УДК 531.011: 629.113+629.114

**Банников В. А., Вербицкий В. Г., Дугельный В. Н.,
Загороднов М. И., Хребет В. Г.**

К ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ

В работе приведены трактовки понятий устойчивости стационарных режимов движения модели автомобиля в «малом» и «большом» на основе классического определения устойчивости по А.М. Ляпунову; оценены границы области притяжения прямолинейного автомобиля с избыточной поворачиваемостью.

Ключевые слова: *стационарные режимы, устойчивость, область притяжения, избыточная поворачиваемость.*

Постановка проблемы. Свойство устойчивости некоторого стационарного режима иногда связывают с самой динамической системой (система устойчива), или самим объектом исследования (например, автомобиль устойчив), что может подтолкнуть к ложным выводам. Так, например, если речь идет об анализе устойчивости стационарных режимов плоской модели автомобиля (продольная составляющая центра масс v и угол поворота управляемых колес θ при этом считаются постоянными параметрами), то стационарный режим определяется двумя скоростями – поперечной составляющей центра масс u^* и угловой скоростью относительно вертикальной оси ω^*, проходящей через центр масс. Постоянство по величине скорости полюса (центра масс) и угловой скорости полностью определяет характер движения плоской модели, это либо вращательное движение относительно неподвижного центра скоростей, либо поступательное движение, если угловая скорость равна нулю. Для нелинейной математической модели автомобиля при фиксированных значениях параметров (v,θ) может одновременно существовать несколько стационарных режимов с различными свойствами устойчивости, поэтому имеет смысл говорить лишь об устойчивости или неустойчивости того или иного стационарного режима.

Анализ последних исследований и публикаций. Из условия асимптотической устойчивости некоторого стационарного режима (u^*, ω^*) плоской модели автомобиля следует[1,2], что в случае достаточно малых начальных возмущений по указанным двум фазовым скоростям ($u^*+\Delta u$, $\omega^*+\Delta\omega$) система с течением времени вернется к соответствующему стационарному режиму (возмущения Δu, $\Delta\omega$ «затухают»). В случае асимптотически устойчивого прямолинейного режима движения ($u^*=0$, $\omega^*=0$), достаточно малые начальные возмущения (Δu, $\Delta\omega$) приведут к переходному процессу – движению центра масс по криволинейному участку траектории, кривизна которого с течением времени будет стремиться к нулю (восстановится прямолинейный характер движения, но с некоторым новым курсовым углом). По отношению к циклическим переменным – курсовому углу, декартовым координатам центра масс, которые непосредственно не входят в уравнения возмущенного движения, может быть сделан вывод о свойстве устойчивости лишь на основе дополнительного анализа. Так, по курсовому углу имеет место лишь устойчивость, но не асимптотическая; отклонение же центра масс автомобиля от первоначальной прямолинейной траектории будет расти неограниченно с течением времени, что свидетельствовало бы о неустойчивости по отношению к декартовым координатам центра масс. Для асимптотически устойчивого кругового стационарного режима, достаточно малые возмущения (Δu, $\Delta\omega$) вызовут переходной процесс, который приведет к смещению неподвижного центра скоростей вращательного движения (радиус траектории центра масс и взаимное положение продольной оси автомобиля по отношению к соответствующей касательной траектории не изменится), то есть можно говорить об устойчивости по отношению к циклическим координатам.

