

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА .....	7
ЧАСТИНА 1 МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ .....	10
ГЛАВА 1 МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБРОБКИ СИГНАЛІВ .....	10
1.1. Сигнали, їх властивості .....	10
1.2. Диференціювання і інтегрування сигналів .....	13
1.3. Задачі фільтрації. Виділення сигналів на фоні шумів .....	17
1.4. Поліноміальне представлення сигналів .....	22
ГЛАВА 2 МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ І ПРЕДСТАВЛЕННЯ АНАЛІТИЧНОГО ВИРАЗУ СИГНАЛІВ .....	26
2.1. Методи апроксимації .....	26
2.1.1. Лінійна апроксимація .....	27
2.1.2. Рівномірне наближення .....	30
2.1.3. Середньоквадратичне наближення .....	33
2.1.4. Поліноміальна апроксимація .....	37
2.2. Системи базисних функцій .....	41
2.2.1. Ортогональні системи функцій .....	42
2.2.2. Ортонормовані базисні функції .....	46
2.2.3. Системи ортогональних поліномів .....	48
2.3. Апроксимація неперервних сигналів за методом найменших квадратів .....	51
2.4. Мінімізація, функція помилки .....	52
2.5. Апроксимація дискретних сигналів .....	53
ГЛАВА 3 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ БЕЗІНЕРЦІЙНИХ ОБ'ЄКТІВ .....	56
3.1. Системи лінійних алгебричних рівнянь і нерівностей, їх геометрична інтерпретація .....	56
3.2. Гіперплощина .....	59
3.3. Векторно-матричні моделі лінійних безінерційних систем .....	59
3.4. Некоректні задачі лінійної алгебри, їх роль в моделюванні безінерційних об'єктів .....	61
3.5. Прямокутна матриця .....	64
3.6. Псевдообернена матриця та псевдорозв'язок .....	67
3.7. Математичні моделі нелінійних безінерційних об'єктів та їх геометрична інтерпретація .....	69

ГЛАВА 4 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ .....	73
4.1. Математичні моделі динамічних систем і порцесів із зосередженими параметрами .....	73
4.2. Задачі оптимального керування .....	78
4.3. Диференціальні ігри .....	81
4.4. Математичні моделі динамічних систем із розподіленими параметрами .....	84
4.5. Метод кінцевих різниць .....	86
4.5.1. Електричні моделі кінцевої різниці .....	90
4.6. Фрактали .....	92
4.6.1. Динамічні системи нецілого порядку .....	99
4.6.2. Математичний аналіз нецілих порядків – основа математичних моделей динамічних систем у фрактальних середовищах .....	104
ГЛАВА 5 ОПЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ .....	111
5.1. Перетворення Фур'є, Лапласа .....	111
5.2. Спектральні методи моделювання динамічних систем .....	117
5.2.1. Частотні характеристики динамічних систем .....	119
5.2.2. Фазовий портрет динамічної системи .....	127
5.3. Перетворення Пухова .....	132
5.3.1. Основи методу диференційних перетворювань .....	133
5.4. Некласичні операційні методи аналізу та моделювання систем .....	135
5.5. Wavelet – перетворення. Аналіз сигналів за допомогою Wavelet – перетворення .....	138
5.6. Моделювання задач параметричної ідентифікації .....	142
Ілюстративні приклади до частини 1 .....	144
Список літератури до частини 1 .....	149
ЧАСТИНА 2 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ .....	152
ГЛАВА 1 ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ .....	152
1.1. Загальна задача математичного програмування та методи її вирішення. Випадки обмежень .....	152
1.1.1. Основні методи лінійного програмування .....	156
1.1.2. Електронні моделі задач лінійного програмування ...	161
1.1.3. Ітераційні методи моделювання загальної задачі за допомогою зворотних та квазіобернених	

лінійних перетворювань .....	165
1.2. Безітераційні методи моделювання .....	174
1.3. Задачі нелінійного програмування .....	178
1.3.1. Задачі опуклого програмування .....	187
1.3.2. Задача квадратичного програмування .....	189
1.4. Цілочисельні задачі лінійного програмування .....	189
1.5. Цільова функція .....	192
1.6. Задача комівояжера .....	193
1.7. Фізико – геометричний смисл задач програмування .....	198
ГЛАВА 2 МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ .....	201
2.1. Рішення задач оптимізації для безінерційних об'єктів і процесів .....	201
2.2. Локальні і глобальні екстремуми .....	204
2.3. Матричні ігри як спеціалізовані задачі оптимізації .....	204
2.4. Моделі задач оптимізації .....	211
2.4.1. Методи безумовної оптимізації .....	212
2.4.2. Методи оптимізації з обмеженнями .....	213
ГЛАВА 3 ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ .....	217
3.1. Електрична модель транспортної задачі програмування .....	217
3.1.1. Діодна аналогія Денніса .....	217
3.1.2. Задачі на екстремальні шляхи .....	222
3.2. Механічні моделі на екстремальні шляхи на графах .....	223
3.3. Моделювання класичної транспортної задачі у матричній формі .....	224
ГЛАВА 4 ЗАДАЧІ СІТЬОВОГО АНАЛІЗУ .....	228
4.1. Теорія графів, що використовується в сітьовому аналізі ....	228
4.2. Задача найкоротшого шляху .....	230
4.2.1. Моделювання задачі найкоротшого шляху .....	233
4.3. Задачі сітьового планування та керування .....	235
4.3.1. Електронна модель сітьового графу з використанням операційних підсилювачів з діодами .....	240
4.3.2. Моделювання задачі мінімізації вартості розробки при сітьовому плануванні з допомогою діодних ланцюгів .....	241
4.4. Задачі на шляхи та потоки в сітях .....	244
4.5. Екстремальні задачі на мережах і графах .....	247
Ілюстративні приклади до частини 2 .....	250

ДОДАТОК 1. Основи роботи з програмним середовищем Mathematica .....	255
ДОДАТОК 2. Сучасні програмні засоби візуального (графічного) програмування MATLAB/SIMULINK .....	257
ДОДАТОК 3. Сучасні програмні засоби візуального (графічного) програмування MultiSim .....	261
Список літератури до частини 2 .....	264

## ПЕРЕДМОВА

---

В основі методу моделювання лежить процедура створення деякої моделі досліджуваного явища. Взагалі поняття моделі є загальнонауковим і застосовується у багатьох науках. Проте в різних науках моделі виступають в різних образах. В одних наукових дослідженнях під моделями розуміють певні матеріальні аналоги, які можуть дати уявлення про досліджувані об'єкти, в інших — моделі виступають у вигляді описання певного явища засобами тієї чи іншої мови.

Дослідницькі моделі можна грубо і умовно розділити на дві групи: експериментальні (предметні) і теоретичні (умоглядні). Причому експериментальна модель являє собою реально здійснюваний пристрій, який спрощено і в зміненому масштабі копіює природній об'єкт, що моделюється, або ж аналогову модель, яка базується на збігу математичного описання різних явищ, наприклад, коливальні явища в механічних і електричних системах, які описуються одними й тими ж диференціальними рівняннями.

Умоглядні ж моделі формулюються у термінах мови тієї чи іншої науки і залежно від цього можна говорити про математичні моделі, фізичні моделі, економічні моделі тощо. Спільним для цих моделей є те, що вони репрезентують реальні об'єкти за допомогою абстрактних уявлень і дають більш-менш спрощений опис цих об'єктів шляхом мисленого відволікання від багатьох властивостей і зв'язків оригіналу, виділяючи лише суттєві для дослідження властивості. Але в будь-якому випадку модель дозволяє детальніше зрозуміти принцип будови і функціонування досліджуваних явищ чи об'єктів.

Загальноновизнано, що будь-яка модель бідніша за змістом від оригіналу, який вона репрезентує. Саме у цьому і полягає її як теоретико-пізнавальна, так і практична цінність. Як видно, у процесі пізнання та перетворення дійсності модель виконує дві функції: в одних випадках вона виступає як об'єкт вивчення, у інших — стає засобом дослідницької діяльності.

Моделювання розуміється як метод дослідження об'єктів пізнання на їх моделях, який полягає у побудові та дослідженні

моделей реально існуючих предметів і явищ (органічних та неорганічних систем, інженерних пристроїв, різноманітних процесів фізичних, хімічних, біологічних, соціальних) та об'єктів, що конструюються, для визначення або покращення їхніх характеристик, раціоналізації способів їх побудови, управління ними і т. п. Залежно від виду моделей моделювання буває предметне, у ході якого дослідження ведеться на моделі, що відтворює певні геометричні, фізичні, динамічні чи функціональні характеристики об'єкта, та знакове, при якому моделями слугують схеми, формули тощо.

Моделювання виконує такі функції:

- 1) перебуває у певній відповідності з об'єктом дослідження, будучи суттєво простішим за нього;
- 2) заміщує певним чином досліджуваний об'єкт;
- 3) здатне давати безпосередню, а в основному опосередковану інформацію про оригінал.

Метод незамінний особливо в тих випадках, коли реальний об'єкт або недоступний для пізнання, або ж його безпосереднє дослідження тягне за собою не передбачувані наслідки, які можуть привести до небажаних змін. Проте він дає досить абстрактне і схематичне знання про об'єкт дослідження.

В умовах комп'ютеризації, інформатизації різних сфер суспільного життя такими методом дослідження чи впровадження знання у різні види соціальних практик стали математична теорія прийняття рішень, теорія ігор, теорія катастроф, теорія масового обслуговування, теорію диференціальних і інтегральних рівнянь та інші.

Особливо ефективним стало їх застосування у математичному експерименті, за допомогою якого вчені можуть прогнозувати кінцевий результат дослідження і тим самим заздалегідь передбачити його негативні наслідки. Він виступає в сучасній науці і загальнонауковим методом пізнання та практики, інтегруючи в собі фундаментальні та прикладні кількісні методи та могутню обчислювальну техніку. Саме математичний експеримент використовується для дослідження відкритих, нелінійних, нерівноважних систем природної і соціальної дійсності через свою здатність моделювати різні непередбачувані ситуації шляхом заміни одних кількісних параметрів іншими. Особливу цінність він

має у тих дослідженнях, де натуральний експеримент неможливий або може нанести суттєву шкоду. Тому він застосовується в атомній і ядерній енергетиці, космічних дослідженнях, моделюванні глобальних процесів цивілізаційного розвитку, вивченні екологічних і інших глобальних проблем, у процесах переробки, збереження і передачі інформації тощо. Його можна по праву вважати не тільки кількісним, але й якісним методом дослідження.

### 1.1. Сигнали та їх властивості

*Сигнал* – це зміна фізичної величини, яка передає інформацію, закодовану певним способом [4, 10, 12].

Сигнали поділяються в залежності від функції, яка описує параметри сигналу, на неперервні (аналогові), дискретні, квантовані та цифрові (рис. 1.1).

*Аналоговий сигнал* – це сигнал, який змінюється у часі безперервно та може приймати будь-яке значення на деякому інтервалі (рис. 1.1, *a*). Більшість сигналів мають аналогову природу. Аналогові сигнали описуються деякою математичною функцією.

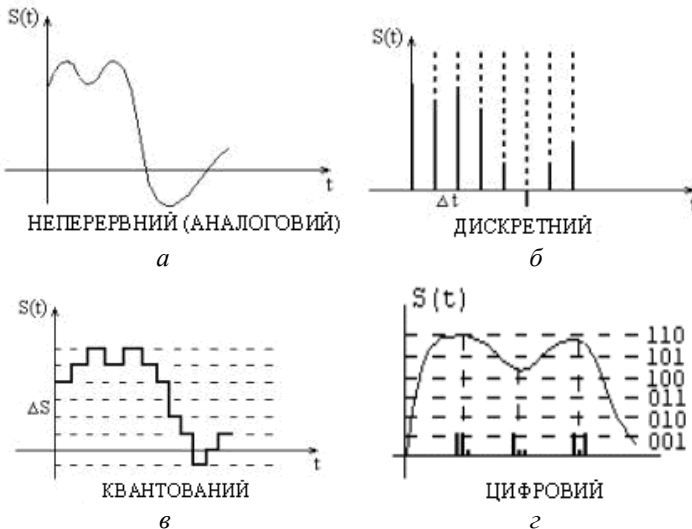


Рис. 1.1. Типи сигналів

Властивості аналогових сигналів у значній мірі є протилежністю квантованих або цифрових сигналів. Аналогові сигнали мають такі властивості:

- відсутність чітко відмінних один від одного дискретних рівнів сигналу робить неможливим застосовувати для його



опису поняття інформації у тому вигляді, як вона розуміється у цифрових технологіях. «Кількість інформації», яка міститься в одному відліку, буде обмежена лише динамічним діапазоном засобу вимірювання;

- відсутність надлишку. Будь-яка перешкода, яка внесена у сигнал, не відрізняється від самого сигналу і, отже, вихідна амплітуда не може бути відновлена. Це впливає із неперервності простору значень. Якщо відома яка-небудь додаткова інформація про властивості сигналу (зокрема, смуга частот), то можлива фільтрація, наприклад, частотними методами).

Аналогові сигнали використовують для представлення фізичних величин, які змінюються безперервно. Їх використовують у радіомовленні, телефонії, телебаченні. Прикладом може бути аналоговий електричний сигнал, який знімають з терморпарі та який несе інформацію про зміну температури. Або сигнал з мікрофону, який несе інформацію про швидкі зміни тиску у звуковій хвилі.

*Дискретний сигнал.* Дискретизація аналогового сигналу полягає у тому, що сигнал представляється у вигляді послідовності значень, які взяті у дискретні моменти часу (рис. 1.1, б). Ці значення називаються відліками.  $\Delta t$  називається інтервалом дискретизації.

*Квантований сигнал.* При квантуванні уся область значень сигналу розбивається на рівні, кількість яких повинна бути представлена у числах заданої розрядності (рис. 1.1, в). Відстань між цими рівнями називається кроком квантування  $\Delta$ . Число цих рівнів дорівнює  $N$  (від 0 до  $N - 1$ ). Кожному рівню присвоюється деяке число. Відліки сигналу порівнюються з рівнями квантування і в якості сигналу вибирається число, яке відповідає деякому рівню квантування. Кожен рівень квантування кодується двоїчним числом з  $n$  розрядами. Число рівнів квантування  $N$  та число розрядів  $n$  двоїчних чисел, які кодують ці рівні, пов'язані співвідношенням  $n \geq \log_2(N)$ .

*Цифровий сигнал.* Під цифровим сигналом розуміють дискретний сигнал, який квантований за амплітудою (рис. 1.1, г). Для того щоб представити аналоговий сигнал послідовністю чисел

кінцевої розрядності, його необхідно спочатку перетворити у дискретний сигнал, а потім піддати квантуванню. У результаті сигнал буде представлений таким чином, що на кожному заданому проміжку часу відомо наближене (квантоване) значення сигналу, яке можна записати цілим числом. Якщо записати ці цілі числа у двоїчній системі, вийде послідовність нулів та одиниць, яка й буде являтися цифровим сигналом. Цифровий сигнал використовує усю смугу пропускання кабелю. *Смуга пропускання* – це різниця між максимальною та мінімальною частотою, яка може бути передана по кабелю.

Дискретний цифровий сигнал важче передавати на великі відстані, ніж аналоговий сигнал, тому його попередньо модулюють на стороні передавача, та демодулюють на стороні приймача інформації.

Сигнали представляють двома способами в залежності від області визначення: часовим або частотним. При часовому представленні сигнал є функцією часу  $s(t)$ , яка характеризує зміну його параметру. Також при аналізі та обробці даних крім звичайного часового представлення сигналів широко використовується опис сигналів функціями частоти. Для переходу до частотного способу представлення використовують перетворення Фур'є:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt ,$$

де  $S(\omega)$  – спектральна функція чи спектральна густина.

Також сигнали класифікують з фізичною природою носія інформації (електричні, електромагнітні, оптичні, акустичні та ін.) та за способом завдання (регулярні (детерміновані), які задані аналітичною функцією та нерегулярні (випадкові), які приймають довільні значення у будь-який момент часу).

Сигнали мають такі параметри:

- потужність сигналу  $P = s^2$   $\langle \rangle$ ;

- удільна енергія сигналу  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 \langle dt \rangle$ ;

- тривалість сигналу  $T$ , яка визначає інтервал часу, під час якого сигнал існує (відмінний від нуля);
- динамічний діапазон – відношення найбільшої миттєвої потужності сигналу до найменшої:

$$D = 10 \lg P_{\max} / P_{\min};$$

- ширина спектру сигналу  $F$  – смуга частот, у межах якої зосереджена основна енергія сигналу [95%]. Чим коротший спектр, тим більша тривалість сигналу;
- база сигналу – добуток тривалості сигналу на ширину його спектру:

$$B = TF;$$

- відношення сигнал/шум дорівнює відношенню потужності корисного сигналу до потужності шуму;
- об'єм сигналу – добуток ширини спектру сигналу на його тривалість та динамічний діапазон:

$$V = FTD.$$

Він характеризує пропускну спроможність каналу зв'язку, яка необхідна для передачі сигналу.

## 1.2. Диференціювання та інтегрування сигналів

Часто необхідно здійснювати перетворення сигналу, яке має характер диференціювання чи інтегрування.

На вхід лінійного пристрою [10], який здійснює диференціювання, подається сигнал  $s(t)$ ; з виходу повинен зніматися сигнал виду

$$s_{\text{вих}}(t) = \tau_0 \frac{ds(t)}{dt}.$$

У інтегруючому пристрої зв'язок між вихідним  $s_{\text{вих}}(t)$  та вхідним  $s(t)$  сигналами повинна мати наступний вид:

$$s_{\text{вих}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int s(t) dt.$$

У цих виразах  $\tau_0$  – постійна величина, яка має розмірність часу.

Для диференціального чи інтегрального перетворення сигналу необхідно застосовувати лінійні кола та елементи, які володіють необхідними співвідношеннями між вхідними та

вихідними величинами. Цим вимогам відповідають в принципі такі елементи, як звичайні конденсатори чи котушки індуктивності у поєднанні з резистором при потрібному знятті вихідного сигналу (рис.1.2).

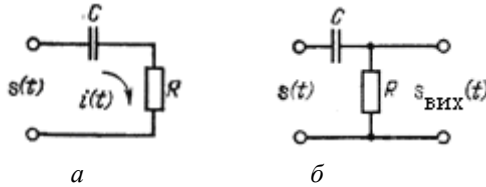


Рис. 1.2. Кола для: *a* – диференціювання (інтегрування) сигналів;  
*б* – диференціююче коло

Розглянемо спочатку коло, зображене на рис. 1.2, *a*.

Розуміючи під вхідним сигналом  $s(t)$  ЕРС, складаємо рівняння для струму у колі  $i(t)$

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt = s(t). \quad (1.1)$$

Помноживши це рівняння на  $C$  і позначивши постійну часу  $\tau_0 = RC$ , отримаємо

$$\tau_0 i(t) + \int i(t)dt = Cs(t). \quad (1.2)$$

Характер функціонального зв'язку між струмом  $i(t)$  та вхідним сигналом  $s(t)$  залежить від постійної часу  $\tau_0$ . Розглянемо два крайніх випадки: дуже малого та дуже великого  $\tau_0$ . При дуже малому  $\tau_0$  першим доданком у лівій частині рівняння (1.2) можна знехтувати. Продиференційовавши рівняння, яке залишилося після відкидання цього доданку, по  $t$ , отримаємо

$$i(t) \approx C \frac{ds(t)}{dt}.$$

Звідси видно, що напруга на резисторі  $R$ , яка співпадає по формі з  $i(t)$ , пропорційна похідній вхідного сигналу

$$u_R = Ri(t) \approx RC \frac{ds(t)}{dt} = \tau_0 \frac{ds(t)}{dt}.$$

Таким чином, приходимо до схеми диференціального чотириполосника, яка показана на рис. 1.2, б, в якій вихідний сигнал знімається з резистора  $R$ .

При дуже великих значеннях  $\tau_0$  другий доданок у лівій частині рівняння (1.2) можна відкинути. При цьому струм

$$i(t) \approx \frac{C}{\tau_0} s(t) = \frac{1}{R} s(t)$$

співпадає по формі з вхідним сигналом, а напруга на конденсаторі  $C$ , дорівнює

$$u_c = \frac{1}{C} \int i(t) dt \approx \frac{1}{CR} \int s(t) dt ,$$

пропорційна інтегралу від вхідного сигналу  $s(t)$ . Звідси випливає, що для здійснення інтегрування  $RC$ -коло повинне бути таким, як показано на рис. 1.3, а. Аналогічні результати можна отримати за допомогою  $RL$ -кола (рис. 1.3, б та 1.3, в).

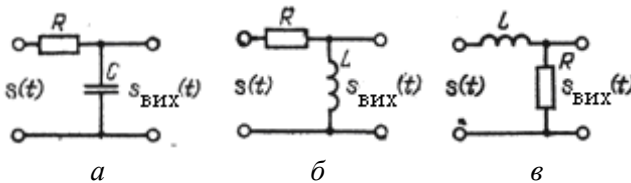


Рис. 1.3. Кола: а – інтегруюче; б – диференціююче; в – інтегруюче

Постійна часу  $\tau_0 = L/R$  кола, яке диференціює, повинна бути достатньо малою, а інтегруючого – достатньо великою. Принцип диференціювання для першої схеми (рис. 1.3, б) можна представити наступним чином. При достатньо великому опорі  $R$  струм через  $RL$ -коло майже не залежить від  $L$  і співпадає по формі з вхідним сигналом  $s(t)$ . Вихідний же сигнал  $s_{\text{вих}}(t)$ , який знімається з індуктивності  $L$ ,

$$s_{\text{вих}}(t) = L \frac{di}{dt} \approx L \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{R} s(t) \right] = \tau_0 \frac{ds(t)}{dt} .$$

У схемі, показаній на рис. 1.3, в, навпаки, струм визначається індуктивністю  $L$  (так як  $R$  дуже малий):

$$i(t) \approx \frac{1}{L} \int s(t) dt ,$$

вихідний же сигнал, який знімається з резистора  $R$ ,

$$s_{\text{вих}}(t) = Ri(t) \approx \frac{1}{\tau_0} \int s(t) dt .$$

На основі спектрального розгляду уточнимо використані вище поняття «мала» та «велика»  $\tau_0$ . Якщо вхідний сигнал  $s(t)$  має спектральну густину  $S(\omega)$ , то при точному диференціюванні вихідний сигнал

$$s_{\text{вих}}(t) = \tau_0 \frac{ds(t)}{dt}$$

повинен мати спектральну густину  $i\omega\tau_0 S(\omega)$ , а при точному інтегруванні – густину  $(1/i\omega\tau_0)S(\omega)$ . Це означає, що для точного диференціювання необхідний чотириполіусник з коефіцієнтом передачі

$$\mathbf{K}(i\omega) = \tau_0 i\omega, \quad (1.3)$$

а для точного інтегрування

$$\mathbf{K}(i\omega) = 1/\tau_0 i\omega. \quad (1.4)$$

Для задовільного диференціювання необхідно, щоб виконувалась умова

$$\tau_0\omega \ll 1. \quad (1.5)$$

Ця нерівність повинна задовольнятися для усіх частот спектру вхідного сигналу, у тому числі і для самої високої.

Для задоволення інтегрування необхідне виконання умови

$$\tau_0\omega \gg 1. \quad (1.6)$$

Ця нерівність повинна задовольнятися для усіх частот спектру вхідного сигналу, у тому числі і для самої низької.

Із нерівностей (1.5) та (1.6) випливає, що при заданому колі диференціювання тим точніше, чим нижчі частоти, на яких концентрується енергія вхідного сигналу, а інтегрування тим точніше, чим вищі ці частоти.

Постійна часу кола, яке диференціює,  $\tau_0$  повинна бути малою у порівнянні з тривалістю імпульсу  $s(t)$ .

З нерівностей (1.5), (1.6) витікає також наступне принципове положення: чим точніше диференціювання чи інтегрування, тим менше (по модулю) передатна функція  $\mathbf{K}(i\omega)$  кола, яка здійснює

це перетворення сигналу. Сказане відноситься до найпростіших  $RC$ - чи  $RL$ -колам, представленим на рис. 1.2-1.3. У межі, при ідеальному перетворенні,  $\mathbf{K}(i\omega) \rightarrow 0$ .

Таким чином, прості  $RC$ - чи  $RL$ -кола придатні лише для наближеного диференціювання чи інтегрування сигналів. Вказані операції можна здійснювати достатньо точно при вводі у схеми рис. 1.2, б та 1.3, а підсилювача з від'ємним зворотнім зв'язком при забезпеченні умови  $|\mathbf{K}_y \mathbf{K}_{оп} \gg 1|$ . Цій вимозі відповідають операційні підсилювачі (ОП).

### 1.3. Задачі фільтрації. Виділення сигналів на фоні шумів

Задачею фільтрації є перетворення сигналів з метою зміни співвідношення між їх різними частотними складовими [10]. У задачах лінійної фільтрації припускається, що реальний процес, який спостерігається, представляє собою адитивну суміш сигналу та перешкоди. Для оптимальної фільтрації вводять поняття критерію оптимальності, згідно з яким будують оптимальний алгоритм обробки сигналу. Конкретний алгоритм оптимальної фільтрації буде суттєво залежати того, який сигнал повинен бути виділений на фоні шуму, а саме, неперіодичний або періодичний (для періодичного розрізняють дві ситуації: відома або ні його частота повторення).

Для фільтрації сигналів використовують фільтри. Фільтри використовують для пропускання сигналів у необхідному діапазоні частот та послаблення сигналів поза цим діапазоном. Вони забезпечують виділення корисної інформації із суміші інформаційного сигналу з перешкодою з необхідними показниками.

Класифікують фільтри у першу чергу за видом амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) фільтрів нижніх частот (ФНЧ), верхніх частот (ФВЧ), смуго-пропускаючого фільтру (СПФ) та смуго-загороджуючого (режекторного) фільтру (СЗФ).

Оптимальним фільтром є частотно-вибірковий ланцюг, який виконує обробку суміші сигналу та перешкоди деяким найкращим чином. Забезпечення максимуму відношення сигнал-шум вважають критерієм оптимальності. Це приводить до вибору такої форми

частотного коефіцієнту передачі фільтру, яка забезпечує максимум відношення сигнал-шум на його виході.

Оптимальне виділення сигналу із шуму можна проводити різними методами, в залежності від того, яка ставиться задача – виявлення сигналу, збереження форми сигналу і т.д.

Для виділення корисного сигналу на фоні шуму використовують кореляцію сигналу, який приймається, з опорним сигналом.

Кореляція у математиці – це ступінь взаємної подібності двох функцій, тобто наскільки дві різні функції схожі одна на одну.

Корелятор виконує згортку сигналу, який приймається, з деяким еталонним сигналом. Він є ідеальним детектором для визначення часових зсувів, які приймають відносно опорних імпульсів. Еталонна функція така, що при прийомі одиниці (імпульс передається з випередженням відносно опорного імпульсу) кореляційна функція дорівнює +1, а при прийомі нуля (імпульс передається з відставанням відносно опорного імпульсу) кореляційна функція дорівнює -1. У всіх інших випадках кореляційна функція дорівнює 0.

Задача вибору та розрахунку фільтра полягає в отриманні таких параметрів, які забезпечують максимальну ймовірність виявлення інформаційного сигналу на фоні перешкод. Наприклад, фільтр нижніх частот пропускає сигнали низьких частот, включаючи нульові, та затримує радіочастотні сигнали, які заважають. Порядок фільтра визначається числом елементів, які входять до нього, здатних запасати енергію, тобто конденсаторів та

катушок індуктивності. Гранична частота фільтру  $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$   
[рад/с].

Розглянемо деякі типи фільтрів.

*Активні фільтри.* Вони складаються з операційних підсилювачів (ОП), які працюють у лінійному режимі, та пасивних елементів. Якщо у базову схему інвертуючого підсилювача додати конденсатор зворотного зв'язку С (рис. 1.4), то виходить активний ФНЧ першого порядку. Цей фільтр є суміщенням звичайного інтегруючого ланцюга та інвертуючого операційного підсилювача.



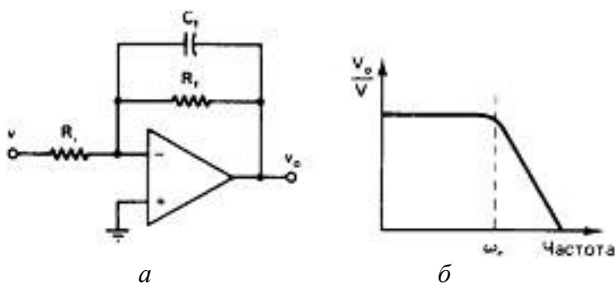


Рис. 1.4. Активний фільтр нижніх частот першого порядку: *а* — принципова схема; *б* — амплітудно-частотна характеристика

Додаючи конденсатор  $C$  на вході базової схеми інвертуючого підсилювача, отримуємо активний ФВЧ першого порядку (рис. 1.5). Його АЧХ ідентична АЧХ пасивного ФВЧ першого порядку.

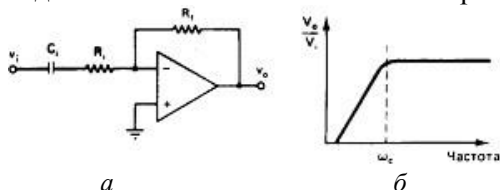


Рис. 1.5. Активний фільтр верхніх частот першого порядку: *а* — принципова схема; *б* — амплітудно-частотна характеристика

На рис. 1.6, 1.7 представлені принципові схеми активних фільтрів другого та третього порядків. Фільтр другого порядку утворюється шляхом каскадного з'єднання двох RC-фільтрів та введення додатного зворотного зв'язку для збільшення коефіцієнту передачі фільтра на граничній частоті. У фільтрі третього порядку на вході включений ще один додатковий RC-фільтр. Каскадуючи фільтри другого та третього порядків, можна отримати фільтри більш високих порядків.

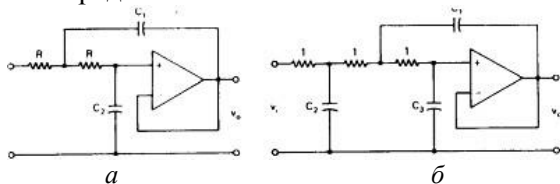


Рис. 1.6. Фільтри: *а* — активний фільтр нижніх частот другого порядку; *б* — нормований активний фільтр нижніх частот третього порядку

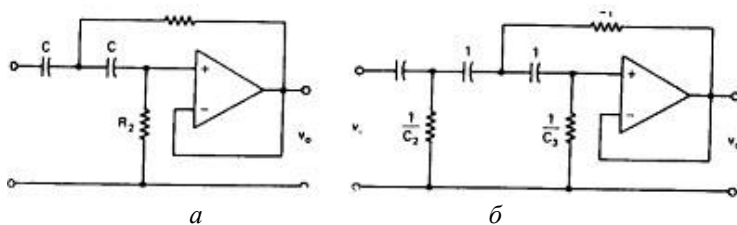


Рис. 1.7. Фільтри: *a* – активний фільтр верхніх частот другого порядку; *б* – нормований активний фільтр верхніх частот третього порядку

*Режекторний фільтр* виходить не при каскадному, а при паралельному включенні входів та виходів фільтрів нижніх та верхніх частот.

*Фільтри Баттерворта.* Ці фільтри характеризуються максимально плоскою АЧХ у смузі пропускання у поєднанні з високою крутизною затухання (крутизна АЧХ поза смугою пропускання) (рис. 1.8, 1). Управління величиною коефіцієнта передачі та перебудова за частотою у широкому діапазоні здійснюються у цих фільтрах простіше, ніж у інших фільтрах, оскільки при каскадному з'єднанні усі секції настраюються на одну і ту ж частоту.

*Фільтри Чебишева.* Ці фільтри забезпечують найвищу крутизну затухання. Однак за це доводиться «платити» втратою рівномірності АЧХ у смузі пропускання (на АЧХ з'являються коливальні викиди) (рис. 1.8, 2). Чим вища крутизна затухання, тим сильніша нерівномірність. В залежності від допустимого рівня нерівномірності АЧХ у смузі пропускання використовуються різні таблиці для розрахунку цих фільтрів. Оскільки амплітуда усіх цих коливань однакова, то фільтр Чебишева називають також фільтром рівномірних пульсацій.

*Інверсний фільтр Чебишева.* У цьому фільтрі АЧХ монотонно змінюється у смузі пропускання та пульсує у смузі загородження (рис. 1.8, 3).

*У еліптичного фільтра* АЧХ характеризується рівномірними пульсаціями як в смузі пропускання, так і у смузі загородження (рис. 1.8, 4).

*Фільтри Бесселя.* У фільтрі Бесселя найкраща апроксимація шукається не для амплітудно-частотної, а для фазово-частотної

характеристики фільтра (рис. 1.8, 5). Для того аби фільтр не викривляв сигналу, спектр якого лежить у смузі пропускання, необхідно, щоб запізнювання вихідного сигналу відносно вхідного було однаковим для усіх гармонік. Оскільки фазовий зсув змінюється у долях періоду гармоніки, яка розглядається, то постійність часу запізнювання рівносильне лінійній частоті залежності фазового зсуву вихідного сигналу відносно вхідного сигналу фільтра. Фільтр Бесселя забезпечує найкраще наближення реальної фазово-частотної характеристики до ідеальної лінійної залежності, яка відповідає постійному запізнюванню. Фільтри Бесселя володіють максимально плоскою характеристикою групового часу запізнювання (похідна від ФАХ по частоті) при впливі на фільтр ступінчатого сигналу. Однак крутизна затухання фільтра невелика.

