ISSN 0032 - 8243

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ им. С.П. ТИМОШЕНКО

МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

INTERNATIONAL APPLIED MECHANICS

ТОМ 35

8

1999

УДК 534: 629.114

 Л.Г.Лобас, В.Г.Хребет

О ХАРАКТЕРЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКОВЫХ СИСТЕМ С КАЧЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим двухзвенную механическую систему, совершающую плоскопараллельное движение и описанную в [2]. Существенными параметрами этой системы, определяющими топологическую структуру ее фазового пространства, являются скорость V движения точки сцепления O_1 первого ведомого звена с ведущим звеном и расстояние $l_1 = O_1 O_2$ между точками сцепок O_1 и O_2 звеньев. Существует значение $V = V_0(l_1)$ такое, что при $V < V_0$ движение прямолинейной конфигурации звеньев асимптотически устойчиво, при $V > V_0$ — неустойчиво. В предыдущих работах авторов [2 — 8] было изучено динамическое поведение указанной механической системы при $V < V_0$ и при $V > V_0$ как в линейной, так и в нелинейной постановках. В случае $V = V_0$ два собственных значения матрицы A уравнений линейного приближения имеют отрицательные части, два других чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \lambda_{3,4} = \kappa \pm i\omega_1$, $\kappa < 0$.

Исследуем возможность периодичности движения данной связки тел со скоростями $V = V_0$ в нелинейной постановке. Приведя исходные уравнения к базису из собственных векторов матрицы A и ограничиваясь кубической аппроксимацией дифференциальных опрераторов в уравнениях возмущенного движения, в вещественной форме имеем [3, ф-ла (2.3)]

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= -\omega_0 \xi_2 + \sum_{l=1}^{4} \sum_{m=1}^{4} \sum_{n=1}^{4} A_{lmn}^{(1)} \xi_l \xi_m \xi_n + \ldots,\\
\xi_2 &= \omega_0 \xi_1 + \sum_{l=1}^{4} \sum_{m=1}^{4} \sum_{n=1}^{4} A_{lmn}^{(2)} \xi_l \xi_m \xi_n + \ldots,\\
\xi_3 &= \kappa \xi_3 - \omega_1 \xi_4 + \sum_{l=1}^{4} \sum_{m=1}^{4} \sum_{n=1}^{4} A_{lmn}^{(3)} \xi_l \xi_m \xi_n + \ldots,\\
\xi_4 &= \omega_1 \xi_3 + \kappa \xi_4 + \sum_{l=1}^{4} \sum_{m=1}^{4} \sum_{n=1}^{4} A_{lmn}^{(4)} \xi_l \xi_m \xi_n + \ldots,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где

$$A_{lmn}^{(j)} = A_{lnm}^{(j)} = A_{nlm}^{(j)} \quad (j = 1, \ldots, 4).$$

§ 2. Сведение четырехмерной системы (1.1) к двумерной. Следуя Ляпунову [9], будем искать такое частное решение уравнений (1.1), в котором некритические переменные x_3 и ξ_4 являются аналитическими функциями критических переменных

$$\xi_s = \xi_s(\xi_1, \xi_2) \quad (s = 3, 4). \tag{2.1}$$

Если такие функции существуют, то они должны быть решениями системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1}\left(-\omega_0\xi_2 + \sum_{l,m,n} A^{(1)}_{lmn}\xi_l\xi_m\xi_n + \ldots\right) + \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_2}\left(\omega_0\xi_1 + \sum_{l,m,n} A^{(2)}_{lmn}\xi_l\xi_m\xi_n + \ldots\right) =$$

$$= \kappa\xi_3 - \omega_1\xi_4 + \sum_{l,m,n} A^{(3)}_{lmn}\xi_l\xi_m\xi_n + \ldots,$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial \xi_1}\left(-\omega_0\xi_2 + \sum_{l,m,n} A^{(1)}_{lmn}\xi_l\xi_m\xi_n + \ldots\right) + \frac{\partial \xi_4}{\partial \xi_2}\left(\omega_0\xi_1 + \sum_{l,m,n} A^{(2)}_{lmn}\xi_l\xi_m\xi_n + \ldots\right) =$$

$$= \omega_1\xi_3 + \kappa\xi_4 + \sum_{l,m,n} A^{(4)}_{lmn}\xi_l\xi_m\xi_n + \ldots . \tag{2.2}$$

