МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ
УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ПІДГОТОВКИ АБІТУРІЄНТІВ ДО ВСТУПУ У ВНЗ

Матеріали
VII міжрегіонального семінару

КИЇВ 2012

УДК 378. 141/141.5 (082)

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ПІДГОТОВКИ АБІТУРІЄНТІВ ДО ВСТУПУ У ВНЗ: **МАТЕРІАЛИ VII МІЖРЕГІОНАЛЬНОГО СЕМІНАРУ. – К. : НАУ, 2012. – 148 с.**

До збірника увійшли матеріали доповідей семінару, в яких висвітлено основні методи роботи щодо впровадження новітніх технологій в тестування. Пропонується методика використання тестових завдань, впровадження якої в навчальний процес дозволяє ефективно перевірити відповідність знань та умінь учнів програмовим вимогам, оцінити рівень навчальних досягнень слухачів, оцінити ступінь підготовленості випускників ЗНЗ до подальшого навчання у ВНЗ. Відображено реальний досвід, подано рекомендації щодо вдосконалення методики та методологічних підходів до викладання навчальних дисциплін.

Рекомендовано викладачам та учням загальноосвітніх навчальних закладів, слухачам підготовчих курсів.

Редакційна колегія:

Рекомендовано до друку науково-методично-редакційною радою Інституту доуніверситетської підготовки Національного авіаційного університету (протокол № 2 від 30.04.2012 р.)

УДК 378.141:511.7 (045)

М. М. Логвин,
викладач математики кафедри базових і спеціальних дисциплін ІДП НАУ, м. Київ
А. С. Муранов,
аспірант НАУ, м. Київ

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ « ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

«Математика завжди була невід'ємною і суттєвою складовою людської культури, вона є ключем до пізнання навколишнього світу, базою науково-технічного прогресу і важливим компонентом розвитку особистості…»

(В. Тихомиров)

В економічній діяльності, у природі, в суспільстві людині приходиться мати справу з явищами і процесами, точний результат яких передбачити неможливо.

Тому у різних сферах діяльності людини все частіше використовують ймовірнісні й статистичні методи . Ці методи дають можливість вивчати на науковій основі як діяльність окремих підприємств, так і соціально-економічні процеси у суспільстві.

Теорія ймовірностей, як і будь-яка інша наука, розвинулась з потреб практики. Вона виникла в середині XVII ст. у зв'язку із розв'язуванням задач, які ставили страхова справа, демографія, теорія азартних ігор. У 1713 р. вийшла з друку праця Якоба Бернулі «Мистецтво передбачення», в якій був викладений один з основних законів теорії ймовірностей – «закон великих чисел».

Дальший розвиток теорії ймовірностей пов'язаний з діяльністю французького астронома і математика П. Лапласа, німецького математика К. Гауса, російських математиків П. Л.Чебишова, А.А. Макарова.

Відкриття світового значення з теорії ймовірностей зробили сучасні російські математики А.М. Колмогоров, О.Я. Хінчин та інші.

Українська математична наука подарувала світові плеяду видатних фахівців у галузі теорії ймовірностей. Імена Й. І. Гіхмана, Б. В. Гнеденка, А.В. Скорохода, М.Й. Ядренка відомі у всьому світі.

Теорія ймовірностей – це математична наука, яка визначає закономірності у випадкових процесах і подіях , тобто подіях, що можуть відбутися , а можуть не відбутися. Наприклад, якщо на столі лежать 25 екзаменаційних білетів, ви взяли білет №7, то це випадкова подія . Кількість людей на автобусній зупинці о 12-й годині – випадкова подія, яка залежить від , багатьох факторів .

Але для працівників автобусного парку важливо знати , яка кількість людей в середньому може бути о певній годині дня, бо від цього залежить кількість автобусів на маршруті.

Закономірності, властиві кожному явищу, виявляють себе через сукупність випадковостей. Для багатьох явищ вплив випадку настільки суттєвий, що дослідження їх не можливе без вивчення їх кількісної оцінки такого впливу. Теорія ймовірностей розглядає математичні моделі явищ, що враховують вплив випадку. Висновки, що випливають із дослідження цих моделей, дають змогу передбачити перебіг подій чи процесу, що вивчалися, у майбутньому.

Якщо спостерігати велику кількість однорідних випадків , можна виявити деякі закономірності. При великій кількості пострілів по мішені відношення кількості влучань до кількості зроблених пострілів наближатиметься до певного числа , що залежить від кваліфікації стрільця .

Хоч при кожному окремому пострілі передбачити результат неможливо. Такі закономірності , які виявляються при спостереженні великої кількості однорідних випадкових явищ , називаються *статистичними*. Вивчення статистичних закономірностей – одне з завдань теорії ймовірностей. Статистичні закономірності історично вперше були встановлені на прикладі азартних ігор, таких як гра в кості, «орлянку» тощо. Ці спостереження відкрили шлях до статистичного підходу в числовому визначенні ймовірності. Наприкінці XIX і на початку XX ст. були виявлені нові статистичні закономірності у фізиці, хімії, біології, економіці та інших науках.

