

УДК 531.36:629.114

© 1993

Л.Г.Лобас, В.Г.Хребет

### ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МАЯТНИКОВОЙ ДВУХЗВЕННОЙ СИСТЕМЫ С КАЧЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

В [7] рассмотрен новый класс механических систем типа "маятник"-маятниковые системы с качением. Задачи подобного рода возникают при изучении движения многозвенных шарнирно сочлененных пневмоколесных машин [4, 6]. При изменении скорости движения таких машин в определенных интервалах возможны дивергентные, флаттерные и связанные дивергентно-флаттерные бифуркации. В [6] исследованы дивергентные бифуркации одиночных машин (изолированного ведущего звена). Связка двух и более ведомых звеньев является типичным представителем механических систем, для которых характерны флаттерные бифуркации (или бифуркации Андронова-Хопфа). Именно она изучается в данной работе.

Отметим, что как бифуркации стационарных состояний, так и бифуркации Андронова-Хопфа возможны лишь при движении пневмоколесных машин. В рамках постановок задач движения машин с абсолютно твердыми колесами, при качении без скольжения которых реализуются классические неголомомные связи [5], указанные динамические эффекты отсутствуют.

В [7] показано, что при некоторой комбинации параметров системы линеаризованные уравнения возмущенного движения характеризуются парой число мнимых собственных значений соответствующей матрицы. Поэтому задача исследования устойчивости движения требует согласно [8] нелинейного анализа. Указанная ситуация реализуется при  $v = v_0$  и значениях  $l_1$  либо ограниченных снизу и сверху [7, рис. 2, 3], либо неограниченных сверху [7, рис.4, 5]. Для каждой конкретной системы значение  $l_1$  фиксировано, а параметр  $v$  меняется в широких пределах. Предположим, что  $l_1$  принадлежит области определения функции  $v_0(l_1^2)$ . При увеличении  $v$  и прохождении через значение  $v_0$  меняется характер движения: асимптотическая устойчивость сменяется неустойчивостью. Само значение  $v = v_0$  представляет практический интерес не столько само по себе, сколько в связи с тем, что поведение динамической системы вблизи границы области устойчивости определяется ее поведением на границе [2]. Решению последнего вопроса посвящена данная статья. В зависимости от характера устойчивости границы при  $v \in (0, +\infty)$  могут существовать устойчивые или неустойчивые замкнутые траектории в фазовом пространстве, отвечающие устойчивым или неустойчивым периодическим движениям системы. Если значение  $l_1$  соответствует устойчивой точке границы, то с увеличением  $v$  устойчивое состояние равновесия переходит в неустойчивое и одновременно из него рождается устойчивый предельный цикл по сценарию [3]

$$O^{4,0} \rightarrow O^{2,2} + \Gamma^{4,1}, \quad (0.1)$$

т.е. имеет место бифуркация рождения предельного цикла из устойчивого фокуса (рис.1). Если же значение  $l_1$  соответствует неустойчивой точке границы, то ее прохождение при возрастании  $v$  сопровождается слиянием и последующим исчезновением в устойчивом состоянии равновесия неустойчивого предельного цикла, разрушающего устойчивость этого состояния:

$$O^{4,0} + \Gamma^{3,2} \rightarrow O^{2,2}. \quad (0.2)$$

Ниже решается задача нахождения устойчивых и неустойчивых участков кривой  $v = v_0(l_1^2)$  [7] путем определения знака первого ненулевого ляпуновского коэффициента.

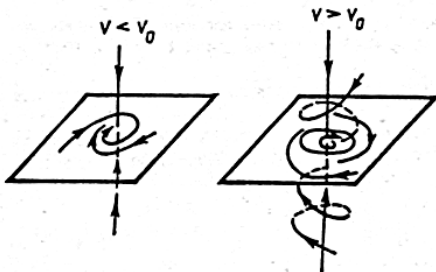


Рис. 1

§ 1. Кубическая аппроксимация дифференциальных операторов в уравнениях движения. Дифференциальные уравнения [7, (2.6)] инвариантны относительно замен переменных

$(t, v_1, v_2) \rightarrow (t, -v_1, -v_2)$ , поэтому тейлоровские разложения соответствующих функций содержат нечетные степени переменных, а порядок главных частей нелинейностей равен трем. Положим

$$Y_3 = k_3 \delta_3 - k_3' \delta_3^3 + \dots, \quad Y_4 = k_4 \delta_4 - k_4' \delta_4^3 + \dots$$

В нелинейном приближении вместо [7, (3.6)] получим

$$\dot{x}_j = \sum_{s=1}^4 a_{js} x_s + \sum_{m=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{n=1}^4 a_{mln}^{(j)} x_m x_l x_n + \dots (j=1, \dots, 4). \quad (1.1)$$

