він не зміниться, коли змінні x і y поміняти місцями.

Найпростіші симетричні многочлени з двома змінними: $x + y$ і xy. Всі інші виражаються через найпростіші.

Симетричною системою з двома невідомими називається система вигляду $\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases}$ в якій $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – симетричні многочлени.

В симетричних системах з двома невідомими робиться заміна
$$\begin{cases} x + y = t, \\ xy = v. \end{cases}$$

Означення 2. Многочлен $P(x, y, z)$ називається симетричним, якщо він не зміниться, коли змінні x, y, z поміняти місцями.

Найпростіші симетричні многочлени з трьома змінними: $x + y + z$, $xy + xz + yz$, xyz. Всі інші виражаються через найпростіші.

Симетричною системою з трьома невідомими називається система вигляду:
$$\begin{cases} P(x, y, z) = 0, \\ Q(x, y, z) = 0, \\ R(x, y, z) = 0, \end{cases}$$
де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – симетричні многочлени.

В симетричних системах з трьома невідомими робиться заміна:
$$\begin{cases} x + y + z = t, \\ xy + xz + yz = v, \\ xyz = w. \end{cases}$$

Приклад 6. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x+y)^2, \\ xy = 2(x+y). \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо симетричну систему з двома невідомими. Робимо заміну $\begin{cases} x + y = t, \\ xy = v. \end{cases}$

Спочатку виражаємо $x^4 + y^4$ через t і v:

$$x^4 + y^4 = x^4 + y^4 \pm 2x^2y^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 =$$

$$= \left((x+y)^2 - 2xy\right)^2 - 2x^2y^2 = t^4 - 4t^2v + 2v^2.$$

Маємо систему $\begin{cases} t^4 - 4t^2v + 2v^2 = 17t^2, \\ v = 2t. \end{cases}$

Розв'язки отриманої системи:

$\{T, V\} = \{(0;0);(9;18);(-1;-2)\}.$

Відповідь: $\{X, Y\} = \{(0;0);(3;6);(6;3)(-2;1);(1;-2)\}.$

Приклад 7. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + xz + yz = 11, \\ xyz = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. За оберненою теоремою Вієта для кубічного рівняння невідомі x, y і z є коренями рівняння

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = 2, \\ t_3 = 3. \end{array}\right.$$

Послідовність $(1;2;3)$ є розв'язком початкової системи. Оскільки система симетрична, то розв'язками будуть також послідовності, які утворені всілякими перестановками чисел 1, 2, 3.

Відповідь:

$$\{X, Y, Z\} = \{(1; 2; 3); (1; 3; 2); (2; 1; 3); (2; 3; 1); (3; 1; 2); (3; 2; 1)\}$$

IV. Системи, які містять невідомі x і y у вигляді комбінацій $x-y, xy, x^2+y^2, x^3-y^3, \ldots,$ тобто різницю непарних і суму парних степенів.

В таких системах робимо заміну $\begin{cases} x-y=t, \\ xy=v. \end{cases}$

Приклад 8. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 8\left(x^2+xy+y^2\right)=(x-y)^3, \\ 2\left(x^2-xy+y^2\right)=3(x-y). \end{cases}$$

Розв'язання. В даній системі робимо заміну $\begin{cases} x-y=t, \\ xy=v. \end{cases}$

Дістаємо систему $\begin{cases} 8\left(t^2+3v\right)=t^3, \\ 2\left(t^2+v\right)=3t, \end{cases}$

звідки $\{T, V\} = \{(0; 0); (2; -1); (-18; -351)\}$.

Відповідь: $\{X, Y\} = \{(0; 0); (1; -1)\}$.

V. Однорідні системи

Однорідні системи мають вигляд:

1) $\begin{cases} A(x,y)=a, \\ B(x,y)=b, \end{cases}$ де a і b – числа, $A(x,y)$ і $B(x,y)$ – однорідні вирази;

2) $\begin{cases} A_1(x,y)=A_2(x,y), \\ B_1(x,y)=B_2(x,y), \end{cases}$ де $A_1(x,y)$ і $B_1(x,y)$ – одного однакового степеня однорідності; $A_2(x,y)$ і $B_2(x,y)$ – іншого однакового степеня однорідності.

В однорідних системах з двома невідомими робимо заміну $y = tx$, де t – нова змінна, а з трьома невідомими заміна $y = tx$, $z = vx$, де t і v – нові змінні.

Приклад 9. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} + xy = 1, \\ \dfrac{y^3}{x} + xy = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f): \begin{cases} y \neq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Ліві частини системи – однорідні вирази другого степеня однорідності відносно x і y. Робимо заміну $y = tx$.

Дістаємо $\begin{cases} \dfrac{x^2\left(t^2+1\right)}{t} = 1, \\ x^2 t\left(t^2+1\right) = 4. \end{cases}$

Поділимо друге рівняння системи на перше, отримаємо $t = \pm 2$. Далі із довільного рівняння системи знаходимо x, а потім y.

Відповідь: $\{X, Y\} = \left\{\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}; 2\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right); \left(-\sqrt{\dfrac{2}{5}}; -2\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)\right\}$.

Приклад 10. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо дану систему у вигляді:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3y, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = -2x - 4y, \end{cases}$$

тоді ліві частини рівнянь системи – однорідні вирази другого степеня однорідності, а праві частини рівнянь – однорідні вирази першого степеня однорідності, тобто маємо однорідну систему. Робимо заміну $y = tx$.

