

ISSN 0032 - 8243

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ им. С.П. ТИМОШЕНКО**

МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА**

INTERNATIONAL APPLIED MECHANICS

**ТОМ
30**

7

1994

УДК 534.629.114

© 1994

Л.Г.Лобас, В.Г.Хребет

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ МНОГООБРАЗИИ ЗАДАЧИ О БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА-ХОПФА В МАЯТНИКОВЫХ ДВУХЗВЕННЫХ СИСТЕМАХ С КАЧЕНИЕМ

§ 1. Постановка задачи. Маятниковые системы с качением, введенные в [5, 8], являются механико-математическими моделями ведомых звеньев сочлененных колесных машин. При этом весьма существенно, что (в отличие от случая реализации классических неголономных связей [3]) колеса предполагаются упругодеформируемыми в рамках аксиоматики [13]. Наряду с двухзвенными можно рассмотреть и n -звенные маятниковые системы с качением, привлекая результаты работы [4].

Примем ведущее звено настолько массивным по сравнению с ведомыми звеньями, что воздействия последних не приводят к заметным изменениям в поведении ведущего звена. Считая движение этого звена прямолинейным и невозмущаемым, изучим колебательные движения ведомых звеньев в предположении, что точка оценки O_1 (рис.1)

ведущего и первого ведомого звена движется прямолинейно с неизменной скоростью v . Абсолютная ориентация звеньев определяется курсовыми углами v_1, v_2 , относительная — углами складывания φ_1, φ_2 , причем в рассматриваемом случае $v_1 = \varphi_1, v_2 = \varphi_1 + \varphi_2$. В обозначениях [5] плоскопараллельное движение данной связки тел описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$(J_1 + m_2 l^2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 d_2 l \ddot{\varphi}_2 \cos(v_2 - v_1) - m_2 d_2 l \dot{v}_2^2 \sin(v_2 - v_1) + L_1 Y_3(\delta_3) + L_1 Y_4(\delta_4) \cos(v_2 - v_1) = 0, \quad (1.1)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 d_2 l \ddot{\varphi}_1 \cos(v_2 - v_1) + m_2 d_2 l \dot{v}_1^2 \sin(v_2 - v_1) + L_2 Y_4(\delta_4) = 0,$$

где

$$\delta_3 = \arctg \frac{v \sin v_1 + L_1 \dot{v}_1}{v \cos v_1},$$

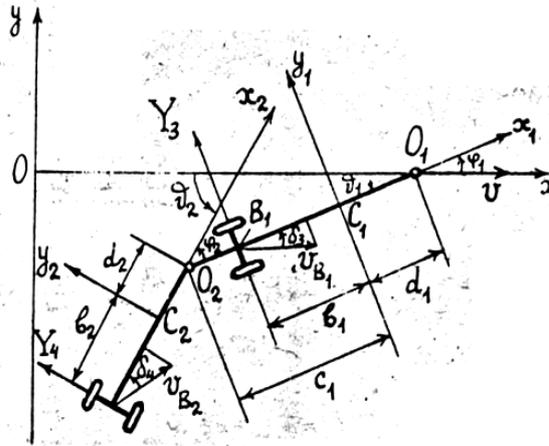


Рис. 1

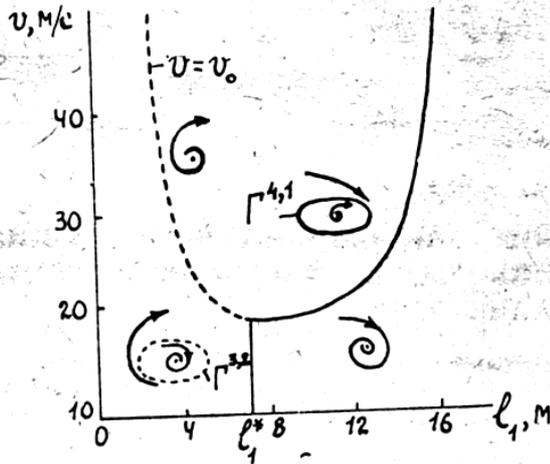


Рис. 2

$$\delta_4 = \text{arctg} \frac{v \sin v_2 + L_2 \dot{v}_2 + l_1 \dot{v}_1 \cos(v_2 - v_1)}{v \cos v_2 - l_1 \dot{v}_1 \sin(v_2 - v_1)}$$