Выражения  $a_{js}$  даются формулами [7, (3.7)],  $a_{mln}^{(j)} = a_{mnl}^{(j)} = a_{nml}^{(j)}$ , причем

$$a_{mln}^{(1)} = a_{mln}^{(3)} = 0, \quad a_{111}^{(2)} = J_2 \frac{L_1}{\Delta} (k_3 A_1 + k_3'), \quad A_1 = \frac{a^2}{\Delta},$$

$$a_{222}^{(2)} = \frac{1}{v^3 \Delta} (J_2 L_1^4 \kappa_3 + J L_1^4 \kappa_4), \quad \kappa_3 = \frac{k_3}{3} + k_3', \quad \kappa_4 = \frac{k_4}{3} + k_4',$$

$$\kappa_5 = k_3 \left( \frac{1}{2} + A_1 \right), \quad a_{333}^{(2)} = J \frac{l_1}{\Delta} (\kappa_6 + k_4'), \quad \kappa_6 = k_4 \left( \frac{1}{2} + A_1 \right),$$

$$a_{444}^{(2)} = J \kappa_4 \frac{L_2^3 l_1}{v^3 \Delta}, \quad a_{112}^{(2)} = \frac{1}{v \Delta} \left[ J_2 L_1^2 \left( \frac{\kappa_5}{3} + k_3' \right) + J \frac{k_4}{3} l_1^2 (1 + A_1) \right],$$

$$a_{113}^{(2)} = \frac{1}{3 \Delta} (J l_1 \kappa_6 - 2 J_2 k_3 L_1 A_1), \quad a_{114}^{(2)} = \frac{J \kappa_6 L_2 l_1}{3 v \Delta},$$

$$a_{122}^{(2)} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{1}{v^2} (J_2 L_1^3 \kappa_3 + J k_4 \frac{l_1^3}{3}) - \frac{a^2}{3} \right], \quad a_{133}^{(2)} = \frac{1}{3 \Delta} (J_2 k_3 L_1 A_1 - 2 J \kappa_6 L_1),$$

$$a_{144}^{(2)} = -\frac{J_2 a}{3 \Delta}, \quad a_{233}^{(2)} = \frac{1}{3 v \Delta} [J l_1^{(2)} (\kappa_6 + 3 k_4') + J_2 k_3 L_1^2 A_1],$$

$$a_{244}^{(2)} = \frac{J L_2^2 l_1^2}{v^3 \Delta} \kappa_4, \quad a_{344}^{(2)} = \frac{1}{\Delta} (J L_2^2 l_1 \frac{\kappa_4}{v^2} + J_2 \frac{a}{3}),$$

$$a_{223}^{(2)} = \frac{1}{\Delta} (J k_4' \frac{l_1^3}{v^2} + \frac{a_2}{3}), \quad a_{224}^{(2)} = \frac{J L_2}{v^3 \Delta} \kappa_4 l_1^3, \quad a_{334}^{(2)} = \frac{J L_2 l_1}{v \Delta} (\kappa_4 + \frac{k_4}{3} A_1),$$

$$a_{123}^{(2)} = -\frac{1}{3 v \Delta} (J l_1^2 \kappa_6 + J_2 k_3 L_1^2 A_1), \quad a_{124}^{(2)} = \frac{J k_4 L_2 l_1^2}{6 v^2 \Delta},$$

$$a_{134}^{(2)} = -\frac{J L_2 l_1}{3 v \Delta} \kappa_6, \quad a_{234}^{(2)} = \frac{J L_2 l_1^2}{v^2 \Delta} \kappa_7, \quad \kappa_7 = \frac{k_4}{6} + k_4',$$

$$a_{111}^{(4)} = -\frac{a}{\Delta} L_1 (\kappa_5 + k_3'), \quad a_{222}^{(4)} = -\frac{1}{v^3 \Delta} (\kappa_3 a L_1^4 - \kappa_4 G l_1^3),$$

$$a_{333}^{(4)} = \frac{1}{\Delta} (k_4 G_1 + k_4' G), \quad G_1 = G A_1 - a l_1, \quad a_{444}^{(4)} = \frac{G L_2^3}{v^3 \Delta} \kappa_4,$$

$$a_{112}^{(4)} = -\frac{1}{3 v \Delta} [a L_1^2 (3 \kappa_3 + k_3 A_1) - (G_1 + \frac{G}{2}) k_4 l_1], \quad a_{114}^{(4)} = \frac{k_4 L_2}{3 v \Delta} G_1,$$

$$a_{113}^{(4)} = \frac{1}{3 \Delta} (2 \kappa_5 a L_1 + k_4 G_1), \quad a_{122}^{(4)} = \frac{1}{v^2 \Delta} [a (J \frac{v^2}{3} - \kappa_3 L_1^3) + \frac{k_4}{3} G l_1^2],$$

