МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ПІДГОТОВКИ АБІТУРІЄНТІВ ДО ВСТУПУ У ВНЗ

Матеріали
VII міжрегіонального семінару

КИЇВ 2012

УДК 378. 141/141.5 (082)

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ПІДГОТОВКИ АБІТУРІЄНТІВ ДО ВСТУПУ У ВНЗ: **МАТЕРІАЛИ VII МІЖРЕГІОНАЛЬНОГО СЕМІНАРУ. – К. : НАУ, 2012. – 148 с.**

До збірника увійшли матеріали доповідей семінару, в яких висвітлено основні методи роботи щодо впровадження новітніх технологій в тестування. Пропонується методика використання тестових завдань, впровадження якої в навчальний процес дозволяє ефективно перевірити відповідність знань та умінь учнів програмовим вимогам, оцінити рівень навчальних досягнень слухачів, оцінити ступінь підготовленості випускників ЗНЗ до подальшого навчання у ВНЗ. Відображено реальний досвід, подано рекомендації щодо вдосконалення методики та методологічних підходів до викладання навчальних дисциплін.

Рекомендовано викладачам та учням загальноосвітніх навчальних закладів, слухачам підготовчих курсів.

Рекомендовано до друку науково-методично-редакційною радою Інституту доуніверситетської підготовки Національного авіаційного університету (протокол № 2 від 30.04.2012 р.)

УДК 511.14 (045)

В.С. Тарасюк,
кандидат фізико-математичних наук,
старший викладач кафедри базових
і спеціальних дисциплін ІДП НАУ, м. Київ
С.І. Муранов,
вчитель інформатики Авіакосмічного
ліцею НАУ, м. Київ

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗКУ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ ДО ЗНО З МАТЕМАТИКИ

Резюме. Ключові слова. Ірраціональні рівняння, методи розв'язку рівнянь.

Постановка проблеми. Розв'язування ірраціональних рівнянь викликає певні труднощі у слухачів, тому що існує досить багато способів їх розв'язку. Пропонуємо найбільш поширені методи розв'язку, які застосовуються до такого типу рівнянь.

Мета. Допомогти набути вміння розв'язувати ірраціональні рівняння різної складності, показати найбільш вживані методи розв'язування даних рівнянь.

Завдання. Нагадаємо, що ірраціональними називаються рівняння, в яких невідома величина міститься під знаком кореня або в основі степеня з раціональним показником.

Потрібно добре розуміти, що:

1. Всі корені парного степеня, що входять в рівняння, є арифметичними, тобто підкореневий вираз визначений тільки для невід'ємних значень, і сам корінь приймає тільки невід'ємні значення.
2. Всі корені непарного степеня, що входять в рівняння, визначені при любому дійсному значенні підкореневого виразу і в залежності від знака підкореневого виразу можуть приймати як невід'ємні, так і від'ємні значення.

Основними методами розв'язку ірраціональних рівнянь є:

- Піднесення обох частин рівняння до одного і того ж степеня;
- заміна невідомого;
- домноження обох частин рівняння на одну і ту ж функцію;
- застосування властивостей функцій, що входять в рівняння.

Рівняння, що розв'язуються піднесенням обох частин рівняння до одного і того ж степеня.

При розв'язку ірраціонального рівняння цим способом можна йти двома шляхами:

I шлях

1. Знайти область визначення рівняння.
2. Виконати перетворення, що приводять дане рівняння до рівносильного раціонального.
3. Знайти множину розв'язків рівняння з врахуванням області визначення.

II шлях

1. Виконати перетворення даного рівняння, що приводять до рівнянь–наслідків.
2. Знайти корені рівняння–наслідка.
3. Виконати перевірку і записати відповідь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}=\sqrt{9-8x}$.