Считая

$$Y_3 = k_3 \delta_3 - k_3 \delta_3^3 + \dots,$$

$$Y_4 = k_4 \delta_4 - k_4 \delta_4^3 + \dots,$$

представим уравнения возмущенного движения в окрестности решения $v_1 = 0, \dot{v}_1 = 0, v_2 = 0, \dot{v}_2 = 0$ системы (1.1) так [7]:

$$\dot{\xi}_1 = \varepsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4$$

$$A_{lmn}^{(1)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots,$$

$$\dot{\xi}_2 = \omega \xi_1 + \varepsilon \xi_2 + \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 A_{lmn}^{(2)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots,$$

$$\dot{\xi}_3 = \kappa \xi_3 - \omega_1 \xi_4 + \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 A_{lmn}^{(3)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots,$$

(1.2)

$$\dot{\xi}_4 = \omega_1 \xi_3 + \kappa \xi_4 + \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 A_{lmn}^{(4)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots$$

где $A_{lmn}^j = A_{lnm}^j = A_{nlm}^j$ ($j=1, \dots, 4$).

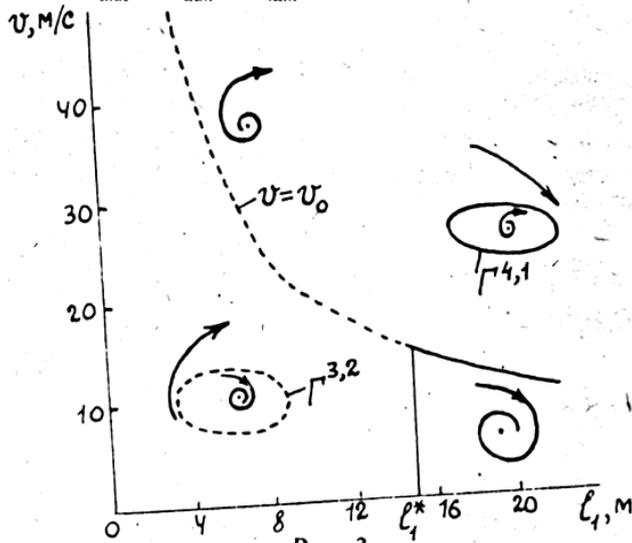


Рис. 3

При $v = v_0(l_1^2)$ имеем [6] $\varepsilon = 0, \omega(v_0) = \omega_0, \kappa(v_0) < 0$. В [7] проанализирована локальная бифуркация Андронова-Хопфа, описывающая движения с малыми амплитудами для $v > v_0$ т.е. $\varepsilon > 0$ [5]) вблизи границы $v = v_0(l_1^2)$ области устойчивости по Ляпунову. Топологическая структура фазового пространства при изменении существенных параметров v и l_1 системы (1.1) схематизирована на рис. 2 и 3, для которых $I_1 = 47580 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $k_3 = k_4 = 254080 \text{ Н/рад}$, $k_3 = k_4 = 4321100 \text{ Н}$, кроме того, при построении рис.2 принято $m_1 = 4905 \text{ кг}, m_2 = 9074 \text{ кг}$,

$I_2 = 147150 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $b_1 = b_2 = 3 \text{ м}$, $d_1 = d_2 = 1,5 \text{ м}$; при построении рис.3 принято $m_2 = 9810 \text{ кг}$, $I_2 = 49050 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $b_1 = b_2 = 0,5 \text{ м}$, $d_1 = d_2 = 4 \text{ м}$; Динамические ситуации, развивающиеся в системе с увеличением параметра ν при переходе устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (штриховые линии) участков кривой $\nu = \nu_0(I_1^2)$, происходят по сценариям [1]

$$O^{4,0} \rightarrow O^{2,2} + \Gamma^{4,1}, O^{4,0} + \Gamma^{3,2} \rightarrow O^{2,2}.$$

Для устойчивого предельного цикла $\Gamma^{4,1}$ в [7, 8] получено приближенное аналитическое описание методом Пуанкаре-Ляпунова-Малкина [10]. Ниже указан более эффективный алгоритм.