VI. Частинні випадки

Приклад 11. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{20}, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f): \begin{cases} y \neq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Якщо одне з рівнянь системи містить обернені дроби, то робимо заміну $\dfrac{x}{y} = t$ і спочатку знаходимо t.

Приклад 12. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 2, \\ zx = 3, \\ yz = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Перемножимо всі три рівняння системи. Дістаємо $xyz = \pm 6$. Поділивши останнє рівняння на кожне рівняння системи, знаходимо x, y, z.

Приклад 13. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо всі рівняння системи і отриману суму поділимо на 2. Потім від отриманого рівняння послідовно віднімаємо кожне рівняння системи, знаходимо x, y, z.

Приклад 14. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{23}{4}, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f):\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$ В першому рівнянні робимо заміну $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=t$. Обидві частини заміни підносимо до квадрата, знаходимо $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=t^2+2$.

Підставляємо в перше рівняння, дістаємо квадратне рівняння відносно t. Знаходимо t, а потім знаходимо x і y.

VII. Системи з параметрами, з модулями

Приклад 15. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2-y^2-ax+ay=0, \\ xy=a^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Ліву частину першого рівняння розкладаємо на множники $(x-y)(x+y-a)=0$. Дістаємо сукупність двох систем:

$$\begin{cases} x-y=0, \\ xy=a^2 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x+y=a, \\ xy=a^2. \end{cases}$$

Друга система цієї сукупності має розв'язок тільки при $a=0$ і цей розв'язок $(0;0)$. Перша система має розв'язок при довільному значенні a і цей розв'язок $(a;a)$ і $(-a;-a)$.

Відповідь: $\{X,Y\}=\{(a;a);(-a;-a)\}$, де $a\in R$.

Приклад 16. (III рівень). Розв'язати систему

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система є симетричною системою відносно невідомих x, y і z. Робимо заміну $\begin{cases} x+y+z=t, \\ xy+xz+yz=v, \\ xyz=w. \end{cases}$

Оскільки $(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)=2(xy+xz+yz)$,

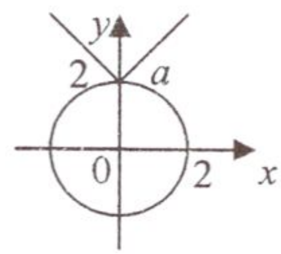
$$(x+y+z)^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)=3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz,$$

то для знаходження t, v, w отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} t=a, \\ t^2-2v=a^2, \\ t^3-3tv+3w=a^3, \end{cases} \quad \text{звідки } t=a, v=0, w=0.$$

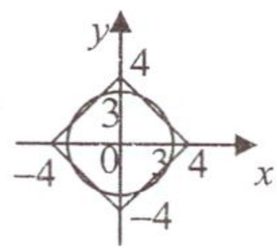
Відповідь: $\{X,Y,Z\}=\{(0;0;a);(0;a;0);(a;0;0)\}$, де $a\in R$.

Приклад 17. (III рівень). Знайти найбільше значення параметра a, при якому система $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y-|x|=a \end{cases}$ має за розв'язок рівно одну пару чисел (x_0, y_0).



Розв'язання.
Дану систему краще розв'язати графічно.
Відповідь: $a=2$.

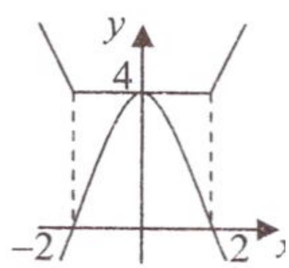
Приклад 18. (III рівень). Знайти кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ |x|+|y|=4. \end{cases}$



Розв'язання.
Даний приклад розв'язуємо графічно
Відповідь: 8 розв'язків.

Приклад 19. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y=|x-2|+|x+2|, \\ y=4-x^2. \end{cases}$$



Розв'язання.
Даний приклад розв'язуємо графічно
Відповідь: $\{X,Y\}=\{(0;4)\}$.

Приклад 20: (ІІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \left|x^2 - 2x\right| + y = 1, \\ x^2 + |y| = 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

Використовуючи означення модуля, записуємо сукупність чотирьох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x^2 - 2x + y = 1, \\ x^2 + y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x < 0, \\ y \ge 0, \\ -x^2 + 2x + y = 1, \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{і} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2x \ge 0, \\ y < 0, \\ x^2 - 2x + y = 1, \\ x^2 - y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x < 0, \\ y < 0, \\ -x^2 + 2x + y = 1, \\ x^2 - y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{X, Y\} = \left\{(0; 1); (1; 0); \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Отже, при розв'язанні кожної конкретної системи необхідно аналізувати рівняння, які входять до неї, і вибирати відповідний метод розв'язання.

Список літератури

1. *Захарійченко Ю.О.* Математика. Збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. / Ю.О. Захарійченко, О.В. Школьний. – К. : «Ґенеза», 2008

2. *Збірник* задач з математики для вступників до ВТУЗІВ /за ред. М.І. Сканаві. – К. : Вища шк., 1996

3. *Каплан Я.Л.* Математика. Посібник для підготовки до конкурсних екзаменів до вузів. / Я.Л. Каплан – К. : Вища шк., 1971

4. *Шмаков І.П.* Математика. Раціональні функції: навч.-метод. посіб. / І.П. Шмаков, Л.В. Андрощук. – К. : Видавництво НАУ, 2008