Розв'язання. $(\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3})^2=(\sqrt{9-8x})^2$

$$x+8-2\sqrt{(x+8)(x+3)}+x+3=9-8x$$

$$2\sqrt{(x+8)(x+3)}=10x-2$$

$$(x+8)(x+3)=(5x+1)^2$$

$$x^2+11x+24=25x^2+10x+1$$

$$24x^2-x-23=0$$

$x_1=1; x_2=-\frac{23}{24}$, звідки

Перевірка:

а) $x=1$, $\sqrt{9}-\sqrt{4}=\sqrt{9-8}$, $3-2=1$ (вірно), значить, $x=1$ – корінь рівняння (1),

б) $x=-\frac{23}{24}$, $\sqrt{-\frac{23}{24}+8}-\sqrt{-\frac{23}{24}+3}=\sqrt{9-\frac{23}{24}\cdot 8}$, $\sqrt{\frac{169}{24}}-\sqrt{\frac{49}{24}}=$ $=\sqrt{\frac{4}{3}}$ – (невірна рівність).

Відповідь: $x=1$.

Приклад 2. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{8-x}=3$

Звернемо увагу, що ліва частина рівняння являє собою суму коренів третього степеня. При піднесенні до 3-го степеня лівої частини рівняння зручно скористатись формулою $(a+b)^3=$ $=a^3+b^3+3ab(a+b)$ (якщо треба піднести до третього степеня різницю коренів, то формулою $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$).

Скориставшись вказаною формулою, отримаємо:

$x+1+8-x+3\cdot\sqrt[3]{(x+1)(8-x)}\cdot(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{8-x})=27$, звідки $9\cdot\sqrt[3]{(x+1)(8-x)}=18$ (так як $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{8-x}=3$).

Розділивши почленно це рівняння на 9 і піднісши ще раз обидві частини рівності до 3-го степеня, отримаємо:

$-x^2+7x+8=8$, $-x^2+7x=0$, звідки $x=0$ і $x=7$.

Відповідь: $x=0$, $x=7$.

Приклад 3. $\sqrt[3]{2+x}=\sqrt{4+x}$

Піднесемо обидві частини рівняння до 6-го степеня. Отримаємо:

$$(2+x)^2=(4+x)^3,\ 4+4x+x^2=64+48x+12x^2+x^3$$

$x^3+11x^2+44x+60=0$, $(x+3)(x^2+8x+20)=0$, $x=-3$ – єдиний корінь рівняння

Відповідь: $x=-3$.

Рівняння, що розв'язуються за допомогою врахування властивостей монотонності функції.

Розглянемо рівняння $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$ (1)

Його областю визначення буде промінь (-3; +∞).

На цій множині функція є монотонно зростаючою; значення рівне 5, ця функція приймає не більше, ніж в одній точці. Очевидно, що $x=1$ – корінь даного рівняння. Його єдиність доведена вище.

Аналогічно розв'язується рівняння $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+$ $+\sqrt[3]{x+3}=0$. Його область визначення є R, в лівій частині стоїть зростаюча функція, яка перетворюється в 0 при $x=-2$.

Рівняння, що розв'язуються за допомогою дослідження області визначення.

Розглянемо рівняння: $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=2$ (1)

$\sqrt{x-2}=\sqrt{4-2x}$ (2)

Область визначення рівняння (1) не містить дійсних чисел, значить, це рівняння не має коренів.

Область визначення рівняння (2) знаходиться із розв'язку системи: $\begin{cases} x-2\ge 0 \\ 4-2x\ge 0 \end{cases}$ і складає єдине число $x=2$.

Перевіримо, чи є $x=2$ коренем рівняння (2):

$\sqrt{2-2}=\sqrt{4-4}$ (вірно), значить, $x=2$ – корінь рівняння.

Відповідь: $x = 2$.

Рівняння, що розв'язуються за допомогою врахування властивостей обмеженості функцій.

$$\sqrt{4y^2+8y+8}+\sqrt{3y^2+6y+12}=4-2y-y^2 \quad (1)$$

Зауважимо, що для $\forall y \in R$

$$\sqrt{4y^2+8y+8}=\sqrt{4(y+1)^2+4}\geq 2$$

$$\sqrt{3y^2+6y+12}=\sqrt{3(y+1)^2+9}\geq 3$$

$$4-2y-y^2=5-(y+1)^2\leq 5$$

Маємо, що $\begin{matrix}\sqrt{4y^2+8y+8}+\sqrt{3y^2+6y+12}\geq 5\\ 4-2y-y^2\leq 5\end{matrix}$

Значить, рівність (1) виконується за умови, коли

$$\begin{cases}\sqrt{4y^2+8y+8}+\sqrt{3y^2+6y+12}=5 & (1)\\ 4-2y-y^2=5 & (2)\end{cases}$$

Із рівняння (2') слідує, що $y=-1$, і це значення задовольняє рівняння (1'), значить $y=-1$ – корінь рівняння (5).