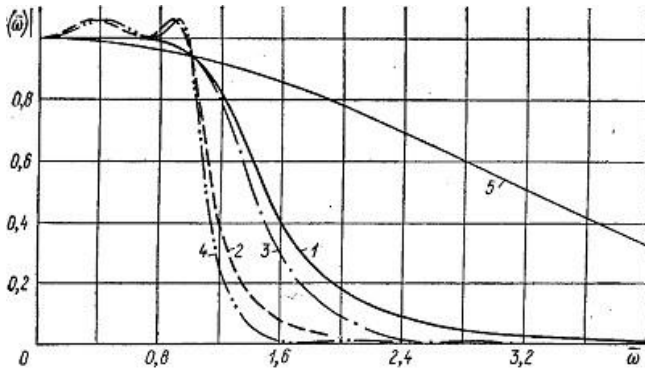


Рис.1.8. Графіки амплітудно-частотних характеристик активних фільтрів нижніх частот четвертого порядку: 1 – фільтр Баттерворта; 2 – фільтр Чебишева; 3 – інверсний фільтр Чебишева; 4 – еліптичний фільтр; 5 – фільтр Бесселя

Частіше за інші для реалізації активних фільтрів застосовують ланки Саллена-Кі та Рауха, схеми яких показані на рис. 1.9.

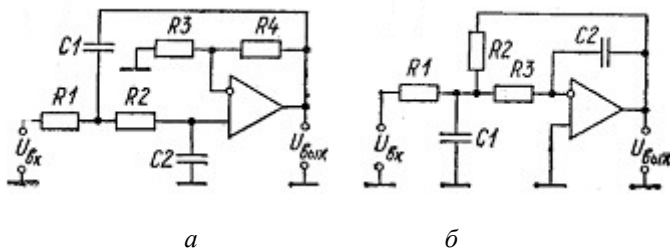


Рис. 1.9. Схеми активних ланок другого порядку

Ланку за схемою а (рис. 1.9, а) побудовано на основі неінвертуючого підсилювача чи, як його називають у теорії активних фільтрів, джерела напруги, яке управляється напругою (ще одна назва – структура Саллена-Кі). Ланку за схемою б (рис. 1.9, б) називають ланкою з багатопетльовим зворотнім зв'язком чи структурою Рауха.

#### 1.4. Поліноміальне представлення сигналів

Формули сигналів, які детально і точно описують певні фізичні об'єкти, поля та процеси, можуть бути дуже складними і мало придатними до практичного використання як, у загальному випадку, при математичному аналізі фізичних даних, так і у чисто прикладних задачах, особливо при розрахунках результатів вимірів, які очікують, і при математичному моделюванні фізичних процесів. Крім того, практична реєстрація фізичних даних виконується, як правило, з певною похибкою або з певним рівнем шумів, які за своїми значеннями можуть бути вищими теоретичної похибки прогнозування сигналів при розрахунках за складними, хоча й дуже точними формулами. Не має великого смислу й проектування систем обробки та аналізу сигналів за високоточними формулами, якщо підвищення точності розрахунків та відповідне ускладнення систем не дає відчутного ефекту у підвищенні точності обробки даних. У всіх цих умовах виникає задача апроксимації – представлення довільних складних функцій  $f(\omega)$  простими та зручними для практичного використання функціями  $\varphi(\omega)$  таким чином, щоб відхилення  $\varphi(\omega)$  від  $f(\omega)$  в області її завдання було найменшим за певним критерієм наближення [18,

21]. Функції  $f(x)$  отримали назву функції апроксимації. Математика дуже часто оперує із спеціальними математичними функціями розв'язання диференціальних рівнянь та інтегралів, які не мають аналітичних виразів та представляються табличними та числовими значеннями  $y_i$  для дискретних значень незалежних змінних  $x_i$ . Аналогічними таблицями  $f(x_i), x_i$  можуть представлятися й експериментальні дані. Точки, в яких визначені дискретні значення функцій або даних, називаються вузловими. Однак на практиці можуть знадобитися значення даних величин зовсім у інших точках, відмінних від вузлових, або з іншим кроком дискретизації аргументів. Виникаюча при цьому задача обчислення значень функції у проміжках між вузлами називається задачею інтерполяції, за межами сімейства вузлових точок вперед або назад за змінними – задачею екстраполяції або прогнозування.

Розв'язання цих задач зазвичай виконується також із використанням апроксимуючих функцій. Згладжування статистичних даних або апроксимація даних із врахуванням їх статистичних параметрів відноситься до задач регресії. Як правило, при регресійному аналізі усереднення даних виконується методом найменших квадратів. Усі перераховані задачі відносяться до задач наближення сигналів та функцій. Розглянемо наближення сигналів рядами Тейлора та інтерполяцію та екстраполяцію сигналу.

*Наближення сигналів рядами Тейлора.* Розкладення функцій у ряд Тейлора з певним обмеженням числа членів ряду є одним із перших методів наближення функції в околі точок  $x_0$ :

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

При розкладанні функції в околі точки  $x_0=0$  ряд Тейлора прийнято називати рядом Маклорена.

Перший член  $f(x)$  ряду представляє собою відлік функції у точці  $x_0$  і грубе наближення до значень функції в околі цієї точки. Усі інші члени ряду деталізують значення функції в околі точки  $x_0$  і тим точніше наближають суму ряду до значень функції, чим більше членів суми приймають участь у наближенні, з одночасним розширенням інтервалу околів точного наближення. Наочно це можна бачити на прикладі функції  $y = \sin x$  і двох функцій

$$f_1(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7,$$

$$f_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots$$

з усиченням до 4 та 3 членів ряду, наведеного на рис. 1.10.

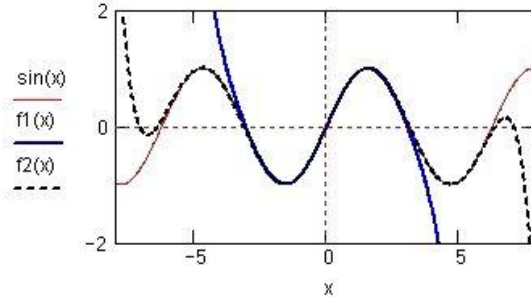


Рис. 1.10. Приклад розкладання функції у ряд Маклорена

Наближення функції рядом Тейлора має багато недоліків. Воно застосовується, в основному, для неперервних та гладких функцій у локальних інтервалах завдання. Для розривних функцій та функцій, які періодично повторюються, використовувати його практично неможливо, так само як і для неперервних функцій, які не диференціюються. Операція диференціювання само по собі також може бути далеко не простою та точною, а ряди, які отримують, можуть збігатися дуже повільно.

*Інтерполяція та екстраполяція сигналів.* Самими простими способами обробки таблиць є лінійна та квадратична інтерполяція, які виконуються за рівняннями:

$$f(x)_{\text{лін}} = a_0 + a_1x, \quad f(x)_{\text{ква}} = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

При кусково-лінійній інтерполяції обчислення додаткових точок виконуються за лінійною залежністю. Графічно це означає просте з'єднання вузлових точок відрізками прямих. При екстраполяції використовуються відрізки прямих, проведених через дві крайні точки.

При невеликому числі вузлових точок (менше 10) лінійна інтерполяція виявляється доволі грубою. Перша похідна функції апроксимації відчуває різкі стрибки у вузлових точках.

Лінійна та квадратична апроксимація є окремим випадком поліноміальної інтерполяції за допомогою апроксимуючого полінома:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (1.7)$$

Для виконання поліноміальної інтерполяції достатньо за виразом (1.7) скласти систему лінійних рівнянь для  $n$  вузлових точок та визначити  $n$  значень коефіцієнтів  $a_i$ . При глобальній інтерполяції, за всіма  $N$  точками завдання функції, степінь полінома дорівнює  $N-1$ .

Для практичного використання більш зручні формули апроксимації, які не потребують попереднього визначення коефіцієнтів апроксимуючих поліномів. До числа таких формул відносяться інтерполяційний багаточлен за Лагранжем. При апроксимації функції  $y(x)$  багаточленом  $n$ -ї степені  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0 + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}y_1 + \dots + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

### Питання для самоконтролю

1. Перелічіть основні типи сигналів та дайте їх характеристику.
2. У чому полягає задача інтерполяції та екстраполяції сигналів.
3. Види фільтрів та їх електронні схеми.

### 2.1. Методи апроксимації

Спочатку визначимо у чому полягає задача апроксимації.

Нехай задана функція  $f(x) \in \mathbf{R}$ , де  $\mathbf{R}$  – це лінійний нормований простір [7]. Задача апроксимації (або наближення) функції  $f(x)$  полягає у наступному.

Спочатку будеться лінійно-незалежна система базисних функцій  $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ ,  $\varphi_i(x) \in \mathbf{R}$ . Вимога лінійної незалежності є суттєвою для більшості методів, хоча в деяких випадках вона не є обов'язковою. Одночасно будеться множина  $M_n$ , як лінійна оболонка, натягнута на перші  $n$  базисні функції. Визначимо узагальнений поліном

$$\Phi(f; x) = \Phi_n(f; x) = \sum_{i=0}^n C_i \varphi_i(x), \quad (2.1)$$

таким чином, що  $\forall \Phi_n \in M_n$ .

Для того, щоб побудувати наближення  $f(x)$ , серед усіх елементів  $M_n$  необхідно шукати у певному розумінні найкращий. Для цього вводиться функція помилки  $\delta(f, \Phi) = \|f - \Phi\|$ . Позначимо її точну нижню межу через

$$\delta(f) = \inf_{\Phi \in M_n} \|f - \Phi\|.$$

Очевидно, що найкращим буде той елемент множини  $M_n$ , що реалізує мінімум норми функції помилки.

Стверджується, що для будь-якої функції  $f(x) \in \mathbf{R}$  існує елемент  $\Phi_0(f; x) \in M_n$  такий, що  $\delta(f, \Phi_0) = \delta(f)$ . Елемент  $\Phi_0(f; x)$  – це елемент найкращого наближення. Він є розв'язком задачі апроксимації.

Стверджується також, що такий елемент найкращого наближення буде єдиним, якщо простір  $\mathbf{R}$  – строго нормований. Тобто, якщо з умов  $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in \mathbf{R}$  і  $\|f\| = 0, \|g\| = 0$



впливає, що  $f = \lambda g; \lambda \neq 0$ . Окремим випадком такого нормованого простору є довільний гільбертовий простір.

Задачу пошуку найкращого наближення можна розглядати як оптимізаційну задачу. З цього погляду можна говорити про мінімізацію функціонала  $F(C_0, C_1, \dots, C_n) = \|f - \Phi_n\| = \delta(f, \Phi_n)$  на множині  $M_n$ , наприклад, при фіксованому степені  $n$ . Іншими словами, норму функції помилки можна розглядати як критерій оптимізації.

Задача наближення функції або сигналу тісно пов'язана з теорією обробки сигналів і спектральною теорією. З цієї точки зору, задачу апроксимації можна розглядати як сукупність двох задач: задачі відшукування спектра сигналу і задачі відновлення сигналу за його спектром. У термінах спектральної теорії, набір коефіцієнтів при базисних функціях, що визначає елемент найкращого наближення, називається спектром.

Розглянемо деякі основні методи апроксимації функцій та числових масивів для одномірного випадку, а саме: лінійну апроксимацію, рівномірне наближення, середньоквадратичне наближення, поліноміальну апроксимацію.

### 2.1.1. Лінійна апроксимація

Розглянемо наближення неперервної функції по заданій системі базисних функцій  $\{s_i(x)\}_{i=0}^n$  [7]. Метод апроксимації називається лінійним, якщо для апроксимуючого полінома  $X_n(f; x)$  і для двох довільних функцій  $f_1$  і  $f_2$  виконується співвідношення:

$$X(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \alpha_1 X_n(f_1; x) + \alpha_2 X_n(f_2; x),$$

де  $\alpha_1, \alpha_2$  – довільні константи. До лінійних методів відносяться метод інтерполяції поліномами і розкладання в ряди Тейлора або Фур'є.

*Інтерполяція багаточленами.* Задача інтерполяції відноситься до найпростіших задач наближення. Розглянемо на відрізку  $[a, b]$  функцію  $x(t)$ . Поліном  $X(t) = X_n(x; t)$  виду (2.1) по лінійно-незалежній системі базисних функцій  $\{s_i(t)\}_{i=0}^n$  називається

інтерполяційним для функції  $x(t)$  і сітки  $Q = \{t_0, \dots, t_n\}$ , якщо виконується  $x(t_k) = X(t_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Питання про існування полінома зводиться до питання про існування рішення системи рівнянь:

$$\sum_{i=0}^n C_i S_i(t) = x(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Зокрема, якщо  $\{S_i(t)\}$  – система Чебишева на відрізку  $[a, b]$ , то визначник цієї системи рівнянь відмінний від нуля й інтерполяційний поліном існує для будь-якої системи вузлів.

Введемо поняття фундаментального полінома інтерполяції:

$$l_k(t) = \sum_{i=0}^k C_i S_i(t) = \begin{cases} 1, & t = t_k \\ 0, & t = t_j, j \neq k \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

інтерполяційний поліном можна переписати у вигляді:

$$X(t) = \sum_{k=0}^n x(t_k) l_k(t). \quad (2.1)$$

Фундаментальні поліноми інтерполяції для системи тригонометричних функцій  $1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(nx), \cos(nx)$  мають вигляд

$$l_k(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{2n} \frac{\sin \frac{t-t_i}{2}}{\sin \frac{t_k-t_i}{2}}.$$

Якщо ввести позначення  $\omega_n(t) = \prod_{k=0}^n (t - t_k)$ , то для системи

степеневих функцій  $\{t^i\}_{i=0}^{2n}$  фундаментальні поліноми запишуться у вигляді:

$$l_k(t) = \frac{\omega_n(t)}{(t - t_k) \omega_n'(t_k)}. \quad (2.3)$$

Тоді з (2.2) і (2.3) безпосередньо випливає інтерполяційна формула Лагранжа, яку можна записати у вигляді:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n x(t_k) \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(t_k)}$$

Інтерполяційна формула Ньютона базується на понятті розділеної різниці, яка є аналогом похідної для функції, заданої числовим масивом. Вважається, що розділеною різницею нульового порядку є власне значення функції  $x(t)$  у вузлах сітки. Розділена різниця  $k$ -го порядку визначається рекурентно і позначається як  $x[t_0; \dots; t_k]$ . Як правило, розділені різниці розміщують у таблиці, що представлена на рис. 2.1.

Формула Ньютона будується за цією таблицею. Якщо використовувати верхню діагональ таблиці, то одержимо інтерполяційну формулу Ньютона вперед:

$$L_n(x) = x(t_0) + (x[t_0; t_1] - x(t_0))(x - t_0) + \frac{(x[t_0; t_1; t_2] - x[t_0; t_1])(x - t_0)(x - t_1)}{1! \cdot 2!} + \dots + \frac{(x[t_0; \dots; t_n] - x[t_0; \dots; t_{n-1}])(x - t_0)(x - t_1) \dots (x - t_{n-1})}{(n-1)!}$$

$t_0$	$x(t_0)$				
$t_1$	$x(t_1)$	$x(t_0; t_1)$	$x(t_0; t_1; t_2)$		
•	•	$x(t_1; t_2)$	•		
•	•		•		
•	•	$x(t_{n-1}; t_{n-2})$	•		
$t_{n-1}$	$x(t_{n-1})$	$x(t_{n-1}; t_n)$	$x(t_{n-2}; t_{n-1}; t_n)$		
$t_n$	$x(t_n)$				$x(t_0; t_1; \dots; t_n)$

Рис. 2.1. Таблиця розділених різниць

Якщо використовувати нижню діагональ таблиці розділених різниць, то одержимо інтерполяційну формулу Ньютона назад:

$$L_n(x) = x(t_n) + (x[t_n; t_{n-1}] - x(t_n))(x - t_n) + \frac{(x[t_n; t_{n-1}; t_{n-2}] - x[t_n; t_{n-1}])(x - t_n)(x - t_{n-1})}{1! \cdot 2!} + \dots + \frac{(x[t_n; \dots; t_1] - x[t_n; \dots; t_2])(x - t_n)(x - t_{n-1}) \dots (x - t_2)}{(n-1)!}$$

Якщо в таблиці розділених різниць йти за ламаною, починаючи із середньої точки, то одержимо формулу Беселя. Простими перетвореннями можна показати, що інтерполяційні формули Ньютона і Лагранжа еквівалентні між собою.

*Формула Тейлора і ряди Фур'є.* Формула Тейлора і ряди Фур'є є одним із найпоширеніших способів наближення функцій.

Припустимо, що функція  $x(t)$  в  $\delta$ -околі точки  $t_0$  має неперервні похідні до  $n$ -го порядку включно. У тих випадках, коли можна легко обчислити похідні  $x^{(i)}|_{t=t_0}$ ,  $i=0,1,\dots,n$ , для наближення функції  $x(t)$  на відрізку  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  доцільно використовувати добре відому формулу Тейлора:

$$x(t) \approx x(t_0) + x'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}x''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}x^{(n-1)}(t_0)(t-t_0)^{n-1} + R_n(t)$$

де  $R_n(t)$  – залишковий член, що може бути записаний у різних формах.

Іншим природнім шляхом наближення функції є її розкладання в ряд Фур'є:

$$S_n(x; t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos ktdt; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin ktdt.$$

Для будь-якої  $2\pi$ -періодичної функції таке представлення є елементом найкращого наближення в матриці простору  $L_2$ .

### 2.1.2. Рівномірне наближення

Рівномірне наближення – це наближення в просторі  $R = C[a, b]$ . При цьому норма функції помилки має вигляд [7]:

$$\|x - \Phi\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - \Phi_n(t)|.$$

Має місце теорема Хаара, що визначає необхідні і достатні умови існування елемента найкращого рівномірного наближення.

**Теорема.** Для того, щоб для будь-якої функції  $x(t) \in C[a, b]$  існував єдиний елемент найкращого рівномірного наближення необхідно і достатньо, щоб система базисних функцій  $\{s_i(t)\}_{i=0}^n$  була системою Чебишева.

Теорія рівномірного наближення була створена Чебишевим. Ним було доведено, що при рівномірному наближенні на інтервалі  $[a, b]$  функції  $x(t)$  багаточленом  $n$ -го порядку  $Q_n$  помилки  $\delta_{C, Q_n}$  буде відхилятися від нуля по черзі то в одну, то в іншу сторону  $n + 2$  рази. При цьому максимальні відхилення цієї помилки будуть однакові.

На жаль, для рівномірного наближення не існує явних формул для побудови елементів найкращого наближення. Частково це відбувається тому, що норма функції помилки, що виступає критерієм помилки оптимізації, не є всюди диференційованою функцією.

Для рівномірного наближення можна визначити такий алгоритм:

1. Спочатку наближаємо сигнал  $x(t)$  як  $x \approx P_{n+1}$ , де  $P_{n+1}$  – багаточлен Тейлора (часткова сума ряду Тейлора), що обирається з умови:

$$\|x - P_{n+1}\|_{C[a, b]} < \varepsilon/2,$$

де  $\varepsilon$  – задана точність.

2. Для багаточлена  $P_{n+1}$  будемо багаточлен найкращого рівномірного наближення  $Q_n^0$ , за формулою

$$Q_n^0 = P_{n+1} - a_{n+1} \bar{T}_{n+1}^{[a, b]}, \quad (2.4)$$

де  $a_{n+1}$  – старший коефіцієнт  $P_{n+1}$ , а  $\bar{T}_{n+1}^{[a, b]}$  – нормований багаточлен Чебишева степеня  $n + 1$ , визначений на  $[a, b]$ .

3. Якщо  $\|P_{n+1} - Q_n^0\|_{C[a, b]} < \varepsilon/2$ , то за апроксимуючий багаточлен замість  $P_{n+1}$  можна прийняти  $Q_n^0$ .

4. Якщо це можливо, то намагаємося максимально зменшити степінь апроксимуючого полінома. Для цього за формулою (2.4) будемо для багаточлена  $Q_n^0$  багаточлен найкращого рівномірного наближення  $Q_{n-1}^0$ , і т.д. Процес зупиняється тоді,

коли отриманий багаточлен  $Q_m^0$ , де  $m = \min n_k$ , такий що  $\|x - Q_m^0\|_{C[a,b]} < \varepsilon$ .

Є альтернативні методи побудови елементів найкращого рівномірного наближення. Такі як, наприклад, метод спуска і метод підйому.

*Раціональна апроксимація. Апроксимації Паде.*

Одним з методів наближення функцій у рівномірній метриці є раціональні апроксимації. Окремими випадками раціональної апроксимації є так званий РА-метод і апроксимації Паде. Необхідно відзначити, що апроксимації Паде можна застосовувати для наближення функцій, як дійсного, так і комплексного аргументу. Метод відштовхується від розкладання функції (у загальному випадку)  $f$  у ряд Тейлора:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^i. \quad (2.5)$$

Апроксимація Паде – це раціональна функція виду

$$\left[ \begin{matrix} M \\ M \end{matrix} \right] = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M},$$

розкладання якої в ряд Тейлора (з центром у точці нуля) збігається з розкладанням (2.5) доти, доки це можливо. Тобто має місце співвідношення:

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i z^i = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M} + O(z^{M+L+1}). \quad (2.6)$$

Завдяки цьому співвідношенню одержуємо самий простий алгоритм побудови апроксимації Паде. Наведемо приклад, що демонструє деякі переваги апроксимації Паде.

Приклад 2.1.

Розглянемо функцію  $f = \sqrt{\frac{1 + 1/2t}{1 + 2t}}$ . Її розкладання в ряд

Тейлора має вигляд:  $S(f) = 1 - \frac{3}{4}t + \frac{39}{42}t^2 - \dots$ . Побудуємо апроксимацію Паде  $\left[ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right]$ . Помножимо співвідношення (2.6) на

знаменник і порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях  $z$ ,

одержимо:  $P(z) = \frac{1 + \frac{7}{8}z}{1 + \frac{13}{8}z}$ . На рис. 2.2 зображений графік

$f(z)$ , відрізка ряду Тейлора  $S(z; f)$  й апроксимації Паде  $P(z)$ .

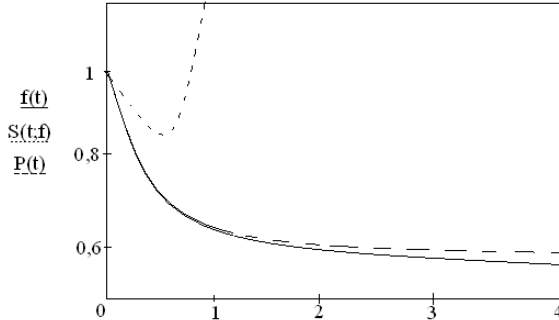


Рис. 2.2. Наближення за допомогою апроксимацій паде і відрізка ряду Тейлора

### 2.1.3. Середньоквадратичне наближення

У загальному випадку, це наближення в гільбертовому просторі, у якому заданий скалярний добуток  $(u, v)$  [7]. Скалярний добуток пов'язаний з нормою як:  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ . У цьому випадку алгоритми побудови елемента найкращого середньоквадратичного наближення буде скінченим.

Традиційно прийнято розглядати середньоквадратичне наближення як наближення в просторі  $L^2(a, b)$ . Однак, у більш загальному випадку середньоквадратичне наближення – це наближення у просторі  $L^{2, \alpha}(a, b)$ , у якому скалярний добуток заданий як:

$$(u, v) = \int_a^b u(\alpha) v(\alpha) d\alpha,$$

де  $\alpha$  – неспадна функція.

Розглянемо два випадки:

1) Нехай  $\alpha \in C^1 [a, b]$ . Тоді скалярний добуток має вигляд

$$(u, v) = \int_a^b \rho(t) u(t) v(t) dt,$$

де  $\rho(t) = \alpha'(t) \geq 0$  – функція ваги. Зокрема, якщо  $\rho(t) \equiv 1$ , то одержуємо традиційний критерій середньоквадратичного наближення.

2) Нехай  $\alpha(t)$  – функція стрибка, тобто  $\alpha(t) = \alpha_{k+0}$ ,  $t_k < t < t_{k+1}$  (рис. 2.3). Тоді скалярний добуток приймає вигляд:

$$(u, v) = \sum_{k=1}^n \rho_k u_k v_k,$$

де  $\rho_k$  – це стрибок. Тобто,  $\rho_k = \alpha_{k+1-0} - \alpha_{k-0}$ . Цей випадок відповідає тому, що функція  $x(t)$  задана як числовий масив.

Тепер перейдемо до розгляду традиційного критерію середньоквадратичного наближення

$$\|x - \Phi_n\|^2 = \int_a^b [x(t) - \Phi_n(t)]^2 dt$$

Сформулюємо основну лему, що дає механізм створення алгоритму побудови елемента найкращого середньоквадратичного наближення.

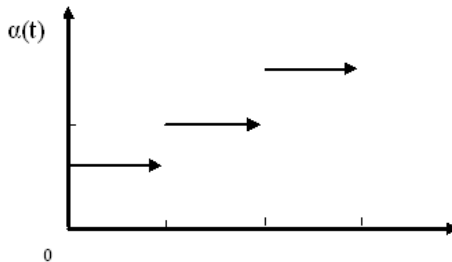


Рис. 2.3. Приклад функції стрибків



Лема 1. Нехай  $x \in L^2$ , а  $\Phi_0 \in H_n \subseteq L^2$  – елемент найкращого середньоквадратичного наближення. Тоді  $\langle \Phi_0, \Phi_n \rangle = 0, \forall \Phi_n \in H_n$ .

Сформулюємо алгоритм побудови елемента найкращого середньоквадратичного наближення. Нехай  $x \in L^2(a, b)$ ,  $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$  – лінійно-незалежна система базисних функцій.  $H_n \in L^2(a, b)$  – лінійна оболонка, натягнута на систему з  $n$  базисних функцій  $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ . Будемо шукати елемент найкращого середньоквадратичного наближення у вигляді

$$\Phi_0 = \sum_{i=0}^n C_i \varphi_i, \Phi_0 \in H_n. \quad (2.7)$$

З леми випливає, що  $\langle \Phi_0, \varphi_k \rangle = 0, k = 0, \dots, n$ . Підставивши вираження для  $\Phi_0$ , після деяких очевидних перетворень одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів  $C_i$ :

$$\sum_{i=0}^n \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle C_i = \langle \Phi_0, \varphi_k \rangle, k = 0, \dots, n \quad (2.8)$$

Якщо  $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$  – лінійно-незалежна ортонормована система базисних функцій, то  $\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \delta_{ik}$ , де  $\delta_{ik}$  – дельта функція Кронекера. Тоді із системи (2.8) відразу виходить рішення  $C_i = \langle \Phi_0, \varphi_i \rangle$ . Підставляючи це в (2.7) одержуємо, що елемент найкращого середньоквадратичного наближення має вигляд відрізка ряду Фур'є:

$$\Phi_0 = \sum_{i=0}^n \langle \Phi_0, \varphi_i \rangle \varphi_i$$

Якщо ж  $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$  – повна ортонормована система, тоді

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$$

і відповідно

$$f - \Phi_0 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тобто, у гільбертовому просторі послідовність елементів найкращого середньоквадратичного наближення за повною ортонормованою системою базисних функцій сходиться до  $x(t)$ .

Набір коефіцієнтів  $C_i$ , що визначає елемент найкращого середньоквадратичного наближення, можна розглядати як спектр сигналу  $x(t)$ . З цього погляду коефіцієнти розглядають як функцію дискретної змінної і позначають  $X$ . Говорять про пряме і зворотне операційне перетворення. Перепишемо вираз (2.7) і систему (2.8) у матричному вигляді. Нехай  $\vec{S}$  – вектор базисних функцій  $\vec{S}^T = \langle \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ ;  $\vec{X}$  – система коефіцієнтів елемента найкращого середньоквадратичного наближення. Введемо матрицю  $\mathbf{W} = \{w_{ij}\}_{i,j=0}^n$ :

$$w_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_a^b \varphi_i \varphi_j dt. \quad (2.9)$$

Введемо вектор  $\vec{Q}$ :

$$\vec{Q} = \left( \int_a^b x \vec{S} dt \right). \quad (2.10)$$

Тоді рівняння (2.8) перепишеться у вигляді:

$$\mathbf{W} \cdot \vec{X} = \vec{Q}. \quad (2.11)$$

Очевидно, якщо система базисних функцій лінійно незалежна, то існує матриця  $\mathbf{W}^{-1}$  і коефіцієнти елемента найкращого середньоквадратичного наближення визначаються за формулою:

$$\vec{X} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \vec{Q}. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) утворює пряме операційне перетворення, ставить у відповідність сигналові  $x(t)$ , як функції безперервної змінної  $t$ , вектор коефіцієнтів  $\vec{X}$ , елементи якого можна розглядати як функцію дискретної змінної  $i$ , яка утворює операційний простір. Вектор  $\vec{X}$  називають також *апроксимуючим поліноміальним*

спектром (АПС). Позначимо елемент найкращого середньоквадратичного наближення або апроксимуючий поліном через  $x_a(\cdot)$ . Формула (2.7) переписеться як

$$x_a(\cdot) = \sum_{i=0}^n X(\cdot) s_i(\cdot) = \bar{X}^T \cdot \bar{S}(\cdot). \quad (2.13)$$

Формула (2.13) фактично є зворотним операційним перетворенням, що виконує перехід від функції дискретного аргументу  $X(\cdot)$  (з операційної області) до апроксимації сигналу  $x_a(\cdot)$ .

#### 2.1.4. Поліноміальна апроксимація

У прикладному математичному аналізі і моделюванні широко застосовуються методи і способи наближення, апроксимації функцій і сигналів [7]. Найчастіше апроксимація здійснюється у вигляді рядів чи поліномів по заданій системі функцій, які називаються базисними чи утворюючими. Широко відомі апроксимації функцій степеневими чи тригонометричними рядами і поліномами. В залежності від цілей моделювання чи обробки сигналів на перший план виступають різні властивості апроксимаційних перетворень: стиск інформації, фільтруючі властивості, можливість наступної обробки в символній формі, операційні властивості та ін.

Математичне моделювання динамічних систем і систем керування динамічними процесами активно використовує спектральні й операційні представлення, в основі яких також лежать поліноміальні апроксимації.

Характерною рисою всіх методів є заміна інтегро-диференціальної математичної моделі в області одного аргументу, наприклад  $t$ , еквівалентною алгебраїчною моделлю в операційній області, що істотно спрощує рішення задач аналізу, розрахунку, ідентифікації для складних нелінійних динамічних систем.

Нехай сигнал  $x(t)$  заданий на інтервалі зміни аргументу  $[0, T]$ . Кожний апроксимаційний підхід спирається на систему базисних функцій  $\{s_i(\cdot)\}_{i=0}^n$ , на основі якої будується апроксимуючий поліном (2.13).

Система коефіцієнтів поліному (2.13), знаходиться з умови мінімізації однієї з норм функції помилки  $\|x(t) - x_a(t)\|$  і для середньоквадратичної норми визначається формулою

$$\vec{X} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \left[ \int_0^T x(t) \cdot \vec{S}(t) dt \right] \quad (2.14)$$

Формула (2.14) утворює пряме операційне перетворення, що ставить у відповідність сигналу  $x(t)$  як функції  $t$  вектор апроксимуючого поліноміального спектру (АПС)  $\vec{X}$ , елементи якого можуть розглядатися як функції дискретного аргументу  $i$  (номер елемента), утворюючого операційний простір. Формула (2.13) фактично є зворотним операційним перетворенням, і здійснює перехід від функції дискретного аргументу  $X(i)$  (з операційної області) до апроксимації сигналу  $x_a(t)$  (в область аргументу сигналу  $t$ ).

Позначимо помилку наближення  $\Delta(t) = s(t) - s_a(t)$  на інтервалі  $[0, T)$ .

Є такі види критеріїв наближення функцій:

1. Наближення в кожній точці інтервалу:

$$\Delta(t) = 0.$$

2. Рівномірне наближення по мінімаксному критерію на інтервалі  $[0, T)$ :

$$|\Delta(t)|_{\max} \rightarrow \min.$$

3. Наближення майже усюди на інтервалі  $[0, T)$ :

$$\Delta(t) = 0, \text{ крім окремих точок.}$$

4. Наближення в середньому на інтервалі  $[0, T)$ :

$$\Delta_{cp}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T |\Delta(t)| dt \rightarrow \min.$$

5. Мінімізація середньоквадратичної помилки (потужності помилки):

$$\Delta_p(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta^2(t) dt.$$

6. Наближення при мінімальній енергії помилки:

$$\Delta_E(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \Delta^2(t) dt}.$$

Останні два критерії враховують інтегральний ефект – помилку, накопичену на всьому інтервалі визначення сигналу, і в ряді додатків краще відповідають фізичному змісту досліджуваних явищ. Теорія, побудована на цих явищах, має найбільш простий і закінчений вид. Якщо ряд  $s_a(t)$  збігається до  $s(t)$  рівномірно, то він збігається майже усюди, а також по енергії і потужності помилки. Зі збіжності по енергії помилки впливає середньоквадратична збіжність, а також збіжність у середньому.