§ 2. Приведение четырехмерной динамической системы к двумерной. Покажем, что нахождение периодического решения системы (1.2) сводится к нахождению периодического решения системы второго порядка. В общем случае соответствующая процедура была впервые указана в [9] (а затем воспроизводилась в [2,11]) при исследовании критического случая пары чисто мнимых корней характеристического уравнения. Без принципиальных осложнений она переносится и на систему (1.2). При достаточно малых значениях переменных ξ_1 и ξ_2 (становящихся критическими при $\epsilon = 0$.) будем искать выражения некритических переменных в виде формальных рядов

$$\begin{aligned} \xi_3 = & a_1^{(3)} \xi_1 + a_2^{(3)} \xi_2 + a_{11}^{(3)} \xi_1^2 + 2a_{12}^{(3)} \xi_1 \xi_2 + a_{22}^{(3)} \xi_2^2 + \\ & + B_{111}^{(3)} \xi_1^3 + 3B_{112}^{(3)} \xi_1^2 \xi_2 + 3B_{122}^{(3)} \xi_1 \xi_2^2 + B_{222}^{(3)} \xi_2^3 + \dots, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \xi_4 = & a_1^{(4)} \xi_1 + a_2^{(4)} \xi_2 + a_{11}^{(4)} \xi_1^2 + 2a_{12}^{(4)} \xi_1 \xi_2 + a_{22}^{(4)} \xi_2^2 + \\ & + B_{111}^{(4)} \xi_1^3 + 3B_{112}^{(4)} \xi_1^2 \xi_2 + 3B_{122}^{(4)} \xi_1 \xi_2^2 + B_{222}^{(4)} \xi_2^3 + \dots \end{aligned}$$

Такие ряды всегда найдутся и получаются вполне определенными (единственными). Для нахождения форм s -го порядка выражений $\xi_3(\xi_1, \xi_2)$ и $\xi_4(\xi_1, \xi_2)$ составим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1} (\epsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(1)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots) + \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_2} (\omega \xi_1 + \epsilon \xi_2 + \\ + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(2)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots) = \kappa \xi_3 - \omega_1 \xi_4 + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(3)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots, \\ \frac{\partial \xi_4}{\partial \xi_1} (\epsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(1)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots) + \frac{\partial \xi_4}{\partial \xi_2} (\omega \xi_1 + \epsilon \xi_2 + \\ + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(2)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots) = \omega_1 \xi_3 + \kappa \xi_4 + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(4)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots \end{aligned}$$

Коэффициенты линейной и квадратичной форм в (2.1) удовлетворяют системам линейных однородных алгебраических уравнений, определители которых

равны соответственно $(\varepsilon - \kappa)^4 + (\varepsilon - \kappa)^2(2\omega^2 + \omega_1^2) + (\omega^2 - \omega_1^2)^2$ и $(2\varepsilon - \kappa)^2[(2\varepsilon - \kappa)^2 + 4\omega^2]^2 + 3\omega_1^2(2\varepsilon - \kappa)^2[(2\varepsilon - \kappa)^2 + \omega_1^2] + (4\omega^2 - \omega_1^2)^2$. Поскольку они отличны от нуля, указанные коэффициенты равны нулю. Для коэффициентов кубической формы в (2.1) получаем систему линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} (3\varepsilon - \kappa)B_{III}^{(3)} + 3\omega B_{112}^{(3)} + \omega_1 B_{III}^{(4)} &= A_{III}^{(3)}, \quad -\omega B_{III}^{(3)} + (3\varepsilon - \kappa)B_{112}^{(3)} + \\ + 2\omega B_{122}^{(3)} + \omega_1 B_{112}^{(4)} &= A_{112}^{(3)}, \quad -2\omega B_{112}^{(3)} + (3\varepsilon - \kappa)B_{122}^{(3)} + \omega B_{222}^{(3)} + \omega_1 B_{122}^{(4)} = A_{122}^{(3)}, \\ -3\omega B_{122}^{(3)} + (3\varepsilon - \kappa)B_{222}^{(3)} + \omega_1 B_{222}^{(4)} &= A_{222}^{(3)}, \quad -\omega B_{III}^{(3)} + (3\varepsilon - \kappa)B_{III}^{(4)} + \\ + 3\omega B_{112}^{(4)} &= A_{III}^{(4)}, \quad -\omega_1 B_{112}^{(3)} - \omega B_{III}^{(4)} + (3\varepsilon - \kappa)B_{112}^{(4)} + 2\omega B_{122}^{(4)} = A_{112}^{(4)}, \\ -\omega_1 B_{122}^{(3)} - 2\omega B_{112}^{(4)} + (3\varepsilon - \kappa)B_{122}^{(4)} + \omega B_{222}^{(4)} &= A_{122}^{(4)}, \quad -\omega_1 B_{222}^{(3)} - 3\omega B_{122}^{(4)} + \\ + (3\varepsilon - \kappa)B_{222}^{(4)} &= A_{222}^{(4)}. \end{aligned}$$