Відповідь: $y=-1$.

Рівняння, що розв'язуються за допомогою врахування області визначення і множини значень функції, що входять в рівняння.

Розв'яжемо рівняння: $(7-\sqrt{x})^2=\sqrt{1-x^2}$

Область визначення рівняння: $x\in[0;1]$.

Якщо $0\leq x\leq 1$, то $0\leq\sqrt{1-x^2}\leq 1$, а $6\leq 7-\sqrt{x}\leq 7$, звідки:

$$36\leq(7-\sqrt{x})^2\leq 49$$

Отже, отримали, що при $0\leq x\leq 1$ функція $(7-\sqrt{x})^2$ має множину значень, які не мають спільних чисел із множиною значень функції $\sqrt{1-x^2}$.

Висновок: розв'язків немає

Відповідь: Ø.

Рівняння, що розв'язуються домноженням на деяку функцію обох частин.

Розглянемо рівняння: $\sqrt{x^2-3x+6}+\sqrt{x^2-3x+3}=3$. (1)

Помножимо обидві частини рівняння на $\sqrt{x^2-3x+6}-$ $-\sqrt{x^2-3x+3}$ (при цьому область визначення даного рівняння не зміниться).

Тоді рівняння (1) буде рівносильне системі:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-3x+6}+\sqrt{x^2-3x+3}=3\\ \sqrt{x^2-3x+6}-\sqrt{x^2-3x+3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-3x+6}=2\\ \sqrt{x^2-3x+3}=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2-3x+6=4\\ x^2-3x+3=1\end{cases}\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$$

Числа 1 і 2 задовольняють рівнянню (1), значить, є його коренями.

Відповідь: $x=1,\ x=2$.

Рівняння, що розв'язуються за допомогою переходу до системи.

$$x^3+1=2\cdot\sqrt[3]{2x-1}\qquad(1)$$

Нехай $y=\sqrt[3]{2x-1}$, тоді $y^3=2x-1$ і $y^3+1=2x$.

Отримаємо:

$$\begin{cases}x^3+1=2y\\ y^3+1=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-y^3=2(y-x)\\ x^3+1=2y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-y)(x^2-xy+y^2+2)=0\\ x^3+1=2y\end{cases}$$

Відмітимо, що $x^2-xy+y^2+2=(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2+2>0$ для любих дійсних x і y.

Тоді $\begin{cases}x=y\\ x^3+1=2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-2x+1=0\\ x=y\end{cases}$

$(x-1)\left(x^2+x-1\right)=0$

$x_1=1;\ \ x_{2,3}=-\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

<u>Відповідь:</u> $\left\{x_1=1;\quad x_{2,3}=-\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}.$

Зауваження: цей метод стає незамінним, якщо в запису рівняння зустрічаються корені різного степеня.

Розв'яжемо рівняння: $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$ (2)

Відмітимо, що в п.1 (рівняння 3) також зустрічались корені різних степенів, але рівняння успішно розв'язувалось піднесенням до шостого степеня обох частин рівняння. В цьому випадку даний спосіб неприйнятний через присутність третього доданка в рівнянні.

Отже, нехай $u=\sqrt[3]{2-x}\quad u^3=2-x$ (1')

$v=\sqrt{x-1},\ \ v\geq 0$, тоді $v^2=x-1,\quad x\geq 1$

Додавши почленно рівняння (1') и (2'), отримаємо:

$y^3+v^2=1$ (1'')

Дописавши до нього рівняння $u+v=1$ (2'')

Отримаємо систему $\begin{cases} y^3+v^2=1 \\ u+v=1 \end{cases}$

Відмітимо, що при її розв'язку достатньо знайти значення однієї із змінних u або v, щоб потім знайти значення x.