Удовлетворяя уравнениям (2.2) формальными рядами с неопределенными коэффициентами, находим

$$\xi_s = B^{(s)}_{111}\xi_1^3 + 3B^{(s)}_{112}\xi_1^2\xi_2 + 3B^{(s)}_{122}\xi_1\xi_2^2 + B^{(s)}_{222}\xi_2^3 + \ldots \quad (s = 3, 4), \tag{2.3}$$

где $B^{(s)}_{lmn}$ являются функциями $A^{(\kappa)}_{111}, A^{(\kappa)}_{112}, A^{(\kappa)}_{122}, A^{(\kappa)}_{222}$ $(\kappa = 3, 4)$. Подставляя вместо ξ_3 и ξ_4 их выражения через ξ_1, ξ_2 в первые два уравнения (1.1), получим

$$\dot\xi_1 = -\omega_0\xi_2 + A^{(1)}_{111}\xi_1^3 + 3A^{(1)}_{112}\xi_1^2\xi_2 + 3A^{(1)}_{122}\xi_1\xi_2^2 + A^{(1)}_{222}\xi_2^3 + \ldots,$$

$$\dot\xi_2 = \omega_0\xi_1 + A^{(2)}_{111}\xi_1^3 + 3A^{(2)}_{112}\xi_1^2\xi_2 + 3A^{(2)}_{122}\xi_1\xi_2^2 + A^{(2)}_{222}\xi_2^3 + \ldots . \tag{2.4}$$

Проинтегрировав систему (2.4) и воспользовавшись затем рядами (2.3), получим двупараметрическое интегральное интегральное многообразие системы (1.1).

Использованный здесь прием Ляпунова нашел применение в известной теореме о центральном многообразии [11—13]. Отметим также, что система (2.4) получается из первых уравнений (1.1) формальными заменами $\xi_3, \xi_4 = 0$.

§ 3. Применение системы (2.4) к одному уравнению второго порядка и нахождение его решения. Продифференцировав по времени первое уравнение (2.4) и подставив в результат $\dot\xi_2$ из второго уравнения, получим равенство, содержащее $\ddot\xi_1, \dot\xi_1, \xi_1, \xi_2$. Затем разрешим первое уравнение (2.4) относительно ξ_2, удерживая члены не выше третьего порядка

$$\xi_2 = \frac{1}{\omega_0}\left(-\dot\xi_1 + A^{(1)}_{111}\xi_1^3 - \frac{3}{\omega_0}A^{(1)}_{112}\xi_1^{(2)}\dot\xi_1 + 3\omega_0^2 A^{(1)}_{122}\xi_1\dot\xi_1^2 - \frac{A^{(1)}_{222}}{\omega_0^3}\dot\xi_1^3\right) + \ldots . \tag{3.1}$$

Подставив (3.1) в указанное равенство, получим искомое дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot\xi_1 + \omega_0^2\xi_1 = A_{111}\omega_0\xi_1^3 + A_{112}\xi_1^2\xi_2 + \frac{A_{122}}{\omega_0}\xi_1\dot\xi_1^2 + \frac{A_{222}}{\omega_0^2}\dot\xi_1^3 + \ldots, \tag{3.2}$$

где

$$A_{111} = 3A^{(1)}_{112} - A^{(2)}_{111};\ A_{112} = 3(A^{(1)}_{111} + A^{(2)}_{112} - 2A^{(1)}_{122}) \equiv 3B_{112};$$

$$A_{122} = 3(A^{(1)}_{222} - A^{(2)}_{122} - 2A^{(1)}_{112}) \equiv 3B_{112},\ A_{222} = A^{(2)}_{222} + 3A^{(1)}_{122}.$$

Исследуем возможность существования периодического решения уравнения (3.2). Начальные условия возьмем в виде $\xi_1\big|_{t=0} = c,\ \dot\xi_1\big|_{t=0} = 0$. Пусть T — период искомого решения

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots).$$

Замена [10]

$$t = \frac{\tau}{\omega_0}(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots) \qquad (3.3)$$