Так как ее определитель отличен от нуля, то разложения (2.1) функций $\xi_3(\xi_1, \xi_2)$ и $\xi_4(\xi_1, \xi_2)$ начинаются с членов третьего порядка, т.е.

$$\xi_j = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 B_{lmn}^{(j)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots, \quad B_{lmn}^{(j)} = B_{lnm}^{(j)} = B_{nlm}^{(j)} \quad (j=3,4). \quad (2.2)$$

Подставив эти функции в первые два уравнения (1.2) и ограничиваясь лишь величинами третьего порядка, получим

$$\xi_1 = \varepsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + A_{III}^{(1)} \xi_1^3 + 3A_{112}^{(1)} \xi_1^2 \xi_2 + 3A_{122}^{(1)} \xi_1 \xi_2^2 + A_{222}^{(1)} \xi_2^3 + \dots \quad (2.3)$$

$$\xi_2 = \omega \xi_1 + \varepsilon \xi_2 + A_{III}^{(2)} \xi_1^3 + 3A_{112}^{(2)} \xi_1^2 \xi_2 + 3A_{122}^{(2)} \xi_1 \xi_2^2 + A_{222}^{(2)} \xi_2^3 + \dots$$

Описанная процедура служит обоснованием формального отбрасывания в первых двух уравнениях (1.2) членов с ξ_3 и ξ_4 , так как уравнения (2.3) получаются из них при $\xi_3 = 0$ и $\xi_4 = 0$. При наличии формул (2.2) систему (2.3) будем называть приведенной.

Отметим, что для системы (1.2) уравнениями (2.2) определяются инвариантные многообразия А. Пуанкаре. Формально они получаются из двух последних уравнений системы (1.2) приравниванием нулю правых частей.

§ 3. Построение приближенного периодического решения приведенной системы. Введем новый масштаб измерения искомых функций в (2.3): $\xi_1 = \sqrt{\varepsilon} \eta_1$, $\xi_2 = \sqrt{\varepsilon} \eta_2$, а затем систему уравнений

$$\dot{\eta}_1 = -\omega \eta_2 + \varepsilon(\eta_1 + A_{III}^{(1)} \eta_1^3 + 3A_{112}^{(1)} \eta_1^2 \eta_2 + 3A_{122}^{(1)} \eta_1 \eta_2^2 + A_{222}^{(1)} \eta_2^3) + \dots,$$

$$\dot{\eta}_2 = \omega \eta_1 + \varepsilon (\eta_2 + A_{111}^{(2)} \eta_1^3 + 3A_{112}^{(2)} \eta_1^2 \eta_2 + 3A_{122}^{(1)} \eta_1 \eta_2^2 + A_{222}^{(2)} \eta_2^3) + \dots$$