*Метод найменших квадратів.* Визначення апроксимуючих спектрів з умови максимально можливого наближення апроксимації  $x_a(t)$  до сигналу  $x(t)$  є складною оптимізаційною задачею. Для спрощення рішення цієї задачі на практиці одержали найбільше поширення ортогональні системи утворюючих функцій.

Функція помилки апроксимації сигналу  $x(t)$  поліномом (2.13) визначається як

$$\delta(t) = x(t) - \tilde{x}(t). \quad (2.15)$$

Задача визначення апроксимуючого спектра, що забезпечує максимально можливе наближення апроксимації (2.13) до сигналу, може бути сформульована як задача мінімізації норми (2.15) на інтервалі  $[0, T]$  шляхом вибору елементів  $X(i)$ . Як норми помилок найчастіше використовують середньоквадратичну норму

$$\frac{1}{T} \int_0^T r(t) \cdot \delta^2(t) dt, \quad (2.16)$$

чи умови

$$\int_{t_i}^{t_j} r(t) \cdot \delta(t) dt = 0, \quad (2.17)$$

де  $[t_i, t_j]$  – лінійно-незалежні,  $r(t)$  – вагова функція.

Для квадратичної форми (2.16) умови мінімізації приводять до наступного виразу:

$$\sum_{i=0}^{m-1} X(i) \cdot \int_0^T r(t) \cdot s_i(t) \cdot s_j(t) dt = \int_0^T x(t) \cdot r(t) \cdot s_i(t) dt. \quad (2.18)$$

Вираз (2.18) можна записати у матричній формі (2.11), де елементи операційної матриці спектра  $\mathbf{W}$  й операційного вектора спектра  $\vec{Q}$  визначаються по формулах:

$$\omega_{ij} = \int_0^T r(t) \cdot s_i(t) \cdot s_j(t) dt, \quad i, j := 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.19)$$

$$q_i = \int_0^T r(t) \cdot x(t) \cdot s_i(t) dt \quad (2.20)$$

Розв'язок (2.11) приводить до знаходження вектора  $\vec{X}$  (2.12).

Через залежність елементів матриці  $\mathbf{W}$  від системи утворюючих функцій і вагової функції (2.19), для кожного конкретного випадку незалежно від сигналу  $x(t)$ , обернена матриця  $\mathbf{W}^{-1}$  може бути визначена задалегідь.

Передбачається, що система базисних функцій  $s(t)$  складаються з лінійно-незалежних функцій, що визначає особливість операційної матриці  $\mathbf{W}$ . Сигнал  $x(t)$  повинний бути інтегрованим в добутках з кожною з базисних функцій для того, щоб існував інтеграл (2.20). Ортогональність функцій, що утворюють базисну систему, в загальному випадку не потрібна. Для ортонормованих систем базисних функцій матриця  $\mathbf{W}$  вироджується в одиничну, а вектор АПС стає рівним операційному вектору  $\vec{Q}$ .

*Метод рівних площ.* Незважаючи на рідке використання методу рівних площ, заснованого на нормі (2.17), цей метод має особливості, які спрощують апаратну реалізацію. Мається на увазі те, що перетворення АПС не вимагає використання операцій множення сигналів і базисних функцій. Розглянемо формули для побудови АПС цим методом.

Метод заснований на визначенні елементів вектора АПС з умови рівності нулю інтеграла функції помилки по системі незалежних під інтервалів зміни аргументу:

$$\int_{t_k}^{t_i} r(t) \cdot \left[ \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{X}(i) \cdot s_i(t) - x(t) \right] dt = 0. \quad (2.21)$$

Зробивши в (2.21) перетворення, одержимо

$$\sum_{i=0}^m \tilde{X}(i) \cdot \int_{t_k}^{t_i} r(t) \cdot s_i(t) dt = \int_{t_k}^{t_i} r(t) \cdot x(t) dt. \quad (2.22)$$

Вираз (2.22) може бути записаний в матричній формі (2.11), якщо визначити систему підінтервалів  $t_k^1, t_i^1$ .

Приклади можливих систем підінтервалів для випадку розбиття інтервалу  $T$  на  $m$  рівних частин:

- а)  $\left[ 0, \frac{i \cdot T}{m-1} \right]$
- б)  $\left[ \frac{(i-1) \cdot T}{m-1}, T \right]$
- в)  $\left[ \frac{(i-1) \cdot T}{m-1}, \frac{i \cdot T}{m-1} \right]$
- г)  $\left[ \frac{(i-1) \cdot T}{m-1}, \frac{(i+1) \cdot T}{m-1} \right]$
- д)  $\left[ T - \frac{(i+1) \cdot T}{m-1}, T - \frac{(i-1) \cdot T}{m-1} \right]$

При апроксимації сигналу для випадків (а)-(в) ми одержимо ті самі результати. Для систем підінтервалів (г)-(д), що мають меншу розмірність, результати будуть відрізнятися від попередніх, але будуть рівні між собою.

Таким чином, результат методу рівних площ однаковий для всіх систем підінтервалів однакової розмірності, побудованих на тому самому розбитті відрізка.

## 2.2. Системи базисних функцій

Властивості апроксимаційних методів залежать від типу системи базисних функцій [7]. На системи базисних функцій накладаються такі загальні вимоги:

1. Лінійна незалежність функцій.

2. Упорядкованість функцій. Для будь-якої пари функцій завжди можна визначити (за показником степеня, індексом, коефіцієнтом, іншим ознакам), яка з них попередня, а яка наступна.

3. Скінченність середньої потужності на інтервалі визначення, тобто можливість інтегрування із квадратом.

4. Ортогональність і нормованість (вимога не обов'язкова).

5. Повнота.

Найбільш простою системою базисних функцій є система степеневих функцій  $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ . Перевагою цієї системи є зручність і простота обчислення значень базисних функцій у будь-якій точці. Ця система має властивість лінійної незалежності і повноти. Однак, вона не є ортонормованою, хоча її (як і будь-яку іншу лінійно-незалежну систему) можна ортогоналізувати і нормувати за допомогою процесу ортогоналізації. Практичне застосування цієї системи при використанні методів середньоквадратичного наближення обмежено, оскільки у цьому випадку матриця  $\mathbf{W}$  є погано обумовленою матрицею. У результаті застосування до системи степеневих функцій процесу ортогоналізації виходить система поліномів Лежандра.

### 2.2.1. Ортогональні системи базисних функцій

Дві функції називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt = 0.$$

Вони в багатьох випадках є найбільш зручними для застосування, оскільки завдяки властивості ортогональності істотно спрощуються формули методів апроксимації [7].

Розглянемо деякі системи ортогональних функцій.

1. Система функцій  $\{e^{ikx}\}_{k=0}^{\infty}$  є повною ортогональною системою на інтервалі  $[0, \pi)$  (рис. 2.4, а). Ця система є неперіодичною. Система не нормована.

2. Система функцій  $\{e^{ikx}\}_{k=0}^{\infty}$  є повною ортогональною системою на інтервалі  $[0, \pi)$  (рис. 2.4, б). Ця система є неперіодичною. Система не нормована.



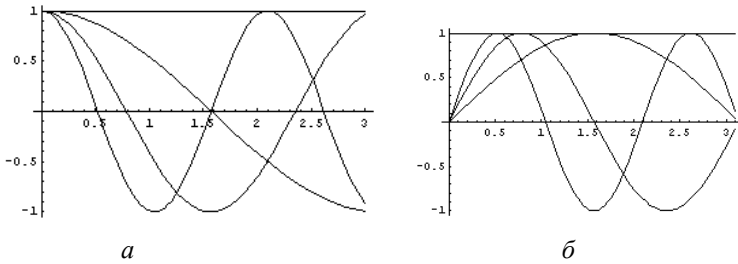


Рис. 2.4. Система функцій:  $a - \cos kx$ ;  $b - \sin kx$

3. Разом обидві системи  $\cos kx$  й  $\sin kx$  утворюють складну систему, що буде повною й ортогональною системою на  $[-\pi, \pi)$  (рис. 2.5). Окремо, і  $\cos kx$ , і  $\sin kx$  є ортогональними системами на  $[-\pi, \pi)$ , але вони не повні, оскільки  $\cos kx$  складається тільки з парних функцій, а  $\sin kx$  – тільки з непарних.

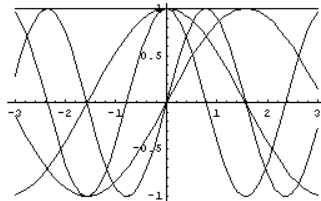


Рис. 2.5. Складена система функцій  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$

4. Два прямокутних імпульси, що не перекриваються один з одним, є взаємно ортогональними. Тому система прямокутних імпульсів довжиною  $\Delta t = T/N$ , приставлених один до одного так, що вони заповнюють весь інтервал, буде ортогональною системою. При  $\Delta t \rightarrow 0$ , а  $N \rightarrow \infty$  ця система буде повною для будь-якого неперервного сигналу.

Якщо перейти від прямокутних імпульсів до одиничних  $\delta(t - \tau)$ , положення яких визначається зсувом у часі на  $m\Delta t = \tau$ , то при  $\Delta t \rightarrow 0$  та  $m \rightarrow \infty$  така система буде повною ортогональною системою на будь-якому часовому інтервалі.

Деякі системи базисних функцій можна одержати як рішення диференціального рівняння другого порядку. У загальному випадку це рівняння має вигляд:

$$f_2 \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + f_1 \left( \frac{dw}{dx} + f_0 w \right) = 0. \quad (2.23)$$

Загальний розв'язок цього рівняння відшукується у вигляді:  $w(x) = Au(x) + Bv(x)$ , де лінійно-незалежні частини рішення  $u(x)$  та  $v(x)$  називаються розв'язками 1-го та 2-го роду, відповідно. Розв'язок 1-го та 2-го роду разом або окремо можуть утворювати лінійно незалежні системи базисних функцій.

Так, якщо покласти  $f_2(x) \equiv 1; f_1(x) = 0; f_0(x) = n^2$ , де  $n$  приймає цілі невід'ємні значення, то одержимо гармонічне рівняння, що породжує системи:

$$\begin{aligned} u_n(x) & \stackrel{\text{def}}{=} \cos nx \quad n \neq 0; \\ v_n(x) & \stackrel{\text{def}}{=} \sin nx \quad n \neq 0; \\ v_0(x) & \stackrel{\text{def}}{=} A \cos nx + B \sin nx \quad n = 0. \end{aligned}$$

Якщо прийняти в (2.23)  $f_2(x) \equiv 1; f_1(x) = 0; f_0(x) = g - 2h \cos 2x$ , де  $g, h$  – постійні і  $h \neq 0$ , то одержимо рівняння Мат'є. Частинне рішення цього рівняння являє собою систему функцій Мат'є  $\mathcal{E}_n(t, h)$ ,  $\mathcal{S}_n(t, h)$ , що є повною й ортогональною на  $[0, \pi)$ .

Якщо в рівнянні (2.23) прийняти  $f_2(x) \equiv 1; f_1(x) = 0; f_0(x) = g^2 - \frac{g^2}{x^2}$ , де  $g$  – константа, а  $n$  приймає цілі невід'ємні значення, то одержимо рівняння Беселя. Його частинним розв'язком 1-го роду є функція від добутку  $gx$ , що називається *функцією Беселя*  $J_n(gx)$ . Нехай  $g_k$  – корені рівняння  $J_n(g_k x) = 0$ . Тоді система функцій Беселя  $\sqrt{x} J_n(g_k x)$  є повною і ортогональною з ваговим множником  $\gamma(x) = \sqrt{x}$  системи на інтервалі  $[0, 1)$ . Кожному фіксованому значенню  $n$  відповідає нова ортогональна система. Отже, система функцій Беселя є двопараметричною системою.

Частинними розв'язками лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку є, так звані, ортогональні багаточлени. Одночасно, їх можна одержати, застосовуючи процес ортогоналізації з різними ваговими множниками  $\gamma(x)$  на деяких інтервалах до системи степеневих

функцій. Звичайно, ортогональні багаточлени задаються за допомогою рекурентних формул, що виходять з диференціальних рівнянь.

*Уолша - подібні базисні функції.* Останнім часом у зв'язку з розвитком електронно-обчислювальних засобів усе більше уваги приділяється системам базисних функцій, таких як функції Хаара, Радемахера й Уолша.

*Функції Радемахера:*

$$r_n(x) = \text{sign}(\sin 2^n \pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Дана система функцій визначена на інтервалі  $[-1/2, 1/2)$ . Функції є взаємно ортогональними. Система функцій є неповною, оскільки усі функції непарні (рис. 2.6).

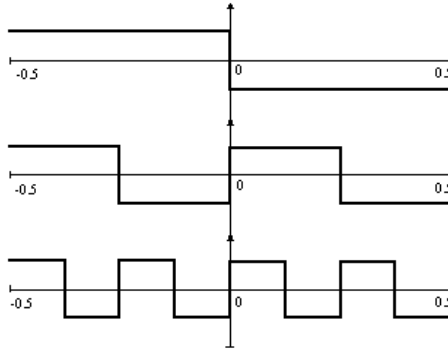


Рис. 2.6. Система функцій Радемахера

Система функцій Уолша  $\{\psi_m(x)\}$  є природним розширенням системи функцій Радемахера. Вона повна й ортогональна на інтервалі  $[-1/2, 1/2)$ . Функції Уолша утворюються як результат перемноження функцій Радемахера. Множину функцій Уолша звичайно розділяють на три групи, які відрізняються порядком розміщення окремих функцій у системі. Функції можна упорядкувати по Уолшу (за частотою), по Пелі (діадичне упорядкування), по Адамару (природне упорядкування) та ін. Система функцій Уолша, упорядкована за частотою, показана на рис. 2.7.

Система функцій Уолша має такі властивості:

- періодичність;

- повнота (складається з парних і непарних функцій);
- функції є кусково-неперервними.

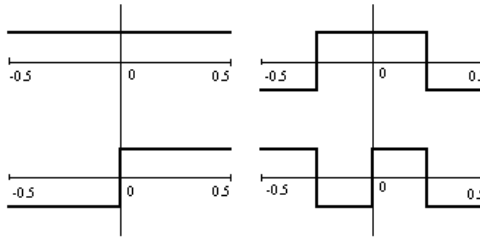


Рис. 2.7. Система функцій Уолша

### 2.2.2. Ортонормовані системи функцій

Якщо на відрізьку задана нескінченна система функцій, які ортогональні одна одній і володіє одиничними нормами:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j, \end{cases}$$

то такі функції утворюють ортонормований базис.

Розглянемо деякі ортонормовані системи функцій.

1. Повною ортогональною системою на  $[-\pi, \pi)$ , або на будь-якому іншому інтервалі довжиною  $2\pi$  є система комплексних експоненціальних функцій  $e^{ikx}$   $k \in \mathbb{Z}$   $= \dots, e^{-i2x}, e^{-ix}, 1, e^{ix}, e^{2ix}, \dots$  [7].

Ця система до того ж є нормованою, оскільки

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx} \overline{e^{iqx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-q)x} dx = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases}$$

Система є періодичною з періодом  $2\pi$ . Оскільки  $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ , то експоненціальна система є спорідненою до складеної системи  $\{\cos kx, \sin kx\}$ .

2. Серед ортонормованих функцій розглядають також нормовані багаточлени Чебишева  $\overline{T}_n(x) = 2^{n-1} T_n(x)$ . За рахунок заміни змінних багаточлени Чебишева можна поширити на будь-який інтервал  $[a, b]$ :

$$\overline{T}_n^{[a,b]}(x) = \overline{T}_n\left(\frac{2}{b-a}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)\right).$$

Нормовані багаточлени Чебишева для довільного інтервалу  $[a, b]$  вводяться таким чином:

$$\bar{T}_n^{[a,b]}(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n T_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

3. Багаточлени Лагера  $L_n(x)$ . Цей багаточлен утворюється з диференціального рівняння:

$$x \frac{d^2 w}{dx^2} + (1-x) \frac{dw}{dx} + nw = 0$$

Інтервал ортогоналізації  $[0, \infty)$  і ваговий множник:  $\gamma(x) = e^{-x}$ .

Ортогональність і нормування:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{n!}, & m = n \end{cases}$$

Рекурентна формула:  $L_{n+1}(x) = (n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$

4. Багаточлени Лежандра  $P_n(x)$  утворюється із диференціального рівняння:

$$(1-x^2) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2x \frac{dw}{dx} + n(n+1)w = 0$$

Інтервал ортогоналізації  $[-1, 1]$  і ваговий множник:  $\gamma(x) = 1$ .

Ортогональність і нормування:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

Рекурентна формула:  $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{1}{n+1} P_{n-1}(x)$

5. Багаточлени Ерміта  $H_n(x)$ . Диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - 2x \frac{dw}{dx} + 2nw = 0$$

Інтервал ортогоналізації  $(-\infty, \infty)$  і ваговий множник:  $\gamma(x) = e^{-x^2}$ .

Ортогональність і нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & n = m \end{cases}$$

Рекурентна формула:  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

### 2.2.3. Системи ортогональних поліномів

Системи базисних функцій, які є неперервними та у яких енергія функції розподілена на всьому інтервалі апроксимації, називаються глобальними. Визначення коефіцієнтів апроксимуючих поліномів у цих випадках виконується шляхом інтегрування сигналу на усьому діапазоні зміни аргументу. Це призводить до запізнення при апроксимації на величину, яка перевищує цей діапазон. Також при апроксимації сигналів на достатньо великих інтервалах зміни аргументу (інтервалах спостереження) для забезпечення необхідної точності апроксимації необхідно значно збільшувати порядок базисної системи функцій. Використання методів апроксимації з глобальними базисними системами у системах реального часу викликає труднощі. Уникнути таких труднощів можна шляхом введення локальних аргументів та локальних базисних систем функцій. Найбільше розповсюдження отримали локальні імпульсні базисні системи функцій [7, 9, 11]. Найпростішою з таких систем є система блочно-імпульсних функцій. Ця система основана на використанні імпульсних функцій, які мають вигляд прямокутних імпульсів, зсунутих один від одного на величину тривалості імпульсу. Діапазон зміни аргументу сигналу (діапазон апроксимації) розділяється на  $m$  підінтервалів і на отриманій сітці вводиться система згаданих імпульсних функцій. Аналітичний вираз системи блочно-імпульсних функцій має вигляд:

$$v(i, m, h) = \sigma(-1) \sigma(-ih) \prod_{i=1}^m, \quad (2.24)$$

де  $\sigma(-1)$  – функція одиничного стрибка, яка дорівнює 0 при від'ємних значеннях аргументу і 1 у протилежному випадку,  $h = T/m$  – крок сітки аргументу (довжина під інтервалу). Подібні базисні системи є ортогональними, а енергія базисної функції зосереджена в області аргументу (у межах кроку сітки  $h$ ).

Властивості функцій базисної системи дозволяють замінити інтегрування у межах усього інтервалу зміни аргументу  $T$  інтегруванням у межах кроку сітки  $h$ . Знаходження блочно-імпульсного спектру сигналу здійснюється шляхом інтегрування сигналу у межах  $h$ , а апроксимація сигналу має вигляд кусково-постійної функції вигляду:

$$x_a \leftarrow = \sum_{i=1}^m X_i v_i \leftarrow.$$

Підвищення точності апроксимації можна досягнути розширенням системи базисних функцій, вводячи підсистему зсунутих на величину кроку лінійних імпульсів. Вираз такої підсистеми має вигляд:

$$w \leftarrow i, m, h \leftarrow = \left\{ \left( \frac{2t}{h} - 1 - 2 \leftarrow - 1 \right) v \leftarrow i, m, h \leftarrow \right\}_{i=1}^m. \quad (2.25)$$

Відповідна (2.25) функція змінюється лінійно від  $-1$  до  $+1$  у межах  $i$ -го кроку  $h$  і дорівнює нулю за його межами.

Апроксимація сигналів у такій розширеній системі базисних функцій є кусково-лінійною та найкращою у середньоквадратичному смислі. Систему коефіцієнтів апроксимуючого полінома називають апроксимуючим імпульсним спектром сигналі (АІС).

Апроксимація сигналу за розширеною системою базисних функцій визначається виразом:

$$x_a \leftarrow = \sum_{i=1}^m \leftarrow K_{0i} v_i \leftarrow + X_{1i} w_i \leftarrow.$$

Подальше збільшення точності апроксимації може бути досягнуте шляхом введення підсистеми імпульсних функцій, які представляють собою зсунуті на крок сітки імпульси параболічної форми:

$$u \leftarrow i, m, h \leftarrow = \left\{ \left( 6 \left( \frac{t}{h} \right)^2 - \frac{6 \leftarrow i - 1 \leftarrow}{h} + 6i^2 - 6i + 1 \right) v \leftarrow i, m, h \leftarrow \right\}_{i=1}^m.$$

Відповідно зміниться вираз для апроксимаційного полінома:

$$x_a \approx \sum_{i=1}^m X_{0i} v_i + X_{1i} w_i + X_{2i} u_i.$$

Наведені вище три локальних базисних системи є зручними для їх використання у аналізі та моделюванні за такими причинами:

- усі підсистеми та система у цілому є ортогональними системами функцій, що суттєво спрощує вирішення задачі апроксимації сигналів,

- визначення коефіцієнтів апроксимуючих поліномів відбувається шляхом інтегрування сигналу, помноженого на відповідну базисну функцію, причому інтегрування здійснюється тільки у межах кроку сітки  $h$ ,

- апроксимації сигналів у залежності від вигляду базисної системи є кусково-постійними, кусково-лінійними або кусково-параболічними функціями,

- при апроксимації одного й того ж сигналу послідовно базисними системами функцій, які розширюються, (спочатку блочно-імпульсною, потім на основі зміщених поліномів Лежандра першого та другого порядків) коефіцієнти апроксимуючого полінома, які відповідають блочно-імпульсній підсистемі, не змінюють свої значень при розширенні базисної системи до зміщених поліномів Лежандра першого порядку, і потім, коефіцієнти апроксимуючого поліному, які відповідають системі базисних функцій на основі зміщених поліномів Лежандра, не змінюють своїх значень при розширенні базисної системи до зміщених поліномів Лежандра другого порядку,

- коефіцієнти апроксимуючих поліномів, які відповідають блочно-імпульсним функціям за фізичним смислом є середніми значеннями сигналів на відповідному підінтервалі значення аргументу; коефіцієнти, які відповідають другій та третій підсистемам базисних функцій за фізичним смислом є відповідно середніми значеннями першої та другої похідної сигналу на кроці сітки,

- якщо сигнал є реалізацією якого-небудь динамічного процесу (узагальненого руху), то коефіцієнти апроксимуючого поліному на кроці сітки пропорційні середнім значенням узагальнених переміщення, швидкості та прискорення.



### 2.3. Апроксимація неперервних сигналів за методом найменших квадратів

Нехай сигнал  $x(t)$  заданий на інтервалі  $(a \leq t \leq b)$  зміни аргументу  $t$  [7, 9, 11]. Припустимо також, що на цьому ж інтервалі задана система лінійно-незалежних базисних функцій

$$s_i(t) \quad i=1, \dots, m,$$

яка формує узагальнений поліном:

$$x_a = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t).$$

Для того, щоб цей поліном апроксимував сигнал, коефіцієнти полінома повинні обиратися з умови мінімізації норми функції помилки апроксимації:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= x(t) - x_a(t) = x(t) - \sum_{i=1}^m X_i s_i(t) \\ \|\varepsilon(t)\| &\rightarrow \min(X_i). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для середньоквадратичної норми отримаємо наступну умову:

$$\mu = \int_a^b \left[ x(t) - \sum_{i=1}^m X_i s_i(t) \right]^2 dt \rightarrow \min(X_i) \quad (2.27)$$

Умова мінімізації середньоквадратичної норми функції помилки приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів полінома:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial X_j} &= 0, \\ \sum_{i=1}^m w_{ij} X_i &= q_j, \\ j &:= 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.28)$$

де

$$w_{ij} = \int_a^b s_i(t) s_j(t) dt,$$

$$q_j = \int_a^b x(t) s_j(t) dt. \quad (2.29)$$

Задача апроксимації сигналів, яка задана виразами (2.28, 2.29) у матрично-векторній формі має вигляд:

$$\mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{Q}},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mm} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

де  $\mathbf{W}$  – операційна матриця апроксимуючого поліноміального спектра,  $\bar{\mathbf{Q}}$  – операційний вектор спектра,  $\bar{\mathbf{X}}$  – апроксимуючий поліноміальний спектр сигналу.

Розв'язок задачі знаходження апроксимуючого поліноміального спектра сигналу у матрично-векторній формі визначається виразом:

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Q}}. \quad (2.31)$$

#### 2.4. Мінімізація функції помилки

Нехай необхідно сигнал  $x(t)$  наблизити поліномом  $\Phi(t)$ , тобто розглянути задачу апроксимації [7]. Різницю функції  $x(t)$  та апроксимуючого полінома  $\Phi(t)$  називають *функцією помилки* або *нев'язкою*:

$$x(t) - \Phi(t) = \delta(t). \quad (2.32)$$

Для того, щоб апроксимуючий поліном забезпечив максимально можливе наближення апроксимації до сигналу, коефіцієнти апроксимуючого полінома обираються з умови мінімізації норми функції помилки.

Коефіцієнти апроксимуючого полінома будуть залежить від вибору критерію функції помилки, так як різні критерії можуть мати мінімуми, які відрізняються за значенням та положенням один від одного.

Розглянемо види критеріїв:

- модульний критерій  $\sum_{i=0}^n |x(t) - \Phi(t)| \rightarrow \min$  ;
- квадратичний критерій  $\sum_{i=0}^n [x(t) - \Phi(t)]^2 \rightarrow \min$  ;
- показниковий критерій  $\sum_{i=0}^n |x(t) - \Phi(t)|^p \rightarrow \min$  ;
- мінімакський критерій  $\max |x(t) - \Phi(t)| \rightarrow \min$  ;
- зважений критерій, який об'єднує усі попередні критерії  $\left[ \sum_{i=0}^n |x(t) - \Phi(t)|^p \right]^\mu \rightarrow \min$  .

З курсу вищої математики відомо, що функція декількох змінних досягає мінімуму, якщо дорівнюють нулю всі часткові похідні даної функції. Тобто при розв'язуванні задачі знаходження коефіцієнтів, отримуємо систему рівнянь, кожне з яких описує відповідну часткову похідну, яка прирівняна до нуля.

## 2.5. Апроксимація дискретних сигналів

При вимірюванні величин, які характеризують досліджуваний процес, при обробці результатів експериментальних досліджень і в ряді інших випадків часто приходиться мати справу з множиною відліків сигналів, які відносяться до різних моментів часу або різних значень просторових координат [9, 11]. Таким чином, сигнал може бути заданим у формі таблиці значень (табл. 2.1).

Поставимо задачу апроксимувати заданий сигнал узагальненим поліномом порядку  $m$  в системі базисних функцій

$$s_i(t) \quad i=1, \dots, m:$$

$$x = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t) . \quad (2.33)$$

Таблиця 2.1

$k$	1	2	...	$r$
$t_k$	$t_1$	$t_2$	...	$t_r$
$x_k$	$x_1$	$x_2$	...	$x_r$

Підставимо у вираз апроксимуючого полінома (2.33) значення відліків з таблиці:

$$x_k = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t_k), \quad k := 1, \dots, r \quad (2.34)$$

Вираз (2.34) може розглядатися як система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів апроксимуючого полінома. Матриця коефіцієнтів цієї системи рівнянь визначається виразом:

$$w_{ki} = s_i(t_k). \quad (2.35)$$

Оскільки кількість відліків сигналу і порядок узагальненого полінома, у загальному випадку, не рівні, операційна матриця спектра буде прямокутною, і розв'язок цієї системи рівнянь повинен знаходитися з допомогою псевдооберненої матриці. Як відомо, якщо порядок апроксимуючого полінома менше числа відліків сигналу ( $m < r$ ), система рівнянь є перевизначеною, і розв'язок, отриманий з допомогою псевдооберненої матриці, буде обертати в мінімум суму квадратів помилок в рівняннях, отриманих при підстановці в них значень відліків. Якщо порядок апроксимуючого полінома рівний числу відліків сигналу ( $m = r$ ), то розв'язок системи рівнянь буде визначати систему коефіцієнтів єдиного апроксимуючого полінома, що проходить через усі точки відліків. Якщо порядок апроксимуючого полінома більше числа відліків ( $m > r$ ), то система рівнянь буде недовизначеною, однак, розв'язок з допомогою псевдооберненої матриці буде визначати систему коефіцієнтів апроксимуючого полінома, для якого сума квадратів цих коефіцієнтів мінімальна, а сам апроксимуючий поліном буде проходити через усі точки відліків сигналу.

### ***Питання для самоконтролю***

1. Сутність рівномірного наближення.
2. Апроксимації Паде.
3. Дайте визначення і перелічіть основні ортогональні системи базисних функцій.
4. Визначення апроксимуючого поліноміального спектру.
5. Багаточлени Лежандра.
6. Сутність апроксимації таблично заданих сигналів.

**3.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь і нерівностей, їх геометрична інтерпретація**

Безінерційні або статичні об'єкти описуються алгебраїчними рівняннями та нерівностями. У цих об'єктів відсутній фактор часу. Найпростіший випадок безінерційних моделей – це лінійні алгебраїчні рівняння та нерівності.

Розглянемо геометричну інтерпретацію математичних моделей лінійних об'єктів. З метою спрощення обмежимося об'єктами на площині.

Нехай є Декартова система координат з осями  $x_1, x_2$  і задане рівняння  $a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$  [18].  $a_1, a_2$  та  $b_1$  – постійні коефіцієнти,  $x_1, x_2$  – невідомі (рис.3.1).

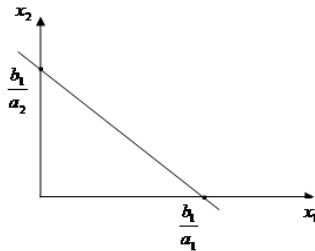


Рис. 3.1. Геометрична інтерпретація лінійного рівняння з двома невідомими

Геометричним образом цього рівняння буде пряма лінія, яку нескладно побудувати у цій системі координат. Для цього достатньо покласти  $x_1 = 0$  і тоді  $x_2 = \frac{b_1}{a_2}$ . А потім покласти  $x_2 = 0$

і знайти, що  $x_1 = \frac{b_1}{a_1}$ . Відомо, що через кожні дві токи можна провести єдину пряму лінію.

Таким чином, геометричним образом одного рівняння з двома невідомими буде пряма лінія. Причому координати будь-якої точки на цій лінії будуть задовольняти цьому рівнянню.

Розглянемо випадок, коли замість рівності у рівнянні стоїть знак нерівності, нестрогий (тобто  $\leq$ ):  $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_1$ . Геометричним образом такої нерівності буде сукупність точок площини, які задовольняють цій нерівності. І така сукупність утворює півплощину, розташовану нижче прямої. Таким чином, початок координат належить нерівності  $\leq$ . Відповідно верхня півплощина буде геометричним образом нерівності протилежного знаку. У випадку рівності точка знаходиться на прямій лінії.

Розглянемо випадок тримірного простору. У цьому випадку з'являється тримірна Декартова система координат  $XYZ$  або  $x_1x_2x_3$  (для плоского випадку) і якщо взяти одне рівняння з трьома невідомими  $x_1, x_2, x_3$ , то можна аналогічним чином побудувати геометричний образ такого рівняння. Зрозуміло, це буде вже не пряма, а площина, яка проходить через три точки, які можна знайти аналогічним чином

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1.$$

Припускаючи послідовно дві невідомі  $x_1, x_2 = 0$ , можна знайти точку перетину з віссю  $x_3$ . І аналогічно з осями  $x_1, x_2$ . З'єднавши ці точки між собою, отримаємо геометричний образ площини, яка проходить через ці характерні точки. Припускаємо, що усі коефіцієнти додатні (рис. 3.2).

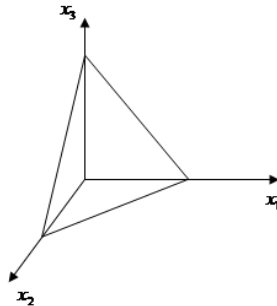


Рис. 3.2. Геометрична інтерпретація лінійного рівняння з трьома невідомими

Міркуючи аналогічним чином, отримуємо, що геометричним образом одного рівняння з трьома невідомими є площина у тримірному просторі. Геометричним образом нерівності  $\leq$  буде

півпростір, який розташований з однієї сторони від цієї площини. Геометричним образом протилежної нерівності буде півпростір, який розташований вище цієї площини.

Розглянемо випадок системи рівнянь. Розглядаючи плоский випадок, отримуємо два рівняння з двома невідомими. Кожне з цих рівнянь буде зображуватися прямою лінією. Сукупність цих двох прямих ліній можуть по-різному бути розташовані. Якщо вони перетинаються (тобто не паралельні) і не зливаються одна з одною, то вони визначають одну єдину точку, загальну для обох рівнянь. Координати цієї точки будуть розв'язком системи двох рівнянь з двома невідомими.