Мета статті розглянути деякі аспекти викладання на підготовчих курсах теми «Теорія ймовірностей». Пояснити

перевагу використання статистичного означення ймовірності при розв'язуванні практичних задач.

Особливість викладання даної теми полягає в тому, що кількість годин на вивчення початків теорії ймовірностей за програмою підготовчих курсів становить 4 години, а чинна шкільна програма на вивчення теми виділяє 14 годин. Така кількість годин не дозволяє учням грунтовно оволодіти цією темою.

Тому для вивчення початків теорії ймовірностей краще використовувати статистичне означення ймовірності, яке базується на життєвому досвіді учнів, їх інтуїції, здоровому глузді, логіці мислення.

Вивчення теми починаємо з наведення прикладів явищ, процесів, для яких теорія ймовірностей є основою для побудови моделей управління ними, або для дослідження цих процесів і явищ.

Наприклад. Інвестиційна компанія перш ніж вкладати гроші, аналізує степінь риску в інвестиційній діяльності за допомогою ймовірнісно-статистичного методу. Коли банк інвестує діяльність деякої фірми він не може заздалегідь бути впевненим у тому, що ця фірма не збанкрутує, своєчасно поверне позичені кошти, отримає запланований прибуток, який дасть змогу розрахуватися з банком. Є багато чинників, що впливають на цю ситуацію і які неможна одночасно врахувати.

Первісним поняттям теорії ймовірностей є поняття ***подія.***

Під ***подією*** розумітимемо кожне явище, про яке можна сказати, що воно відбувається або не відбувається. Конкретний зміст явища може бути різний. Можна наприклад, розглядати такі події:

Подія A – учень виконав завдання з алгебри;

Подія B – завтра буде хмарно;

Подія C – футболісти виграли матч.

Подія B називається окремим випадком події A, якщо кожного разу, коли відбувається подія B, також відбувається подія A.

Наприклад. В урні лежать білі, червоні, зелені кульки. Позначимо через A подію: з урни вийняли кольорову кульку, а через B подію: з урни вийняли червону кульку. Це означає, що подія B – окремий випадок події A, $B \subset A$.

Звертаємо увагу на такі властивості окремого випадку:

1. Яка б не була подія A, завжди $A \subset A$.
2. Якщо $A \subset B, B \subset C$, то $A \subset C$.

Будь-яка подія відбувається внаслідок *випробування* (або досліду). Під випробуванням розуміють ті умови, в результаті яких відбувається подія.

Наприклад, підкидання монети – випробування, поява на ній «герба» подія.

Випадковою подією називається подія, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування.

Рівноможливі події – первісне, не означуване поняття теорії ймовірностей. Під рівноможливими розуміють такі події, кожна з яких не має переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться в однакових умовах.

Наприклад, поява 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок під час одного кидання гральної кості.

Вірогідною називається подія, яка в наслідок даного випробування обов`язково має відбутися, а *неможливою* називається така подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Найважливішим поняттям теорії ймовірностей є поняття імовірності випадкової події.

Класичне означення імовірності випадкової події

Історично першим визначенням поняття імовірності є те визначення, яке зараз прийнято називати класичним означенням імовірності. Це визначення остаточно сформулювалося в роботах видатного математика П. Лапласа на початку XIX століття.

Означення. Імовірністю випадкової події називається відношення кількості подій, які сприяють цій події, до кількості всіх рівноможливих несумісних подій, які відбуваються під час певного випробування.

Позначають $P(A)=\frac{m}{n}$, де n – загальна кількість рівноможливих і несумісних подій, m – число подій, які сприяють події A. Імовірність вірогідної події дорівнює 1. Імовірність неможливої події дорівнює 0. Якщо A – випадкова подія, то її імовірність задовольняє нерівність $0 \le P(A) \le 1$.

Задача 1

Підкинули гральний кубик. Яка ймовірність того, що:

а) випаде 8 очок;

б) випаде 3 очка;

в) випаде непарне число очок;

г) випаде менше 5-и очок?

Розв'язання

а) А – подія, яка полягає в тому, що випаде 8 очок. $n=6$, $m=0$, $P(A)=\frac{m}{n}=0$ (подія А – неможлива);

б) B – випадання 3-х очок.

$n=6$, $m=1$, $P(B)=\frac{1}{6}$;

в) C – випадання непарного числа очок.

$n=6$, $m=3$, (непарні числа – 1, 3, 5), $P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;

г) D – випадання менше 5-ти очок.