$$\begin{aligned}
J^* &= J_1 + m_2 l_1^2, \quad a_{133}^{(4)} = -\frac{1}{3\Delta} (2k_4 G_1 + \kappa_5 a L_1), \\
a_{144}^{(4)} &= \frac{a^2}{3\Delta}, \quad a_{233}^{(4)} = \frac{1}{3v\Delta} (k_4 G_1 l_1 - \kappa_5 a L_1^2 + 3k_4' G_1 l_1), \\
a_{244}^{(4)} &= \frac{L_2^2 G l_1}{v^3 \Delta} \kappa_4, \quad a_{344}^{(4)} = \frac{1}{\Delta} \left( G \kappa_4 \frac{L_2^2}{v^2} - \frac{a^2}{3} \right), \\
a_{223}^{(4)} &= \frac{1}{\Delta} \left( \frac{k_4'}{v^2} G l_1^2 - \frac{a}{3} J^* \right), \quad a_{224}^{(4)} = \frac{G L_2 l_1^2}{v^3 \Delta} \kappa_4, \\
a_{334}^{(4)} &= \frac{L_2}{v\Delta} \left( \frac{k_4}{3} G_1 + \kappa_7 G \right), \quad a_{123}^{(4)} = \frac{1}{3v\Delta} (\kappa_5 a L_1^2 - k_4 l_1 G_1), \\
a_{124}^{(4)} &= \frac{k_4 L_2 G l_1}{6v^2 \Delta}, \quad a_{134}^{(4)} = -\frac{k_4 L_2 G_1}{3v\Delta}, \quad a_{234}^{(4)} = \frac{\kappa_7 L_2}{v^2 \Delta} G l_1.
\end{aligned}$$

§ 2. Опасные и безопасные участки границы области устойчивости. Запишем систему (1.1) так:

$$\dot{x} = Ax + P(x), \quad A = \|a_{jk}\|_1^4, \quad x \in R^4. \quad (2.1)$$

Характеристическое уравнение матрицы  $A$  имеет вид [7, (3.5)]. При малых значениях  $v$  четыре или два его корня являются действительными и отрицательными. Это объясняется тем, что в этом случае коэффициенты при  $\dot{v}_1$  и  $\dot{v}_2$  в [7, (3.3)] становятся большими. У парциальных систем

$$J_s \ddot{v}_s + \frac{k_{s+2}}{v} L_s^2 \dot{v}_s + k_{s+2} L_s v_s = 0 \quad (s=1,2)$$

корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2J_s} \left( -\frac{k_{s+2} L_s^2}{v} \pm \sqrt{\frac{k_{s+2}^2 L_s^4}{v^2} - 4J_s k_{s+2} L_s} \right)$$

отрицательны. С ростом  $v$  при некотором  $v = v_0$  все корни уравнения [7, (3.5)] становятся комплексными, лишь для  $v > v_0$  парциальные системы являются осцилляторами. Обозначим  $p = A_1/A_0$ ,  $q = A_2/A_0$ ,  $r = A_3/A_0$ ,  $s = A_4/A_0$ . При  $v = v_0$  собственными значениями матрицы  $A$  являются  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\lambda_{3,4} = \kappa \pm i\omega_1$ , где  $\omega_0 = \sqrt{r/p}$ ,  $\kappa = -p/2$ ,  $\omega_1 = \sqrt{p(sr^{-1} - p/4)}$ . Пусть  $\vec{X}^{(j)}$  — собственные векторы матрицы  $A$ , отвечающие ее собственным значениям  $\lambda_j$ , причем  $X^{(2)} = \vec{X}^{(1)}$ ,  $\vec{X}^{(4)} = \vec{X}^{(3)}$ . Замена

$$x = \alpha \xi,$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} \vec{X}_1^{(2)} & \operatorname{Im} \vec{X}_1^{(2)} & \operatorname{Re} \vec{X}_1^{(4)} & \operatorname{Im} \vec{X}_1^{(4)} \\ \operatorname{Re} \vec{X}_2^{(2)} & \operatorname{Im} \vec{X}_2^{(2)} & \operatorname{Re} \vec{X}_2^{(4)} & \operatorname{Im} \vec{X}_2^{(4)} \\ \operatorname{Re} \vec{X}_3^{(2)} & \operatorname{Im} \vec{X}_3^{(2)} & \operatorname{Re} \vec{X}_3^{(4)} & \operatorname{Im} \vec{X}_3^{(4)} \\ \operatorname{Re} \vec{X}_4^{(2)} & \operatorname{Im} \vec{X}_4^{(2)} & \operatorname{Re} \vec{X}_4^{(4)} & \operatorname{Im} \vec{X}_4^{(4)} \end{vmatrix}$$