Якщо взяти випадок трьох невідомих, тобто випадок площин у тримірному просторі, то кожне рівняння із трьох можливих буде визначати площину. Сукупність двох площин (якщо вони не паралельні), визначить лінію перетину. Це буде пряма лінія, по якій ці площини перетинаються. Якщо додати третю площину, то у кращому випадку ця пряма перетне цю площину в одній єдиній точці і координати  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  цієї точки перетину визначать розв'язок системи трьох рівнянь з трьома невідомими. Така геометрична інтерпретація розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Система рівнянь або нерівностей можуть мати такі випадки:

- Система рівнянь може бути недовизначеною (5 невідомих і тільки 3 рівняння, які пов'язують ці невідомі). Існує степінь свободи цієї системи, тобто частина невідомих може задаватися, або змінюватися, для того щоб однозначно визначити рівняння, які залишилися;
- Кількість рівнянь більша невідомих (3 невідомих та 5 рівнянь) – перевизначена система. Цей випадок суперечливий. Тоді може не існувати жодного розв'язку;
- Класичний випадок, коли кількість рівнянь та кількість невідомих однакова. Тоді, якщо визначник системи не дорівнює нулю, то тоді існує єдиний розв'язок цієї системи рівнянь.



### 3.2. Гіперплощина

*Гіперплощиною* називається підпростір евклідова чи афінного простору з розмірністю на одиницю меншою, ніж простір, в якому вона розташована [8].

Гіперплощина у евклідовому  $n$ -мірному просторі задається лінійним рівнянням

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \mu$$

або

$$\mu = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

Наприклад, для двомірного простору гіперплощина є пряма, для трьохмірного – площина і т.д.

Гіперплощина ділить простір відповідної розмірності на два півпростори, усі точки кожного з них визначаються нерівностями. Наприклад, у випадку прямої на площині один півпростір відображає усі точки, які задовольняють нерівності

$$c_1x_1 + c_2x_2 \geq b,$$

а інший – нерівності

$$c_1x_1 + c_2x_2 < b.$$

Знак  $\geq$  показує, що у цьому випадку пряма належить першому півпростору.

Поняття гіперплощини широко використовується в аналітичних технологіях, зокрема при розв'язку задач класифікації, коли множина об'єктів, які представлені векторами у багатомірному просторі ознак, розділяється гіперплощинами на підмножини, які відповідають класам.

Поняття гіперплощини також використовуються при математичному аналізі та розв'язку різноманітних економічних задач: у лінійному програмуванні, аналізі попиту та споживання ті ін.

### 3.3. Векторно-матричні моделі лінійних безінерційних систем

Нехай задана система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Систему (3.1) можна представити у матрично-векторній формі [29]:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

де  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  – прямокутна матриця, яка складається з коефіцієнтів при невідомих;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  – вектор правої частини системи рівнянь;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  – вектор невідомих.

Для випадку більшої кількості рівнянь чи більшої кількості невідомих, поняття матриці та векторів вводяться аналогічно: таблиця розширюється по кількості стовпчиків та по кількості рядків. Кількість елементів векторів  $B$  та  $X$  також збільшується при розширенні цієї системи. У цьому випадку система лінійних алгебраїчних рівнянь записується наступним чином:

$$A \cdot X = B. \quad (3.3)$$

Матричне рівняння можна розглядати аналогічно лінійному рівнянню з одним невідомим, де  $A$  – число,  $X$  – скаляр, а число,  $B$  – також число.

У цьому випадку розв’язок рівняння (3.3) буде

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (3.4)$$

Знаходження оберненої матриці  $A^{-1}$  еквівалентно розв’язку системи рівнянь за складністю.

Розв’язок рівняння (3.3) існує у тому випадку, якщо визначник матриці  $A$  відмінний від нуля.

У тому випадку, коли система рівнянь недовизначена або перевизначена, матриця  $A$  стає прямокутною і кількість рядків не дорівнює кількості стовпчиків. Для недовизначеної системи матриця  $A$  витягнута по числу стовпчиків, а у випадку

перевизначеної системи (коли кількість рівнянь більша кількості невідомих) – вона виявляється витягнутою по числу рядків (рис. 3.3). Відомо, що для цих двох випадків обернених матриць у звичайному розумінні не існує.

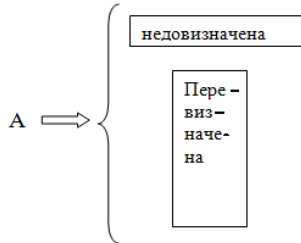


Рис.3.3. Вигляд недовизначеної та перевизначеної системи рівнянь

### 3.4. Некоректні задачі лінійної алгебри, їх роль в моделюванні безінерційних об’єктів

Теорія некоректних задач – це напрямок математики, який пов’язаний з найрізноманітнішими прикладними проблемами: інтерпретацією показів багатьох фізичних приладів, геофізичних, геологічних, астрономічних спостережень, оптимізацією управління та планування, синтезом автоматичних систем [3, 17]. Розвиток теорії некоректних задач обумовлений появою сучасної обчислювальної техніки.

Різні розділи теорії некоректних задач можуть бути віднесені до традиційних розділів математики, таким, як теорія функцій, функціональний аналіз, диференціальні рівняння, лінійна алгебра.

Поняття коректності (правильності) постановки задачі математичної фізики було сформульоване на початку століття відомим французьким математиком Адамаром. У теперішній час це поняття приводиться у навчальних посібниках з рівнянь математичної фізики чи рівнянь з частинними похідними.

Задача математичної фізики чи крайова задача для рівняння з частинними похідними називається поставленою коректно, якщо виконуються наступні умови: 1) розв’язок задачі існує; 2) розв’язок задачі єдиний; 3) розв’язок задачі безперервно залежить від даних задачі.

Сформульовані умови потребують уточнення. І розв'язок, і дані задачі розглядаються як елементи деяких функціональних просторів, а умови коректності формулюються наступним чином:

1. Розв'язок задачі існує для усіх даних, які належать деякому замкнутому простору у лінійному нормованому просторі та належить простору такого ж типу. Частіше всього підпростір є чи весь простір, чи частина простору, на якому обертається в нуль кінцевий набір лінійних функціоналів.

2. Розв'язок задачі єдиний у будь-якому аналогічному просторі.

3. Нескінченно малим варіаціям даних задач у просторі даних відповідають нескінченно малі у просторі розв'язків варіації розв'язку.

Єдиної точки зору у розумінні терміна «некоректна задача», на жаль, не спостерігається.

Розглянемо визначення некоректних задач на прикладі обернених задач.

При розв'язанні обернених задач важливу роль грає їх стійкість. Задача

$$Ay + \sigma = b \quad (3.5)$$

( $A$  – деякий оператор, не обов'язково лінійний) стійка за правою частиною, якщо малим флуктуаціям правих частин  $b$  відповідають малі флуктуації розв'язку  $y$ . Іншими словами, стійкість полягає у тому, щоб розв'язки близьких задач  $Ay + \sigma = b$  та  $Ay + \sigma = b + \delta b$  мало відрізнялися один від одного. Якщо задача спочатку є нестійкою, то розв'язувати її немає ніякого смислу, оскільки похибки алгоритмів, які накопичуються у ході розв'язку чисельними методами, без сумніву приведуть до того, що буде знайдений невірний розв'язок.

Як правило, обернені задачі характеризуються наявністю шумів, що враховано в (3.5). Припускаємо, що шум  $\sigma$  входить у схему вимірів лінійно, а оператор  $A$ , можливо нелінійний, описує фізичну модель вимірів.

У реальних задачах експериментальної фізики шум може бути доволі суттєвим. Його наявність корінним чином змінює ідеологію розв'язання обернених задач. Якщо сама задача (яка описується оператором  $A$ ) є стійкою, то існування шуму може цю

стійкість порушити. Тобто, різні (навіть такі, що дуже відрізняються) сигнали  $y_1$  та  $y_2$  можуть приводити до дуже схожим вимірам  $b_1 \approx b_2$ . Тому постає питання, чи можливо добути з вимірів корисну інформацію про сигнал, якщо наявність шуму робить задачу нестійкою? Такі задачі називаються задачами, поставленими некоректно (некоректними задачами). Для їх розв'язку розвинуті спеціальні методи, головним чином, на залученні додаткової апріорної інформації про розв'язок  $b$  та/або шум  $\sigma$ .

Необхідно відмітити, що клас некоректних задач ширший класу обернених задач. Класичний приклад некоректної задачі для рівняння у часткових похідних – це обернене рівняння теплопровідності.

Поняття некоректності ілюструють рис. 3.4 та рис. 3.5, на яких представлена спроба розв'язання оберненої задачі для моделі «сигнал-шум» в «у лоб», прямим оберненням матриці  $A$ .

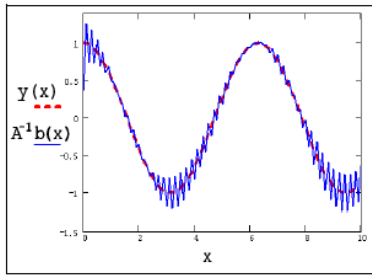


Рис. 3.4. Вихідний сигнал та «реконструкція» ( $k = 20, \sigma = 10^{-5}$ )

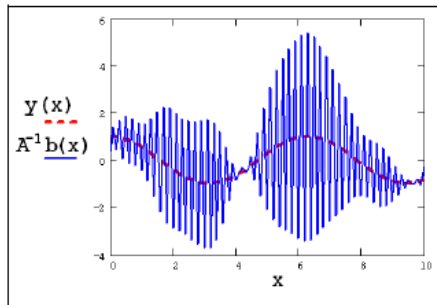


Рис.3.5. Вихідний сигнал та «реконструкція» ( $k = 20, \sigma = 10^{-4}$ )

Дійсно, якщо помножити співвідношення (3.5) на обернену матрицю  $A^{-1}$ , а також забути про наявність шуму, то, на перший погляд, можна очікувати, що оцінка

$$y = A^{-1} \cdot b \quad (3.6)$$

дасть правильний розв'язок задачі. Але це не так. Реконструкція сигналу шляхом простого обернення матриці  $A$  виявляється вдалою лише для дуже низьких значень рівня шуму  $\sigma$  (рис.3.4), а при навіть незначному його збільшенні розв'язок  $A^{-1} \cdot b$  виявляється зовсім нефізичним (рис. 3.5). Справа, звичайно, у тому, що матриця  $A$  є погано обумовленою, і, не дивлячись на існування оберненої матриці  $A^{-1}$ , наявність навіть дуже слабкого шуму не дозволяє відшукати вірного розв'язку. Очевидно, що для отримання осмисленого результату необхідно застосовувати інші методи.

### 3.5. Прямокутна матриця

*Прямокутною матрицею* називається сукупність чисел, загалом кажучи, комплексних, розташованих у вигляді прямокутної таблиці, яка містить  $n$  рядків та  $m$  стовпчиків [18].

Прямокутна матриця записується у вигляді:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

чи, скорочено:

$$A = \left( a_{ij} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m.$$

Дві матриці називаються *рівними*, якщо рівні їх відповідні елементи.

Якщо матриця має кінцеве число рядочків та кінцеве число стовпчиків, то вона називається *кінцевою*, у протилежному випадку вона *нескінчена*.

Матриця, яка складається з одного рядочка, називається просто *рядочком*; матриця, яка складається з одного стовпчика, – *стовпчиком*; матриця  $A = \left( a_{ij} \right)$ , яка складається з одного числа,

ототожнюється з цим числом. Якщо число  $n$  рядків матриці рівне числу її стовпчиків, то матриця називається *квадратною*. У цьому випадку число  $n$  називається *порядком* матриці.

Серед квадратних матриць важливу роль грають так звані *діагональні* матриці, тобто матриці, у яких відмінні від нуля лише елементи, які стоять вздовж діагоналі. Діагональні матриці позначаються  $\mathbf{D} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  так що

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Якщо усі числа  $\alpha_i$  при цьому рівні між собою, матриця називається *скалярною*:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

і у випадку, якщо  $\alpha = 1$ , – *одиничною*:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n, \quad (3.10)$$

де  $\delta_{ij}$  так званий символ Кронекера, тобто  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ,  $\delta_{ii} = 1$ .

Якщо усі елементи матриці рівні нулю, то вона називається *нульовою*. Її позначають символом  $\mathbf{0}$ .

Переставивши у матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

рядочки зі стовпчиками, отримують так звану *транспоновану* матрицю

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Квадратна матриця  $A$  дорівнює транспонованій  $A'$  у тому і тільки в тому випадку, коли вона *симетрична*, тобто  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Очевидно, що матриця, транспонована із рядком, є стовпчик, складений з тих же елементів. Цю обставину часто використовують для зручності запису стовпчиків. Так, замість стовпчика

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ записують } \left( \begin{matrix} 4, 2, 3, 5 \end{matrix} \right)'$$

При заміні елементів матриці на комплексно-спряжені числа приходимо до *комплексно-спряженої* матриці  $\bar{A}$ . Якщо елементи матриці  $A$  дійсні, то  $\bar{A} = A$ .

Матриця  $A^* = \bar{A}'$ , комплексно-спряжена з транспонованою, називається матрицею *спряженою* з матрицею  $A$ . Очевидно, що  $(A^*)^* = A$ .

Якщо матриця  $A$  дійсна, то спряжена з нею матриця співпадає з транспонованою.

*Визначником* квадратної матриці називається многочлен, кожен член якого є добутком  $n$  елементів матриці, причому із кожного рядка та кожного стовпчика матриці у добуток входить лише один співмножник. Визначник матриці  $A$  позначається через  $|A|$ .

Будь-який визначник, рядки та стовпчики якого «укладаються» у рядки та стовпчики матриці називається *мінором* цієї матриці. Мінор порядку  $k$  матриці  $A$  є визначник  $(k-1)$ -го порядку, складений з елементів, які отримують з визначника, якщо з нього викреслити  $i$ -й рядок та  $j$ -й стовпчик.



*Рангом* матриці  $A$  називається максимальний порядок відмінних від нуля мінорів матриці. Інакше, рангом матриці називається таке число  $r$ , що серед мінорів матриці існує мінор порядку  $r$ , який не дорівнює нулю, а усі мінори порядку  $r+1$  і вище рівні нулю чи не можуть бути складені.

### 3.6. Псевдообернена матриця та псевдорозв'язок

У лінійній алгебрі вводять поняття псевдооберненої матриці.

Припустимо, що  $\epsilon$  або недовизначена, або перевизначена матриця. При цьому розмірність вектора  $B$  та розмірність вектора  $X$  не співпадають. Дійсно, у недовизначених системах рівнянь менше, ніж невідомих, тому розмірність вектора  $B$  мала, а розмірність вектора  $X$  велика. І навпаки, у перевизначених системах кількість рівнянь більша, ніж невідомих, отже розмірність вектора  $B$  буде більшою, ніж вектора  $X$ .

У матричній алгебрі існують певні правила перетворення. Є поняття транспонованої матриці – це матриця, яка отримана поворотом вихідної матриці навколо головної діагоналі, тобто коли рядочки стають стовпчиками, а стовпчики – рядочками. Її позначають по різному: або  $A^T$ , або  $A^*$  [29].

Зрозуміло, що для випадку недовизначених систем транспонована матриця буде витягнута по вертикалі, і, навпаки, для перевизначених систем транспонована матриця буде витягнута по горизонталі.

Візьмемо систему лінійних рівнянь, записану у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на транспоновану матрицю

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot B.$$

Це тотожне перетворення, яке нічого не змінює. Просто ліву та праву частину помножено на одну й ту ж матрицю. У лінійній алгебрі відома така властивість: добуток двох прямокутних матриць  $A^T \cdot A$  є квадратною матрицею. А для квадратної матриці можна знайти обернену і тоді знайти розв'язок системи рівнянь:

$$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B.$$

Сукупність  $(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$  називається *псевдооберненою* матрицею – це матриця, яка дозволяє отримати розв’язок системи. Її позначають  $A^+$ .

Псевдоінверсія реалізує розв’язок методу найменших квадратів для системи лінійних рівнянь.

Розв’язок недовизначених та перевизначених систем за допомогою псевдооберненої матриці називають *псевдорозв’язком*.

Можна записати два визначення псевдорозв’язку.

Псевдорозв’язком у випадку недовизначеної системи рівнянь є система невідомих, сума квадратів яких мінімальна. Тобто, якщо є велика множина розв’язків з цієї множини виділяється псевдорозв’язок – це одна з множин, для якої мінімально можлива сума квадратів усіх невідомих. Це начебто шукається  $n$ -мірний паралелепіпед, у якого діагональ мінімальна. Для трьохмірного випадку сума квадратів сторін – це квадрат діагоналі (просторовий паралелепіпед).

Псевдорозв’язком у випадку перевизначеної системи рівнянь є сукупність чисел, які будучі підставлені у рівняння дають мінімальну суму квадратів помилок задоволення цих рівнянь.

Припустимо, є 5 рівнянь та 3 невідомих. Підставимо систему чисел у перше рівняння. Нуль справа не отримаємо, тому що розв’язка жодного немає. Можемо праву частину перенести вліво, справа отримаємо помилку  $\varepsilon_1$ . Потім цю ж систему чисел підставляємо у друге рівняння – отримаємо помилку  $\varepsilon_2$ , а потім у третє рівняння – отримаємо помилку  $\varepsilon_3$  і т.д. Псевдорозв’язком буде така система чисел, що якщо її підставити у рівняння, вона дасть такі помилки, сума квадратів яких мінімальна.

Математичні пакети Mathematica та MATLAB (див. Додаток 1, 2) добре оперують з матрично-векторними рівняннями. У них є (зокрема у системі Mathematica) спеціальна команда PseudoInverse – операція множення на псевдообернену матрицю. Тобто, якщо є матриця  $A$  і визначити її у системі Mathematica, то командою PseudoInverse можна отримати псевдообернену матрицю  $i$ , таким чином, розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

### 3.7. Математичні моделі нелінійних безінерційних об'єктів

Математичними моделями нелінійних безінерційних об'єктів є системи нелінійних алгебраїчних рівнянь та нерівностей.

Розглянемо об'єкти на площині.

Нехай є Декартова система координат  $x_1x_2$  і задане нелінійне алгебраїчне рівняння другої степені  $a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 + 2a_4x_1 + 2a_5x_2 = b_1$ .  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  та  $b_1$  – постійні коефіцієнти,  $x_1, x_2$  – невідомі.

Геометричним образом цього рівняння буде крива другого порядку [18]. В залежності від вигляду рівняння, кривою другого порядку може бути коло, еліпс, гіпербола та парабола.

Геометричним образом рівняння вигляду  $x_1^2 + x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + b_1 = 0$  буде коло.

Геометричним образом рівняння вигляду  $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$  є еліпс (рис. 3.6, а).

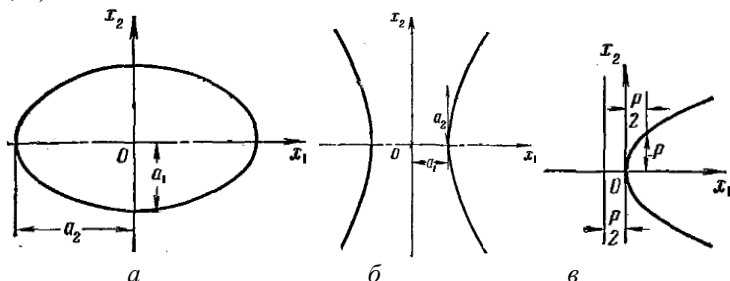


Рис. 3.6. Геометричний образ рівняння другої степені: а – еліпс; б – гіпербола; в – парабола

Геометричним образом рівняння вигляду  $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$  є гіпербола (рис. 3.6, б).

Геометричним образом рівняння вигляду  $x_2^2 = 2px_1$  є парабола (рис. 3.6, в).

Також є інші види кривих другого порядку.

Якщо замість знаку рівності у даних рівняннях буде стояти нерівність того чи іншого знаку, то геометричним образом такої нерівності буде сукупність точок площини, які задовольняють цій нерівності, тобто півплощина, розташована нижче або вище кривої в залежності від знаку нерівності.

Розглянемо геометричний образ системи нелінійних рівнянь на прикладі такої системи:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 25, \\ x_1^2 - x_2 = 8. \end{cases}$$

Графіки цих рівнянь перетинають у чотирьох точках, координати яких будуть розв'язком даної системи рівнянь (рис. 3.7).

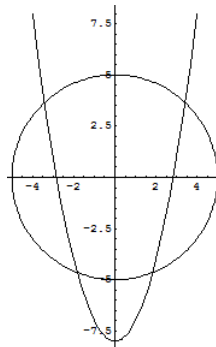


Рис. 3.7. Геометричний образ системи нелінійних рівнянь

Для випадку тримірної Декартової системи координат  $XYZ$ , загальний вигляд нелінійного рівняння, яке визначає поверхню другого порядку, є

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5xz + 2a_6yz + 2a_7x + 2a_8y + 2a_9z = b_1$$

Так само як і для випадку двомірної Декартової системи в залежності від вигляду рівняння, поверхнею другого порядку може бути сфера, еліпсоїд обертання, гіперболоїд обертання, параболоїд обертання та ін.

Розглянемо декілька типів рівнянь та їх геометричну інтерпретацію.

Геометричним образом рівняння вигляду  $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1$  є еліпсоїд обертання (рис. 3.8, а).

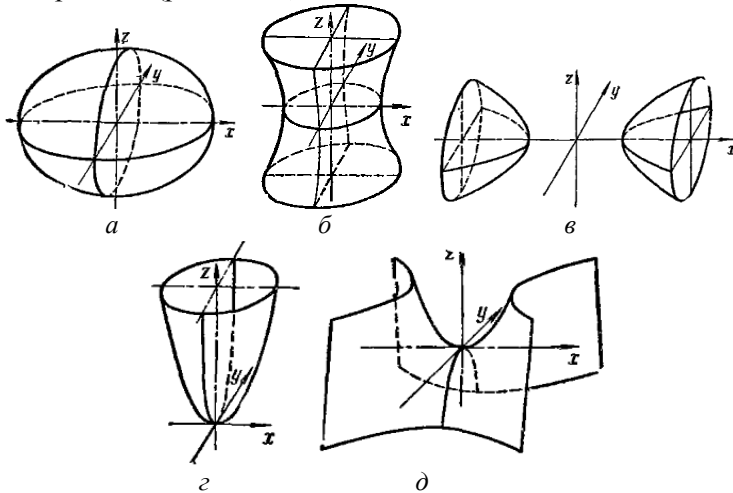


Рис. 3.8. Поверхня другого порядку: а – еліпсоїд обертання; б – однополосний гіперболоїд; в – двополосний гіперболоїд; г – еліптичний параболоїд; д – гіперболічний параболоїд

Геометричним образом рівняння вигляду  $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{a_3^2} = 1$  є однополосний гіперболоїд (рис. 3.8, б).

Геометричним образом рівняння вигляду  $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{a_3^2} = 1$  є двополосний гіперболоїд (рис. 3.8, в).

Геометричним образом рівняння вигляду  $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$  є еліптичний параболоїд (рис. 3.8, г).

Геометричним образом рівняння вигляду  $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$  є гіперболічний параболоїд (рис. 3.8, д).

Геометричним образом нелінійної нерівності з трьома невідомими буде півпростір, розташований з однієї або іншої сторони поверхні другого порядку в залежності від знаку нерівності.

При розв'язанні системи рівнянь необхідно слідкувати за зміною множини допустимих значень невідомих. У випадку її розширення їх необхідно перевіряти, чи не є знайдені розв'язки сторонніми для даних рівнянь. У випадку звуження необхідно впевнитися, чи не є значення невідомих, які випали, розв'язками даних рівнянь.

### ***Питання для самоконтролю***

1. Геометрична інтерпретація математичних моделей лінійних безінерційних об'єктів.
2. Класифікація систем лінійних рівнянь та нерівностей.
3. Визначення гіперплощини.
4. Векторно-матричне представлення систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
5. Визначення псевдооберненої матриці.

#### **4.1. Математичні моделі динамічних систем із зосередженими параметрами**

Математичними моделями безінерційних систем є алгебраїчні рівняння та нерівності.

Математичними моделями динамічних систем є диференціальні та інтегральні рівняння та нерівності. Динамічні системи відображають властивості інерції систем.

По суті усі фізичні системи володіють інерцією і безінерційні системи як такі у природі не існують, це наукова абстракція.

Динамічні системи підрозділяють [15, 18]:

- динамічні системи із зосередженими параметрами;
- динамічні системи з розподіленими параметрами.

Але такий розподіл є науковою абстракцією. Не існують, строго кажучи, динамічні системи із зосередженими параметрами. Усі параметри зазвичай розподілені. Наприклад, говорять про середню температуру приміщення, хоча температура може бути різною у різних точках приміщення. Але якщо таку абстракцію можна застосувати, отримують у якості математичних моделей динамічних систем із зосередженими параметрами звичайні диференціальні рівняння. Прикладом такої динамічної системи із зосередженими параметрами може бути електричне коло, яке складається з резисторів, конденсаторів, індуктивності. У цьому випадку припускають, що по опору протікає один і той самий струм у різних точках цього опору; що електричне поле конденсатора рівномірне. Насправді там діє електромагнітне поле, яке описується як модель диференціального рівняння з розподіленими параметрами.

Математичними моделями динамічних систем із зосередженими параметрами є інтегро-диференціальні рівняння у звичайних похідних.

Звичайні диференціальні рівняння зустрічаються, наприклад, у курсі електричних та магнітних кіл, коли розглядаються перехідні процеси.

Розглянемо яким чином можна підійти з точки зору комп'ютерних засобів до розв'язку звичайного диференціального рівняння.

Нехай є диференціальне рівняння першого порядку. Це окремих вид рівняння, самий простіший. На ньому розглянемо принципи розв'язку рівняння за допомогою комп'ютера.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = f(t), \quad y(0) = y_0 \quad (4.1)$$

Це звичайне лінійне рівняння першого порядку, неоднорідне, тому що є права частина (якщо б був нуль справа, то було б однорідне рівняння), і задана початкова умова, тобто при  $t = 0$  ця невідома функція приймає значення  $y_0$ .

При реалізації на комп'ютері, звернемося до відомих методів аналогового моделювання, яке було дуже популярне у минулому столітті.

Це рівняння вирішується відносно старшої похідної

$$\frac{dy(t)}{dt} = -5y(t) + f(t) \quad (4.2)$$

Тут присутні такі математичні операції: математична операція диференціювання, множення на постійний коефіцієнт, алгебраїчне додавання.

Методи аналогового моделювання, які виконувалися на аналогових обчислювальних машинах, зараз у якійсь мірі можуть бути відтворені у системі Simulink.

Припустимо, що у деякій точці є сигнал типу напруги, який є першою похідною. Припустимо, що є перша похідна. Скористаємося блоком, який інтегрує першу похідну – візьмемо інтегратор.

У системі Simulink (див. Додаток 2) такий блок позначається таким чином:



Якщо деякий сигнал, який є похідною деякої функції, подати на інтегратор, на виході повинні отримати функцію (рис. 4.1). Це зворотна операція. Але у даному випадку немає сигналу похідної.



Бачимо, що похідна дорівнює сумі двох величин. Саму функцію необхідно помножити на 5, потім отримати відому функцію (джерело  $f(t)$  у вигляді напруги), і потім сформувати суму (сума алгебраїчна, тобто  $5y$  входить зі знаком «-»,  $f(t)$  входить зі знаком «+»).

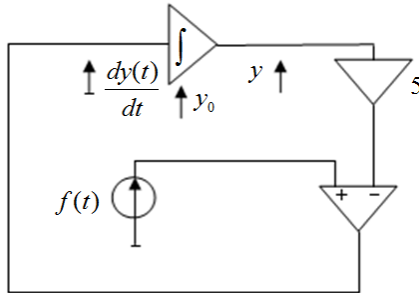


Рис. 4.1. Аналогова модель диференціального рівняння

На виході цього суматора повинна бути отримана перша похідна, якщо б вона була відома, але вона не відома (припустили, що вона є). Тому замкнемо це коло зворотнім зв'язком. Тобто тут сформували сигнал, який дорівнює  $-5y + f(t)$ . Очевидно, необхідно у інтеграторі задати величину  $y_0$ . Якщо б тут було більш складне диференціальне рівняння, діяли б аналогічним чином, просто було би більше доданків і необхідно було б більше операцій відповідно виконати. Тільки для виконання кожної операції треба використовували відповідні блоки.

У системі Simulink блок, який дозволяє виконати множення на постійний коефіцієнт, носить назву Gain (коефіцієнт підсилення) позначається таким чином:



Суматор позначається Sum.

Розв'язок диференціального рівняння (4.1) у пакеті Mathematica (див. Додаток 1).

У пакеті Mathematica для розв'язку диференціального рівняння є вбудована функція. Виглядає ця команда так: DSolve.

Аргументом команди DSolve виступає саме диференціальне рівняння

```
In[1]:= DSolve[{y'[t] + 5 y[t] - f[t] == 0, y[0] == y0}, y[t],
t]
```

У фігурних дужках відразу після квадратних записується саме рівняння на мові Mathematica і початкові умови, які розглядаються як ще одне рівняння. Якщо б було не одне рівняння, а система рівнянь, то усі ці рівняння треба перерахувати у перших дужках через кому. У цьому випадку, якщо буде ще рівняння, то після першої фігурної дужки через кому буде ще фігурна дужка, у якій будуть перераховані усі невідомі функції, і потім вказується аргумент, відносно якого це рівняння розв'язується.

Розглянемо розв'язування у пакеті Mathematica системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} y_1'(t) + 2y_1(t) + y_2(t) &= 2\sin(2t) \\ y_2'(t) + y_1(t) + 2y_2(t) &= \cos(2t) \\ y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = -1 \end{aligned}$$

Є система двох рівнянь першого порядку, де дві невідомі функції  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  та вказані початкові умови для цих невідомих функцій.

У системі Mathematica ця система буде виглядати так:

```
In[2]:= DSolve[{y1'[t] + 2 y1[t] + y2[t] == 2 Sin[2 t],
y2'[t] + y1[t] + 2 y2[t] == Cos[2 t], y1[0] == 2,
y2[0] == -1}, {y1[t], y2[t]}, t]
```

Команда DSolve – у фігурних дужках перелічуються усі рівняння, в других фігурних дужках перелічуються усі невідомі функції, а потім вказується аргумент.

Отримуємо розв'язок:

```
Out[2]= {{y1[t] -> -\frac{1}{13} e^{-3t}
(-7 - 26 e^{2t} + 7 e^{2t} Cos[2 t] - 4 e^{2t} Sin[2 t]), y2[t] ->
\frac{1}{13} e^{-3t} (7 - 26 e^{2t} + 6 e^{2t} Cos[2 t] + 4 e^{2t} Sin[2 t])}}
```

Спростимо отриманий вираз командою `Simplify[*]` (% – звернення до щойно отриманого результату):

In[3]:= Simplify[ $\theta$ ]

$$\text{Out[3]} = \left\{ \left\{ y1[t] \rightarrow \frac{1}{13} (e^{-3t} (7 + 26 e^{2t}) - 7 \cos[2t] + 4 \sin[2t]), \right. \right. \\ \left. \left. y2[t] \rightarrow \frac{1}{13} (e^{-3t} (7 - 26 e^{2t}) + 6 \cos[2t] + 4 \sin[2t]) \right\} \right\}$$

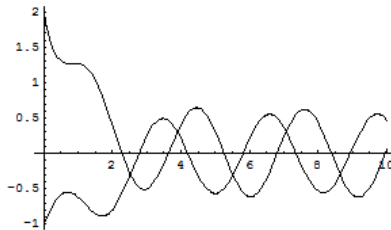
Необхідно ввести нові змінні, які визначати розв'язок:

$$\text{In[3]} := z1 = -\frac{1}{13} e^{-3t} (-7 - 26 e^{2t} + 7 e^{3t} \cos[2t] - 4 e^{3t} \sin[2t]);$$

$$\text{In[4]} := z2 = \frac{1}{13} e^{-3t} (7 - 26 e^{2t} + 6 e^{3t} \cos[2t] + 4 e^{3t} \sin[2t]);$$

Побудуємо графік отриманого розв'язку системи диференціальних рівнянь:

In[5]:= Plot[{z1, z2}, {t, 0, 10}]



Цю ж систему рівнянь розв'яжемо у системі Simulink. Для цього побудуємо схему із обчислювальних блоків, яка описує дану систему рівнянь (рис. 4.2).

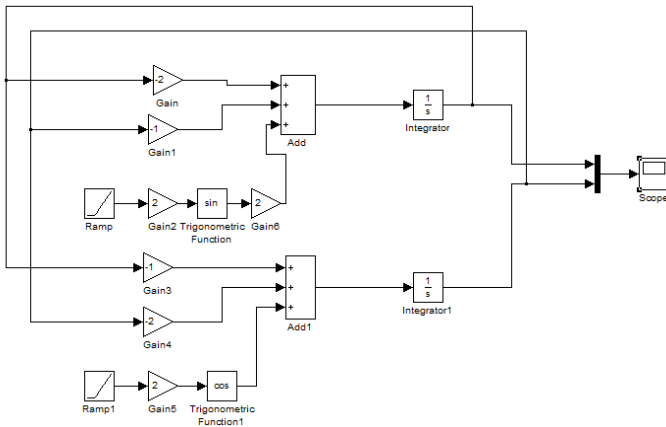


Рис. 4.2. Структурна схема моделі системи диференціальних рівнянь

Розв'язок системи диференціальних рівнянь виведений на віртуальний осцилограф (рис. 4.3).