Идем к одному уравнению

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + \omega^2 \eta_1 = & \varepsilon \left[2\dot{\eta}_1 + \omega (3A_{112}^{(1)} - A_{111}^{(2)}) \eta_1^3 + 3(A_{111}^{(1)} - 2A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)}) \eta_1^2 \dot{\eta}_1 + \right. \\ & + \frac{3}{\omega} (A_{222}^{(1)} - 2A_{112}^{(1)} - A_{122}^{(2)}) \eta_1 \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{\omega^2} (3A_{122}^{(1)} + A_{222}^{(2)}) \dot{\eta}_1^3 \left. \right] + \varepsilon^2 \left[-\eta_1 - \right. \\ & - (A_{111}^{(1)} - 6A_{122}^{(1)} + 3A_{112}^{(2)}) \eta_1^3 + \frac{6}{\omega} (A_{112}^{(1)} - A_{222}^{(1)} + A_{122}^{(2)}) \eta_1^2 \dot{\eta}_1 - \\ & \left. - \frac{3}{\omega^2} (A_{122}^{(1)} + A_{222}^{(2)}) \eta_1 \dot{\eta}_1^2 - \frac{2}{\omega^3} A_{222}^{(1)} \dot{\eta}_1^3 \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для отыскания периодического решения уравнения (3.1) в виде степенного ряда по ε с периодическими коэффициентами сделаем замену независимой переменной по формуле [11, 12]

$$t = \frac{\tau}{\omega} (1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots),$$

таким образом, чтобы решению с периодом $\frac{2\pi}{\omega} + \alpha$, где

$$\alpha = \frac{2\pi}{\omega} (h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots),$$

по переменной t соответствовало 2π — периодическое решение по переменной τ . Тогда

$$\eta_1(t) = \eta_1 \left[\frac{\tau}{\omega} (1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots) \right] = \zeta(\tau), \quad (\cdot) = \frac{d}{d\tau}, \quad (3.2)$$

$$\dot{\eta}_1 = \frac{\omega}{1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots} \zeta', \quad \ddot{\eta}_1 = \frac{\omega^2}{(1 + h_1 \varepsilon + \dots)^2} \zeta''.$$

Уравнение (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \zeta'' + \zeta = & \varepsilon \left\{ -2h_1 \zeta + \frac{1}{\omega} [2\zeta' + (3A_{112}^{(1)} - A_{111}^{(2)}) \zeta^3 + 3(A_{111}^{(1)} - 2A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)}) \zeta^2 \zeta' + \right. \\ & + 3(A_{222}^{(1)} - 2A_{112}^{(1)} - A_{122}^{(2)}) \zeta \zeta'^2 + (3A_{122}^{(1)} + A_{222}^{(2)}) \zeta'^3 \left. \right\} + \varepsilon^2 \left\{ -(h_1^2 + 2h_2) \zeta + \right. \\ & + \frac{h_1}{\omega} [2\zeta' + 2(3A_{112}^{(1)} - A_{111}^{(2)}) \zeta^3 + 3(A_{111}^{(1)} - 2A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)}) \zeta^2 \zeta' - \\ & \left. - (3A_{122}^{(1)} + A_{222}^{(2)}) \zeta'^3 \right] - \frac{1}{\omega^2} \left[\zeta + (A_{111}^{(1)} - 6A_{122}^{(1)} + 3A_{112}^{(2)}) \zeta^3 - 6(A_{112}^{(1)} - A_{222}^{(1)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ A_{122}^{(2)} \zeta^2 \zeta' + 3(A_{122}^{(1)} + A_{222}^{(2)}) \zeta \zeta'^2 + 2A_{222}^{(1)} \zeta'^3 \} + \dots \quad (3.3)$$

Учитывая автономность уравнения (3.3) и периодичность искомого решения его

$$\zeta(\tau) = \zeta_0(\tau) + \varepsilon \zeta_1(\tau) + \varepsilon^2 \zeta_2(\tau) + \dots, \quad \zeta_s(\tau + 2\pi) = \zeta_s(\tau), \quad (3.4)$$

начало отсчета времени выберем из условия $\zeta' \Big|_{\tau=0} = 0$, откуда $\zeta_s'(0) = 0$ ($s = 0, 1, 2, \dots$). Порождающее решение имеет вид $\zeta_0 = M_0 \cos \tau$, где M_0 — произвольная постоянная. Первое приближение решения определяется уравнением

$$\begin{aligned} \zeta_1'' + \zeta_1 = & -2h_1 M_0 \cos \tau - 2 \frac{M_0}{\omega} \sin \tau + (3A_{112}^{(1)} - A_{111}^{(2)}) M_0^3 \cos^3 \tau - \\ & - 3(A_{111}^{(1)} - 2A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)}) M_0^3 \cos^2 \tau \sin \tau + 3(A_{222}^{(1)} - 2A_{112}^{(1)} - \\ & - A_{122}^{(2)}) M_0^3 \cos \tau \sin^2 \tau - (3A_{122}^{(1)} + A_{222}^{(2)}) M_0^3 \sin^3 \tau. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из необходимых и достаточных условий периодичности решений уравнения (3.5) находим

$$M_0^2 = -\frac{2\pi}{\alpha_3 \omega}, \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{4\omega} (A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)}), \quad (3.6)$$

$$h_1 = \frac{M_0^2 Q}{2\pi}, \quad Q = \frac{3\pi}{4\omega} (A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(1)} - A_{111}^{(2)} - A_{122}^{(2)}).$$