$\begin{cases} v=1-u \\ u^3+(1-u)^2=1 \end{cases}$

$u^3+1-2u-2u^2=1$, маємо $u(u^2+u-2)=0$, звідки

$u^3+u^2-2u=0$

$u_1=0,\ u_2=1,\ u_3=-2.$

Повернувшись до заміни, отримаємо:

а) $\sqrt[3]{2-x}=0$ б) $\sqrt[3]{2-x}=1$ в) $\sqrt[3]{2-x}=-2$

$x=2$ $x=1$ $x=10$

Відповідь: $\{10;2;1\}$.

$$\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3 \qquad (3)$$

Розв'язок.

Нехай $\sqrt{x^3+x^2-1}=a,\quad a\ge 0$

$\sqrt{x^3+x^2+2}=b,\quad b\ge 0$

$$\begin{array}{|l}x^3+x^2+2=b^2\\ x^3+x^2-1=a^2\\ \hline 3=b^2-a^2\end{array}$$

Тоді $\begin{cases}a+b=3\\ b^2-a^2=3\end{cases}$. Розв'язавши цю систему, отримаємо $a=1,\ b=2$.

Отже, $\sqrt{x^3+x^2-1}=1$,

$$x^3+x^2-2=0$$

$$(x^3-1)+(x^2-1)=0$$

$$(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)=0$$

$$(x-1)(x^2+2x+2)=0$$

Число $x=1$ - задовольняє рівнянню (3), значить, є його коренем.

Відповідь: $x=1$

Ірраціональні рівняння, що зводяться до однорідних.

Багато з яких ірраціональних рівнянь зводяться до розв'язку однорідних рівнянь другого, третього і інших степенів, якщо побачити заміну змінної.

Розглянемо рівняння: $3x^2+x+2-4x\sqrt{x+2}=0$ (1)

$$x-1+\frac{\sqrt{x-1}}{x}-\frac{6}{x^2}=0 \qquad (2)$$

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}=4\cdot\sqrt[3]{x^2-1} \qquad (3)$$

Якщо в рівнянні (1) ввести позначення $p(x)=\sqrt{x+2}$ і $g(x)=x$, то отримаємо рівняння $p^2-4gp+3g^2=0$, звідки $\frac{g}{p}=1$ або $\frac{g}{p}=3$,

і $\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{x+2}}{x}=1 \\ \frac{\sqrt{x+2}}{x}=3 \end{array}\right.$ $<=>$ $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1+\sqrt{73}}{18} \end{array}\right.$

Рівняння (2) буде розв'язано, якщо покласти $p(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\frac{1}{x}$.

Відповідь: $x=2$

При розв'язку рівняння (3) за $p(x)$ позначимо $\sqrt{x-1}$, за $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

Розв'язавши відповідне квадратне рівняння, прийдемо до сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=1 \\ \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=3 \end{array}\right.$, звідки $x=\frac{14}{3}$.

Відповідь: $x=\frac{14}{3}$.

Наведені вище рівняння (1)-(3) можна віднести до більш широкої групи рівнянь, що розв'язуються за допомогою введення нових змінних. Розглянемо цей метод більш детально, виділивши в ньому деякі підгрупи.

Рівняння, що розв'язуються методом введення нових змінних.

$$\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6 \quad (1)$$

$t=\sqrt[4]{x^3+8},\quad t\geq 0$ (*) , тоді $t^2+t-6=0$, $t_1=-3$ - не задовольняє умові (*),

$t_2=2$,

$\sqrt[4]{x^3+8}=2$

$x^3+8=16$

$x^3=8$

$x=2$

Перевірка: $\sqrt{8+8}-\sqrt[4]{8+8}=6$, 4 + 2 = 6 (вірно)

Відповідь: $x=2$.