Менше 5-ти очок - це 1 або 2, або 3, або 4, тому $n=6$, $m=4$, $P(D)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Задача 2

Одночасно кинули дві гральні кісточки. Знайти ймовірність того, що:

а) на обох випаде по 5 очок;

б) на обох випаде однакове число очок;

в) на обох випаде різне число очок;

г) сума очок, які випали, кратна 5.

Розв'язання

а) A_1 – на першій кісточці випало 5 очок;

A_2 – на другій кісточці випало 5 очок.

C – подія, яка полягає в тому, що на обох кісточках випало 5 очок.

$P(C)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

б) A_1 – на обох кісточках випало по 1 очку;

A_2 – на обох кісточках випало по 2 очка;

...

A_6 – на обох кісточках випало по 6 очок.

B – подія, яка полягає в тому, що на обох кісточках випаде однакова кількість очок.

$$P(B)=P(A_1+A_2+...+A_6)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_6)=$$

$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

в) D – подія, яка полягає в тому, що на обох кісточках випаде різна кількість очок. Подія D є протилежною до події B.

Тому $P(D)=1-P(B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

г) L – подія, яка полягає в тому, що сума очок, які випали, кратні 5. $P=\frac{m}{n}$, де $n=36$. Порахуємо кількість сприятливих випадків:

1 кісточка – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 4.

2 кісточка – 4, 3, 2, 1, 5, 4, 6. Звідси. $m=7$. $P(L)=\frac{7}{36}$.

Класична імовірність має обмежену область застосування, оскільки далеко не завжди в реальних умовах можна виділити рівно можливі випадки в скінченній кількості. Наприклад, спостерігаючи за космічними частинками , вчені зацікавились, яка імовірність потрапляння на певну ділянку земної поверхні за період 5 хв не більше від трьох космічних частинок? Як у даному випадку визначити рівноможливі випадки?

У таких задачах використовують статистичне означення імовірності.

Статистичне означення імовірності випадкової події

Означення. Імовірністю події A називається невідоме число p, навколо якого зосереджується значення статистичної частоти здійснення події A при зростанні числа випробувань.

Поняття статистичної імовірності широко використовується в практиці: біології, медицині,інженерній справі, економіці та інших галузях.

Якщо позначити статистичну частоту символом $P_N(A)$, де $P_N(A)=\frac{m_N}{N}$, $P_N(A)\approx P(A)$, де $P(A)$ – імовірність події A.

Індекс N ставиться спеціально, щоб підкреслити залежність статистичної частоти від кількості випробувань.

Наприклад. В партії з 300 деталей відділ технічного контролю виявив шість нестандартних деталей. Знайти відносну частоту нестандартних деталей.

A- деталь нестандартна, випробування – перевірка деталі. За умовою $N=300$, $m_N=6$. Тому $P_N(A)=\frac{6}{300}=0,02$.

При невеликій кількості випробувань частота випадкової події може помітно змінюватися від однієї серії випробувань до іншої. Проте тривалі спостереження показали, що коли в однакових умовах проводиться достатньо велике число випробувань, то частота виявляє властивість **стійкості.** Ця властивість полягає в тому, що в різних серіях випробувань частота змінюється мало, коливаючись навколо деякого постійного числа. Виявилось, що це стале число є імовірністю випадкової події. Математичне формулювання цієї властивості стійкості було дано Я. Бернуллі. Це означення вчений сформулював у 1713 році у вигляді теореми.

Теорема. Якщо у ряді випробувань імовірність деякої події залишається для кожного випробування сталою, то з достовірністю можна стверджувати, що при досить великій кількості випробувань статистична частота цієї події відрізнятиметься як завгодно мало від її імовірності.

Властивість стійкості частоти дозволяє сформулювати статистичне означення імовірності: в якості статистичної імовірності випадкової події береться частота цієї події.

Прикладом статистичної імовірності є добре відоме демографам число 0,514 – імовірність народження хлопчика. Це число було відоме в Древньому Китаї за 2238 років до нашої ери. Іншим прикладом є 0,013 – імовірність того, що десятирічна дитина доживе до 90 років.

Щоб зрозуміти практичне значення наближеної рівності $P_N(A)\approx P(A)$, розглянемо таку задачу.

Задача. З 1000 довільно вибраних деталей приблизно 4 браковані. Скільки бракованих деталей приблизно буде серед 2400 деталей?

Позначимо через A подію – навмання взята деталь бракована. Тоді статистична частота дорівнюватиме $P_N(A)=\frac{4}{1000}=0,004$.

Якщо серед 2400 деталей виявиться x бракованих, то імовірність події A дорівнюватиме $P(A)=\frac{x}{2400}$.

Оскільки $P_N(A)\approx P(A)$, то $\frac{x}{2400}\approx 0,004$, звідси $x\approx 10$.