приводит к тому, что решению с периодом $T(c)$ по переменной t соответствует решение с периодом 2π по переменной τ. Обозначим $\xi_1(t) = \zeta_1(\tau)$. Из (3.2) на основании (3.3) находим

$$\frac{d^2\zeta_1}{d\tau^2} + (1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots)^2 \zeta_1 = \frac{A_{111}}{\omega_0}(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots)^2 \zeta_1^3 +$$

$$+ \frac{A_{112}}{\omega_0}(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots)^2 \zeta_1^3 \frac{d\zeta_1}{d\tau} + \frac{A_{122}}{\omega_0}\zeta_1\left(\frac{d\zeta_1}{d\tau}\right)^2 +$$

$$+ \frac{A_{222}}{\omega_0} \; \frac{1}{1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots}\left(\frac{d\zeta_1}{\partial\tau}\right)^3 + \ldots . \qquad (3.4)$$

Искомое периодическое решение периода 2π уравнения (3.4) является аналитическим относительно параметра c. Ищем его в виде

$$\zeta_1 = c\cos\tau + c^2\zeta_1^2(\tau) + c^3\zeta_1^{(3)}(\tau) + \ldots . \qquad (3.5)$$

Так как система (2.4) инварианта относительно замены ξ_1 и ξ_2 на $-\xi_1$ и $-\xi_2$, то ряд (3.5) может содержать лишь нечетные степени c, а ряд (3.3) — только четные: $\zeta_1^{(2\kappa)} = 0$, $h_{2\kappa+1} = 0$. Третье приближение определяется уравнением

$$\frac{d^2\zeta_1^{(3)}}{d\tau^2} + \xi_1^{(3)} = \left[-2h_2 + \frac{3}{4\omega_0}(A_{111} + B_{122})\right]\cos\tau + \frac{3}{4\omega_0}(B_{112} + A_{222})\sin\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\omega_0}[(A_{111} - A_{122})\cos 3\tau + (A_{222} - A_{112})\sin 3\tau]. \qquad (3.6)$$

Периодическое решение (3.6) существует тогда и только тогда, когда

$$h_2 = \frac{3}{8\omega_0}(A_{111} + B_{122}), \quad B_{112} + A_{222} = 0. \qquad (3.7)$$

Второе из условий (3.7) равносильно равенству $\alpha_3 = 0$, причем

$$\alpha_3 = \frac{3\pi}{4\omega_0}\left(A_{112}^{(1)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)}\right) \qquad (3.8)$$

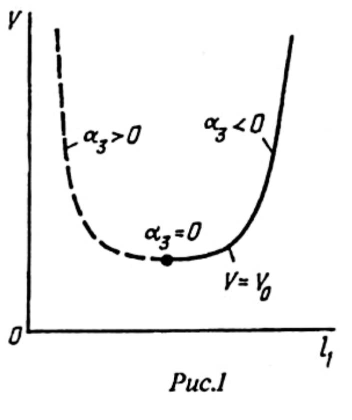

Рис.1

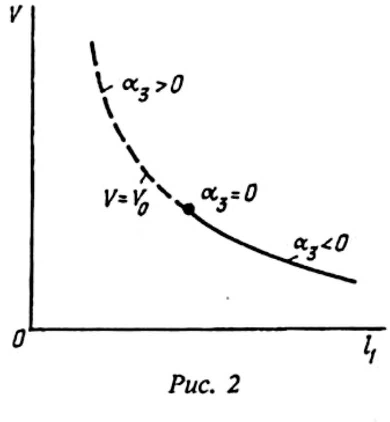

Рис. 2

есть первый ненулевой ляпуновский коэффициент, знак которого определяет устойчивость или неустойчивость участка границы области устойчивости, которая соответствует некратной паре чисто мнимых корней характеристического уравнения [1]. Граница $V = V_0$ области устойчивости маятниковых систем с качением [3] показана на рис. 1 и 2. Из (3.7) следует, что уравнение (3.2) может допускать периодические решения лишь в точке $\alpha_3 = 0$. При указанных условиях решение уравнения (3.6) имеет вид

$$\zeta_1^{(3)} = \frac{1}{32\,\omega_0}[A_{30}(-\cos\tau + \cos 3\tau) + B_{30}(-3\sin\tau + \sin 3\tau)], \tag{3.9}$$