Здесь α_3 есть продолжение по параметру ν первого ляпуновского коэффициента $\alpha_3(\nu_0)$ в область $\nu > \nu_0$. При условиях (3.6) общее решение уравнения (3.5) имеет вид

$$\zeta_1(\tau) = M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau + A_3 \cos 3\tau + B_3 \sin 3\tau,$$

где M_1 и N_1 — произвольные постоянные, A_3 и B_3 определяются формулами

$$A_3 = \frac{M_0^3}{32\omega} A_{30}, \quad B_3 = \frac{M_0^3}{32\omega} B_{30}, \quad A_{30} = A_{111}^{(2)} - 3A_{122}^{(2)} - 9A_{112}^{(1)} + 3A_{222}^{(1)},$$

$$B_{30} = 3A_{111}^{(1)} - 9A_{122}^{(2)} + 3A_{112}^{(2)} - A_{222}^{(2)}.$$

Так как $\zeta_1'(0) = 0$, то $N_1 = -3B_3$. Произвольная постоянная M_1 и величина h_2 определяются из условий периодичности функции $\zeta_2(\tau)$. Для них получаются выражения

$$M_1 = -\frac{3}{512} \frac{M_0^5}{\omega}, \quad h_2 = h_1^2 - h_{20}, \quad h_{20} = \frac{3M_0^4}{256\omega} \left(h_1 M_{10} + \frac{H}{\omega} \right),$$

$$M_{10} = A_{30} A_{31} - B_{30} B_{31} - D_{30} D_{31} - C_{30} C_{31}, \quad H = A_{31} B_{30} + A_{30} B_{31} +$$

$$+ C_{30} D_{31} - C_{31} D_{30}, \quad A_{31} = A_{122}^{(1)} - A_{111}^{(1)} + 2A_{112}^{(2)}, \quad B_{31} = 2A_{112}^{(1)} + A_{111}^{(2)} - A_{122}^{(2)},$$

$$C_{31} = A_{112}^{(1)} - A_{222}^{(1)} - 2A_{122}^{(2)}, \quad D_{31} = 2A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)} - A_{222}^{(2)}.$$

Таким образом, первые члены голоморфного по ε решения (3.4) уравнения (3.3) суть

$$\xi = M_0 \cos \tau + \varepsilon (M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau + A_3 \cos 3\tau + B_3 \sin 3\tau) + \dots, \quad (3.7)$$

$$\tau = \Omega t, \quad \Omega = \omega(1 - h_1 \varepsilon + \dots).$$

На основании (3.2), (3.7), (2.2) для $v_1(t)$ и $v_2(t)$ получаем выражения

$$v_1 = v_1' + v_1'' + \dots, \quad v_2 = v_2' + v_2'' + \dots, \quad v_1' = \sqrt{\varepsilon} M_0 (a_{23} \cos \Omega t + a_{12} \sin \Omega t),$$

$$v_2' = \sqrt{\varepsilon} M_0 [-(\omega^2 + a_{21}) \cos \Omega t + \omega a_{22} \sin \Omega t], \quad v_1'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} (\gamma_{11} \cos \Omega t +$$

$$+ \gamma_{12} \sin \Omega t + \gamma_{13} \cos 3\Omega t + \gamma_{14} \sin 3\Omega t), \quad v_1''' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} (\gamma_{21} \cos \Omega t + \gamma_{22} \sin \Omega t +$$

$$+ \gamma_{23} \cos 3\Omega t + \gamma_{24} \sin 3\Omega t).$$

Формулы (2.2) объясняют структуру периодического решения системы (1.2): так как функции $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ имеют порядок малости $\sqrt{\varepsilon}$, то порядок функций $\xi_3(t)$ и $\xi_4(t)$ необходимо равен $\varepsilon \sqrt{\varepsilon}$.