У першій половині XIX століття теорія ймовірностей застосовується для аналізу помилок під час спостережень. У XX столітті її використовують в різних галузях науки й техніки. А саме у статистичній фізиці, квантовій теорії, радіоелектроніці, теорії випадкових перешкод у лініях зв'язку. У біології і медицині теорія ймовірностей знаходить застосування в питаннях, пов'язаних із вивченням нервової системи, в питаннях спадковості.

СХЕМА БЕРНУЛЛІ

У практичному застосуванні теорії ймовірностей трапляються задачі, коли одне й те саме випробування повторюється неодноразово. При цьому всі випробування незалежні.

Означення. Взаємно незалежними називаються такі випробування, в яких імовірність результату кожного з них не залежить від того, які результати має чи матиме решта випробувань.

Наприклад, кілька послідовних виймань кульок з урни, де знаходиться 5 білих і 7 чорних кульок,є незалежними, якщо вийняту кульку щоразу повертають в урну і кульки перемішують. Якщо кульки не повертають, то випробування залежні. Імовірність появи білої кульки $\frac{5}{12}$. Коли проводять серію незалежних випробувань ,то практичне значення має кількість появи серед усіх випробувань події A.

Наприклад, у серії пострілів нас цікавить не результат кожного окремого пострілу, а загальна кількість улучань.

Задача 1. Виконуються три незалежних постріли в мішень, імовірність улучення в яку $p=0,8$. Знайти імовірність того, що підчас трьох пострілів буде два влучання.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що в мішень буде два влучення.

$P(A)=C_n^m.p^m.g^{n-m}$ - формула Бернуллі.$(0\le m\le n)$.

$C_3^2=\frac{3!}{2!.1!}=3; g=1-p=0,2$

$P(A)=3.0,8^2\cdot 0,2^1=0,384.$

Задача 2. Робітник виготовив шість виробів. Імовірність виготовлення стандартного виробу $p=0,8$. Яка ймовірність того, що серед шести вироблених виробів **принаймі** чотири стандартних?

$$P_{6,5}=C_6^4\cdot 0,8(1-0,8)^2=\frac{6!}{4!.2!}\cdot 0,64^2\cdot 0,04=$$

$$=15\cdot 0,64^2\cdot 0,04\approx 0,246.$$

$$P_{6,5}=C_6^5\cdot 0,8^5\cdot 0,2\approx 0,393.$$

$$P_{6,6}=C_6^6\cdot 0,8^6\cdot 0,2^0\approx 0,262.$$

$P(A)=P_{6,4}+P_6^5+P_6^6=0,246+0,393+0,262=0,901.$

Задача 3. Висаджено 152 дерева. Імовірність того, що висаджене дерево прийметься, для кожного дерева однакова p= 0,9. Знайти **найімовірнішу кількість** дерев, що приймуться.

$P=0,9;\ g=0,1;\ n=152$. Тому $np-g=152\cdot 0,9-0,1=136,7$;

$np+g=152\cdot 0,9+0,9=137,7$.

Сегмент $[np-g,np+g]$ містить у собі одне ціле число 137.

$m_0=137$. Це і є найімовірніша кількість дерев, що приймуться. Тобто серед усіх чисел

$P_{152,m}$ – найбільше $P_{152,137}$.

Задача 4. Скільки треба зробити незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність здійснення події A $p=0,3$, щоб найімовірніша кількість появ події A була $m_0=8$.

Розв'язання. $np-g\le m\le np+g$.

$0,3n-0,7\le 8\le 0,3n+0,3$,

$$\begin{cases}0,3n-0,7\le 8\\0,3n+0,3\ge 8\end{cases}$$

$$25\frac{2}{3}\le n\le 29$$

Але $n\in Z$, тому $n=26,27,28,29$. Задача має чотири розв'язки.

Висновки. Тривалі спостереження над появою або не появою події A при великій кількості повторних випробувань, що відбуваються при незмінному комплексі умов, показують, що для широкого кола явищ число появ або не появ події A підкоряються стійким закономірностям. Таким чином, імовірність появи події A іноді визначають за формулою $P(A)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{m}{n}$.

Література

1. Гніденко Б. В. Курс теории вероятностей.–М.: Наука, 1969.
2. Феллер В. Введение в теорію вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984.
3. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу, 10-11 кл.- К.: Зодіак- Еко,2006.-384 с.
4. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів.-Х.: Світ дитинства, 2005.- 392 с.
5. Сборник задач по математике (для факультативных занятий. в 9-10 классах)/ Под ред. проф. З.А. Скопеца. – М.: Просвещение,1971.-207 с.
6. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики . 11 клас:У 2 кн. Кн.2/ М.І. Бурда, О.Я.Біляніна, О.П. Вашулнеко та ін. –Х.:Гімназія, 2008.-224 с.