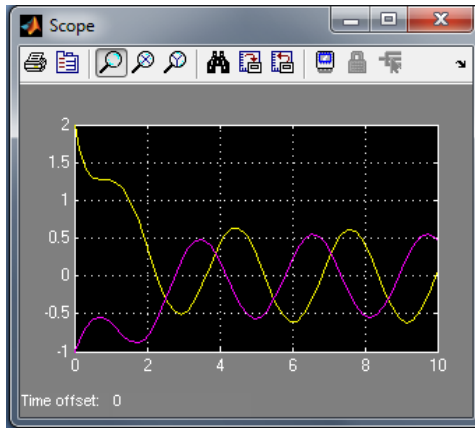


Рис. 4.3. Графіки розв'язку системи диференціальних рівнянь на екрані віртуального осцилографа

#### 4.2. Задачі оптимального керування

*Оптимальне керування* – це розділ математики, який вивчає неklasичні варіаційні задачі.

Об'єкти, з якими має справу техніка, зазвичай забезпечені «кермом» – з його допомогою людина управляє рухом цього об'єкта [19, 23, 25]. Математична поведінка такого об'єкта описується деякими рівняннями, до якого входять і управляючі параметри, які характеризують положення «керма». Очевидно, при цьому виникає питання про відшукування найкращого (оптимального) у тому чи іншому смислі управління рухом. Наприклад, мова може йти про досягнення мети руху за мінімальний час. Це питання є задачею варіаційного числення. На відміну від класичних варіаційних задач, де управляючі параметри змінюються у деякій відкритій області (без границь), теорія оптимального керування охоплює і той випадок, коли управляючі параметри можуть приймати і граничні значення. Остання обставина особливо суттєва з прикладної точки зору, оскільки при керуванні технічним об'єктом саме положення «керма» «на упорі» часто забезпечує оптимальне керування.

Теорії оптимального керування зародилася на початку 50-х років 20 століття. При використанні найновішої техніки та сучасного висококомеханізованого та автоматизованого виробництва виникає прагнення вибрати найкращу програму дій, найбільш раціонально використовувати наявні ресурси. Саме ці конкретні технічні задачі стимулювали розробку теорії оптимального керування, яка виявилася математично дуже змістовною та дозволила розв'язати багато задач, де класичні методи не можна було застосувати. Інтенсивний розвиток теорії оптимального керування, у свою чергу, виявився потужним фактором, який сприяв успішному вирішенню науково-технічних та народногосподарських задач.

Центральним результатом теорії оптимального керування є принцип максимуму Понтрягіна, який дає необхідну умову оптимальності керування. Цей результат і пов'язані з ним дослідження, проведені Л.С. Понтрягіним та його співробітниками, стали вихідним пунктом розробки теоретичних, обчислювальних та прикладних аспектів теорії оптимального керування. При вирішенні ряду задач оптимального керування з успіхом використовуються ідеї методу динамічного програмування, основи якого розроблені американським вченим Р. Беллманом та його співробітниками.

Задача оптимального керування полягає у наступному. Нехай маємо об'єкт, яким управляють і під яким розуміється деяка машина, прилад або процес, забезпечений «кермом». Маніпулюючи «кермом» (у межах наявних ресурсів управління), тим самим визначають рух об'єкта, керують ним. Наприклад, технологічний процес здійснення хімічної реакції можна вважати об'єктом, яким керують, «кермом» якого є концентрації інгредієнтів, кількість каталізаторів, температуру, яка підтримується, та інші фактори, які впливають на перебіг реакції. Для того аби знати, як саме поводить себе об'єкт при тому чи іншому керуванні, необхідно мати закон руху, який описує динамічні властивості об'єкта, який розглядається, і який встановлює для кожного вибраного правила маніпулювання «кермом» еволюцію стану об'єкта. Можливості керувати об'єктом обмежуються не тільки ресурсами керування, але і тим, що у процесі руху об'єкт не повинен потрапляти у стани, які фізично

недоступні чи недопустимі з точки зору конкретних умов його експлуатації. Так, здійснюючи маневр судном, необхідно враховувати не тільки технічні можливості самого судна, але й границю фарватеру.

Маючи справу з об'єктом, яким керують, завжди прагнуть так маніпулювати «кермом», щоб, виходячи з визначеної початкової умови, у кінці досягти деякого бажаного стану. Як правило, існує нескінченно багато способів керувати об'єктом так, щоб реалізувати ціль управління. У зв'язку з цим виникає задача знайти такий спосіб керування, який дозволяє досягнути бажаного результату найкращим, оптимальним чином у смислі визначеного критерію якості; у конкретних задачах часто необхідно реалізувати ціль управління за найменш можливий час чи з мінімальною витратою пального, чи з максимальним економічним ефектом і т.п.

У якості типового можна навести об'єкт, яким управляють, закон руху якого описується системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r); i = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

де  $x^1, \dots, x^n$  – це фазові координати, які характеризують стан об'єкта в момент часу  $t$ , а  $u^1, \dots, u^r$  – управляючі параметри. Керування об'єктом означає вибір управляючих параметрів як функцій

$$u^j = u^j(t); j = 1, \dots, r, \quad (4.4)$$

які є допустимими з точки зору наявних можливостей керування об'єктом. Наприклад, у прикладних задачах часто необхідно, щоб у кожний момент часу точка  $(u^1, \dots, u^r)$  належала заданій замкнутій множині  $U$ . Ця остання обставина робить варіаційну задачу, яка розглядається, неklasичною.

Нехай задані початковий  $(x_0^1, \dots, x_0^n)$  та кінцевий  $(x_1^1, \dots, x_1^n)$  стани об'єкта. Про керування говорять, що воно реалізує ціль керування, якщо знайдеться такий момент часу  $t_1 > t_0$ , що розв'язок задачі:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n, u^1(t), \dots, u^r(t)); x^i(t_0) = x_0^i, i = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

задовольняє умові  $x^i(t_1) = x_1^i$ . Якість цього керування будемо оцінювати значенням функціонала:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1(t), \dots, x^n(t), u^1(t), \dots, u^r(t)) dt. \quad (4.6)$$

Задача оптимального керування полягає у відшукуванні такого реалізуючого ціль керування, для якого функціонал (4.6) приймає найменш можливе значення. Таким чином, математична теорія оптимального керування – це розділ математики, який розглядає неklasичні варіаційні задачі відшукування екстремумів функціоналів на розв'язках рівнянь, які описують об'єкти, якими керують, і керувань, на яких реалізується екстремум.

До виду (4.3) зазвичай приводиться рівняння руху у випадку механічних об'єктів, якими керують, з кінцевим числом степенів свободи. У численних реальних ситуаціях виникають і інші постановки задач оптимального керування, які відрізняються від наведених вище: задачі з фіксованим часом, коли тривалість процесу заздалегідь задана, задачі з кінцями, які ковзають, коли про початковий та кінцевий стани відомо, що вони належать деяким множинам, задачі з фазовими обмеженнями, коли розв'язок задачі (4.5) у кожен момент часу повинен належати фіксованій замкнутій множині, та ін. У задачах механіки суцільних середовищ величина  $x$ , яка характеризує стан об'єкта, яким керують, є функцією вже не тільки часу, але й просторових координат (наприклад, величина  $x$  може описувати розподіл температури у тілі у даний момент часу), а закон руху буде диференціальним рівнянням з частинними похідними. Часто доводиться розглядати об'єкти, якими керують, коли незалежна змінна приймає дискретне значення, а закон руху представляє собою систему кінцево-різницевого рівнянь. Нарешті, окрему теорію складає оптимальне керування стохастичними об'єктами.

#### 4.3. Диференціальні ігри

*Диференціальні ігри* – це розділ математичної теорії управління, у якому вивчається управління об'єктом у конфліктних

ситуаціях [13]. У диференціальних іграх можливості гравців описуються диференціальними рівняннями чи диференціальними включеннями, які містять управляючі вектори, якими розпоряджаються гравці. Для вибору управління кожний гравець може використовувати лише поточну інформацію про поведінку гравців. Розрізняють диференціальні ігри двох гравців та багатьох гравців.

Основоположні результати у диференціальних іграх були отримані у 60-ті рр. 20 ст. у СРСР Л.С. Понтрягіним, Н.Н. Красовським, Є.Ф. Міщенко, Б.Н. Пшеничним та ін., у США – Р. Айзексом, Л. Берковицем, У. Флемінгом та ін. Першим, хто дослідив диференціальні ігри, став Руфус Айзекс (робота 1951 року, вперше опублікована у 1965 році). А одна з перших проаналізованих ігор була гра «Шофер-вбиця» (homicidal chauffeur game). Необхідно відмітити, що сам Айзекс замість «шофера» та «пішохода» розумів торпеду та невеликий катер, який від неї відвертався.

Найбільш дослідженими є *диференціальні ігри переслідування*, у яких кількість гравців дорівнює 2, одного називають переслідувачем, а іншого втікачем. Мета переслідувача – приведення вектора  $z(t)$  на задану множину  $M$  за можливо короткий час; мета втікача – за можливістю відтягнути момент приходу вектора  $z(t)$  на  $M$ .

Диференціальні ігри мають властивості, характерні як для теорії оптимального керування, так і для теорії ігор. Безпосередньою причиною розвитку теорії диференціальних ігор стали прикладні задачі, в тому числі, військові.

Формально, в загальній формі, диференціальна гра може бути сформульована наступним чином. Нехай є об'єкт керування, поведінка якого описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v), \quad (4.7)$$

де  $x$  –  $n$ -вимірний вектор з компонентами  $x_1, \dots, x_n$ , а  $f(x, u)$  –  $n$ -вимірний вектор-функція із компонентами  $f_i(x, u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $u$  та  $v$  – керуючі параметри, які представляють  $r$ -вимірний та  $s$ -вимірний вектори відповідно, які можуть змінюватись на множинах  $U$  та  $V$ .



Крім того, задано термінальну множину  $M \subset E^n$ , де  $E^n$  –  $n$ -вимірний простір.

Нехай вибрано дві будь які функції  $u(x)$  та  $v(x)$  так, що  $u(x) \in U$ ,  $v(x) \in V$  і рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(x), v(x)) \quad (4.8)$$

має розв'язок. Тоді для кожного початкового стану визначена траєкторія  $x(t)$  системи (4.8) і визначений функціонал

$$I(y(\cdot), v(\cdot); x^0) = \int_0^{t_1} f_0(x(t), u(x(t)), v(x(t))).$$

Задача теорії диференціальних ігор тепер полягає в з'ясуванні питання про те, за яких умов і для яких точок  $x^0$  можливо знайти такі функції  $u^0(x)$  та  $v^0(x)$ , що

$$I(u^0(\cdot), v(\cdot); x^0) \leq I(u^0(\cdot), v^0(\cdot); x^0) \leq I(u(\cdot), v^0(\cdot); x^0).$$

В такій постановці задачу розв'язано лише для невеликої кількості окремих випадків, для випадку, коли множина  $M$  співпадає з всім простором. Для загального випадку отримані результати в припущенні деякої дискримінаційної функції другого гравця, який займається керуванням  $v$ . А саме: вважається, що приймаючи своє рішення, перший гравець знає майбутнє керування другого на деякому малому відрізку часу. В цьому випадку вдається довести, що весь простір початкових положень може бути розбито на дві області так, що виходячи із першої області, перший гравець завжди може гарантувати собі завершення гри з кінцевою ціною  $I$ . В той же час, як в точках другої області він не може собі гарантувати жодного скінченого значення ціни. Побудовано достатні умови можливості завершення гри зі скінченною ціною. Ці умови можна застосувати в основному для розв'язування задач з лінійним об'єктом керування.

*Приклад диференціальної гри.* Типовим прикладом задачі диференціальної гри може слугувати задача перехоплення бомбардувальника противника винищувачем. Обидва об'єкти (і винищувач, і бомбардувальник) керовані, і їхня поведінка залежить від того, яким чином діють пілоти. Однак керування знаходиться в

руках різних осіб з протилежними інтересами: бомбардувальник ухиляється від зустрічі, а винищувач переслідує його.

Складність задачі керування для пілота винищувача полягає в тому, що в нього відсутня інформація про майбутнє керування противника. Він знає технічні можливості літака, знає його положення в даний момент, однак не може знати, яке рішення про своє керування прийме пілот бомбардувальника в кожному наступний момент часу. Тому його рішення має базуватись на ситуації, яка склалась до цього моменту.

#### **4.4. Математичні моделі динамічних систем із розподіленими параметрами**

Є такий розділ прикладної математики, який носить назву задачі математичної фізики. Це великий розділ прикладної математики, який присвячений розв'язанню задач, які описуються рівняннями у часткових похідних [15, 18]. Ці рівняння покривають цілий ряд областей застосування: електродинаміку, механіку, теплофізику.

Ознака математичних моделей динамічних систем із розподіленими параметрами – це диференціальні рівняння у часткових похідних.

Існують найбільш розповсюджені задачі математичної фізики, які можна класифікувати на три великі класи: еліптичні задачі, параболічні задачі, гіперболічні задачі, і відповідні рівняння параболічного, еліптичного та гіперболічного типу [24].

1. Еліптичні задачі. Якщо функція залежить від двох аргументів  $u(x, y)$  (а може залежить від трьох аргументів), то еліптичні задачі виглядають наступним чином:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Це не самий загальний вигляд рівняння, можуть бути ускладнення, змінні коефіцієнти. Але загальна ознака така: є часткові похідні по координатам.

Геометрична інтерпретація таких задач виглядає наступним чином: аргументи  $x$ ,  $y$ , функція  $u(x, y)$  – це поверхня, яка задається на деякій області.  $x$  та  $y$  змінюються у деякій області і  $u$

межах зміни  $x$ ,  $y$  поверхня повинна задовольняти такому рівнянню. Але для того, щоб задача мала єдиний розв'язок, повинні бути задані умови на границі області.

Існує три задачі [1, 18, 24]:

1. Задача Діріхле: шукана функція задана на границі області і необхідно знайти її вигляд всередині області:  $u(s) = u_0 = f_0(s)$ .

2. Задача Неймана: задана нормальна похідна по границі області, тобто задана не сама функція, а нахил цієї функції відносно границі цієї області:  $\frac{\partial u}{\partial n}(s) = f_0(s)$ .

3. Змішана задача: на частині границі може бути задача Діріхле, на частині може бути задача Неймана, а у деяких місцях границі лінійна комбінація функції та похідної. У цьому випадку отримаємо єдиний розв'язок еліптичної задачі:  $\alpha u(s) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(s) = f_0(s)$ .

Даний тип рівняння описую дуже великий клас проблем, зокрема, у електродинаміці – розподіл електричних потенціалів у плоскій пластині певної форми, коли значення потенціалу задано на границі області, яка проводить, права частина рівняння еквівалентна зовнішньому впливу, який розподілений по поверхні цієї пластини; у механіці.

Ці задачі є статичними – не розглядаються процеси у часі. Параболічна та гіперболічна задачі є їх узагальненнями.

2. Параболічна задача:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}.$$

Є функція, яка залежить від просторових координат та часу і сума других часткових похідних по просторовим координатам дорівнює з якимось коефіцієнтом частковій похідній цієї ж функції по часу.

Рівняння параболічного типу описує задачі теплофізики – розподіл тепла у деякій плоскій області, яка залежить від  $x$ ,  $y$ , де температура змінюється у відповідності з цим рівнянням.

Також є задача Діріхле, Неймана та змішана задача, але з'являються ще й додаткові умови – початкові умови за часом.

3. Гіперболічні рівняння відрізняються від параболічних тим, що похідна по часу має другий порядок:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}$$

Ці рівняння іноді називають хвильовими рівняннями. Пов'язано це з тим, що рівняння Максвелла електромагнітного поля якраз є рівняннями гіперболічного типу.

Також розглядаються і крайові умови Неймана, Діріхле, або змішані, і початкові умови, але тепер вони повинні бути не тільки функцією, яка залежить від часу, але й від першої похідної цієї функції по часу.

#### 4.5. Метод кінцевих різниць

*Метод кінцевих різниць* – широко відомий та самий простий метод апроксимації. Його суть полягає у заміні диференціальних коефіцієнтів рівняння на різницеві коефіцієнти, що дозволяє звести розв'язок диференціального рівняння до розв'язку його різницевого аналога, тобто побудувати його кінцево-різницеву схему [14].

Розглянемо, яким чином можна будувати алгебраїчні моделі еліптичних задач.

По-перше, необхідно згадати наближене представлення першої та другої похідної. Нехай задана функція  $y(x)$  на деякому діапазоні зміни аргументу  $0 < x < X$ .

Перша похідна від функції наближено визначається таким чином:

$$\frac{dy(x)}{dx} \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

На графіку (рис. 4.4) показано приріст функції  $y(x)$ .

У курсі математичного аналізу, коли вводилося поняття похідної, розглядається, що перша похідна функції одного аргументу є границя відношення проросту функції, до приросту аргументу, який викликав приріст функції, коли останній прямує до нуля.

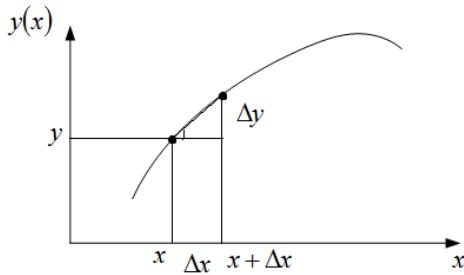


Рис. 4.4. Графік функції  $y(x)$

Якщо цей приріст не нульовий, то це виходить тангенс кута нахилу січної, яка з'єднує дві точки:  $y(x + \Delta x)$  – верхня точка,  $y(x)$  – нижня точка.  $\Delta y$  – вертикальний катет,  $\Delta x$  – горизонтальний катет. Відношення цих катетів – це тангенс кута нахилу січної. Коли  $\Delta x \rightarrow 0$ , дві точки зближуються і тангенс кута нахилу січної перетворюється у тангенс кута нахилу дотичної. Це є визначення першої похідної функції.

У наближених методах аналізу не використовують границі при  $\Delta x \rightarrow 0$ , а припускають, що приріст кінцевий. Таким чином, спрощують цю задачу.

Нехай є числова вісь (рис. 4.5), на якій задана функція. Ця вісь розбивається на інтервали розміру  $h$  ( $h$  – аналог  $\Delta x$ , тільки він ніколи не прямує до нуля, а може приймати різні кінцеві значення).



Рис. 4.5. Числова вісь

Вводиться поняття цілочисельного індексу  $x_i$ :

$$x_i = h(i-1), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.9)$$

Якщо початок координат 0, то із неперервної осі шляхом перетворення (4.9), отримують систему точок, координати яких визначаються виразом (4.9).

Таким чином, похідна може бути визначена так:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \quad (4.10)$$

Вираз (4.10) визначає тангенс кута нахилу січної як наближене значення першої похідної.

Якщо взяти декілька точок, які лежать поряд (рис. 4.6), то нахил січної може бути визначений декількома способами.

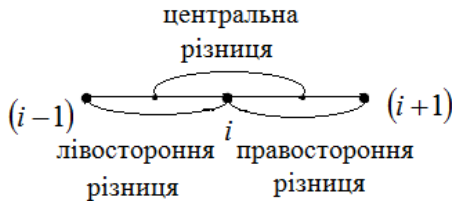


Рис. 4.6. Види різниці

Інтервал  $\llbracket i, i+1 \rrbracket$  визначає правосторонню різницю – береться різниця наступної точки та поточної точки  $i$  і ділиться на  $h$ .

Інтервал  $\llbracket i-1, i \rrbracket$  визначає лівосторонню різницю.

Можна взяти центральну різницю, тобто взяти приріст півкроку вправо мінус півкроку вліво. Центральна різниця симетрична для точки:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+0,5} - y_{i-0,5}}{h}$$

Розглянемо другу похідну. Вона визначається як перша похідна першої похідної (для центральної різниці):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{y'_{i+0,5} - y'_{i-0,5}}{h} = \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Якщо використовувати правосторонню або лівосторонню різницю, то з'явилися б доданки, які розташовані на більшу кількість індексів.

Таким чином, друга похідна функції у деякій точці дорівнює сумі суміжних значень мінус подвоєне значення даної функції і поділене на  $h^2$ .

Розглянемо математичну модель у кінцевих різницях для рівняння еліптичного типу. У цьому рівнянні є другі похідні і функція залежить від двох аргументів  $u \llbracket x, y \rrbracket$ .

Для рівняння у часткових похідних модель у кінцевих різницях вводиться таким чином: це приріст функції вздовж однієї

осі, якщо припускається, що по другій осі зміни немає, і навпаки, приріст вздовж другої осі, якщо по першій зміни немає.

Коли розглядається дискретна модель, необхідно площину  $xy$  розбити вже не на  $m$  точок, а необхідно взяти двомірну сітку, де  $h_x$  у загальному випадку крок по одній осі та крок по іншій осі. Часто ці кроки беруть однаковими.

Тоді отримуємо сітку (рис. 4.7), всередині якої обираємо декілька вузлів і один вузол, який розглядається.

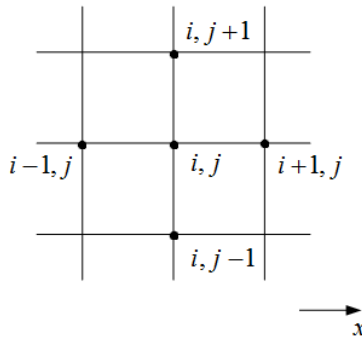


Рис. 4.7. Сітка дискретних значень

Застосуємо формулу наближеного визначення другої похідної по  $x$  (припускаємо, що  $u$  не змінюється):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Застосуємо формулу наближеного визначення другої похідної по  $y$  (припускаємо, що  $x$  не змінюється):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}.$$

Узагальнене рівняння еліптичного типу у кінцевих різницях буде мати вигляд:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 f(x_i, y_j).$$

Отримали рівняння для кожної точки  $(i, j)$ . Такі рівняння складаються тільки для внутрішніх точок області, на границі задаються відповідні крайові умови.

Таким чином, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь у дискретних точках зміни аргументу.

#### 4.5.1. Електричні моделі кінцевої різниці

Розглянемо, як можна еліптичні рівняння реалізувати за допомогою кіл постійного струму.

Припустимо, що є фрагмент площини  $xu$  і  $yu$  межах цієї площини обмежимо прямокутник розміром  $a \times b$  (рис. 4.8, а).

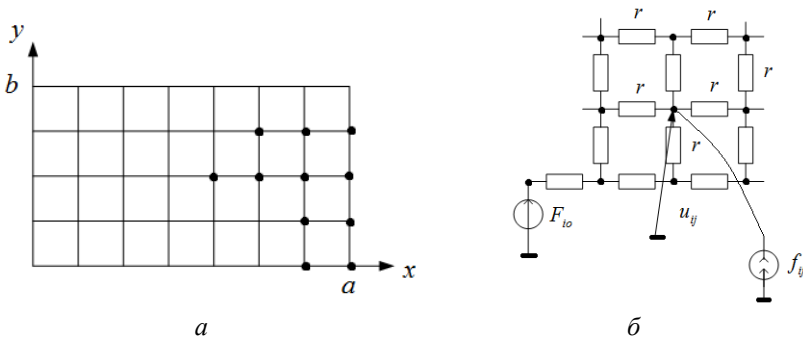


Рис. 4.8. Електрична модель кінцевої різниці

На цю область вводиться сітка з кроком  $a$  по координатам  $x$  та  $y$ . Таким чином, замість безперервної області виходить сітка дискретних значень, в тому числі і на границі області. Замість значень безперервної функції  $u(x, y)$ , яка змінюється у межах  $a$  та  $b$ , розглядається дискретна множина чисел  $u_{ij}$  у вузлах сітки.

Складемо електричну схему, яка містить сітку однакових опорів (рис. 4.8, б). Припустимо, що взяли декілька вузлів, які лежать поряд з визначеним вузлом, і побудували сітку з однакових опорів величини  $r$ . Необхідно знайти напругу у вузлах сітки відносно землі  $u_{ij}$ . І відповідно справа буде  $u_{i+1,j}$ , зліва буде  $u_{i-1,j}$  і т.д., індекси у цих напруг будуть у відповідності з нумерацією вузлів. Якщо запишемо для вузла  $ij$  рівняння методу вузлових напруг, то отримаємо: сума провідностей гілок, які сходяться до вузла  $ij$ , утворює коефіцієнт  $-4/r$  ( $r$  перенесеться у праву частину і буде зображувати  $h^2$ ), мінус напруга сусідніх вузлів на провідність між вузлами (провідності між вузлами це одиничні



коефіцієнти, сама провідність переноситься у праву частину). Таким чином, отримуємо вираз для дискретизованих значень функції, яка задовольняє рівнянню Пуассона з точністю співпадає з методом вузлових напруг у колі постійного струму за однією умовою, якщо ввімкнене джерело струму  $f_{ij}$  (для кожного вузла своє джерело струму).

Якщо взяти рівняння Лапласа, то джерел струму не потрібно, але для того, аби це коло давало якусь напругу, якийсь потенційне поле, повинні бути задані граничні умови – це джерела напруги, які підключені до границі  $F_{i,0}$  (для кожного вузла своя напруга).

Сітка із однакових опорів, яка виконана у формі області на якій шукається розв'язок або Лапласа, або Пуассона, з однаковими напругами. У вузлах підводиться струм, який відповідає правій частині рівняння у відповідній точці, на границі задані граничні умови або задачі Діріхле (це джерела наруги), або задачі Неймана (це джерела струму), у випадку задачі змішаного типу задається більш складний вигляд граничних умов. Отримуємо коло постійного струму, сукупність напруг у вузлах цієї сітки буде задовольняти наближено розв'язку рівняння Лапласа, Пуассона або іншого.

На цьому принципі будували сіткові інтегратори – спеціалізовані машини, в яких можна було організовувати сітки великих розмірів (до десятка тисяч вузлів), і вони дозволяли розв'язувати ці задачі, зокрема задачі гідромеханіки.

У параболічному рівнянні замість правої частини існує перша похідна за часом, помножена на якийсь коефіцієнт, і дорівнює сумі других похідних за просторовими координатами. З точки зору кінцевих різниць усе теж саме. Але тепер у кожний вузол необхідно ввести похідну цього сигналу за часом. Це робиться так: у вузли електричної сітки між вузлами та землею включаються конденсатори і виходить, що сума струмів у вузлі сітки за законами Кірхгофа, дорівнює струму конденсатора (струм конденсатора пропорційний похідній за часом напруги). Тобто виходить таке узагальнення, коли в однорідній сітці до резисторів додаються ще й конденсатори на землю. Зрозуміло, що за крайовими умовами виходить теж саме, але з'являються ще початкові умови – напруга на конденсаторах у перший момент

часу, тобто конденсатори повинні бути заряджені до значення відповідного початковому розподілу значення. Потім починає відбуватися перезарядка конденсаторів (одні розряджаються, інші заряджаються), відбувається перехідний процес і поле стає залежним від часу.

У гіперболічних рівняннях необхідно скористатися конденсаторами на землю, а замість опорів поставити індуктивності, тобто однорідна сітка індуктивностей супроводжується конденсаторами на землю, і інтегральні співвідношення для індуктивності та ємності дозволяє ввести другу похідну.

#### 4.6. Фрактали

Порівняно давно у математиці виник образ об'єкта, більш об'ємного, але тим не менш схожого з лінією. Деяким вченим було важко примиритися з поняттям лінії, яка не має ширини, тому поступово ними стали вивчатися геометричні форми та структури, які мають дробову просторову розмірність. На зміну неперервним кривим, які володіють усіма своїми похідними, прийшли ламані або дуже порізані криві. Яскравим прикладом такої кривої є траєкторія броунівської частинки. Так у науці виникло поняття фрактала.

*Фрактал* (від лат. *fractus* – дроблений) – це термін, який означає фігуру, яка володіє властивістю самоподібності, тобто складену з декількох частин, кожна з яких подібна усій фігурі в цілому [6, 20, 22, 26]. У більш широкому смислі під фракталами розуміють множини точок у евклідовому просторі, які мають дробову метричну розмірність (у смислі Мінковського чи Хаусдорфа), або метричну розмірність, яка строго більша за топологічну.

Термін «фрактал» був введений Бенуа Мандельбротом у 1975 році і отримав широку популярність з виходом у 1977 році його книги «Фрактальна геометрія природи». Слово «фрактал» не є математичним терміном і не має загальноприйнятого строгого математичного визначення. Воно може застосовуватися, коли фігура, яка розглядається, володіє якими-небудь з таких властивостей:

- Володіє нетривіальною структурою на усіх шкалах. У цьому відмінність від регулярних фігур (таких як коло, еліпс, графік гладкої функції): якщо розглядати невеликий фрагмент регулярної фігури у дуже великому масштабі, він буде схожий на фрагмент прямої. Для фрактала збільшення масштабу не веде до спрощення структури, на усіх шкалах побачимо однаково складну картину.
- Є самоподібною чи наближено самоподібною.
- Володіє дробовою метричною розмірністю чи метричною розмірністю, яка перевищує топологічну.
- Може бути побудована за допомогою рекурсивної процедури.

Починаючи з кінця XIX століття, у математиці з'являються приклади самоподібних об'єктів з патологічними з точки зору класичного аналізу властивостями. До них можна віднести наступні:

- множина Кантора – ніде не щільна незліченна повна множина (рис. 4.9, *a*). Модифікувавши процедуру, можна також отримати ніде не щільну множину додатної довжини;
- трикутник Серпинського та килим Серпинського – аналоги множини Кантора на площині (рис. 4.9, *b*, *в*);
- губка Менгера – аналог множини Кантора у тримірному просторі (рис. 4.9, *г*); приклади Вейерштрасса та Ван дер Вардена ніде не диференційованої неперервної функції;
- крива Коха – неперервна крива нескінченної довжини, яка несамоперетинається, не має дотичної у жодній точці (рис. 4.9, *д*);
- крива Пеано – неперервна крива, яка проходить через усі точки квадрату (рис. 4.9, *e*);
- траєкторія броунівської частинки також з ймовірністю 1 ніде не диференційована (рис. 4.9, *є*). Її хаусдорфова розмірність рівна двом.

Розглянемо рекурсивну процедуру отримання фрактальних кривих на площині. Задамо довільну ламану з кінцевим числом ланок, яка називається генератором. Далі, замінимо у ній кожний відрізок генератором (точніше, ламаною, подібною генератору).

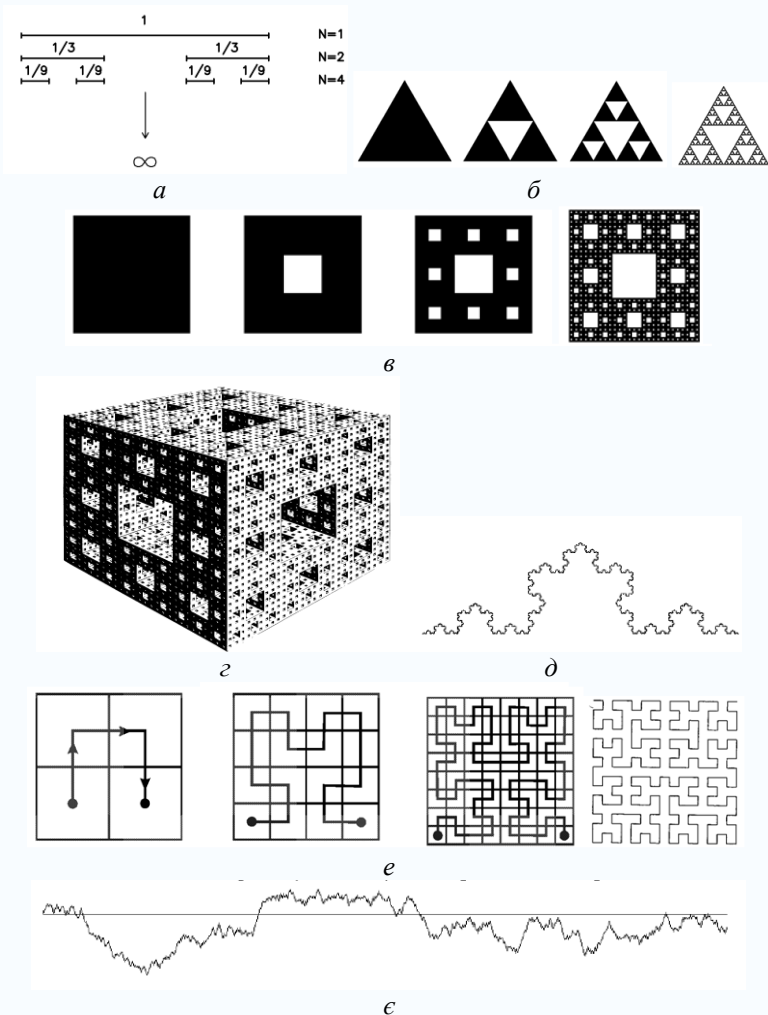


Рис. 4.9. Самоподібні об'єкти: *a* – множина Кантора; *б* – трикутник Серпинського; *в* – килим Серпинського; *г* – губка Менгера; *д* – крива Коха; *е* – крива Пеано; *є* – траєкторія броунівської частинки

У ламаній, яку отримали, знову замінимо кожний відрізок генератором. Продовжуючи до нескінченності, у границі

отримаємо фрактальну криву. На рис. 4.10 приведені три перших кроки цієї процедури для кривої Коха.