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1 \qquad (2)$$

$\sqrt{3x^2+5x+1}=y,\ y\geq 0$, тоді

$3x^2+5x+8=y^2+7$

$\sqrt{y^2+7}=y+1$

$y^2+7=y^2+2y+1$, звідки $3x^2+5x-8=0$, $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$

$2y=6$

$y=3$

$$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7 \qquad (3)$$

Нехай $\sqrt{x^2-3x+5}=y,\quad y\geq 0$, $\begin{array}{l} x^2-3x-7=y^2-12 \\ y^2+y-12=0 \end{array}$,

$y_1=-4$ - не задовольняє умові y ≥ 0, тому $y_2=3$, і

$\sqrt{x^2-3x+5}=3$

$x^2-3x-4=0$. (Перевірка виконується).

$x_1=-1\quad x_2=4$

Відповідь: $\{-1;4\}$.

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x \qquad (4)$$

Нехай $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+7}$, $y\geq 0$ (*)

Відмітимо, що $(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2=2x+7+2\sqrt{x(x+7)}$, тоді отримаємо $y^2+y-42=0$, звідки $y_1=6$, $y_2=-7$ - не задовольняє умові (*)

$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6$, $2x+7+2\sqrt{x(x+7)}=36$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо $x=\frac{841}{144}$. (Перевірка виконується).

$$\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=1 \qquad (5)$$

Нехай $t=\sqrt{x-2},\quad x\geq 2,\quad t\geq 0 \qquad (*)$

Тоді рівняння (5) набуде вигляду $\sqrt{t^2-4t+4}-\sqrt{t^2-2t+1}=1$

або $|t-2|-|t-1|=1 \qquad (5')$

Розв'яжемо це рівняння при $t\geq 0$:

а) $\begin{cases}0\leq t\leq 1\\ -t+2+t-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\leq t\leq 1\\ 1=1\end{cases} \Leftrightarrow \quad 0\leq t\leq 1$

б) $\begin{cases}1<t\leq 2\\ -t+2-t+1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1<t\leq 2\\ t=1\end{cases} \quad \varnothing$

в) $\begin{cases}t>2\\ t-2-t+1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t>2\\ -1=1\end{cases} \quad \varnothing$

Отже, $0\leq t\leq 1$, $\quad 0\leq\sqrt{x-2}\leq 1$, $\quad 0\leq x-2\leq 1$, $\quad 2\leq x\leq 3$

<u>Відповідь:</u> $[2;3]$

Рівняння, що містять взаємно-обернені вирази.

$$\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2 \qquad (1) \qquad x\neq -3,\ x\neq 5$$

Нехай $t=\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}$, тоді рівняння (1) прийме вид $t+\frac{1}{t}=2$, звідки

$$\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}=1$$

$$\frac{5-x}{x+3}=1$$

$$5-x=x+3$$

$$2x=2$$

$$x=1$$

Відповідь: $x=1$.

Рівняння, що розв'язуються за допомогою скалярного добутку векторів.

Розв'яжемо рівняння: $3\sqrt{x}+4\sqrt{4-x}=10$

Область визначення рівняння: $0\le x\le 4$

Введемо вектори $\vec{a}(3;4)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{9+16}=5$, $\vec{b}(\sqrt{x};\sqrt{4-x})\Rightarrow$
$|\vec{b}|=\sqrt{x+4-x}=2$

Рівняння прийняло вигляд: $\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|*|\vec{b}|$

З врахуванням умови колінеарності векторів $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отримаємо:

$$\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{4}{\sqrt{4-x}}\Leftrightarrow\ \frac{9}{x}=\frac{16}{4-x},\text{ звідки } x=\frac{36}{25}.$$

Отримане значення задовольняє даному рівнянню.

Відповідь: $x=\frac{36}{25}$.

Висновки.

Отже, розглянуті деякі основні підходи до розв'язку ірраціональних рівнянь. Знання основних методів і набуття практичних навичок розв'язку ірраціональних рівнянь дасть змогу отримати більш високий бал при написанні ДПА, ЗНО та суттєво збільшить шанси при вступі до ВНЗ.

Література.

1. Збірник задач з математики для вступників до ВТУЗІВ/ За ред.М.І.Сканаві.- К.: Вища шк., 1996.

2. Пособие по математике для поступающих в вузы/ Под ред. Г.Н.Яковлева.-М.: Наука, 1985.
3. Саушкін О. Ф. Розв'язування алгебраїчних рівнянь. — К.: КНЕУ, 2003.