где

$$A_{30} = A_{122} - A_{11};\quad B_{30} = A_{112} - A_{222}.$$

Пятое приближение определяется уравнением

$$\begin{aligned}\frac{d^2\zeta_1^{(5)}}{d\tau^2} + \zeta_1^{(5)} = &\left\{\frac{h_2}{16\,\omega_0}A_{30} - h_2^2 - 2h_4 + \frac{3h_2}{2\,\omega_0}A_{111} + \frac{3}{64\,\omega_0^2}[A_{30}(B_{122} - A_{111}) - \right.\\ &\left. - B_{30}(B_{112} + 3A_{222})]\right\}\cos\tau +\\ &+\left\{\frac{3h_2}{16\,\omega_0}(3A_{222} - B_{112}) + \frac{3}{64\,\omega_0^2}[A_{30}(B_{112} + 3A_{222}) + B_{30}(B_{122} - A_{111})]\right\}\sin\tau +\\ &+\left[A_{30}\left(A_{111} + 5B_{122} - \frac{h_2}{16\,\omega_0}\right) + 3B_{30}(3A_{222} - B_{112}) + \frac{h_2}{2\,\omega_0}A_{111}\right]\cos 3\tau +\\ &+\left[-A_{30}(3B_{112} + 7A_{222}) + B_{30}\left(11B_{122} - A_{111} - \frac{h_2}{16\,\omega_0}\right) - \frac{h_2}{4\,\omega_0}(A_{112} + A_{222})\right]\sin 3\tau +\\ &+\left[A_{30}(A_{111} - 7B_{122}) + B_{30}(5B_{112} - 3A_{222})\right]\cos 5\tau +\\ &+\left[A_{30}(3A_{222} - 5B_{112}) + B_{30}(A_{111} - 7B_{122})\right]\sin 5\tau.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Из необходимых и достаточных условий существования периодического решения уравнений (3.10) находим

$$\begin{gathered}h_4 = -\frac{h_2^2}{2} + \frac{h_2}{4\,\omega_0}\left(\frac{A_{30}}{8} + 3A_{111}\right) + \frac{3}{128\,\omega_0^2}[A_{30}(B_{122} - A_{111}) - B_{30}(B_{112} + 3A_{222})],\\ A_{222}(A_{111} + B_{122}) = 0.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Здесь

$$B_{30} = -4A_{222},\ h_2 = \frac{Q(V_0)}{2\pi},\ Q(V_0) = \frac{3\pi}{4\,\omega_0}\left(A_{112}^{(1)} + A_{122}^{(1)} - A_{111}^{(2)} + A_{122}^{(2)}\right).$$

Так как в общем случае $A_{111} + B_{122} \neq 0$, то с необходимостью $A_{222} = 0$. Но тогда из второго равенства (3.7) следует, что $A_{112} = 0$. Таким образом, при ненулевых значениях всех четырех трехиндексных величин уравнение (3.2) не имеет периодического решения. Вместо (3.2) рассмотрим уравнение

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_0\zeta_1 = A_{111}\,\omega_0\,\xi_1^3 + \frac{A_{122}}{\omega_0}\xi_1\dot{\xi}_1^2, \tag{3.12}$$

седьмое приближение решения которого в новом времени τ определяется уравнением

$$\frac{d^2\zeta_1^{(7)}}{d\tau^2}+\zeta_1^{((7)}=-2h_2\zeta_1^{(5)}-(2h_4+h_2^2)\zeta_1^{(3)}-(2h_6+h_2h_4)\cos\tau+$$

$$+\frac{A_{111}}{\omega_0}\left\{3\left[\zeta_1^{(5)}\cos\tau+(\zeta_1^{(3)})^2\right]\cos\tau+6h_2\zeta_1^{(3)}\cos^2\tau+(2h_4+h_2^2)\right\}\cos^3\tau+ \tag{3.13}$$

$$+\frac{A_{122}}{\omega_0}\left[\left(\frac{d\zeta_1^{(3)}}{d\tau}\right)^2\cos\tau-\frac{d\zeta_1^{(5)}}{d\tau}\sin2\tau-2\frac{d\zeta_1^{(3)}}{d\tau}\zeta_1^{(3)}\sin\tau+\zeta_1^{(5)}\sin^2\tau\right].$$