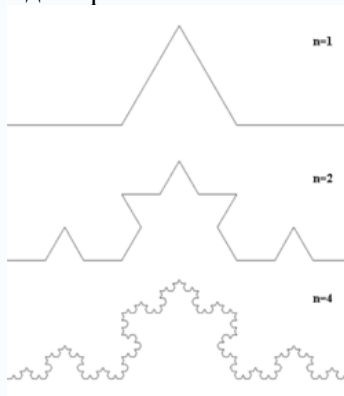


Рис. 4.10. Крива Коха

Прикладами фрактальних кривих є:

- крива дракона;
- крива Коха;
- крива Леві;
- крива Мінковського;
- крива Пеано;

За допомогою схожої процедури отримують дерево Піфагора (рис. 4.11).

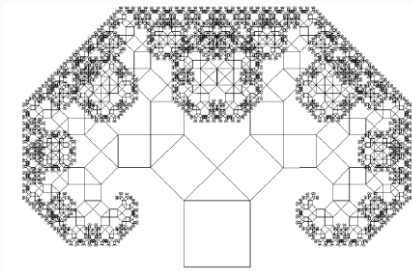


Рис. 4.11. Дерево Піфагора

Фрактали природнім чином виникають при вивченні нелінійних динамічних систем. Найбільш вивчений випадок, коли динамічна система задається ітераціями багаточлена чи голоморфної функції комплексної змінної на площині. Перші

дослідження у цій області відносяться до початку ХХ століття і пов'язані з іменами Фату та Жюліа.

Нехай  $F(z)$  – багаточлен,  $z_0$  – комплексне число і розглянемо наступну послідовність:

$$z_0, z_1 = F(z_0), z_2 = F(z_1), z_3 = F(z_2), \dots$$

При  $n \rightarrow \infty$  ця послідовність може:

- прямувати до нескінченності;
- прямувати до скінченної границі;
- демонструвати у границі циклічну поведінку, тобто поведінку виду  $\dots \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ ;
- демонструвати більш складну поведінку.

Множини значень  $z_0$ , для яких послідовність демонструє один конкретний тип поведінки, а також множини точок біфуркації між різними типами, часто володіють фрактальними властивостями.

Так, множина Жюліа на рис. 4.12 – множина точок біфуркації для багаточлена  $F(z) = z^2 + c$ , тобто тих значень  $z_0$ , для яких поведінка послідовності  $z_n$  може різко змінюватися при дуже малих змінах  $z_0$ .

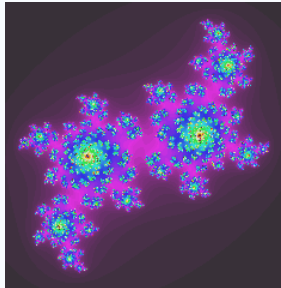


Рис. 4.12. Множина Жюліа

Інший варіант отримання фрактальних множин – введення параметра у багаточлен  $F(z)$  та розгляд множини тих значень параметра, при яких послідовність  $z_n$  демонструє визначену поведінку при фіксованому  $z_0$ . Так, множина Мандельборта – це

множина усіх  $c \in \mathbb{C}$ , при яких  $z_n$  для  $F(z) = z^2 + c$  та  $z_0 = 0$  не прямує до нескінченності.

Ще один відомий приклад такого роду – басейни Ньютона.

Популярним є створення красивих графічних образів на основі комплексної динаміки шляхом розфарбовування точок площини у залежності від поведінки відповідних динамічних систем. Наприклад, для доповнення множини Мандельборта можна розфарбувати точки у залежності від швидкості прямування  $z_n$  до нескінченності (яка визначається, наприклад, як найменший номер  $n$ , при якому  $|z_n|$  перевищить фіксовану більшу величину  $A$ ).

Біоморфи – це фрактали, побудовані на основі комплексної динаміки та які нагадують живі організми.

Фрактали, особливо на площині, популярні завдяки поєднанню краси та простоти побудови за допомогою комп'ютера.

Природні об'єкти часто мають фрактальну форму, наприклад, узбережжя, хмари, крони дерев, кровоносна система та система альвеол людини чи тварин (рис. 4.13). Для їх моделювання можуть застосовуватися стохастичні (випадкові) фрактали. Приклади стохастичних фракталів:

- траєкторія броунівського руху на площині та у просторі;
- границя траєкторії броунівського руху на площині. У 2001 році Лоулер, Шрамм та Вернер довели припущення Мандельборта про те, що її розмірність рівна  $4/3$ ;
- еволюції Шрамма-Левнера – конформно-інваріантні фрактальні криві, які виникають у критичних двомірних моделях статистичної механіки, наприклад, у моделі Ізинга та перколяції;
- різні види рандомізованих фракталів, тобто фракталів, отриманих за допомогою рекурсивної процедури, у яку на кожному кроці введений випадковий параметр. Плазма – приклад використання такого фрактала у комп'ютерній графіці.



Рис. 4.13. Фрактальна форма підвиду цвітної капусти (*Brassica cauliflora*)

Фрактальна монотипія, чи стохатипія – напрям в образотворчому мистецтві, який полягає в отриманні зображення випадкового фрактала.

*Застосування фракталів.*

Фрактали широко застосовуються у комп'ютерній графіці для побудови зображень природних об'єктів, таких, як дерева, кущі, гірські ландшафти, поверхні морів і т.д. (рис. 4.14).



Рис. 4.14. Фрактальне дерево

Останнім часом фрактали стали популярними у «трейдерів» для аналізу курсу фондових бірж, валютних та торгових ринків.

У фізиці фрактали природним чином виникають при моделюванні нелінійних процесів, таких, як турбулентна течія рідини, складні процеси дифузії-адсорбції, полум'я, хмари і т.п. Також фрактали використовуються при моделюванні пористих матеріалів, наприклад, у нафтохімії. У біології вони застосовуються для моделювання популяцій і для опису систем внутрішніх органів (система кровоносних судин).

Серед літературних творів знаходять такі, які володіють текстуальною, структурною чи семантичною фрактальною природою. У текстуальних фракталах потенційно безкінечно повторюються елементи тексту.



Використання фрактальної геометрії при проектуванні антенних пристроїв було вперше застосовано американським інженером Натаном Коеном, який тоді жив у центрі Бостона, де була заборонена установка на будівлях зовнішніх антен. Натан вирізав з алюмінієвої фольги фігуру у формі кривої Коха та наклеїв її на лист паперу, а потім приєднав до приймача. Виявилося, що така антена працює не гірше звичайної. І хоча фізичні принципи роботи такої антени не вивчені до сих пір, це не завадило Коену заснувати власну компанію та налагодити їх серійний випуск.

Існують алгоритми для стиснення зображення за допомогою фракталів. Вони засновані на ідеї про те, що замість зображення можна зберігати відображення стиснення, для якого це зображення є нерухомою точкою.

Система призначення IP-адрес у мережі Netsukuku використовує принцип фрактального стиснення інформації для компактного збереження інформації про вузли мережі. Кожен вузол мережі Netsukuku зберігає всього 4 КБ інформації про стан сусідніх вузлів, при цьому будь-який новий вузол підключається до загальної мережі без необхідності у центральному регулюванні роздачі IP-адрес, що, наприклад, характерно для мережі Інтернет. Таким чином, принцип фрактального стиснення інформації гарантує повністю децентралізовану, а, отже, максимально стійку роботу всієї мережі.

#### **4.6.1. Динамічні системи нецілого порядку**

В останній час значно виріс інтерес до дослідження процесів дробової динаміки та динамічних систем нецілого порядку, математичні моделі яких є інтегро-диференціальними рівняннями нецілого (дробового) порядку [11, 28]. Стрімко росте число застосувань дробового числення у різних областях науки, техніки, природознавства, економіки та інших галузях людської діяльності, які використовують математичні методи та засоби комп'ютерного моделювання.

Порівняно давно встановлено спостереженнями, що поведінка цілого ряду об'єктів та процесів не відповідає у повній мірі математичним моделям, які використовуються, і що необхідно розробляти та використовувати уточнені моделі. Апроксимація сигналів, які формуються при функціонуванні досліджуваних

систем, виявила наявність у них степеневих залежностей від часу та (або) частоти з нецілими показниками степенів. Розвиток теорії фракталів викликав підвищений інтерес до явищ самоподібності, характерним для степеневих законів, та до математичного аналізу нецілих порядків. Останній оснований на систематичному використанні понять похідних та інтегралів, порядки яких не є цілими числами, а можуть бути дробовими, ірраціональними та комплексними. З врахуванням сказаного термін «дробове числення» (fractional calculus) не зовсім точно відображає сутність питання.

Поняття похідної та інтегралу нецілих порядків, які лежать в основі дробового числення, при першому знайомстві з ними, викликають у інженерів та наукових робітників труднощі, які перешкоджають широкому використанню цього числення у прикладних областях досліджень та розробок. Хоча історія виникнення та розвитку дробового числення нараховує вже більш трьох століть, його основи не вивчаються у більшості курсів математичного аналізу вищих навчальних закладів.

Інтегро-диференціальними рівняннями нецілих порядків за аналогією з класичним аналізом називають рівняння, які пов'язують між собою функції, їх похідні та інтеграли різних порядків:

$$R \left( \left( \int_0^x D_i^{\beta_i} x \right) f \right) = 0, \quad (4.11)$$

$$i := 1, \dots, m; \beta_i \in \mathbf{R}.$$

Лінійні інтегро-диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами мають вигляд:

$$\sum_{i=1}^m a_i \left( \int_0^x D_i^{\beta_i} x \right) = f \left( \int_0^x \right) \quad (4.12)$$

$$n \geq \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_m,$$

де  $n$  – найближче ціле число, більше, ніж  $\beta_1$ . Рівняння (4.11) та (4.12) при їх розв'язку повинні бути доповнені відповідними початковими або крайовими умовами. Крім того, повинен бути конкретизований тип інтегро-диференціального оператора (Рімана-Ліувілля, Капуто та т.п.).

Так само, як і у класичному математичному аналізі, розрізняють звичайні диференціальні рівняння (системи рівнянь),

для яких шукані розв'язки є функціями одного аргументу (часу або інших незалежних змінних) та диференціальні рівняння у часткових похідних, розв'язки яких залежать від декількох незалежних змінних (часу, просторових координат, або й того, й іншого).

Класифікація інтегро-диференціальних рівнянь нецілих порядків (дробові диференціальні рівняння) у силу їх особливостей та відносної новизни розробки методів розв'язків помітно відрізняються від класифікації рівнянь цілих порядків. Звичайні диференціальні рівняння дробових порядків розділяють на лінійні та нелінійні, з постійним та змінним коефіцієнтами, однорідні та неоднорідні, а також на відміну від класичного аналізу на одночленні, двочленні та багаточленні, за числом похідних та (або) інтегралів різних нецілих порядків. Що стосується диференціальних рівнянь у часткових похідних, то наявність інтегро-диференціальних операторів нецілих порядків частково руйнує класифікацію рівнянь, яка склалася у класичному аналізі. Відомо, що усталена класифікація диференціальних рівнянь у часткових похідних розглядає рівняння першого, другого та вищих порядків. Рівняння другого порядку підрозділяються на еліптичні, параболічні та гіперболічні у залежності від знаку величини дискримінанту. У випадку лінійних рівнянь еліптичного типу похідні за часом відсутні, а порядок за просторовими змінним дорівнює двом. Лінійні рівняння параболічного типу включають похідні за часом першого порядку, а за просторовими змінними другого порядку. Лінійні рівняння гіперболічного типу містять похідні і за часом і за просторовими змінними другого порядку. Інтегро-диференціальні рівняння у часткових похідних дробових порядків, в залежності від значень дробового порядку часової похідної, відносяться до параболічних (дифузних), якщо порядок дробової похідної змінюється між нулем та одиницею, або до гіперболічних (хвильових), у випадку зміни порядку похідної між одиницею та двійкою. Частіше такі рівняння називають дифузно-хвильовими.

Для розв'язку інтегро-диференціальних рівнянь дробових порядків, так само як і у класичному аналізі, застосовуються наступні методи:

- аналітичні (в основному для обмеженого класу лінійних рівнянь),
- чисельні методи, аналогічні методам кінцевих різниць та ріманових сум,
- чисельні методи, основані на представленні функцій рядами або ортогональними поліномами,
- операційні методи, основані на інтегральних перетвореннях, зокрема, типу перетворень Лапласа, Фур'є та т.п.

Аналітичні методи застосовують у тому випадку, якщо вдається знайти відповідну функцію Гріна для рівняння, яке розглядається. Частіше всього, розв'язки рівнянь у цьому випадку включають у себе комбінацію функцій Міттаг-Лєфлера, які є узагальненням експоненціальної функції.

Чисельні методи базуються на визначенні дробових похідних за формулами Грюнфвальда-Лєтнікова, які є узагальненням формул кінцевих різниць та ріманових сум, або на використанні представлення розв'язків нескінченними рядами.

Якщо в інтегро-диференціальному рівнянні усі порядки похідних шуканої функції менше нуля, ми маємо справу з інтегральним рівнянням. Таке рівняння можна представити у наступному виді:

$$\sum_{k=1}^n {}_0D_t^{-\beta_k} a_k(t) y(t) = f(t), \quad (4.13)$$

де:  $a_k(t)$  – змінні коефіцієнти,

$f(t)$  – відома функція,

$\beta_k$  – порядки інтегральних операторів (невід'ємні).

Змінні коефіцієнти та права частина рівняння є функціями, які допускають диференціювання та інтегрування відповідних порядків.

Лінійні інтегро-диференціальні рівняння, які включають у себе диференціальні оператори нецілого порядку з постійними та змінними коефіцієнтами виду (4.12), є досить розповсюдженим видом рівнянь та часто зустрічаються у математичному аналізі та багатьох додатках у природничих та технічних науках.

Прикладом двочленного лінійного диференціального рівняння нецілого порядку з постійними коефіцієнтами є рівняння «релаксації - осциляції»:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\beta y(t) + ay(t) &= f(t), \\ y^{(k)}(0) &= 0, (k = 0, 1, \dots, n-1), \\ n-1 < \beta &\leq n. \end{aligned}$$

Таку назву це рівняння отримало, мабуть, тому, що при  $\beta = 2$  його розв'язок є незатухаюче синусоїдальне коливання, а при  $\beta = 1$  – аперіодичний процес експоненціального типу.

Характерним прикладом лінійних диференціальних рівнянь змішаного порядку з похідними по Капуто є рівняння Багдея-Торвіка, до якого зводяться задачі про рух пластини у ньютонівській в'язкій рідині:

$$\begin{aligned} a \cdot y''(t) + b \cdot D_*^{3/2} y(t) + c \cdot y(t) &= f(t), \\ y(0) = y_0, y'(0) &= y_0'. \end{aligned}$$

Похідна порядку  $3/2$  у цьому рівнянні  $D_*^{3/2} y(t)$  визначається по Капуто.

Наявність змінних коефіцієнтів у інтегро-диференціальних рівняннях нецілих порядків приводить при використанні операційних методів до необхідності застосовувати правила знаходження зображень сигналів, які є добутком сигналів та їх похідних. Приклад такого рівняння – рівняння пов'язане з вивченням процесу розчину газу у рідині.

Широкий клас задач математичної фізики описується диференціальними рівняннями у часткових похідних, які для

випадку двох аргументів мають вид:  $\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = a \frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial x^\beta}$ . Подібні

рівняння повинні доповнюватися відповідними початковими та крайовими умовами. У вказаний вид рівнянь входять широко відомі рівняння дифузії ( $\alpha = 1, \beta = 2$ ) та хвильове рівняння ( $\alpha = 2, \beta = 2$ ). При нецілих порядках диференціальних операторів ми маємо справу з диференціальними рівняннями у часткових похідних дробового порядку, та описують процеси у фрактальних середовищах.

Дробові диферінтеграли проникли у фундаментальні закони природознавства (механіку, електродинаміку), математичну біологію, економіку та фінанси. В останні декілька десятиліть доказана корисність дробового числення у різних областях науки, таких як класична та квантова фізика, теорія поля, фізика твердого тіла, динаміка рідини, турбулентність, загальна хімія, нелінійна біологія, стохастичний аналіз, нелінійна теорія управління, обробка сигналів.

#### **4.6.2. Математичний аналіз нецілих порядків – основа математичних моделей динамічних систем у фрактальних середовищах**

Математичний аналіз з використанням інтегродиференціальних операторів нецілих порядків або дробове числення (Fractional Calculus) має більш ніж трьохсотлітню історію. Перша згадка про похідні нецілого порядку містяться у листуванні Я. Бернуллі та Г. Лейбніца. Останній, зокрема, у листі до Г. Лопіталя, датованому 1695 р., обговорюючи можливості диференціалів порядку  $1/2$ , заявив, що це парадокс, який здається, з якого одного часу випливають корисні результати. У 18 столітті дробовому численню не приділялося особливої уваги. Відомо лише декілька публікацій, пов'язаних з іменами Ейлера та Лагранжа. Усе XIX та перша половина XX століття виявились періодом накопичення результатів та формування дробового числення як самостійного розділу математичного аналізу. Відомі публікації по цьому питанню відомих математиків, механіків та фізиків: Лапласа, Фур'є, Абеля, Ліувілля, Рімана, Грюнвальда, Хевісайда, Харді, Зігмунда, Куранта та ін. Великий вклад у розвиток математичного аналізу нецілих порядків вніс відомий російський математик, президент Московського математичного товариства А.В. Летніков. Його докторська дисертація та цикл робіт, опублікованих у Математичному збірнику, присвячені теорії диференціювання дробового порядку, історичному розвитку цього напрямку математики, застосуванню теорії дробового числення до інтегрального числення та розв'язку диференціальних рівнянь. Перші публікації А.В. Летнікова по дробовому численню відносяться до 1868-1872 рр. Новий спалах інтересу співтовариства до дробового числення, відбувся після публікації книги «Дробове

числення» (К.В. Oldham, J. Spanier) у 1974 р. У цій книзі систематично викладена теорія дробового числення, а також розглянуті області його застосування. Дробовому численню присвячений ряд науково-технічних конференцій та семінарів, організовані спеціальні журнали. З'являються тематичні випуски різних журналів, присвячених застосуванням дробового числення у різних областях науки, техніки, природознавства.

У теперішній час дробове числення знаходиться у процесі бурного розвитку і у теоретичному плані і у його застосуваннях [11]. Можна сказати, що цей розділ математичного аналізу перетворився в інструмент математичного моделювання найскладніших динамічних процесів у звичайних та фрактальних середовищах, який дозволяє вирішувати на новій основі самі різні задачі аналізу, синтезу, ідентифікації, діагностики, створення нових систем управління.

У дробовому математичному аналізі часто зустрічаються функції, які є узагальненням широко відомих та таких, які застосовуються у класичному математичному аналізі, зокрема, експоненціальної функції та факторіала. Розглянемо деякі з них.

*Гамма-функція* визначається наступним чином:

$$\Gamma(\zeta) \begin{cases} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\zeta-1} dt, \operatorname{Re} \zeta > 0, \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{\zeta-1}}{x^{\zeta+1} (\zeta+2) \dots (\zeta+n-1)} \quad \zeta - \text{будь-яке} \end{cases}$$

У якості аргументів Гамма-функції можуть бути будь-які числа (дійсні та комплексні, цілі та нецілі). Гамма-функція для цілих додатних  $x = n$  пов'язана з факторіалом наступним чином:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n > 0 - \text{ціле.}$$

Гамма-функція має розриви виду  $\pm \infty$  у нулі та при цілих від'ємних значеннях аргументу. Однак, у дробовому аналізі частіше всього зустрічаються значення Гамма-функції у степені  $-1$  або відношення Гамма-функцій різних аргументів, які є неперервними функціями на множині значень аргументів, які розглядаються.

Поряд з розглянутою Гамма-функцією знаходять застосування декілька функцій, тісно пов'язаних з нею. До них,

зокрема, відносяться неповна Гамма-функція, Бета-функція та  $\psi$ -функція.

Функція Міттаг-Лефлера задається на множині значень комплексного аргументу  $z$  за допомогою нескінченного ряду та залежить від двох параметрів  $\alpha$  та  $\beta$  :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \alpha \in \mathbf{R}_+, \beta \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{C}.$$

Наведена формула для випадку  $\alpha = \beta = 1$  визначає експоненціальну функцію  $e^z$  :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Функції Міттаг-Лефлера грають важливу роль у розв'язанні інтегро-диференціальних рівнянь нецілих порядків.

Багато із спеціальних функцій можуть бути виражені через функції Міттаг-Лефлера з різними параметрами. До таких функцій, зокрема, відносяться гіперболічний синус та косинус, функції Міллера-Росса, Работнова та ін.

Розглянемо диференціювання з нецілим порядком деяких елементарних функцій.

Степеневі функції. Запишемо для степеневі функції  $x(t) = t^k$  добре відомі формули диференціювання з порядками  $1, 2, \dots, n$  :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= kt^{k-1}, \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= k(k-1)t^{k-2}, \\ &\dots \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &= k(k-1)\dots(k-n+1)t^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!} t^{k-n}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Аналіз формули для похідної порядку  $n$  (останній рядок виразу (4.14)) показує, що немає ніяких перешкод для того, щоб порядок диференціювання був відмінним від цілого. Для цього необхідно використати Гамма-функцію, яка узагальнює факторіальну функцію на випадок нецілочисельних аргументів.



Виконавши заміну цілого порядку диференціювання  $n$  на дробовий  $\beta$  та вводячи Гамма-функцію, отримаємо наступну формулу диференціювання степеневі функції з дробовим порядком:

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)} t^{k-\beta}. \quad (4.15)$$

Вираз (4.15) може розглядатися як функція трьох аргументів:  $t$ ,  $k$  та  $\beta$  і, таким чином, дає більш детальний опис функції та всіх її похідних та інтегралів (як цілого, так і дробового порядків).

Експоненціальні функції. Нехай задана експоненціальна функція  $y(t) = e^{kt}$ . Диференціюючи її з порядками  $1, 2, \dots, n$ , отримаємо:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k e^{kt},$$

...

$$(4.16)$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = k^n e^{kt}.$$

Вираз похідної порядку  $n$  узагальнюється на дробові порядки шляхом простої заміни  $n$  на  $\beta$ :

$$\frac{d^\beta y(t)}{dt^\beta} = k^\beta e^{kt}. \quad (4.17)$$

Необхідно відмітити, що диферінтеграли дробових порядків експоненціальної функції з від'ємними показниками є функціями комплексного змінного.

Існує і інше визначення диферінтегралів експоненціальної функції. Диферінтеграли експоненціальної функції визначаються виразами:

$$\frac{d^\beta e^{d-bt}}{dt^\beta} = \frac{e^{d-bt}}{t^\beta} \Gamma(\beta, -bt). \quad (4.18)$$

Логарифмічні функції. Перша похідна натурального логарифму, як відомо, є гіперболою:

$$\frac{d \ln t}{dt} = \frac{1}{t}. \quad (4.19)$$

Формула  $n$ -ної похідної натурального логарифму має вид:

$$\frac{d^n \ln t}{dt^n} = (-1)^{r-1} \frac{1}{t^n}. \quad (4.20)$$

Якщо основа логарифму дорівнює  $a$ , ці вирази незначно змінюються та приймають вид:

$$\frac{d \log_a t}{dt} = \frac{1}{t \ln a}, \quad (4.21)$$

$$\frac{d^n \log_a t}{dt^n} = (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{1}{t^n \ln a}. \quad (4.22)$$

Диферінтеграли логарифмічної функції визначаються наступним виразом:

$$\frac{d^\beta \ln t}{dt^\beta} = t^{-\beta} (\ln t + \psi(1) - \psi(1 - \beta)) \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)}. \quad (4.23)$$

Синусоїдальні функції. Поступаючи аналогічно, отримаємо наступну систему формул цілочисельного та дробового диференціювання синусоїдальної функції  $z(t) = \text{Sin}(\omega t + \alpha)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \omega \text{Cos}(\omega t + \alpha) = \omega \text{Sin}(\omega t + \alpha + \pi/2), \\ \frac{d^2 z(t)}{dt^2} &= \omega^2 \text{Sin}(\omega t + \alpha + 2\pi/2), \\ &\dots \\ \frac{d^n z(t)}{dt^n} &= \omega^n \text{Sin}(\omega t + \alpha + n\pi/2), \\ \frac{d^\beta z(t)}{dt^\beta} &= \omega^\beta \text{Sin}(\omega t + \alpha + \beta\pi/2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Вираз для похідної синусоїдальної функції порядку  $\beta$ , який наведений в останньому рядку формули (4.24), дозволяє побудувати графічний образ синусоїдальної функції та усіх її похідних, як цілого, так і дробового порядків.

Широко розповсюдженим визначенням похідних та інтегралів нецілих порядків є визначення Рімана-Ліувілля, яке є узагальненням на нецілі порядки інтегральної формули Коші, відомої із класичного математичного аналізу:

$$\int_a^{t_n} \int_a^{t_3} \dots \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau. \quad (4.25)$$

Із введенням похідних та інтегралів нецілих порядків стирається різка межа між похідними та інтегралами: інтеграли можна трактувати як похідні від'ємного порядку, а похідні – як інтеграли від'ємного порядку. У математичному аналізі нецілих порядків з'явився новий термін: диферінтеграл. Узагальнення інтегральної формули Коші на нецілі порядки приводить до наступним визначенням диферінтегралів дробового (нецілого) порядків:

$$I_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau, \quad (4.26)$$

$$D_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau,$$

де:  $\beta, a \in \mathbf{R}, n-1 < \beta < n$ .

$I_{a,t}^\beta$  – інтегральний оператор порядку  $\beta$ ,

$D_{a,t}^\beta$  – диференціальний оператор порядку  $\beta$ .

Вирази (4.26) є визначення Рімана-Ліувілля інтегралів та похідних дробового порядку. Для того, щоб уникнути різночитання у визначеннях порядків диференціальних та інтегральних операторів нецілих порядків, у подальшому буде використаний символ похідної  $D$ , порядок якого  $\beta$  буде додатним для похідної та від'ємним для інтегралу відповідного порядку.

Відомі також визначення інтегро-диференціальних операторів за Вейлем, Капуто та ін. Найбільший інтерес для практичних застосувань представляє визначення похідних нецілого порядку за Капуто. Воно відрізняється від визначення Рімана-Ліувілля тим, що функція спочатку підлягає диференціюванню з найменшим цілим порядком  $n$ , який перевищує нецілий порядок  $\beta$ , а потім результат інтегрується з порядком  $n - \beta$ :

$${}_C D_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau, \quad (4.27)$$

де:  $\beta, a \in \mathbf{R}, n-1 < \beta < n$ .

В інтегралі Рімана-Ліувілля спочатку виконується інтегрування, а потім диференціювання (див. (4.26)). Перевагою визначення дробової похідної за Капуто є більш природний для практичних застосувань розв'язок проблеми початкових умов при розв'язку інтегро-диференціальних рівнянь нецілих порядків.

Необхідно відмітити, що використовувати схожість формул необхідно з великою обережністю, оскільки властивості похідних (як і інтегралів) нецілого порядку суттєво відрізняються від їх цілочисельних аналогів. Так, відомо, що цілочисельні похідні констант тотожно дорівнюють нулю. Однак, у загальному випадку, похідні дробових порядків за Ріманом-Ліувіллем від констант є функціями відповідних аргументів (наприклад, часу).

#### ***Питання для самоконтролю***

1. Класифікація математичних моделей динамічних систем.
2. Аналогова модель диференціального рівняння.
3. Сутність задачі оптимального керування.
4. Класифікація математичних моделей динамічних систем із розподіленими параметрами.
5. Крайові задачі.
6. Реалізація методу кінцевих різниць за допомогою електричної моделі.
7. Навести приклади самоподібних об'єктів.
8. Визначення похідної дробового порядку за Капуто.

**5.1. Перетворення Фур'є, Лапласа**

Перетворення Лапласа отримало широке розповсюдження при дослідженні неперіодичних перехідних процесів у електротехніці, механіці та інших областях, пов'язаних з розв'язанням звичайних диференціальних рівнянь. Перетворення Фур'є використовується переважно для дослідження періодичних процесів. Глибокий внутрішній зв'язок цих перетворень призвів до розвитку спектральних та частотних методів аналізу, особливо у автоматичному керуванні, що надало цим перетворенням класичний характер [11, 18].

Розглянемо детально кожне перетворення.

*Перетворення Фур'є.* Перетворення Фур'є застосовується до неперіодичних функцій та сигналам, які задовольняють обмеженням [4, 11]:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) &= 0, \\ \int_0^{\infty} f(t) \cdot \exp(-s_0 t) dt &= M < \infty. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Формально перетворення Фур'є може бути отримано з ряду Фур'є граничним переходом при  $T \rightarrow \infty$ .

Пряме та зворотне перетворення Фур'є має вигляд:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt, \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega \end{aligned} \tag{5.2}$$

Перший з виразів (5.2) зіставляє сигналу  $f(t)$  у часовій області його зображення  $F(j\omega)$  у частотній області. Другий відновлює сигнал за його частотним спектром  $F(j\omega)$ .

Обидва перетворення можна об'єднати та отримати рівняння, яке називають подвійним інтегралом Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt \right) \cdot \exp(j\omega t) d\omega. \quad (5.3)$$

*Перетворення Лапласа.* Перетворення Лапласа є одним з найбільш розповсюджених операційних методів, який дозволяє аналізувати динамічні системи у перехідному режимі [11, 18]. Розглядаються два простори: простір оригіналів (сигнальний простір) та простір зображень (зображення за Лапласом). Математичною моделлю перехідного процесу динамічної системи у першому просторі є інтегро-диференціальні рівняння. У другому (перетвореному) просторі математичною моделлю перехідного процесу є алгебраїчні рівняння. Теорія електричних кіл вже давно використовує перетворення Лапласа.

Будь-який обмежений однозначний сигнал  $f(t)$  (функція часу або іншої незалежної змінної) може бути перетворений у зображення за Лапласом за допомогою наступного виразу:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad (5.4)$$

де:  $p = s + j\bar{\omega}$  – так звана комплексна частота,  $F(p)$  – зображення за Лапласом сигналу  $f(t)$ . Іноді використовується наступне перетворення:

$$\tilde{F}(p) = p \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad (5.5)$$

Це так зване перетворення Хевісайда. Обидва приведені визначення мають різні переваги та недоліки. Так, перетворення Хевісайда постійного сигналу також є постійною величиною, це природно та зручно для застосувань. З іншої сторони, перетворення Лапласа добре підходить для оцінювання частотного спектру сигналу.

Вираз (5.5) є прямим перетворенням Лапласа. Вихідний сигнал може бути відтворений за допомогою зворотного перетворення Лапласа, яке має наступний вид:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dt. \quad (5.6)$$

Необхідно відмітити, що замість оператора  $p$  у зарубіжних публікаціях часто використовується символ  $s$ .

Перетворення Лапласа визначається альтернативно у виді  $\mathbb{L}\{f(t)\}$ . У цьому випадку операція знаходження відповідного сигналу  $f(t)$  (зворотне перетворення Лапласа) позначається як  $\mathbb{L}^{-1}\{F(p)\}$ :

$$f(t) = \mathbb{L}^{-1}\{F(p)\}. \quad (5.7)$$

Для позначення відповідності між сигналом (оригіналом) та його зображенням за Лапласом використовується символ  $\Leftrightarrow$ .

Розглянемо властивості перетворення Лапласа.

Лінійність. Одним із найважливіших властивостей перетворення Лапласа є лінійність цього перетворення.

Нехай  $f_r(t) \Leftrightarrow F_r(p)$ ,  $r := 1, \dots, m$ . Тоді для  $y(t) = \sum_{r=1}^m a_r \cdot f_r(t)$

має місце наступний вираз:

$$Y(p) = \sum_{r=1}^m a_r \cdot F_r(p),$$

де:  $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$ , і  $a_r$  – постійні коефіцієнти.

Згадана властивість лінійності означає, що перетворення Лапласа кінцевої лінійної комбінації функцій  $f_r(t)$  є такою ж комбінацією зображень за Лапласом у просторі зображень.

Перетворення Лапласа диференціальних операторів. Нехай  $F(p) \Leftrightarrow f(t)$  і  $f(t)$  та її похідні до  $(n-1)$ -го порядку існують та неперервні справа від  $t = 0$  ( $0_+$ ). Припустимо також, що початкові значення функції  $f(t)$  та її похідних відомі:

$$f^k(0_+) = f_0^k, k := 0, \dots, n-1.$$

Тоді:

$$f^k(t) \Leftrightarrow p^k \left[ F(p) - \sum_{i=1}^k f^{i-1}(0_+) / p^i \right].$$

Якщо усі початкові значення дорівнюють нулю  $f_i(0_+) \equiv 0, (i, \dots, n-1)$ , то

$$f^k(t) \Leftrightarrow p^k F(p).$$

Перетворення Лапласа інтегральних операторів. Наступні дві інтегральні операції над сигналом  $f(t)$ :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

мають наступне операційне зображення:

$$F(p)/p,$$

$$F(0) + F(p)/p$$

відповідно. Таким чином,

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \Leftrightarrow F(p)/p,$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \Leftrightarrow F(0) + f(p)/p$$

Масштабне перетворення аргументу  $t$ .