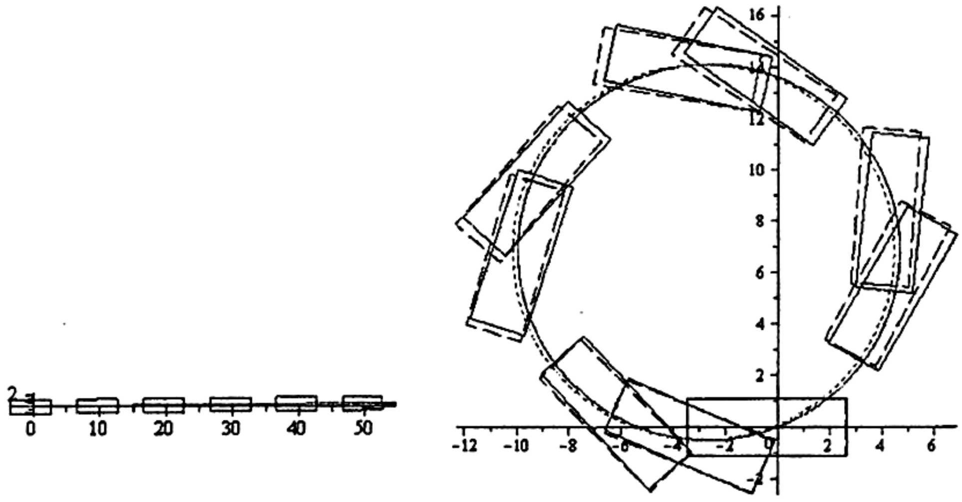


Рис. 1. а) – иллюстрация стойкости прямолинейного движения автомобиля; б) – иллюстрация стойкости кругового движения автомобиля

Постановка задачи анализа устойчивости в «большом». Рассмотрим важные с точки зрения практики характеристики стационарных режимов модели двухосного автомобиля

$$\dot{u} = Q(u,\omega);$$
$$\dot{\omega} = G(u,\omega);$$

(далее так будем обозначать обобщенную математическую модель автомобиля, которая приведена к нормальному виду Коши).

Понятие устойчивости по Ляпунову является локальной характеристикой системы, и вообще говоря, выполняется в бесконечно малой окрестности соответствующего стационарного состояния системы. Поэтому в технических применениях очень важно оценить бассейн (область) притяжения стационарного состояния, т.е. область фазового пространства, каждая точка которой, если ее выбрать в качестве начального условия (начального возмущения) связана с фазовой траекторией, которая асимптотически приближается к устойчивому стационарному состоянию.

Материалы и результаты исследования. Построение фазового портрета динамической системы дает возможность оценить область притяжения устойчивых стационарных состояний (рис.2), что предполагает использование численных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений движения, и определения всех возможных стационарных состояний системы при фиксированных значениях параметров управления.

Если при фиксированных управляемых параметрах $\theta = const$, $V = const$, существует два, или больше двух стационарных состояний

$$u^* = 0\,;\ \omega^* = 0\,;$$
$$u^{**} \neq 0\,;\ \omega^{**} \neq 0\,,$$

необходимо исследовать устойчивость каждого из них, и провести детальный анализ фазового портрета, чтобы выяснить границы устойчивости (бассейны притяжения) в фазовой плоскости.

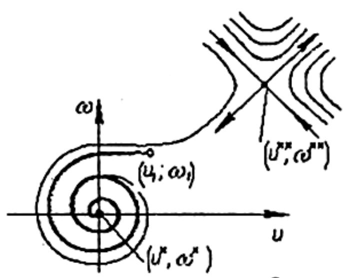


Рис. 2. Фазовый портрет дает возможность определить область притяжения устойчивой особой точки (совпадает с началом системы координат), область притяжения ограничена двумя сепаратрисами, которые входят в седловую особую точку

Так, точка фазовой плоскости (u_1,ω_1) принадлежит бассейну притяжения. В окрестности каждого стационарного режима необходимо построить соответствующее уравнение в вариациях [1]

$$\ddot{\omega} + p\cdot\dot{\omega} + q\cdot\omega = 0\,;$$

$$p^{*} = -(\partial Q/\partial u + \partial G/\partial\omega)\Big|_{(u^{*},\omega^{*})} = -\mathrm{div}(Q,P)\Big|_{(u^{*},\omega^{*})}\,;$$