Частное решение уравнения (3.10), удовлетворяющее начальным условиям $\zeta_1^{(5)}(0)=0$, $\dfrac{d\zeta_1^{(5)}(0)}{d\tau}=0$, меет вид

$$\zeta_1^{(5)}=-(A_5+C_5)\cos\tau+A_5\cos3\tau+C_5\cos5\tau, \tag{3.14}$$

где

$$A_5=-\frac{1}{8}\left[A_{30}\left(A_{111}+5B_{122}-\frac{h}{16\omega_0}\right)+\frac{h_2}{2\omega_0}A_{111}\right],$$

$$C_5=-\frac{A_{30}}{24}(A_{111}-7B_{122}).$$

Подставляя (3.14) в (3.13), приходим к уравнению, в котором коэффициент при $\sin\tau$ тождественно равен нулю, а уравнение

$$2h_2(A_5+C_5)+\frac{A_{30}}{32\omega_0}(2h_4+h_2^2)-2h_6-h_2h_4+$$

$$+\frac{3A_{111}}{4\omega_0}\left[2h_4+h_2^2-2A_5-3C_5+\frac{3A_{30}^2}{(32\omega_0)^2}-\frac{h_2A_{30}}{8\omega_0}\right]+$$

$$+\frac{3B_{122}}{4\omega_0}\left[\frac{11A_{30}^2}{(32\omega_0)^2}-3C_5+2A_5\right]=0,$$

выражающее условие равенства нулю коэффициента при $\cos\tau$, служит для нахождения h_6. По описанной процедуре получаются и все последующие, более высокие приближения решения уравнения (3.12). Последнее при $A_{122}=0$ переходит в уравнение Дюффинга, решения которого, как известно, являются периодическими. Выше показано, что периодическое решение имеет не только уравнение Дюффинга, но и его расширение (3.12).

§ 4. Непосредственное интегрирование системы (2.14). Подстановка (3.3) переводит систему (2.4) в следующую ($\xi_j(t)=\zeta_j(\tau)$):

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau}=\frac{1}{\omega_0}(1+h_1c+h_2c^2+\dots)\times$$

$$\times(-\omega_0\zeta_2+A_{111}^{(1)}\zeta_1^3+3A_{112}^{(1)}\zeta_1^2\zeta_2+3A_{122}^{(1)}\zeta_1\zeta_2^2+A_{222}^{(1)}\zeta_2^3+\dots),$$

$$\frac{d\zeta_2}{d\tau}=\frac{1}{\omega_0}(1+h_1c+h_2c^2+\dots)\times$$

$$\times(\omega_0\zeta_1+A_{111}^{(2)}\zeta_1^3+3A_{112}^{(2)}\zeta_1^2\zeta_2+3A_{122}^{(2)}\zeta_1\zeta_2^2+A_{222}^{(2)}\zeta_2^3+\dots). \tag{4.1}$$

Периодическое решение ищем в виде

$$\zeta_1 = c\zeta_1^{(1)}(\tau) + c^2\zeta_1^{(2)}(\tau) + c^3\zeta_1^{(3)}(\tau) + \ldots,\ \zeta_1^{(1)}(0) = 1,\ \zeta_1^{(k)}(0) = 0,$$

$$\zeta_2 = c\zeta_2^{(1)}(\tau) + c^2\zeta_2^{(2)}(\tau) + c^3\zeta_2^{(3)}(\tau) + \ldots,\ \zeta_2^{(1)}(0) = 0,\ \zeta_2^{(k)}(0) = 0$$

$$(k = 2, 3, \ldots).$$

Аналогично предыдущему находим

$$\zeta_1^{(1)} = \cos\tau,\ \zeta_2^{(1)} = \sin\tau,\ \zeta_1^{(2s)} = 0,\ \zeta_2^{(2s)} = 0,\ h_{2s+1} = 0.$$

Третье приближение решения определяется системой

$$\frac{d\zeta_1^{(3)}}{d\tau} + \zeta_2^{(3)} = \frac{3}{4\omega_0}(A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)})\cos\tau + \left[\frac{3}{4\omega_0}(A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(1)}) - h_2\right]\sin\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\omega_0}(A_{111}^{(1)} - 3A_{122}^{(1)})\cos 3\tau + \frac{1}{4\omega_0}(3A_{112}^{(1)} - A_{222}^{(1)})\sin 3\tau, \tag{4.2}$$

$$\frac{d\zeta_2^{(3)}}{d\tau} - \zeta_1^{(3)} = \left[\frac{3}{4\omega_0}(A_{111}^{(2)} + A_{122}^{(2)}) + h_2\right]\cos\tau + \frac{3}{4\omega_0}(A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)})\sin\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\omega_0}(A_{111}^{(2)} - 3A_{122}^{(2)})\cos 3\tau + \frac{1}{4\omega_0}(3A_{112}^{(2)} - A_{222}^{(2)})\sin 3\tau.$$

Из необходимых и достаточных условий периодичности решения системы (4.2)

$$\frac{3}{4\omega_0}(A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(2)}) - h_2 = \frac{3}{4\omega_0}(A_{111}^{(2)} + A_{122}^{(2)}) + h_2,$$

$$A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)} = -(A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)})$$

получаем $\alpha_3 = 0$ и выражение для h_2. Два последних результата были найдены в § 3 другим способом.