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot F(p/a)$$

Зсув по аргументу  $t$ .

$$f(t - \tau) \Leftrightarrow F(p) \cdot e^{-p\tau}$$

Зсув по аргументу  $p$ .

$$F(p - p_0) \Leftrightarrow f(t) \cdot e^{p_0 t}$$

Згортка двох сигналів.

$$f(t) = x(t) * y(t) \Leftrightarrow F(p) = X(p) \cdot Y(p).$$

Тепер необхідно ввести функцію одиничного стрибка, яка грає важливу роль у математиці та технічних науках. Функція одиничного стрибка визначається наступним чином:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Добуток сигналу  $f(t)$  та функція одиничного стрибка  $\sigma(t)$  досить ефективний для опису перехідного процесу.

Іншою важливою функцією є Дельта-функція (Дірака)  $\delta(t)$ . Ця функція є узагальненою та має наступну фундаментальну властивість та визначення:

$$\delta(t) = 0, \text{ if } t \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - a) dt = f(a).$$

У таблиці 5.1 наведені приклади перетворень Лапласа деяких функцій.

Таблиця 5.1

№	Сигнал $f(t)$	Перетворення Лапласа $F(p)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\sigma(t)$	$1/p$
3	$e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{p+a}$
4	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
5	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
6	$e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
8	$t^\alpha, \text{ Re}(\alpha) > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
9	$t^\alpha \cdot e^{\lambda t}, \text{ Re}(\alpha) > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$

Продовження табл.5.1

№	Сигнал $f(t)$	Перетворення Лапласа $F(p)$
10	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$
11	$sh(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
12	$ch(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$

Відновлення вихідного сигналу може бути здійснено за допомогою зворотного перетворення Лапласа (5.6), або за допомогою так званої формули розкладення Хевісайда. Останній випадок має місце, коли зображення за Лапласом представляється у вигляді відношення двох поліномів від  $p$ :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \Leftrightarrow \quad (5.8)$$

$$\Leftrightarrow f(t) = \sum_{r=1}^n \frac{N(p_r)}{D'(p_r)} e^{p_r t}$$

У (5.8)  $D'(p_r)$  є значенням похідної  $\left. \frac{\partial D(p)}{\partial p} \right|_{p=p_r}$ . Цей вираз

повинен використовуватися, якщо  $m < n$  і корені полінома  $D(p)$ , а саме,  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , усі різні, та тільки один із них може бути рівним нулю. В останньому випадку знаменник містить множник  $p$ , тобто  $p \cdot D(p)$ , а  $D(p)$  більше не містить співмножника  $p$ . У цьому випадку використовується інша форма виразу (5.8):

$$F(p) = \frac{N(p)}{p \cdot D(p)} \Leftrightarrow f(t) = \frac{N(0)}{D(0)} + \sum_{r=1}^n \frac{N(p_r)}{p_r D'(p_r)} e^{p_r t}.$$

Необхідно вказати на тісний зв'язок перетворень Лапласа та Фур'є. Якщо одне із перетворень отримано, перехід до другого може бути виконаний взаємною заміною операторів  $p$  та  $j\omega$ .

## 5.2. Спектральні методи моделювання динамічних систем

Спектральний підхід (метод) лежить в основі цілих напрямів науки та техніки. Він використовується у техніці електро- та радіозв'язку, де розділення частот модульованих сигналів базується на різниці їх спектрів. Спектральний підхід також широко використовується для створення аналогових та цифрових фільтрів та для оцінювання викривлення сигналів у ході їх перетворення, наприклад, підсилення реальними підсилювачами [4, 10].

Схема застосування спектрального підходу достатньо проста. Сигнал спочатку представляється сукупністю гармонічних складових – гармонік – у вигляді тригонометричного ряду Фур'є. Для точного представлення сигналу необхідне нескінченне число гармонік, але на практиці воно завжди обмежене. Таке обмеження породжує хвилеподібний характер зміни сигналу та появи викидів, що відомо під назвою ефекту Гіббса.

Отримання сигналу у вигляді суми гармонічних складових отримало назву спектрального аналізу. Сумування гармонік сигналу та його наближене представлення у часовій області називається гармонічним синтезом сигналу.

Отже, спектральний підхід полягає у наступному. Спочатку отримують спектр заданого сигналу з великим числом гармонік. Доволі часто використовують тестові сигнали у вигляді прямокутних, трикутних, пилоподібних та інших імпульсів.

Для багатьох окремих видів сигналів (а до них відносяться більшість тестових сигналів) розклади у ряд Фур'є добре відомі та приводяться у будь-якому математичному довіднику (іноді у декілька різних формах). Це дозволяє відразу отримати необхідне число гармонік сигналу і, що особливо важливо, перевірити, наскільки адекватно сигнал, який синтезується, описує реальний сигнал.

Отже, у результаті гармонічного аналізу сигналу (або його прямого гармонічного синтезу) сигнал отримують у вигляді сукупності гармонічних сигналів – гармонік. У загальному випадку кожна гармоніка має свою амплітуду та фазу, і для їх отримання можна використовувати пряме перетворення Фур'є.

Отриманий спектр сигналу можна піддавати різним перетворенням, наприклад, частотній фільтрації. Отриманий після цього змінений спектр гармонік використовується (шляхом гармонічного синтезу) для відтворення викривленого (наприклад, після фільтрації) сигналу.

Простота спектрального підходу обманлива, оскільки він потребує доволі громіздких обчислень. Для швидкого їх виконання були створені різні прискорені методи спектрального аналізу та синтезу – наприклад, метод швидкого перетворення Фур'є.

Спектральний метод розрахунку перехідних процесів оснований на прямих та зворотних перетвореннях Фур'є.

Для функції  $f(t)$ , яка абсолютно інтегрується, пряме перетворення Фур'є запишеться:

$$\dot{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

а зворотне перетворення Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(j\omega)e^{j\omega t} dt.$$

Функція  $\dot{F}(j\omega) = F(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  називається спектральною характеристикою функції  $f(t)$ ,  $F(\omega)$  – її амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ),  $\varphi(\omega)$  – фазо-частотною характеристикою (ФЧХ).

При розрахунках перехідних процесів, коли для  $t < 0$   $f(t) = 0$ , застосовується одностороннє перетворення Фур'є:

$$\dot{F}(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Зворотнє перетворення Фур'є може бути записано також у тригонометричній формі. Для цього вираз під знаком інтегралу у зворотному перетворенні Фур'є представимо в алгебраїчній формі:

$$\dot{F}(j\omega)e^{j\omega t} = F(\omega) \cos(\omega t + \varphi) + jF(\omega) \sin(\omega t + \varphi).$$

Внаслідок парності функції  $F(\omega)$ , тобто  $F(\omega) = F(-\omega)$  та непарності функції  $\varphi(\omega)$ , тобто  $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$ , для пари частот  $\omega$

та  $-\omega$  у виразі зворотного перетворення косинусні складові будуть додаватися, а синусні відніматися.

Тоді зворотнє перетворення запишеться у вигляді:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega.$$

Спектральна характеристика  $\dot{F}(j\omega)$  може бути отримана, якщо у відображенні функції  $f(t)$  за Лапласом  $F(p)$  замість  $p$  покласти  $j\omega$ . Це дозволяє використовувати таблиці відповідності оригіналів та їх зображень за Лапласом. Для суми двох функцій  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$  спектральна характеристика дорівнює сумі спектральних характеристик складових функцій, тобто

$$\dot{F}(j\omega) = \dot{F}_1(\omega) + \dot{F}_2(\omega),$$

для добутку двох функцій спектральна характеристика дорівнює згортці спектральних характеристик співмножників, тобто

$$\begin{aligned} f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) = \dot{F}(j\omega) &\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \dot{F}_1(j\omega) \cdot \dot{F}_2(j\omega) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_1(\Omega) \dot{F}_2(\omega - \Omega) d\Omega \end{aligned}$$

### 5.2.1. Частотні характеристики динамічної системи

Залежності, які пов'язують амплітуду та фазу вихідного сигналу, називаються *частотними характеристиками* (ЧХ). Функція  $F(j\omega) = A(\omega)e^{j\alpha(\omega)}$  називається спектральною або частотною характеристикою функції  $f(t)$ , так як вона представляє собою неперервний спектр функції  $f(t)$  [4, 5, 10].

Позначення  $A(\omega)$  та  $\alpha(\omega)$  показують, що модуль  $A$  та аргумент  $\alpha$  величини  $F(j\omega)$  є функціями кутової частоти  $\omega$ .

Неперіодична функція  $f(t)$  може бути представлена як сума нескінченно великого числа гармонічних складових з нескінченно малими амплітудами  $\frac{1}{2\pi} A(\omega) d\omega$  та з частотами, які займають увесь діапазон від  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega.$$

Величина  $A(\omega)$ , яка характеризує залежність амплітуди від частоти, називається амплітудно-частотною характеристикою. Величина  $\alpha(\omega)$ , яка характеризує залежність початкової фази  $\psi = \pi/2 + \alpha$  від частоти, називається фазо-частотною характеристикою.

Якщо частотну характеристику представити у вигляді

$$F(j\omega) = A(\omega)e^{j\alpha(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

то величина  $P(\omega)$  називається дійсною частотною характеристикою, а величина  $Q(\omega)$  – уявною частотною характеристикою,  $A(\omega)$  – модуль (амплітуда)  $F(j\omega)$ ,  $\alpha(\omega)$  – фаза аргументу  $F(j\omega)$ .

Амплітуда, фаза, дійсна та уявна частини частотної характеристики є функціями частоти, тому частотна характеристика використовується та графічно представляється у вигляді амплітудно-фазової, дійсної, уявної, амплітудної та фазової частотних характеристик.

У теорії автоматичного управління розглядаються та використовуються наступні частотні характеристики динамічних ланок:

1. Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)

$$f_1(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}.$$

2. Фазочастотна характеристика (ФЧХ)

$$f_2(\omega) = \alpha(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

3. Дійсна частотна характеристика (ДЧХ)

$$f_3(\omega) = P(\omega) = |F(j\omega)| \cos \alpha(\omega).$$

4. Уявна частотна характеристика (УЧХ)

$$f_4(\omega) = Q(\omega) = |F(j\omega)| \sin \alpha(\omega).$$

5. Амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ), яка визначається як годограф (слід руху кінця) вектора  $\vec{F}(j\omega)$ ,

побудований на комплексній площині при зміні частоти від 0 до  $\infty$ .

Якщо  $F(j\omega)$  зобразити вектором на комплексній площині, то при зміні  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  його кінець буде викреслювати криву, яка називається годографом вектора  $F(j\omega)$ , або амплітудно-фазовою частотною характеристикою (АФЧХ) (рис. 5.1).

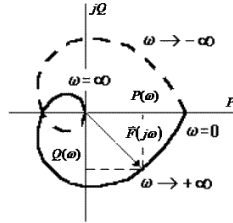


Рис. 5.1. Амплітудно-фазова частотна храктеристика

Гілка АФЧХ при зміні  $\omega$  від  $-\infty$  до 0 можна отримати дзеркальним відображенням даної кривої відносно дійсної осі.

На рис. 5.2 показані частотні характеристики деякої динамічної ланки.

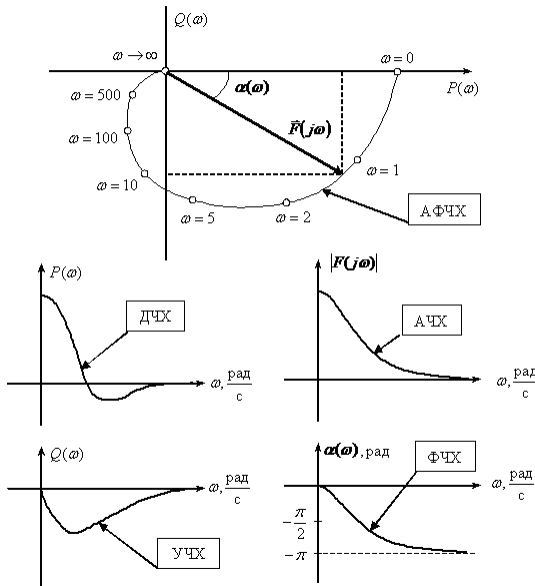


Рис. 5.2. Частотні характеристики динамічної ланки

В ТАУ [16] широко використовується логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ) (рис. 5.3): логарифмічна амплітудна ЧХ (ЛАЧХ)  $L(\omega)$  та логарифмічна фазова ЧХ (ЛФЧХ)  $\alpha(\omega)$ . Вони отримуються шляхом логарифмування передатної функції:

$$\begin{aligned} \ln[F(j\omega)] &= \ln[A(\omega)e^{j\alpha(\omega)}] = \ln[A(\omega)] + \ln[e^{j\alpha(\omega)}] = \\ &= \ln[A(\omega)] + \alpha(\omega) \end{aligned}$$

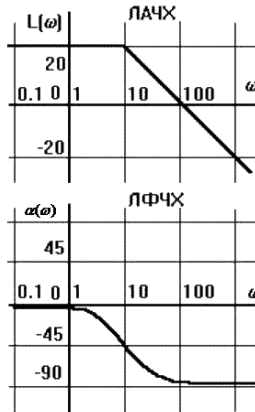


Рис. 5.3. Логарифмічні частотні характеристики

ЛАЧХ отримують з першого доданку, який із міркувань масштабування множиться на 20, і використовують не натуральний логарифм, а десятковий, тобто  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ . Величина  $L(\omega)$  відкладається по осі ординат у децибелах. Зміна рівня сигналу на 10 дБ відповідає зміні потужності у 10 разів. Так як потужність гармонічного сигналу  $P$  пропорційна квадрату його амплітуди  $A$ , то зміні сигналу у 10 разів відповідає зміна його рівня на 20 дБ, так як

$$\lg(P_2 / P_1) = \lg(A_2^2 / A_1^2) = 20 \lg(A_2 / A_1).$$

По осі абсцис відкладається частота  $\omega$  у логарифмічному масштабі. Тобто одиничним проміжкам по осі абсцис відповідає зміна  $\omega$  у 10 раз. Такий інтервал називається декадою. Так як  $\lg(0) = -\infty$ , то вісь ординат проводять довільно.

ЛФЧХ, яку отримують із другого доданку, відрізняється від ФЧХ тільки масштабом по осі  $\omega$ . Величина  $\alpha(\omega)$  відкладається по



осі ординат у градусах або радіанах. Для елементарних ланок вона не виходить за межі:  $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$ .

ЧХ є вичерпнутими характеристиками системи. Знаючи ЧХ системи можна відновити її передатну функцію та визначити параметри.

Знаючи передатну функцію ланки  $F(p)$  легко отримати усі її частотні характеристики. Для цього необхідно підставити у неї  $j\omega$  замість  $p$ , отримаємо АФЧХ  $F(j\omega)$ . Потім необхідно виразити з неї ДЧХ  $P(\omega)$  та УЧХ  $Q(\omega)$ . Після цього перетворюють АФЧХ у показникові форму та отримують АЧХ  $A(\omega)$  та ФЧХ  $\alpha(\omega)$ , а потім визначають вираз ЛАЧХ  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$  (ЛФЧХ відрізняється від ФЧХ тільки масштабом осі абсцис).

Розглянемо частотні характеристики деяких типових ланок.

*Безінерційна ланка.*

Передатна функція:  $F(p) = k$ .

АФЧХ:  $F(j\omega) = k$ .

ДЧХ:  $P(\omega) = k$ .

УЧХ:  $Q(\omega) = 0$ .

АЧХ:  $A(\omega) = k$ .

ФЧХ:  $\alpha(\omega) = 0$ .

ЛАЧХ:  $L(\omega) = 20 \lg k$ .

Деякі ЧХ показані на рис. 5.4. Ланка пропускає усі частоти однаково із збільшенням амплітуди у  $k$  раз і без зсуву по фазі.

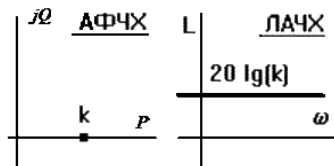


Рис. 5.4. Частотні характеристики безінерційної ланки

*Інтегруюча ланка.*

Передатна функція:  $F(p) = k / p$ .

Розглянемо окремий випадок, коли  $k = 1$ , тобто  $F(p) = 1 / p$ .

$$\text{АФЧХ: } F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2}.$$

$$\text{ДЧХ: } P(\omega) = 0.$$

$$\text{УЧХ: } Q(\omega) = -1/\omega.$$

$$\text{АЧХ: } A(\omega) = 1/\omega.$$

$$\text{ФЧХ: } \alpha(\omega) = -\pi/2.$$

$$\text{ЛАЧХ: } L(\omega) = 20\lg(1/\omega) = -20\lg(\omega).$$

ЧХ показані на рис. 5.5. Усі частоти ланка пропускає із запізненням по фазі на  $90^0$ . Амплітуда вихідного сигналу збільшується при зменшенні частоти, та зменшується до нуля при рості частоти (ланка «завалює» високі частоти). ЛАЧХ представляє собою пряму, яка проходить через точку  $L(\omega) = 0$  при  $\omega = 1$ . При збільшенні частоти на декаду ордината зменшується на  $20\lg 10 = 20$  дБ, тобто нахил ЛАЧХ дорівнює  $-20$  дБ/дек (децибел на декаду).

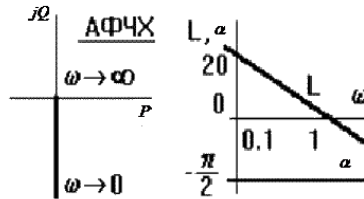


Рис. 5.5. Частотні характеристики інтегруючої ланки

*Аперіодична ланка.*

При  $k = 1$  отримаємо наступні вирази ЧХ:  $F(p) = \frac{1}{Tp + 1}$ ;

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1 - j\omega T}{1 + (\omega T)^2};$$

$$P(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega T)^2};$$

$$Q(\omega) = -\frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2};$$

$$\alpha(\omega) = \alpha_1 - \alpha_2 = -\arctg(\omega T);$$

$$A(\omega) = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}};$$

$$L(\omega) = 20 \lg(A(\omega)) = -10 \lg(1 + (\omega T)^2).$$

Тут  $A_1$  та  $A_2$  – амплітуди чисельника та знаменника ЛФЧХ;  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  – аргументи чисельника та знаменника.

ЧХ показані на рис. 5.6. АФЧХ є півколо радіусом  $1/2$  з центром у точці  $P=1/2$ . При побудові асимптотичної ЛАЧХ вважають, що при  $\omega < \omega_1 = 1/T$  можна знехтувати  $(\omega T)^2$  у виразі для  $L(\omega)$ , тобто  $L(\omega) \approx -10 \lg 1 = 0$ . При  $\omega > \omega_1$  нехтують одиницею у виразі в дужках, тобто  $L(\omega) \approx -20 \lg(\omega T)$ . Тому ЛАЧХ проходить вздовж осі абсцис до спряженої частоти, потім – під нахилом  $-20$  дБ/дек. Частота  $\omega_1$  називається спрягаючою частотою. Максимальна відмінність реальних ЛАЧХ від асимптотичних не перевищує 3 дБ при  $\omega = \omega_1$ .

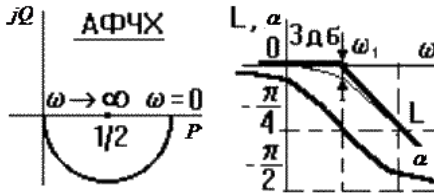


Рис. 5.6. Частотні характеристики аперіодичної ланки

ЛФЧХ асимптотично прямує до нуля при зменшенні  $\omega$  до нуля (чим менша частота, тим викривлення сигналу за фазою) та до  $-\pi/2$  при збільшенні  $\omega$  до нескінченності. Перегин у точці  $\omega = \omega_1$  при  $\alpha(\omega) = -\pi/4$ . ЛФЧХ усіх аперіодичних ланок мають однакову форму та можуть бути побудовані за типовою кривою з паралельним зсувом вздовж осі частот.

*Інерційні ланки другого порядку.*

При  $k = 1$  передатна функція ланки: 
$$F(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\rho T p + 1}.$$

Із-за складності виводу виразів для частотних характеристик розглянемо їх без доведень, вони показані на рис. 5.7.

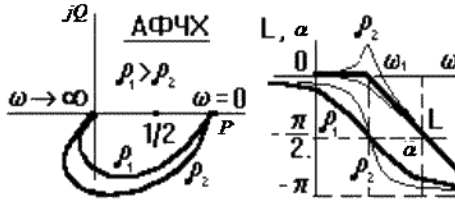


Рис. 5.7. Частотні характеристики ітераційної ланки другого порядку

Асимптотична ЛАЧХ коливальної ланки до спрягаючої частоти  $\omega_1 = 1/T_1$  співпадає з віссю абсцис, при подальшому збільшенні частоти йде з нахилом  $-40$  дБ/дек. Тобто високі частоти коливальна ланка «закручує» сильніше, ніж аперіодична ланка.

Реальна ЛАЧХ при  $\omega \approx \omega_1$  значно відрізняється від асимптотичної. Ця відмінність тим суттєвіша, чим менший коефіцієнт демпфірування  $\rho$ . Точну криву можна побудувати, скориставшись кривими відхилень, які приводяться у довідниках. У крайньому випадку  $\rho = 0$  отримаємо консервативну ланку, у якій при  $\omega \approx \omega_1$  амплітуда вихідних коливань прямує до нескінченності (рис. 8).

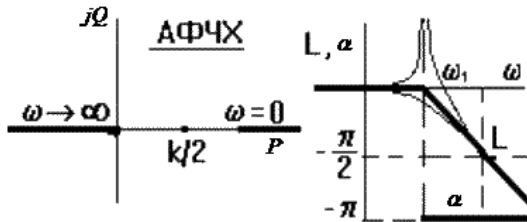


Рис. 5.8. Частотні характеристики консервативної ланки

ЛФЧХ при малих частотах асимптотично прямує до нуля. При збільшенні частоти до нескінченності вихідний сигнал повертається за фазою відносно вхідного на кут, який прямує у межі до  $-180^\circ$ . ЛФЧХ можна побудувати за допомогою шаблона, але для цього необхідний набір для різних коефіцієнтів демпфірування. При зменшенні коефіцієнта демпфірування АФЧХ наближається до осі абсцис, при цьому фаза вихідних коливань

стрибком змінюється від нуля до  $-180^{\circ}$  при переході через спрягаючу частоту (рис. 5.8).

### 5.2.2. Фазовий портрет динамічної системи

Поведінку системи з одним ступенем свободи (наприклад, маятника, що вільно коливається) зручно описувати за допомогою *фазової площини*. На цій площині по осі абсцис відкладається координата (наприклад, кут відхилення маятника), а по осі ординат – швидкість, тобто похідна від координати за часом. Точка, положення якої на фазовій площині в кожний момент часу відповідає стану (тобто координаті та швидкості) системи, називається *зображувальною точкою*. Лінія, яку з часом описує зображувальна точка на фазовій площині, називається *фазовою траєкторією*. Набір усіх можливих фазових траєкторій утворює *фазовий портрет* системи [17].

Отже, *фазовий портрет* – це зображення траєкторій динамічної системи в фазовому просторі.

Аналіз фазових портретів, тобто розв'язків, які отримують при виборі всіляких початкових умов, для вивчення динамічних систем є центральним моментом.

Так, розв'язок звичайного диференціального рівняння часто зручно зображати не у вигляді графіку  $y_0(t), y_1(t), \dots$ , а у фазовому просторі, на кожній з осей якого відкладаються значення кожної з найдених функцій. При такій побудові графіку аргумент  $t$  буде присутній на ньому лише параметрично. У випадку двох звичайних диференціальних рівнянь фазовий простір є координатною площиною, а розв'язок представляє собою криву, чи, по-іншому, траєкторію, яка виходить з точки, координати якої дорівнюють початковим умовам (рис. 5.9). Якщо система складається з  $n$  звичайних диференціальних рівнянь, то фазовий простір є  $N$ -мірним, при  $n > 3$  наочність втрачається, і для візуалізації фазового простору доводиться будувати його різні проекції чи звертатися до інших спеціальних прийомів (наприклад, відображенню Пуанкаре).

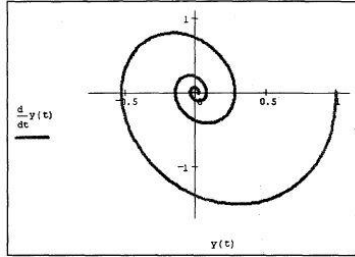


Рис. 1. Розв'язок рівняння  $\omega^2 \cdot y'' + \beta \cdot y' + y = 0$  на фазовій площині

Як правило, розв'язок задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем – задача добре розроблена і з обчислювальної точки зору доволі проста. На практиці частіше зустрічаються інші, більш складні задачі, зокрема, дослідження поведінки динамічної системи у залежності від початкових умов. При цьому у більшості випадків буває необхідним вивчити тільки асимптотичний розв'язок звичайного диференціального рівняння, тобто  $y(t \rightarrow \infty)$ , який називається аттрактором. Дуже наочним образом можна візуалізувати таку інформацію на фазовій площині завдячуючи тому, що існує всього декілька типів аттракторів, і для них можна побудувати чітку класифікацію.

З однієї сторони, кожний розв'язок буде виходити з точки, координати якої є початковими умовами, але, виявляється, для більшості звичайних диференціальних рівнянь цілі родини траєкторій будуть закінчуватися в одних і тих же аттракторах (стаціонарних точках чи граничних циклах). Множина розв'язків, обчислена для всіляких початкових умов, утворює фазовий портрет динамічної системи. З обчислювальної точки зору задача дослідження фазового портрету часто зводиться до звичайного сканування родин розв'язків звичайних диференціальних рівнянь при різних початкових умовах.

Для прикладу моделі гармонічного осцилятора, який розглядається, є єдина стаціонарна точка (аттрактор), на яку «накручується» розв'язок, з яких би початкових умов воно б не виходило. У теорії динамічних систем аттрактор такого типу називається фокусом.

Подальше ускладнення задач аналізу фазових портретів пов'язано з їх залежністю від параметрів, які входять у систему

звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, при плавній зміні параметра моделі може змінюватися розташування атракторів на фазовій площині, а також можуть виникати нові атрактори та припиняти своє існування старі. У першому випадку, при відсутності особливостей, буде відбуватися просте переміщення атракторів по фазовій площині (без змін їх типів та кількості), а в другому – фазовий портрет динамічної системи буде корінним чином перебудовуватися. Критичне поєднання параметрів, при яких фазовий портрет системи якісно змінюється, називається у теорії динамічних систем точкою біфуркації.

Фазові портрети служать для наочного відображення особливостей еволюції динамічної системи: стаціонарних точок, циклів, басейнів притягання. Кожен стан системи відповідає певній точці на фазовому портреті.

Для двовимірної системи фазовий портрет повністю відображає типи траєкторій, які можуть реалізуватися. Для системи більшої вимірності будуються проєкції фазових траєкторій на вибрану площину фазового простору.

Наприклад, маятнику, який здійснює гармонічні коливання, відповідає фазовий портрет у вигляді набору вкладених еліпсів (рис. 5.10). Видно, що максимальна швидкість маятника досягається тоді, коли його відхилення дорівнює нулеві. Навпаки, при максимальному відхиленні швидкість обертається в нуль.

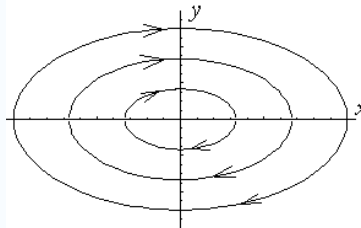


Рис. 5.10. Фазовий портрет маятника (візка в ямі):  $x$  – координата,  $y$  – швидкість

Перевернутому маятнику (або візку, що наїжджає на гірку) відповідає фазовий портрет у вигляді сім'ї гіпербол (рис. 5.11). Наприклад, фазові траєкторії типу *I* описують випадок, коли візок наїжджає на гірку з лівого боку, зупиняється і скочується назад. Фазові траєкторії типу *II* відповідають ситуації, коли візок

наїжджає на гірку з лівого боку, але тепер його початкової кінетичної енергії вистачає на те, щоб доїхати до вершини, після чого він скочується з правого схилу гірки, і т.д.

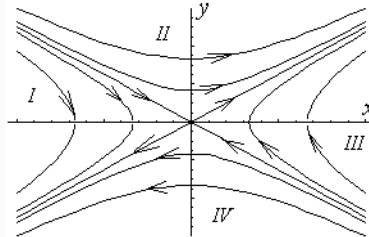


Рис. 5.11. Фазовий портрет перевернутого маятника (візка на гірці)

Лінії, що розділяють на фазовій площині області з якісно відмінним характером руху, називаються *сепаратрисами*. На рис. 5.11 сепаратриси – це асимптоти сім'ї гіпербол.

За допомогою фазової площини зручно характеризувати стійкість чи нестійкість руху системи або її положення рівноваги.

Говорять, що рух системи є *стійким* (або, точніше, *стійким за Ляпуновим*), якщо мала зміна початкових умов (початкових положення та швидкості системи) приводить до малої зміни її руху в будь-який момент часу (рис. 5.12). Так, рух маятника (для малих кутів відхилення, коли ще не проявляються нелінійні ефекти, зокрема, період коливань не залежить від їхньої амплітуди) є стійким за Ляпуновим.

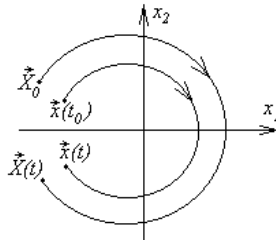


Рис. 5.12. Фазові траєкторії системи, стійкої за Ляпуновим

Навпаки, для перевернутого маятника точки по різні боки сепаратриси, якими б близькими вони не були в початковий момент, з часом розійдуться як завгодно далеко (рис. 5.13). Таким чином, мала зміна початкових умов такої системи в околі



сепаратриси може спричинити радикальні зміни руху системи (наприклад, візок, що мав переїхати через гірку, зупиниться і скотиться назад).

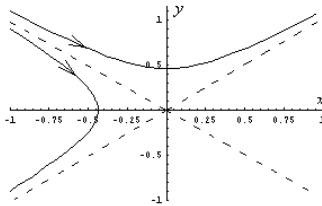


Рис. 5.13. Розбігання зображувальних точок на фазовому портреті перевернутого маятника

Інший приклад системи, нестійкої за Ляпуновим – це маятник з від’ємним тертям (така модель описує, наприклад, генератор електричних коливань на лампі або транзисторі в початкові моменти часу після увімкнення напруги живлення). Його фазовий портрет (рис. 5.14) являє собою набір спіралей, які з часом розкручуються, причому віддаль між сусідніми витками поступово зростає. Іншими словами, в такій системі відбуваються коливання, амплітуда яких зростає з часом (як показує розрахунок, за експоненціальним законом). Зрозуміло, що в такій системі віддаль між двома зображувальними точками, розташованими, наприклад, на сусідніх витках спіралі, з часом зростатиме (рис. 5.14).

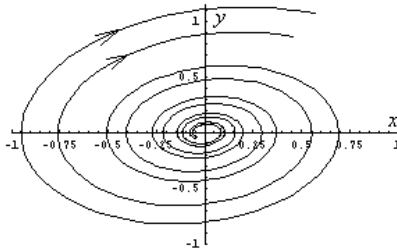


Рис. 5.14. Розбігання зображувальних точок на фазовому портреті маятника з від’ємним тертям

Отже, перевернутий маятник та маятник з від’ємним тертям належать до класу *нестійких систем*. У них мала зміна початкових умов з часом може привести до істотної зміни руху. В реальних ситуаціях, як уже вказувалося вище, початкові умови визначаються з експерименту і, отже, відомі з обмеженою точністю. Тоді

*нестійкість означає, що поведінку такої системи фактично неможливо передбачити* (як ми це бачили на прикладі більярду Синая). Точніше, можна прорахувати її рух наперед, але неточність початкових умов призведе до того, що для пізніх моментів часу цінність нашого розрахунку різко зменшиться, оскільки можлива похибка буде порядку самої розрахованої величини.

Таким чином, нестійкість руху системи може спричинити його *непередбачуваність*.

### 5.3. Перетворення Пухова

В основі операційного метода диференціальних перетворень Пухова лежить представлення сигналів степеневими рядами Тейлора або Маклорена [7, 27]. Пряме та зворотнє перетворення Пухова мають вигляд:

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[ \frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k} \right]_{t=t_i}, \quad (5.9)$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{H^k} X(k),$$

де перший із виразів (5.9) співставляє сигналу  $x(t)$  його операційне зображення –  $X(k)$ , яке є функцією дискретного цілочисельного індексу  $k$ , тоді як другий вираз здійснює реконструкцію сигналу у вигляді степеневого ряду.

Операції диференціювання сигналу в області оригіналів відповідає операція зсуву в області зображень:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow Y(k) = \frac{k+1}{H} X(k) \quad (5.10)$$

При інтегруванні сигналу із змінною верхньою межею операційне правило має вигляд:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow Y(k) = \frac{H}{k} X(k-1) + A\mathcal{B}(k), \quad (5.11)$$

де  $A$  – константа, яка визначається на основі початкових умов,  $\mathcal{B}(k)$  – операційне зображення одиниці – вектор, перша компонента якого дорівнює 1, а інші є нулями.