преобразует уравнение (2.1) к виду

$$\dot{\xi} = G\xi + Q(\xi), \quad \xi \in R^4, \quad (2.2)$$

где

$$G = \alpha^{-1} A \alpha = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & -\omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_1 & \kappa \end{vmatrix}, \quad Q(\xi) = \alpha^{-1} P(\alpha \xi).$$

Элементы матрицы  $\alpha$  суть

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= a_{23}, \alpha_{12} = -\omega_0 a_{24}, \alpha_{13} = (a_{22} - \kappa)[\kappa(a_{44} - \kappa) + a_{43}] - a_{42}(a_{23} + \\ &+ \kappa a_{24}) + \omega_1^2(a_{22} + a_{44} - 3\kappa), \alpha_{14} = \omega_1[\kappa(a_{22} + a_{44} - 2\kappa) - \\ &- (a_{22} - \kappa)(a_{44} - \kappa) + a_{43} + a_{24}a_{42}] + \omega_1^3, \alpha_{21} = -\omega^2 a_{24}, \alpha_{22} = -\omega_0 a_{23}, \\ \alpha_{23} &= -a_{21}[\kappa(a_{44} - \kappa) + a_{43}] + a_{41}(a_{23} + \kappa a_{24}) - \omega_1^2 a_{21}, \\ \alpha_{24} &= \omega_1[a_{21}(a_{44} - 2\kappa) - a_{24}a_{41}], \alpha_{31} = -\omega_0^2 - a_{21}, \alpha_{32} = a_{22}\omega_0, \\ \alpha_{33} &= a_{21}a_{42} - a_{41}(a_{22} - \kappa), \alpha_{34} = -a_{41}\omega_1, a_{41} = a_{22}\omega_0^2, \\ \alpha_{42} &= a_{21}\omega_0 + \omega_0^3, \alpha_{43} = \kappa[a_{21}a_{42} - a_{41}(a_{22} - \kappa)] - a_{41}\omega_1^2, \\ \alpha_{44} &= \omega_1[a_{41}(a_{22} - 2\kappa) - a_{21}a_{42}]. \end{aligned}$$

Векторное уравнение (2.2) равносильно следующим скалярным:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\omega_0 \xi_2 + Q_1(\xi_1, \dots, \xi_4), \quad \dot{\xi}_2 = \omega_0 \xi_1 + Q_2(\xi_1, \dots, \xi_4), \\ \dot{\xi}_3 &= \kappa \xi_3 - \omega_1 \xi_4 + Q_3(\xi_1, \dots, \xi_4), \quad \dot{\xi}_4 = \omega_1 \xi_3 + \kappa \xi_4 + Q_4(\xi_1, \dots, \xi_4), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$Q_j(\xi_1, \dots, \xi_4) = \sum_{m=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{n=1}^4 A_{mnl}^{(j)} \xi_m \xi_l \xi_n + O(\xi_k \xi_p \xi_q \xi_r),$$

$$A_{mnl}^{(j)} = A_{mnl}^{(j)} = A_{nml}^{(j)} \quad (j=1, \dots, 4).$$

Переходя в специальной системе Ляпунова (2.3) к полярным координатам  $\xi_1 = r \cos v$ ,  $\xi_2 = r \sin v$ , и исключая время  $t$  согласно [8], получим

$$\frac{dr}{dv} = R(r, v, \xi_3, \xi_4), \quad \frac{d\xi_3}{dv} = Z(r, v, \xi_3, \xi_4), \quad \frac{d\xi_4}{dv} = S(r, v, \xi_3, \xi_4). \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R(r, v, \xi_3, \xi_4) &= (\bar{Q}_1 \cos v + \bar{Q}_2 \sin v) / Q_5, \quad Z(r, v, \xi_3, \xi_4) = [\kappa \xi_3 - \omega_1 \xi_4 + \\ &+ Q_3(r \cos v, r \sin v, \xi_3, \xi_4)] / Q_5, \quad S(r, v, \xi_3, \xi_4) = [\omega_1 \xi_3 + \kappa \xi_4 + \\ &+ Q_4(r \cos v, r \sin v, \xi_3, \xi_4)] / Q_5, \quad Q_5 = \omega_0 [1 - (\bar{Q}_1 \sin v - \bar{Q}_2 \cos v) \omega_0^{-1} r^{-1}], \\ \bar{Q}_k &= Q_k(r \cos v, r \sin v, \xi_3, \xi_4) \quad (k=1, 2). \end{aligned}$$

Следуя Ляпунову, разложим функции  $R, Z, S$  в степенные ряды по  $r, \xi_3, \xi_4$  и будем искать решение системы (2.4), определяемое начальными условиями

$$r|_{v=0} = r_0 > 0, \quad \xi_3|_{v=0} = 0, \quad \xi_4|_{v=0} = 0, \quad (2.5)$$