§ 5. Заключение о возможности периодического движения маятниковых систем с качением при критических скоростях ($V = V_0$). Согласно § 3 система имеет периодическое решение, если и только если восемь коэффициентов при ее нелинейных членах связаны двумя условиями

$$A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)} = -(A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)}),\ 3A_{122}^{(1)} = -A_{222}^{(2)}$$

или

$$A_{111}^{(1)} + A_{112}^{(2)} = 2A_{122}^{(1)},\ 3A_{122}^{(1)} = -A_{222}^{(2)}.$$

Для произвольных маятниковых систем с качением эти условия, вообще говоря, не выполняются, т.е. движение таких систем при $V = V_0$ непериодическое. Однако маятниковая система, для которой система (2.4) приводится к уравнению (3.12), совершает периодическое движение.

Р Е З Ю М Е. Досліджено нелінійну динамічну систему, матриця рівнянь лінійного наближення якої має два суто уявних власних значення, два інші мають від'ємні дійсні частини. Нелінійності є третього порядку. Методом Пуанкаре-Ляпунова-Малкіна показано, що рух системи, взагалі кажучи, неперіодичний. Періодичні рухи можуть допускатися лише в окремих випадках.

S U M M A R Y. The non-linear dynamic system has been investigated in which the matrix of equations of linear approximation has two purely imaginary eigenvalues where as two other ones have negative real parts. Non-linearities exercise the third order. It was shown by the Poincare-Malkin method that such a system motions, generally speaking, are unperiodical. Periodical motions can be admitted only in separate cases.

1. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. — М.: Наука, 1984. — 176 с.
2. *Лобас Л.Г., Хребет В.Г.* О маятниковых двухсвязных системах с качением // Прикл. механика. — 1993. — 29, № 2. — С. 82 — 88.
3. *Лобас Л.Г., Хребет В.Г.* Динамическое поведение маятниковой двухсвязной системы с качением на границе области устойчивости // Прикл. механика. — 1993. — 29, № 4. — С. 78 — 86.
4. *Лобас Л.Г., Хребет В.Г.* О предельных периодических движениях маятниковых двухзвенных систем с качением // Прикл. механика. — 1993. — 29, № 8. — С. 85 — 93.
5. *Лобас Л.Г., Хребет В.Г.* О бифуркации рождения предельного цикла из устойчивого фокуса и оценке области притяжения в маятниковых двухзвенных системах с качением // Прикл. механика. — 1993. — 29, № 9. — С. 62 — 68.
6. *Лобас Л.Г., Хребет В.Г.* Существование и единственность периодического движения в маятниковых двухзвенных системах с качением // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1993. — № 5. — С. 23 — 31.
7. *Лобас Л.Г., Хребет В.Г.* Об интегральном многообразии задачи о бифуркации Андронова-Хопфа в маятниковых двухзвенных системах с качением // Прикл. механика. — 1994. — 30, № 7. — С. 85 — 93.
8. *Лобас Л.Г., Хребет В.Г.* Бифуркация рождения предельного цикла и оценка области притяжения в маятниковых двухзвенных системах с качением // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1994. — № 3. — С. 61 — 66.
9. *Ляпунов А.М.* Собр. соч.: В 3 т. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. — Т. 2. — 473 с.
10. *Малкин И.Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. — 244 с.
11. *Марсден Дж., Мак-Кракен.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1989. — 368 с.
12. *Holmes P.J.* Center manifolds, normal forms and bifurcations ofvector fields with application to coupling between periodic and steady motions // Physica. — 1981. — Vol. 2D. — P. 449 — 481.
13. *Troger H., Steindl A.* Nonlinear stability and bifurcation theory. — Wien; New York: Springer-Verlag, 1991. — 407 p.

Киев. ин-т железнодор. транспорта, Киев
Автодор. ин-т Донецкого техн. ун-та,
Горловка (Украина)

Поступила 17.06.98