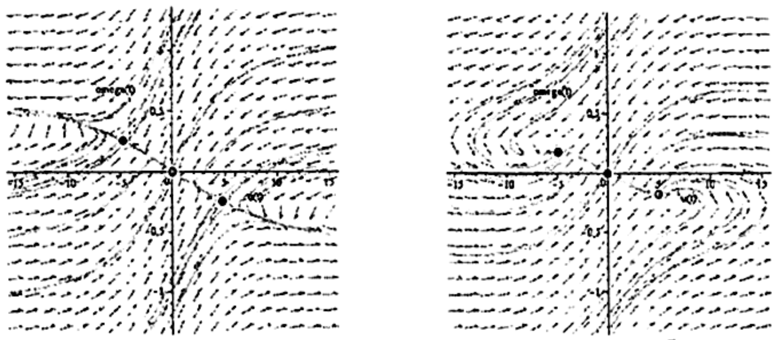
$$q^{*} = \det\begin{pmatrix}\partial Q/\partial u & \partial Q/\partial\omega\\ \partial G/\partial u & \partial G/\partial\omega\end{pmatrix}\Bigg|_{(u^{*},\omega^{*})}.$$

Действительные части корней соответствующего характеристического уравнения определяют состояние (устойчивости-неустойчивости) особой точки.

$$\lambda^2 + p^{*}\cdot\lambda + q^{*} = 0\,.$$

Необходимые и достаточные (коэффициентные) условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения в вариациях: $\{p^{*} > 0, q^{*} > 0\}$.

На рис.3 показаны фазовые портреты модели автомобиля с избыточной поворачиваемостью при $v < v^{+}_{kp}$ и $v > v^{+}_{kp}$; на рис. 3, а) представлена область притяжения прямолинейного движения при докритической скорости; рис. 3, б) иллюстрирует смысл понятия опасная-безопасная потеря устойчивости прямолинейного движения [2].



а б

Рис. 3. а) – область устойчивости стационарного состояния нелинейной динамической системы (узел в начале координат) ограничена двумя «входящими» сепаратрисами седловых особых точек (что характерно для модели автомобиля с избыточной поворачиваемостью) – случай опасной потери стойкости ($v < v^{+}_{kp}$);

б) – фазовый портрет системы при закритической скорости (возмущения фазовых переменных неограниченно возрастают, так как при этих условиях существует лишь одна седловая особая точка, которая отвечает неустойчивому прямолинейному режиму движения, $v > v^{+}_{kp}$)

Выводы. На основе классического определения устойчивости по А.М. Ляпунову указаны подходы, позволяющие провести строгий анализ свойств устойчивости стационарных режимов движения и оценить их «запас устойчивости»; оценены границы области притяжения прямолинейного движения модели автомобиля с избыточной поворачиваемостью.

Литература

1. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. – К.: Наук. думка. – 1990. – 232 с.
2. Вербицкий В., Новак А., Даниленко Э., Ситаж М. Введение в теорию устойчивости колесных экипажей и рельсового пути. – Донецк: «Вебер» (Донецкое отделение). – 2007. – 255 с.

Банніков В. О., Вербицький В. Г., Дугельний В. М., Загороднов М. І., Хребет В. Г. До завдання аналізу стійкості стаціонарного режиму руху автомобіля.

У роботі наведено трактування понять стійкості стаціонарних режимів руху моделі автомобіля в "малому" і "великому" на основі класичного визначення стійкості за О.М. Ляпуновим; визначені границі басейну асимптотичної стійкості прямолінійного руху моделі автомобіля з надлишковою поворотністю.

Ключові слова: *стаціонарні режими, стійкість, область тяжіння, надлишкова поворотність.*

Bannikov V. A., Verbitskiy V. G., Dugelnyy V. N., Zagorodnov M. I., Khrebet V. G. To problem of the analysis to stability of the stationary mode of the moving the car.

Interpretation of concepts of stability in "small" and "great" of the stationary states of motion of vehicle model, which are based on classic determination of stability by A.M. Ljapunov are discussed in the article; the borders of area of attraction of rectilineal motion of vehicle model are appraised with an oversteer.

Keywords: *stationary states, stability, area of attraction, oversteer.*