в виде рядов

$$r = r_0 u_1(v) + r_0^2 u_2(v) + r_0^3 u_3(v) + \dots, \xi_3 = r_0 v_1(v) + r_0^2 v_2(v) + r_0^3 v_3(v) + \dots, \xi_4 = r_0 w_1(v) + r_0^2 w_2(v) + r_0^3 w_3(v) + \dots, \quad (2.6)$$

сходящихся для  $\forall v \in [0, 2\pi]$  и для всех достаточно малых значений  $r_0$ . В (2.6) на основании (2.5) должно быть

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 1, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(0) = 0, \dots; \\ v_1(0) &= 0, \quad v_2(0) = 0, \quad v_3(0) = 0, \dots; \\ w_1(0) &= 0, \quad w_2(0) = 0, \quad w_3(0) = 0, \dots. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Полагая в построенном таким образом решении системы (2.4)  $v = 2\pi$ , получим [2]

$$r = r_0 + \alpha_3 r_0^3 + \dots, \xi_3 = \beta_j r_0^j + \dots, \xi_4 = \gamma_j r_0^j + \dots, \quad (2.8)$$

где

$$\alpha_j = u_j(2\pi), \quad \beta_j = v_j(2\pi), \quad \gamma_j = w_j(2\pi).$$

Геометрический смысл равенств (2.8) состоит в преобразовании для достаточно малых значений  $r$  "прямой"  $\xi_3 = \xi_4 = v = 0$  в некоторую "кривую"  $v = 0$ ,  $F_1^*(r, \xi_3, \xi_4) = 0$ ,  $F_2^*(r, \xi_3, \xi_4) = 0$ , причем  $F_k^*$  определяются равенствами (2.8). Используя разложения (2.6), находим

$$\bar{Q}_1 \cos v + \bar{Q}_2 \sin v = r_0^3 f(v, u_1(v), v_1(v), w_1(v), A_{mln}^{(1)}, A_{mln}^{(2)} + \dots,$$

$$\frac{1}{\omega_0 - \frac{\bar{Q}_1 \sin v - \bar{Q}_2 \cos v}{r}} = \frac{1}{\omega_0} + 0(r_0^2). \quad (2.9)$$

Подставив (2.6) и (2.9) в первое уравнение (2.4) и ограничившись третьими степенями  $r_0$ , получим

$$r_0 \frac{du_1}{dv} + r_0^2 \frac{du_2}{dv} + r_0^3 \frac{du_3}{dv} + \dots = \frac{r_0^3}{\omega} f,$$

откуда

$$\frac{du_1}{dv} = 0, \quad \frac{du_2}{dv} = 0, \quad \frac{du_3}{dv} = \frac{f}{\omega}. \quad (2.10)$$

Согласно (2.7) и (2.10) имеем  $u_1(v) = 1$ ,  $u_2(v) = 0$ . Чтобы найти  $v_1(v)$ ,  $w_1(v)$ , необходимо подставить (2.6) в последние два уравнения (2.4), ограничившись первой степенью  $r_0$ . Для определения функций  $v_1(v)$ ,  $w_1(v)$  приходим к однородной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dv_1}{dv} = \frac{\kappa}{\omega_0} v_1 - \frac{\omega_1}{\omega_0} w_1, \quad \frac{dw_1}{dv} = \frac{\omega_1}{\omega_0} v_1 + \frac{\kappa}{\omega_0} w_1, \quad (2.11)$$

имеющей в силу начальных условий  $v_1(0) = 0$ ,  $w_1(0) = 0$  единственное решение  $v_1(v) = 0$ ,  $w_1(v) = 0$ . Заметим, что система (2.11) полностью совпадает с линейной частью последних двух уравнений (2.3), если учесть, что в первом приближении

$$dt = \omega_0^{-1} dv.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} f(v, u_1(v), v_1(v), w_1(v), A_{min}^{(1)}, A_{min}^{(2)}) &= f(v, 1, 0, 0, A_{min}^{(1)}, A_{min}^{(2)}) = \\ &= A_{III}^{(1)} \cos^4 v + A_{222}^{(1)} \sin^3 v \cos v + 3 A_{112}^{(1)} \cos^3 v \sin v + 3 A_{122}^{(1)} \sin^2 v \cos^2 v + \\ &+ A_{III}^{(2)} \cos^3 v \sin v + A_{222}^{(2)} \sin^4 v + 3 A_{112}^{(2)} \sin^2 v \cos^2 v + 3 A_{122}^{(2)} \sin^3 v \cos v, \end{aligned}$$

то

$$\alpha_3(v) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^v f dv, \quad \alpha_3 = \alpha_3(2\pi) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{2\pi} f dv.$$