Графики функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$ весьма удовлетворительно согласуются с результатами компьютерного моделирования [7].

§ 4. Устойчивость по Ляпунову периодического решения. Запишем уравнение (3.1) в виде

$$\ddot{\eta}_1 + \omega^2 \eta_1 = \varepsilon f(\eta_1, \dot{\eta}_1, \varepsilon)$$

и введём, следуя И.Г.Малкину [10, (11.8)], величину

$$P(M_0) = \int_0^{2\pi} f(M_0 \cos u, -\omega M_0 \sin u, 0) \sin u \, du. \quad (4.1)$$

Достаточным условием устойчивости периодического решения (3.7) является [12, с.75]

$$\frac{dP(M_0)}{dM_0} > 0.$$

Полупно отметим, что из выражения [10, (11.7)]

$$C(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\xi_0(\tau), \xi_0'(\tau), 0) \sin \omega(t-\tau) d\tau,$$

следует $P(M_0) = -\omega^2 C\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$. Значение $C\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ приведено в [7]. Из него либо из (4.1) имеем

$$P(M_0) = -\pi\omega\left(2M_0 + \frac{\omega}{\pi} \alpha_3 M_0^3\right).$$

Находя отсюда $\frac{dP(M_0)}{dM_0}$ и подставляя вместо M_0^2 значение (3.6), получаем:

$$\frac{dP(M_0)}{dM_0} = 4\pi\omega.$$

Таким образом, периодическое решение (3.7) является устойчивым и с.м.у., следовательно, соответствует устойчивый предельный цикл.

§ 5. Типы бифуркаций Андронова-Хопфа в маятниковых системах с качением. Согласно теореме Пуанкаре-Дюлака систему (2.3) преобразованием $\xi_1 = z_1 + h_1(z_1, z_2)$, $\xi_2 = z_2 + h_2(z_1, z_2)$ можно привести к нормальной форме

$$\dot{z}_1 = \varepsilon z_1 - \omega z_2 + (c_1 z_1 - c_2 z_2)(z_1^2 + z_2^2) + \dots \quad (5.1)$$

$$\dot{z}_2 = \omega z_1 + \varepsilon z_2 + (c_2 z_1 + c_1 z_2)(z_1^2 + z_2^2) + \dots$$

Заменой $z_1 = r \cos v$, $z_2 = r \sin v$ из (5.1) получаем

$$\dot{r} = \varepsilon r + c_1 r^3 + \dots, \quad \dot{v} = \omega + c_2 r^2 + \dots \quad (5.2)$$

Орбитальная устойчивость и амплитуды предельных циклов зависят от ε и «нелинейного декремента» c_1 . Знак ε определяется значением скорости v точки O_1 (рис. 1): $v < v_0 \Rightarrow \varepsilon < 0$. На рис. 4 для $c_1 > 0$ показана субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа [14]. С ростом скорости v при $v = v_0$ (т.е. $\varepsilon = 0$) фокус становится неустойчивым, причем неустойчивость слабая, неэкспоненциальная. При $v > v_0$ (т.е. $\varepsilon > 0$) фокус неустойчив уже в линейном приближении. Этот случай потери устойчивости называется жестким возбуждением. На рис. 5 ($c_1 < 0$) показана суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа [14], иллюстрирующая мягкое возбуждение автоколебаний. При $v = v_0$ начало координат фазовой плоскости z_1, z_2 также (как и при $v < v_0$) является устойчивым фокусом, но негрубым: фазовые кривые приближаются к точке (0,0) не экспоненциально. Таким образом, при переходе значений скорости v через v_0 в направлении возрастания устойчивый фокус становится неустойчивым, и от него отделяется замкнутая траектория, диаметр которой растет пропорционально величине $\sqrt{-\varepsilon/c_1}$.

