Міністерство освіти і науки України
Кіровоградська льотна академія
Національного авіаційного університету

Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції

«Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем»

27-28 листопада

Кіровоград, 2013

УДК 531.011: 629.114

В.Г. Хребет, к.ф.-м.н., доцент,
В.С. Сырых
Государственное высшее учебное заведение
"Донецкий национальный технический университет"
Горловский автомобильно- дорожный институт

Динамика неголономной модели транспортной системы

Рассматривается обобщенная модель саней Чаплыгина [1], в которой корпус в середине задней опоры сочленяется дополнительной опорой в виде подвижного лезвия, имеющего свободу вращения относительно вертикальной оси. Наличие сохраненных скользунов предохраняет такую систему от опрокидывания, то есть в системе существует две неголономные связи, препятствующие боковому проскальзыванию.

Точки соприкосновения лезвий с опорой имеют скорости v и v_1, которые лежат в плоскостях, совпадающих с лезвиями. Тогда из геометрии положения мгновенного центра скоростей имеем соотношение $\omega = \dfrac{v tg(\theta)}{l}$. Абсолютная угловая скорость подвижной опоры относительно вертикальной оси $\omega_1 = \omega + \dot{\theta}$, где $\dot{\theta}$ - угловая скорость подвижной опоры относительно корпуса. Центр масс находится на расстоянии a от неподвижной опоры; а расстояние между точками контакта лезвий l постоянно при произвольном угле θ.

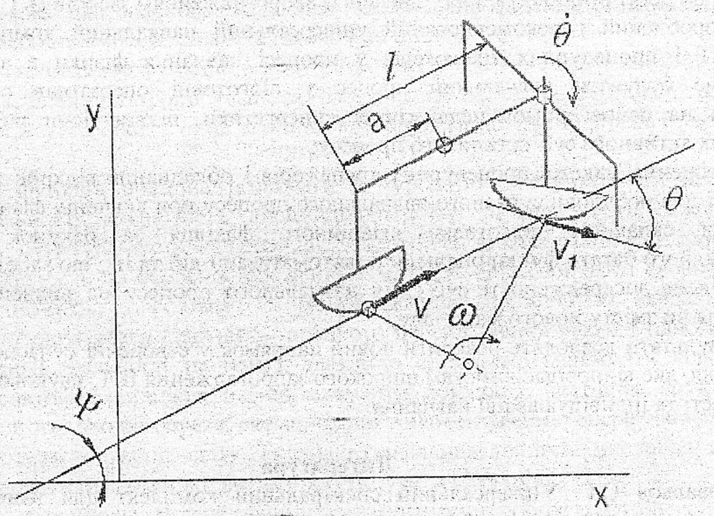


Рис. 1

Уравнения движения составлены на основе общих законов динамики путем исключения сил реакций в цилиндрическом шарнире. Уравнения имеют вид:

$$\dot{v} = -\frac{v tg(\theta)\dot{\theta}(m_1 l^2 + ma^2 + J)}{l^2 cos^2(\theta)M + sin^2(\theta) + (m_1 l^2 + ma^2 + J)},$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta} v l M}{-l^2 cos^2(\theta)M - sin^2(\theta)(m_1 l^2 + ma^2 + J)}.$$

Вид полученных уравнений отличается от уравнений, приведенных в [1], но не противоречит им и более удобен для качественного анализа.

Из уравнений движения получим дифференциальное следствие

$$\frac{dv}{d\omega}=-\frac{(m_1 l^2+ma^2+J)\omega}{Mv}$$

откуда следует интеграл движения

$$\frac{1}{2}(Mv^2+(m_1 l^2+ma^2+J)\omega^2)=const_1,$$

физический смысл которого состоит в сохранении кинетической энергии корпуса экипажа при отсутствии собственного вращения подвижной опоры. Кроме того, имеет место еще один интеграл – следствие сохранения кинетического момента подвижной опоры

$$\frac{vtg(\theta)}{l}+\dot{\theta}=const_2.$$

Учитывая эти два интегралы, можно получить выражение полной кинетической энергии, которая сохраняется при движении саней.