Окончательно находим [2]

$$\alpha_3 = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\omega_0} (A_{III}^{(1)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)}). \quad (2.12)$$

На основании правой части первого соотношения (2.8) введем величину  $\psi(r_0) = r_0 + \alpha_3 r_0^3 + \dots$ , являющуюся функцией последования на отрезке  $v = 0$  для значений параметров системы (2.1), соответствующих границе области устойчивости. Функция  $\psi(r_0)$  выражает собой закон точечного преобразования отрезка  $v = 0$ , устанавливая однозначное соответствие между точками этого отрезка и их последующими на том же отрезке. Неподвижные точки точечного преобразования, которые соответствуют замкнутым траекториям на фазовой плоскости, можно найти графически на диаграмме Ламерея как точки пересечения кривой  $r = \psi(r_0)$  (т.е. графика функции последования) и биссектрисы  $r = r_0$ . Орбитную устойчивость предельного цикла можно установить графически, построив лестницу Ламерея. При  $\alpha_3 < 0$  невозмущенное движение устойчиво по Ляпунову, а соответствующий участок границы области устойчивости называется [2] безопасным, в противном случае - опасным. Величина  $\alpha_3$  называется первым ляпуновским коэффициентом.

Пусть  $\alpha_3 \neq 0$ . Из вида нелинейных функций  $Q_i(\xi_1, \dots, \xi_4)$  и (2.12) следует, что при исследовании устойчивости на границе  $\Delta_3 = 0$  не критические переменные  $\xi_3$  и  $\xi_4$  можно положить равными нулю: значение  $\alpha_3$  при этом не изменится. Более того, в критических уравнениях, принимающих в таком случае вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\omega_0 \xi_2 + A_{III}^{(1)} \xi_1^3 + 3 A_{122}^{(1)} \xi_1 \xi_2^2 + 3 A_{112}^{(1)} \xi_1^2 \xi_2 + A_{222}^{(1)} \xi_2^3 + \dots, \\ \dot{\xi}_2 &= \omega_0 \xi_1 + 3 A_{112}^{(2)} \xi_1^2 \xi_2 + A_{222}^{(2)} \xi_2^3 + A_{III}^{(2)} \xi_1^3 + 3 A_{122}^{(2)} \xi_1 \xi_2^2 + \dots, \end{aligned}$$

в выражение  $\alpha_3$  входят только первые два коэффициента при нелинейных членах обоих уравнений.

По-видимому, это связано с нормальными формами Пуанкаре для системы (2.3) и видом  $(c_1 \xi_1 - c_2 \xi_2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ ,  $(c_2 \xi_1 + c_1 \xi_2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)$  соот-

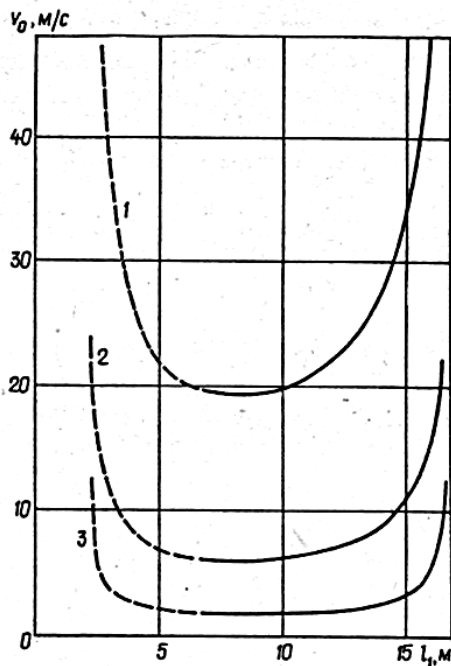


Рис. 2

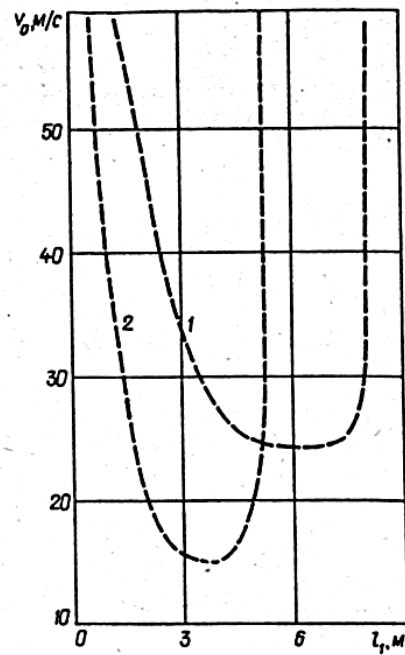


Рис. 3

ветствующих резонансных мономов, однако построение нормализующего преобразования является столь громоздкой процедурой, что выходит за рамки данной статьи.