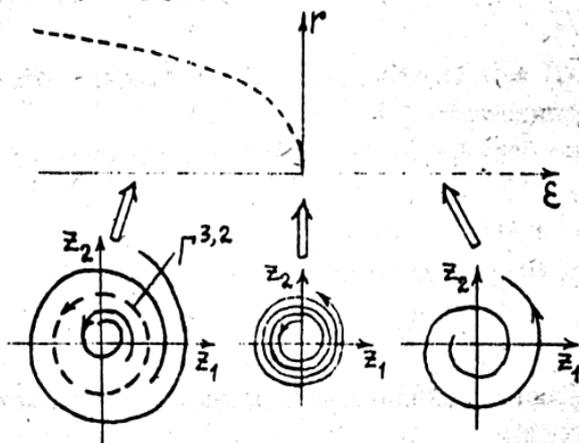


Рис. 4

РЕЗЮМЕ. Проаналізована локальна біфуркація народження граничного циклу із стійкого фокусу в маятникових системах з каченням. На основі однієї з ідей О.М.Ляпунова побудовано багатовид, який дозволяє виявити асимптотичні особливості поведінки чотиримірної динамічної системи на двомірній моделі. Знайде-

но приближений периодичний розв'язок приведеної системи, котрий співпадає з одержаним раніше іншим способом, а також з результатами комп'ютерного моделювання. Показано, що граничний цикл, який відповідає даному розв'язку, стійкий.

S U M M A R Y. A local bifurcation of the birth of the limit cycle from the stable focus in the pendulum systems with rolling. Based on one of A.M. Lyapunov's ideas a multiformity has been constructed which permits finding out asymptotic peculiarities of the behaviour of a four-dimensional dynamic system on a two-dimensional model. An approximate periodic solution of the reduced system which coincides with that already obtained by the other method as well as with the results of computer modelling has been obtained. It is show that the limit cycle which corresponds to the mentioned solution is stable.

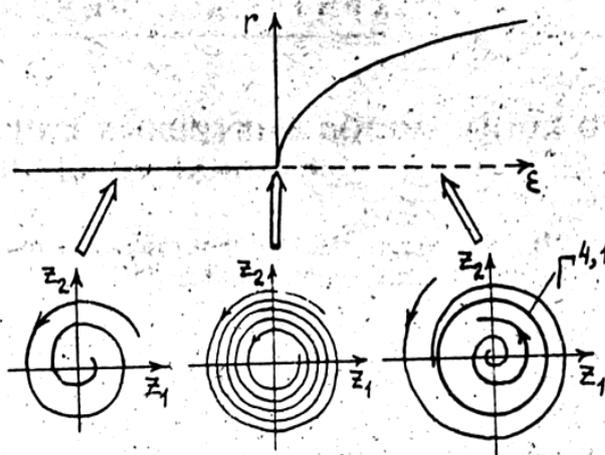


Рис. 5

1. Бутсши Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
2. Веретенников В.Г. Об одном алгоритме построения периодических решений систем Ляпунова // Прикл.механика. — 1991. — 27, № 2. — С. 91 — 95.
3. Лобас Л.Г. Неголономные модели колесных экипажей. — Киев: Наук.думка, 1986. — 232 с.
4. Лобас Л.Г., Вербшцкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. — Киев: Наук.думка, 1990. — 232 с.
5. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. О маятниковых двухзвенных системах с качением // Прикл.механика. — 1993. — 29, № 2. — С. 82 — 88.
6. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. Динамическое поведение маятниковой двухзвенной системы с качением на границе области устойчивости // Там же. — 1993. — 29, № 4. — С. 78 — 86.
7. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. О предельных периодических движениях маятниковых двухзвенных систем с качением // Там же. — 1993. — 29, № 8. — С. 85 — 93.
8. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. Существование и единственность периодического движения в маятниковых двухзвенных системах с качением // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1993. — № 5. — С. 23 — 31.
9. Ляпунов А.М. Собр. соч.: В 3 т. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. — Т.2. — 473 с.
10. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. — 244 с.
11. Малкин И.Г. Об одном способе решения задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней // Прикл.математика и механика. — 1951. — 15, № 4. — С. 473 — 484.
12. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 492 с.
13. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили, самолеты, висячие мосты. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959. — 288 с.
14. Troger H., Steindl A. Nonlinear stability and bifurcation theory. — Wien; New York: Springer-Verlag, 1991. — 408 p.

Ин-т механики им. С.П.Тимошенко
НАН Украины, Киев (Украина)

Поступила 25.05.92