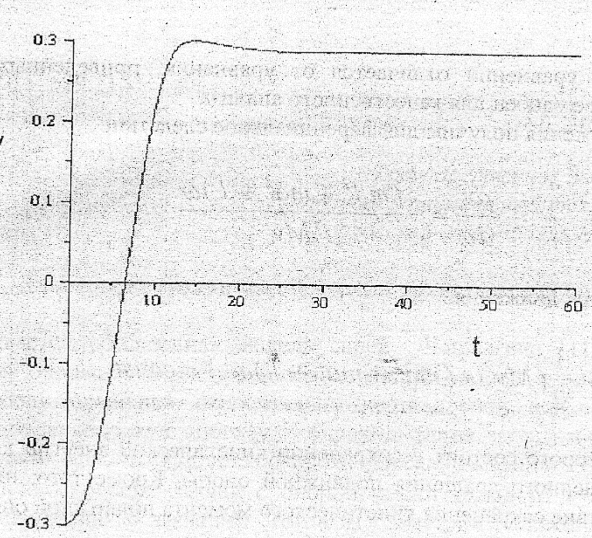
$$\frac{1}{2}(M\cdot v^2+(m_1 l^2+ma^2+J)\cdot\omega^2)+J_1\cdot(\omega+\dot{\theta}^2)=const_3.$$

Далее приводятся результаты численного интегрирования уравнений движения системы, полученные при следующих значениях параметров: $m=1кг$; $m_1=0,8кг$; $a=0,9м$; $l=1м$; $J=1,5\cdot m\cdot a^2$; $J_1=0,08\ кгм^2$; $M=m+m_1$.

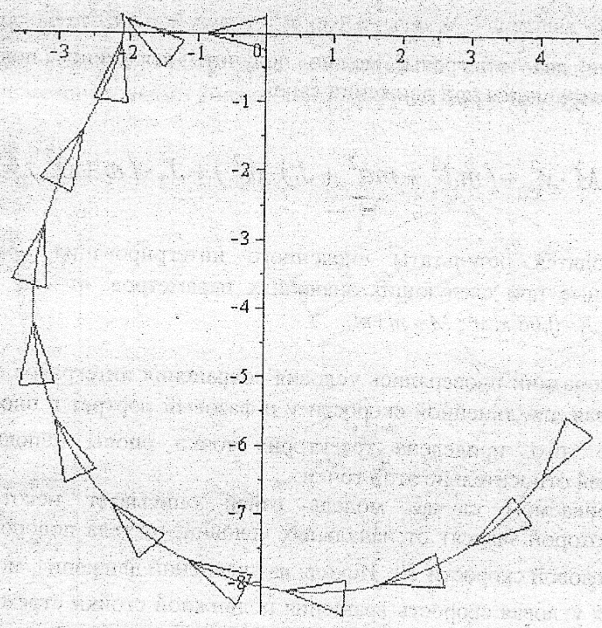
При интегрировании проверялись условия сохранения интегралов системы. Получены интегральная кривая для линейной скорости v и фазовый портрет в плоскости переменных θ и $\dot{\theta}$. Кроме того, приведена траектория точки опоры неподвижного лезвия и конфигурация саней относительно этой точки.

В рассматриваемом случае модель саней описывает некоторую окружность, характеристики которой зависят от начальных условий: от угла поворота передней стойки θ_0 и начальной угловой скорости $\dot{\theta}_0$. Исходя из уравнений движения, можно сделать вывод, что относительная угловая скорость вращения подвижной стойки стремится к нулю, а угол поворота стойки θ к некоторому фиксированному значению θ^*.

Из интеграла энергии 1 следует, что кинетическая энергия подвижной стойки переходит в кинетическую энергию корпуса, далее движение системы происходит как движение единого твердого тела. Если скорость v направлена от подвижной опоры к задней, то движение этой системы "переориентируется", то есть система обладает чувствительностью к направлению движения, аналогично обычным саням Чаплыгина. Траектория в этом случае имеет характерную особенность – точку заострения (рис. 2), а система стремится описать окружность. В случае классических саней Чаплыгина траектория спрямляется – стремится к прямолинейному движению.



а)



б)

Рис. 2.

Рисунок 2, б) иллюстрирует изменение направления движения саней Чаплыгина с течением времени.

Список литературы

1. Лобас Л.Г. Неголономные модели колесных экипажей.-Киев : Наук. думка, 1986. - 231 с.