§3. Исследование характера границы области устойчивости маятниковой системы [7]. Конфигурация границ для различных случаев показана на рис. 2-4 работы [7]. Знак величины  $\alpha_3$  в каждом из случаев можно определить, лишь конкретизировав численные значения параметров системы. Кривые на рис.2 построены для

$m_1 = 4905$  кг,  $m_2 = 9074$  кг,  $I_1 = 47579$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_2 = 147150$  кг·м<sup>2</sup>,  $b_1 = b_2 = 3$  м,  $d_1 = d_2 = 1,5$  м,

причем для кривой 1

$k_3 = k_4 = 254079$  Н/рад,  $k'_3 = k'_4 = 4321108$  Н/рад<sup>3</sup>, для кривой 2

$k_3 = k_4 = 25407,9$  Н/рад,  $k'_3 = k'_4 = 432110,8$  Н/рад<sup>3</sup>, для кривой 3

$k_3 = k_4 = 2540,79$  Н/рад,  $k'_3 = k'_4 = 43211,08$  Н/рад<sup>3</sup>. С уменьшением

$k_3$  и  $k_4$  область устойчивости сужается, т.е. чем шины упруго податливее,

тем устойчивость хуже. Кривые на рис.3 соответствуют равнозвенной системе, причем  $m_1 = m_2 = 9074$  кг,  $I_1 = I_2 = 32667$  кг·м<sup>2</sup>, для кривой 1

$b_1 = b_2 = 0,8$  м,  $d_1 = d_2 = 3,7$  м,  $k_3 = k_4 = 25407,9$  Н/рад,  $k'_3 =$

$= k'_4 = 432110,8$  Н/рад<sup>3</sup>,

для кривой 2

$b_1 = b_2 = 0,9$  м,  $d_1 = d_2 = 3,6$  м,  $k_3 = k_4 = 2540,79$  Н/рад,  $k'_3 =$

$= k'_4 = 43211,08$  Н/рад<sup>3</sup>. Кривые на рис.4 построены для

$I_1 = 47579$  кг·м<sup>2</sup>,  $b_1 = b_2 = 0,5$  м,  $d_1 = d_2 = 4$  м, причем в случае

кривых 1 и 2  $I_2 = 49050$  кг·м<sup>2</sup>,  $m_1 = 14715$  кг,  $m_2 = 9810$  кг, в случае

кривой 3  $I_2 = 39240$  кг·м<sup>2</sup>,  $m_1 = 9810$  кг,  $m_2 = 9074$  кг; для кривых

1 и 3  $k_3 = k_4 = 25407,9$  Н/рад,  $k'_3 = k'_4 = 432110,8$  Н/рад<sup>3</sup>, для

кривой 2  $k_3 = k_4 = 254079$  Н/рад,  $k'_3 = k'_4 = 4321108$  Н/рад<sup>3</sup>.

На рис.5 приведена кривая в случае

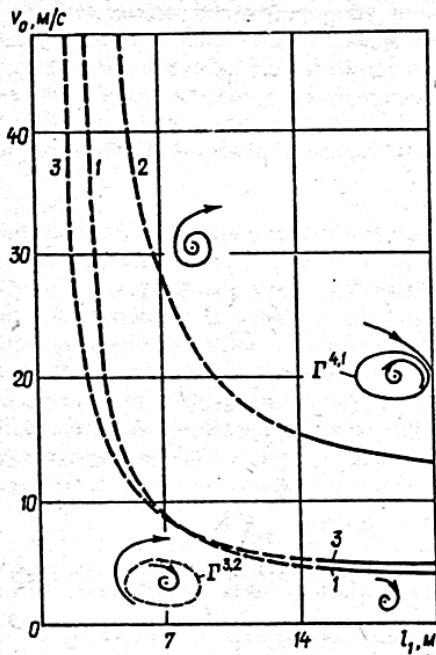


Рис. 4

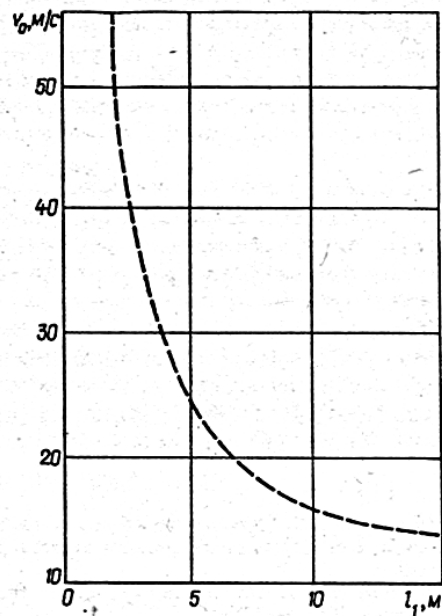


Рис. 5

$m_1 = 15614,25$  кг,  $m_2 = 9074,25$  кг,  $I_1 = 49050$  кг · м<sup>2</sup>,  $I_2 = 107910$  кг · м<sup>2</sup>,  
 $b_1 = b_2 = 1,5$  м,  $d_1 = d_2 = 3$  м,  $k_3 = k_4 = 254079$  Н / рад,  $k'_3 =$   
 $= k'_4 = 4321108$  Н / рад<sup>3</sup>.

Участки кривых  $v_0 = v_0(l_1)$ , изображенные на рис.2 и 4 сплошной линией, соответствуют устойчивости движения ( $\alpha_3 < 0$ ), причем устойчивость слабая, неэкспоненциальная; штриховые линии  $v_0 = v_0(l_1)$  на рис. 2—5 соответствуют неустойчивости движения ( $\alpha_3 > 0$ ). С ростом скорости движения возможны как жесткая, так и мягкая бифуркации Андронова-Хопфа [1].

Если значение  $l_1$  отвечает штриховому участку кривой  $v_0 = v_0(l_1)$ , то при ее переходе снизу вверх, т.е. от значений  $v < v_0$  до значений  $v > v_0$  неустойчивый предельный цикл  $\Gamma^{3,2}$ , существующий в области  $D(4,0)$  асимптотической устойчивости, уменьшается в размерах и стягивается к началу координат (область притяжения которого уменьшается) и при  $v = v_0$  "садится" на него, так что при  $v > v_0$  начало координат  $(0,0,0,0)$  становится неустойчивой особой точкой. Динамическая ситуация в этом случае развивается по сценарию (0.2). Если  $v > v_0$ , то точка фазового пространства случайным толчком может быть сорвана с начала координат, являющегося особой точкой векторного поля фазовых скоростей, и отброшена от него на достаточно далекое расстояние. При прохождении снизу вверх сплошного участка кривой  $v = v_0$ , изображенного на рис. 2 и 4, происходит мягкая бифуркация Андронова—Хопфа с появлением в области  $D(2,2)$  устойчивого предельного цикла  $\Gamma^{4,1}$  (см.сценарий (0.1)), радиус которого пропорционален  $\sqrt{\text{Re } \lambda_{1,2}}$ .

**РЕЗЮМЕ.** Розглядається чотиривимірна система, дві двовимірні підсистеми якої при деяких значеннях параметрів ведуть себе як осцилятори. На границі області стійкості простору параметрів матриця лінеаризованої частини рівняння збуреного руху має два суто уявні корені



і два комплексні корені з від'ємною дійсною частиною. Шляхом розбиття границі на "небезпечні" та "безпечні" (в розумінні Н.Н.Баутіна) ділянки виділено два випадки: 1) із збільшенням швидкості руху характерної точки нестійкий граничний цикл, зменшуючись в розмірах, "сідає" на початок координат, яке є особливою точкою векторного поля фазових швидкостей, так що при закритичних швидкостях точка фазового простору зривається з стану рівноваги і відкидається на досить велику відстань; 2) випадок м'якої біфуркації Андронова-Хопфа з появою в області нестійкості стійкого граничного циклу.

**S U M M A R Y.** Four-dimensional system whose two-dimensional subsystems under certain values of parameters behave as oscillators is considered. A matrix of the linearized part of the disturbed motion equation on the boundary of the parameters space stability has two purely imaginary roots and two complex roots with a negative real part. Two cases are distinguished by division of the boundary into «dangerous» and «safe» (in the sense of N.N.Bautin) sites: 1) unstable limiting cycle decreasing in its size with the growth of the velocity motion of a characteristic point «sits» at the beginning of the coordinates that are irregular point of vector field of phase velocities so that the point of the phase at the postcritical velocities becomes disbalanced and is thrown off at a sufficiently far distance; 2) a case of soft Andronov-Hopf bifurcation with the appearance of a stable limiting cycle in the instability region.

1. *Анщенко В.С.* Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. — М.: Наука, 1990. — 312 с.
2. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. — М.: Наука, 1984. — 176 с.
3. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фурфев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
4. *Лобас Л.Г.* Математическая модель связанных систем с качением //Приклмеханика. - 1984. — 20, N 6. — С. 80 — 87.
5. *Лобас Л.Г.* Неголономные модели колесных экипажей. — Киев: Наукдумка, 1986. — 232 с.
6. *Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г.* Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. — Киев: Наукдумка, 1990. — 232 с.
7. *Лобас Л.Г., Хребет В.Г.* О маятниковых двухзвенных системах с качением //Приклмеханика. — 1993. — 29, N 2. — С. 82 — 88.
8. *Лялунов А.М.* Собр.соч.: В 3 т. - М.:Л.: Изд-во АН СССР, 1956. — Т. 2 - 473 с.

Ин-т механики АН Украины, Киев

Поступила 19.04.91