До числа значних переваг перетворень Пухова відносяться:

- чисельно-аналітичний характер, який дозволяє у загальному вигляді складати та перетворювати математичні моделі складних динамічних систем та одночасно швидко та просто переходити до чисельних реалізацій,
- простота зворотного операційного перетворення (відновлення сигналів),
- можливість оперативного контролю точності обчислень, яка дозволяє оцінити якість отриманого розв'язку.

Однак, у ряді застосувань диференціальні перетворення наштовхуються на достатньо серйозні труднощі, які перешкоджають їх ефективному використанню. Найбільш суттєвими з них є:

- реконструкція сигналів пов'язана з необхідністю сумування нескінченних степеневих рядів, що у обчислювальному відношенні незручно,
- збіжність степеневих рядів обмежена радіусом збіжності, що потребує постійного оцінювання достовірності реконструкції сигналу при обмеженні числа членів ряду,
- пряме операційне перетворення сигналів реальних динамічних систем пов'язане з необхідністю багаторазового диференціювання, що практично неможливо у зв'язку з шумами, високочастотними наводками та іншими завадами (властивість чутливості операцій диференціювання до помилок та випадковим флуктуаціям сигналів).

### 5.3.1. Основи методу диференціальних перетворень

Розглянемо детальніше метод диференціальних перетворень, на якому ґрунтується перетворення Пухова.

В методі диференціальних перетворень перехід із області оригіналів в область зображень відбувається за допомогою операції диференціювання [27].

Нехай функція  $x(t)$  дійсного аргументу  $t$  на відрізку від  $t = 0$  до  $t = H$  неперервна із своїми похідними та, крім того, може бути представлена степеневим рядом Тейлора, який рівномірно та абсолютно збігається та який зручно записати у вигляді:

$$x(t) = C_0 + \frac{t}{H} C_1 + \left(\frac{t}{H}\right)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{t}{H}\right)^k C_k, \quad (5.12)$$

де  $C_k$  – коефіцієнти ряду;  $t/H$  – безрозмірний аргумент. Величина  $H$  повинна бути меншою радіусу збіжності ряду  $\rho$ , який може визначатися за виразом

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{C_k}{H^k} : \frac{C_{k+1}}{H^{k+1}} \right| = H \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{C_k}{C_{k+1}} \right| \quad (5.13)$$

на основі ознаки збіжності Даламбера.

Коефіцієнти  $C_k$  ряду (5.12) можна визначити наступним чином. Диференціюючи ряд по  $t$ , маємо

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{H} C_1 + 2 \frac{t}{H^2} C_2 + 3 \frac{t^2}{H^3} C_3 + \dots, \\ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= \frac{2}{H^2} C_2 + 6 \frac{t}{H^3} C_3 + 12 \frac{t^2}{H^4} C_4 + \dots \end{aligned}$$

і т.д. Якщо покласти у написаних виразах  $t=0$ , то легко помітити, що

$$\begin{aligned} C_0 &= x(0), \quad C_1 = H \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right]_{t=0}, \quad C_2 = \frac{H^2}{2!} \left[ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right]_{t=0}, \\ \dots, \quad C_k &= \frac{H^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

де  $k!=1,2,3,\dots,k$  – факторіал причому умовно  $0!=1$ .

Із виразів (5.12) та (5.14) випливає, що, знаючи функцію  $x(t)$  та її похідні  $\frac{dx(t)}{dt}$ ,  $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ , ...,  $\frac{d^k x(t)}{dt^k}$  у точці  $t=0$ , можна визначити коефіцієнти  $C_0, C_1, \dots, C_k$  ряду (5.12). У свою чергу, знання коефіцієнтів  $C_0, C_1, \dots, C_k$  дає можливість визначити функцію  $x(t)$  у формі степеневого ряду.

Інакше кажучи, залежності (5.14) та (5.14) можна трактувати як пряме та зворотнє функціональні перетворення функції  $x(t)$  неперервного аргументу  $t$  у дискретну функцію  $X(k) = C_k$

дискретного аргументу  $k := 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Тоді вказані перетворення можна записати наступним чином:

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \Leftrightarrow x(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left( \frac{t}{H} \right)^k X(k), \quad (5.15)$$

де зліва від символу  $\Leftrightarrow$  стоїть пряме перетворення оригінала  $x(t)$  у зображення  $X(k)$ , а справа – зворотнє перетворення  $X(k)$  в  $x(t)$ . Значення функції  $X(k)$  при конкретних значеннях аргументу  $k$  називаються дискретами ( $X(0)$  – нульова дискрета,  $X(1)$  – перша дискрета і т.д.).

Перетворення (5.15) названі диференціальними тому, що для отримання зображення  $X(k)$  необхідно про диференціювати оригінал  $x(t)$ , а  $T$ -перетвореннями – тому, що відновлення оригіналу за зображенням відбувається за допомогою ряду Тейлора.

За аналогією з інтегральними перетвореннями Фур'є послідовність дискрет  $X(0), X(1), \dots, X(\infty)$  функції  $X(k)$  можна називати диференціально-тейлоровським або просто ДТ-спектром оригіналу  $x(t)$ .

Із застосуванням диференціальних перетворень вдається розповсюдити операційні методи дослідження на нелінійні об'єкти та об'єкти зі змінними параметрами.

#### **5.4. Некласичні операційні методи аналізу та моделювання систем**

Певний клас операційних числень породжується при використанні методів поліноміальних апроксимацій. В основі таких числень лежить представлення сигналу на кінцевому діапазоні зміни аргументу узагальненим поліномом за деяким системам лінійно-незалежних базисних функцій. Представлення сигналів узагальненими поліномами за деякою системою базисних функцій приводить до апроксимуючим поліноміальним спектрам (АПС), на основі яких можуть бути побудовані різні операційні числення. Такі операційні числення на відміну від класичних називаються S-численнями [7, 9, 11].

Пряме та зворотне перетворення для S-перетворень у матрично-векторному вигляді можна вивести із формул середньо-квадратичної апроксимації, а саме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial X_j} &= 0, \\ \sum_{i=1}^m w_{ij} X_i &= q_j, \\ j &:= 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.16)$$

де

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \int_a^b s_i(t) s_j(t) dt, \\ q_j &= \int_a^b x(t) s_j(t) dt, \end{aligned} \quad (5.17)$$

а  $\mu$  – середньоквадратична норма функції помилки, яка дорівнює

$$\mu = \int_a^b \left[ x(t) - \sum_{i=1}^m X_i s_i(t) \right]^2 dt \rightarrow \min(X_i).$$

Задача апроксимації сигналів, яка задана виразами (5.16, 5.17) в матрично-векторній формі має вигляд:

$$\mathbf{W} \cdot \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{Q}},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mm} \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

В (5.18) прийняті наступні позначення:  $\mathbf{W}$  – операційна матриця апроксимуючого поліноміального спектра,  $\vec{\mathbf{Q}}$  – операційний вектор спектра,  $\vec{\mathbf{X}}$  – апроксимуючий поліноміальний спектр сигналу.

Розв’язок задачі знаходження апроксимуючого поліноміального спектра сигналу у матрично-векторній формі визначається виразом:

$$\vec{\mathbf{X}} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \vec{\mathbf{Q}}. \quad (5.19)$$

Для системи лінійно-незалежних базисних функцій:

$$\vec{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{I}_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)$$

пряме та зворотне перетворення мають вигляд:

$$\vec{\mathbf{X}} = \left( \int_0^T \vec{\mathbf{S}}(t) \cdot \vec{\mathbf{S}}^*(t) dt \right)^{-1} \cdot \left( \int_0^T x(t) \cdot \vec{\mathbf{S}}(t) dt \right), \quad (5.20)$$

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m X_i \cdot s_i(t) = \vec{\mathbf{X}}^* \cdot \vec{\mathbf{S}}(t) = \vec{\mathbf{S}}^*(t) \cdot \vec{\mathbf{X}}. \quad (5.21)$$

У виразах (5.20) та (5.21) інтегрування виконується над кожним елементом векторів та матриць, \* – означає транспонування векторів.

Основне операційне правило для операції інтегрування записується наступним чином:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \vec{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}_s \cdot \vec{\mathbf{X}},$$

де  $\mathbf{P}_s$  – операційна матриця інтегрування, елементи якої залежать тільки від системи базисних функцій.

Подібний підхід дозволяє отримати цілий ряд особливостей, які усувають недоліки перетворень Пухова, зокрема:

- елементи диференціального спектра можна отримати, не застосовуючи багаторазове диференціювання сигналу, що дозволяє оцінювати зашумовані сигнали реальних динамічних систем,
- реконструкція сигналу відбувається на основі полінома кінцевої довжини з мінімально можливою для даного степеню полінома середньоквадратичною похибкою, при цьому відпадає необхідність сумування нескінченних рядів,
- зберігається чисельно-аналітичний характер операційних перетворень, що дозволяє досліджувати математичні моделі динамічних систем, варіювати системи базисних функцій та лише на кінцевому етапі отримати числовий результат.

Для S-перетворень існує цілий ряд правил операційної алгебри, які не залежать від вибору систем базисних функцій.

Основні правила операційної алгебри для S-перетворень наведені у таблиці 5.2.

Таблиця 5.2

Основні правила операційної алгебри

<i>Сигнали, математичні операції</i>	<i>Простір оригіналів</i>	<i>Простір операційних зображень</i>
Сигнали	$x(t), y(t), z(t)$	$X(i), Y(i), Z(i)$
Алгебраїчне сумування	$z(t) = x(t) \pm y(t)$	$\vec{Z} = \vec{X} \pm \vec{Y}$
Множення на константу	$y(t) = cx(t)$	$\vec{Y} = c\vec{X}$
Множення двох сигналів	$z(t) = x(t) \cdot y(t)$	$\vec{Z} = \vec{X} \otimes \vec{Y}$
Ділення двох сигналів	$z(t) = y(t) / x(t), x(t) \neq 0$	$\vec{Z} = \vec{X} \oslash \vec{Y}$
Інтегрування зі змінною верхньою межею	$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$	$\vec{Y} = \mathbf{P}_s \cdot \vec{X}$
Диференціювання	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$\vec{Y} = \mathbf{P}_s^{-1} \cdot \vec{X}$
Запізнювання за аргументом	$y(t) = x(t - \tau)$	$\vec{Y} = \mathbf{P}_\tau \cdot \vec{X}$
Суперпозиція функцій	$z(t) = y(x(t))$	$\vec{Z} = \vec{Y} \Xi \vec{X}$
Згортка	$z(t) = \int_0^t x(t_1) y(t - t_1) dt_1$	$\vec{Z} = \vec{X} \Theta \vec{Y}$

### 5.5. Wavelet-перетворення. Аналіз сигналів за допомогою Wavelet-перетворення

Останнім часом одержав широку популярність так званий вейвлет-аналіз [7]. Цей метод базується на розкладанні сигналу, який треба апроксимувати, за базисом, що складається з масштабуючих функцій та вейвлетів. Можливі два шляхи використання вейвлетів. По-перше, можна використовувати вейвлети як кінцевоелементний двопараметричний базис. А по-друге, можна застосовувати до апроксимуючих функцій вейвлет-



аналіз у повному обсязі, що припускає послідовне розкладання функції за послідовністю наборів базисних функцій (кожний з яких може розглядатися як базис підпростору), які підкреслюють усе більш тонкі особливості функції, яка апроксимується.

Термін вейвлет використовується для позначення набору функцій виду:

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad (5.22)$$

нормованих множителем  $|a|^{-1/2}$ , тобто набором функцій, породжених розтяганням з додатнім дійсним параметром  $a \in \mathbb{R}^+$  і зсувом на дійсне число  $b \in \mathbb{R}$  базисної функції  $\psi(x)$ , які часто називають материнським вейвлетом. Візуально материнський вейвлет виглядає як локальна осциляція, або хвиля, для якої основна енергія осциляції сконцентрована в невеликій області фізичного простору. Ця локалізація у фізичному просторі обумовлює локалізацію зображень. Параметр розтягання  $a$  інтуїтивно можна розглядати як параметр, що керує частотою  $\psi_{a,b}(x)$ . Параметр зсуву  $b$  просто зміщує вейвлет уздовж області визначення. На рис. 5.15 показано приклад вейвлетів.

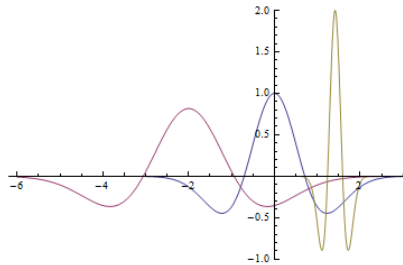


Рис. 5.15. Вейвлети, отримані з материнського вейвлета

$\psi(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2} = \psi_{1,0}(t)$ . На графіку зображено зліва направо

$$\psi_{3/2,-2}(t), \psi_{1,0}(t), \psi_{1/4,\sqrt{2}}(t)$$

Для визначення вейвлетів розглядають дві функції: масштабуючу функцію  $\phi(x)$  і власне вейвлет  $\psi(x)$ . Масштабуюча функція є розв'язком рівняння розтягу

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_k \phi(2x - k),$$

де  $\phi(x)$  нормується  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$ , а вейвлет  $\psi(x)$  визначається в термінах масштабуючої функції:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} g_k \phi(2x - k).$$

За допомогою розтягу і зсуву функцій  $\phi(x)$  і  $\psi(x)$  в  $L^2(\mathbb{R})$  будується ортонормований базис:

$$\begin{aligned} \phi_k^j(x) &= 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k), \\ \psi_k^j(x) &= 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k). \end{aligned}$$

Параметри  $j$  і  $k$  (дискретний аналог параметрів  $a$  і  $b$ ) можна варіювати з метою моделювання особливостей сигналу, який апроксимується, на різних масштабах шляхом регулювання  $j$ , і в будь-якій точці простору (за рахунок регулювання  $k$ ).

Розглянемо простір  $L^2(\mathbb{R})$  функцій  $f(t)$  [2]. Кожна функція  $f \in L^2(\mathbb{R})$  може бути представлена у вигляді ряду

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(t). \quad (5.23)$$

На основі (5.22) можна записати інтегральне вейвлет-перетворення:

$$\begin{aligned} V_{\psi} f(a, b) &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ab}^*(t) dt \end{aligned} \quad (5.24)$$

Коефіцієнти  $c_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle$  розкладання (5.23) функції  $f$  у ряд за вейвлетами, за аналогією перетворення Фур'є, можна визначити через інтегральне вейвлет-перетворення:

$$c_{jk} = V_{\psi} f \left( \frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right).$$

Отже, кожна функція з  $L^2(\mathbb{R})$  може бути отримана суперпозицією масштабних перетворень та зсувів базисного вейвлета, тобто є композицією «вейвлетних хвиль» (з коефіцієнтами, які залежать від номеру хвилі (частоти, масштабу) та від параметру зсуву (часу)).

При базисних параметрах  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  зворотнє вейвлет-перетворення записується за допомогою того ж базису (5.22), що й пряме:

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \iint \mathbb{V}_{\psi} f(a, b) \psi_{ab}(t) \frac{da db}{a^2}, \quad (5.25)$$

$C_{\psi}$  – нормалізуючий коефіцієнт (аналогічний коефіцієнту  $(2\pi)^{1/2}$ , який нормалізує перетворення Фур'є):

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty$$

( $\hat{\psi}$  – позначає Фур'є-образ).

Вейвлет-перетворення забезпечує частотно-часове представлення сигналів.

Для аналізу нестационарних сигналів бажано застосовувати вейвлет-перетворення, так як перетворення Фур'є не підходить для аналізу нестационарних сигналів.

Таким чином, на відміну від перетворення Фур'є, яке традиційно застосовують для аналізу сигналів, вейвлет-перетворення забезпечує двомірну розгортку одномірного сигналу, який досліджують, при цьому частота та координата розкладаються як незалежні змінні. В результаті з'являється можливість аналізувати властивості сигналу одночасно у фізичному (час, координата) та в частотному просторах. Сказане легко узагальнюється на багатомірні сигнали або функції.

Вейвлет-перетворення широко застосовують для аналізу сигналів та стиску інформації. Вейвлети необхідні у багатьох дослідженнях. Їх використовують у тих випадках, коли результат аналізу деякого сигналу повинен містити не лише просте перелічення його характерних частот (масштабів), але і відомості про визначені локальні координати, при яких ці частоти себе виявляють. Отже, аналіз і обробка нестационарних (в часі) або неоднорідних (у просторі) сигналів різних типів є основним полем

застосування вейвлет-аналізу. Область використання вейвлетів не обмежується аналізом властивостей сигналів і полів різноманітної природи, отриманих чисельно, в експерименті або при спостереженні. Вейвлети починають застосовуватися і для прямого чисельного моделювання як ієрархічний базис, який добре пристосований для опису динаміки складних нелінійних процесів, що характеризується взаємодією збурень у широких діапазонах просторових і часових частот.

### 5.6. Моделювання задач параметричної ідентифікації

При дослідженні динамічних систем найбільш часто виникають дві основні задачі: аналіз математичної моделі динамічної системи та параметрична ідентифікація моделі. Перша задача, яка називається прямою, полягає у тому, що відомі структура інтегро-диференціальної математичної моделі у вигляді системи диференціальних та алгебраїчних рівнянь, параметри рівнянь, необхідні початкові та крайові умови та зовнішні впливи. Необхідно визначити поведінку динамічної системи. Для чого необхідно знайти рішення системи рівнянь, які описують поведінку системи, яка досліджується. Друга задача полягає у знаходженні значень коефіцієнтів рівнянь математичної моделі при заданій структурі та відомому розв'язку та є оберненою по відношенню до першої. Задачі параметричної ідентифікації відносяться до числа задач математичної фізики та оптимального управління і є некоректними за Тихоновим задачами алгебри [7].

Розглянемо моделювання задач параметричної ідентифікації за допомогою методів апроксимуючих поліноміальних спектрів (АПС) та апроксимуючих імпульсних спектрів (АІС) на прикладі динамічної системи, яка описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$a_3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = u(t) \quad (5.26)$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$$

Функція управління  $u(t)$  і розв'язок  $y(t)$  разом з початковими умовами для  $y(t)$  припускаються відомими. Необхідно визначити параметри системи  $a_1, a_2, a_3$ . Для

визначеності припустимо, що функції рішення і управління абсолютно інтегровані на інтервалі зміни аргументу  $0 \leq t \leq T$ .

Для переходу в спектральну область спочатку перейдемо від диференціального рівняння (5.26) до інтегрального рівняння, про інтегрувавши обидві частини рівняння двічі.

$$\begin{aligned}
 a_3 \int_0^t \int_0^{t_1} \frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} d\tau dt_1 + a_2 \int_0^t \int_0^{t_1} \frac{dy(\tau)}{d\tau} d\tau dt_1 + a_1 \int_0^t \int_0^{t_1} y(\tau) d\tau dt_1 = \\
 = \int_0^t \int_0^{t_1} u(\tau) d\tau dt_1
 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Введемо вектора АПС або АІС для всіх сигналів, що входять в останній вираз, а також операційну матрицю інтегрування, та перейдемо в спектральну область:

$$\begin{aligned}
 a_3 \cdot (\bar{\mathbf{Y}} - y_0 \cdot \bar{\mathbf{1}} - y'_0 \cdot \bar{\mathbf{t}}) + a_2 \cdot (\mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{Y}} - y_0 \cdot \bar{\mathbf{t}}) + \\
 + a_1 \cdot \mathbf{P}^2 \cdot \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}^2 \cdot \bar{\mathbf{U}},
 \end{aligned} \quad (5.28)$$

де  $\bar{\mathbf{U}}$  – спектр правої частини рівняння (5.26),  $\mathbf{P}$  – операційна матриця інтегрування,  $\bar{\mathbf{1}}$  – операційне зображення одиниці,  $\bar{\mathbf{t}}$  – операційне зображення змінної  $t$ .

Спектральне рівняння (5.28) можна розглядати як систему рівнянь для визначення невідомих параметрів  $a_1, a_2, a_3$ , які можна записати у вигляді вектора третього порядку  $\bar{\mathbf{A}} = [\bar{a}_3, a_2, a_1]^*$ . Після групування за правилами матричної алгебри, отримаємо

$$\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^2 \cdot \bar{\mathbf{U}}, \quad (5.29)$$

де  $\mathbf{V}$  – матриця, що утворена з векторів  $\bar{\mathbf{V}}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\mathbf{V} = [\bar{\mathbf{V}}_1, \bar{\mathbf{V}}_2, \bar{\mathbf{V}}_3] \begin{Bmatrix} (\bar{\mathbf{Y}} - y_0 \cdot \bar{\mathbf{1}} - y'_0 \cdot \bar{\mathbf{t}}), (\mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{Y}} - y_0 \cdot \bar{\mathbf{t}}), \mathbf{P}^2 \cdot \bar{\mathbf{Y}} \end{Bmatrix}$$

Система рівнянь (5.29) перевизначена, оскільки матриця  $\mathbf{V}$  є прямокутною. В даному випадку рішення повинно знаходитися за допомогою псевдооберненої матриці:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^+ \cdot \mathbf{P}^2 \cdot \bar{\mathbf{U}}.$$

Отже, параметрична ідентифікація моделей об'єктів дозволяє відразу знаходити значення коефіцієнтів моделі об'єкта за вимірними значеннями сигналу об'єкта  $y$ , яким управляють, та управляючого  $u$  сигналу.

## Питання для самоконтролю

1. Перетворення Лапласа та його властивості.
2. Визначення частотних характеристик.
3. Фазовий портрет та стійкість динамічної системи.
4. Сутність та основні недоліки перетворення Пухова.
5. Ідея неklasичних операційних методів.
6. Задача параметричної ідентифікації.

### Ілюстративні приклади до частини 1

**Приклад 1.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для випадків, коли система недовизначена, визначена, перевизначена:

$$\begin{array}{r} 4x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 4x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ -x_2 + 4x_3 = 10 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 4x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ -x_2 + 4x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 21 \end{array}.$$

Знайдемо розв'язки цих рівнянь у середовищі Mathematica (див. Додаток 1). Для цього запишемо кожен систему рівнянь у матричній формі.

Матриці коефіцієнтів при невідомих:

```
In[1]:= A1 := {{4, -1, 0}, {-1, 4, -1}};
```

```
In[2]:= A2 := {{4, -1, 0}, {-1, 4, -1}, {0, -1, 4}};
```

```
In[3]:= A3 := {{4, -1, 0}, {-1, 4, -1}, {0, -1, 4}, {1, 1, 6}};
```

Матрицю можна представити у табличній формі:

```
In[4]:= A1 // MatrixForm
```

```
Out[4]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Вектори правих частин рівнянь:

```
In[5]:= B1 := {2, 4};
```

```
In[6]:= B2 := {2, 4, 10};
```

```
In[7]:= B3 := {2, 4, 10, 21};
```

Розв'язання недовизначеної систем рівнянь:

```
In[8]:= X1 = PseudoInverse[A1].B1
```

```
Out[8]= { 94/121, 134/121, -42/121 }
```

Знаходження суми квадратів розв'язків:

```
In[9]:= S1 = Sum[(X1[[i]])^2, {i, 1, 3}]
```

```
Out[9]=  $\frac{236}{121}$ 
```

Розв'язання визначеної системи рівнянь:

```
In[10]:= X2 = Inverse[A2].B2
```

```
Out[10]= {1, 2, 3}
```

Розв'язання перевизначеної системи рівнянь:

```
In[11]:= X3 = PseudoInverse[A3].B3
```

```
Out[11]= {1, 2, 3}
```

Знаходження суми квадратів помилок:

```
In[12]:= P = A3.X3 - B3
```

```
Out[12]= {0, 0, 0, 0}
```

```
In[13]:= S2 = Sum[(P[[i]])^2, {i, 1, 4}]
```

```
Out[13]= 0
```

**Приклад 2.** Апроксимувати сигнал  $e^{-3t}$  на інтервалі зміни аргументу  $0 \leq t \leq 2$  за різними системами базисних функцій: степеневою, експоненціальною, блочно-імпульсною.

Задання параметрів базисних функцій та даної функції:

```
In[1]:= m = 6; T = 2; h = T / m;
```

```
In[2]:= f = Exp[-3 t];
```

Визначення систем базисних функцій:

```
In[3]:= s1[t_, T_, i_] := (t/T)^(i-1);
```

```
In[4]:= S1 = Table[s1[t, T, i], {i, m}]
```

```
Out[4]= {1, t/2, t^2/4, t^3/8, t^4/16, t^5/32}
```

```
In[5]:= s2[t_, i_] := Exp[-t*(i-1)];
```

```
In[6]:= S2 = Table[s2[t, i], {i, m}]
```

```
Out[6]= {1, e^-t, e^-2t, e^-3t, e^-4t, e^-5t}
```

```
In[7]:= v[i_, h_, t_] := If[(i-1)*h <= t < i*h, 1, 0];
```

```
In[8]:= S3 = Table[v[i, h, t], {i, m}];
```

Визначення операційної матриці апроксимуючого поліноміального спектра:

```
In[9]:= W1 = Table[  $\int_0^T s1[t, T, i] * s1[t, T, j] dt$ , {i, m}, {j, m}];
```

```
In[10]:= W2 = Table[  $\int_0^T s2[t, i] * s2[t, j] dt$ , {i, m}, {j, m}];
```

Визначення операційного вектора спектра:

```
In[11]:= Q1 = Table[  $\int_0^T s1[t, T, i] * f dt$ , {i, m}];
```

```
In[12]:= Q2 = Table[  $\int_0^T s2[t, i] * f dt$ , {i, m}];
```

Визначення коефіцієнтів апроксимуючого полінома:

```
In[13]:= F1 = Inverse[W1].Q1;
```

```
In[14]:= F2 = Inverse[W2].Q2;
```

```
In[15]:= F3 = Table[  $\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f dt$ , {i, m}];
```

Формування апроксимуючого полінома:

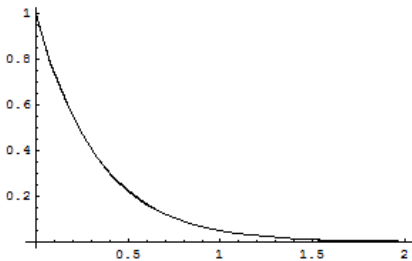
```
In[16]:= f1a = F1.S1;
```

```
In[17]:= f2a = F2.S2;
```

```
In[18]:= f3a = F3.S3;
```

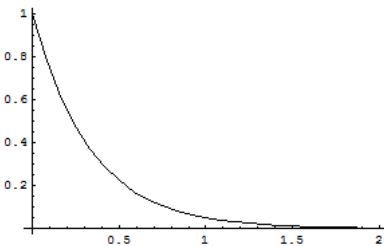
Відображення на графіку сигналу та його апроксимації:

```
In[19]:= Plot[{f, f1a}, {t, 0, T}, PlotRange -> All]
```



```
Out[19]= - Graphics -
```

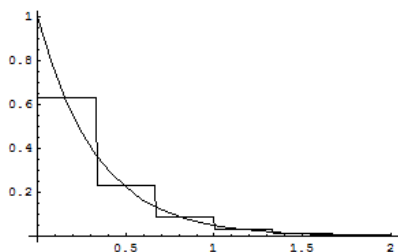
```
In[20]:= Plot[{f, f2a}, {t, 0, T}, PlotRange -> All]
```



```
Out[20]= - Graphics -
```



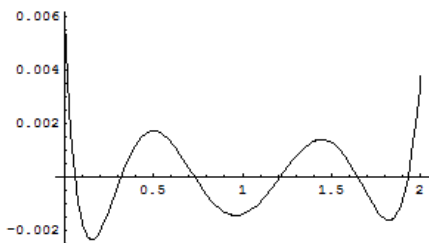
```
In[21]:= Plot[{f, f3a}, {t, 0, T}, PlotRange -> All]
```



```
Out[21]= - Graphics -
```

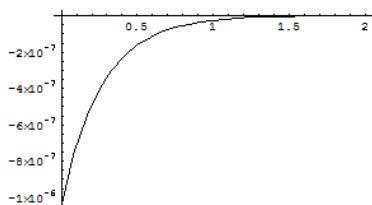
Відображення на графіку функції помилки апроксимації:

```
In[22]:= Plot[{f - f1a}, {t, 0, T}, PlotRange -> All]
```



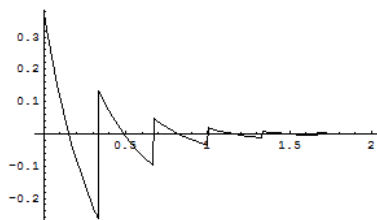
```
Out[22]= - Graphics -
```

```
In[23]:= Plot[{f - f2a}, {t, 0, T}, PlotRange -> All]
```



```
Out[23]= - Graphics -
```

```
In[24]:= Plot[{f - f3a}, {t, 0, T}, PlotRange -> All]
```



```
Out[24]= - Graphics -
```

**Приклад 3.** Побудувати модель сигналу  $5 \cdot e^{-2t} \cdot \sin(3t)$  на інтервалі зміни аргументу  $0 \leq t \leq 2$  у програмному середовищі Simulink та відобразити його на віртуальному осцилографі.

На рис.1 показана модель сигналу.

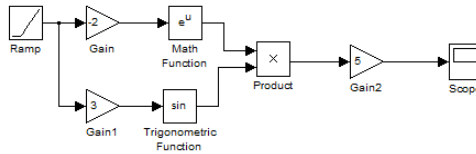


Рис. 1. Модель сигналу

Сигнал  $t$  задається за допомогою блоку лінійної функції Ramp. Експоненціальна функція задається у блоці математичної функції. Постійні коефіцієнти задаються блоком Gain. Інтервал моделювання задається у вікні меню Simulation/Configuration Parameters.

Результати моделювання виведені на екрані віртуального осцилографа Scope (рис. 2).

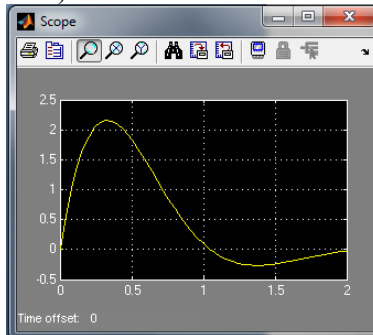


Рис. 2. Заданий сигнал на екрані осцилографа

### Список літератури до частини 1

1. *Араманович И.Г., Левин В.И.* Уравнения математической физики. (Серия «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов вузов»). – М., 1969 г. – 288 с. с илл.
2. *Астафьева Н.М.* Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения. // УФН. Т.166, №11. 1996г. – С.1145–1170.
3. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 199 с.: ил. 28. ISBN 5-211-00332-2.
4. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 1988.- 448 с.
5. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: «Высшая школа», 1996. – 638 с.
6. *Божокин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
7. *Васильев В.В.* Аналіз та математичне моделювання динамічних систем на базі неklasичних операційних числень. / В. В. Васильев, Л.О. Сімак, О.А. Зеленков.; *НАН України, Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова, М-во освіти і науки України, Національний авіаційний університет.* – К.: НАН України, 2006. – 184 с. ISBN 966-02-0964-9.
8. *Васильев В.В., Клепикова А.Н., Тимошенко А.Г.* Решение задач оптимального планирования на электронных моделях. – К.: Наукова думка. 1966. – 166 с.
9. *Васильев В.В.* Математичне і комп'ютерне моделювання процесів і систем: Апроксимація сигналів із застосуванням системи Mathematica®: *Навчальний посібник* / В.В. Васильев, Л.О. Сімак.; *НАН України, Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова, М-во освіти і науки України, Національний авіаційний університет.* – К.: НАН України, 2007. – 127 с. ISBN 978-966-02-4386-6.
10. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник для вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М., «Сов. радио», 1977. – 608 с.

11. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание / В.В. Васильев, Л.А. Симак. – Киев, НАН Украины, 2008. – 256 с. ISBN 978-966-02-4384-2.

12. *Душин В.К.* Теоретические основы информационных прицессов и систем: Учебник. – Издательство-торговая корпорация «Дашков и К<sup>о</sup>», 2003, - 348 с. ISBN 5-94798-160-2

13. *Энциклопедія кібернетики. У 2-х томах / Б.Н. Пшеничний.* – К., 1977. – Т. 1. – с. 342-343.

14. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 318 с., ил.

15. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 288 с.

16. *Ким. Д.П.* Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с. ISBN 5-9221-0379-2.

17. *Кирьянов Д.В., Кирьянова Е.Н.* Вычислительная физика. – М.: Полибук Мультимедиа, 2006. – 352 с.: ил. ISBN 5-902932-02-5.

18. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 831 с.

19. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

20. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – Москва: Постмаркет, 2000. – 352 с.

21. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: пер. с франц. В 2-х томах / Ж.Макс. – М.: Мир, 1983. – Т.1. – 312 с.

22. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

23. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 384 с.

24. Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем с применением системы MATLAB/FEMLAB: Учебное пособие / В.В. Васильев, Л.А. Симак, Ю.Е. Гребенович. – К.:НАН Украины, 2010. – 80 с. ISBN 978-966-02-4385-9.

25. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: «Наука», 1971. – 424 с.
26. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2002. – 160 с.
27. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наук. Думка, 1986. – 160 с.
28. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. – 688 с.
29. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – Изд. 2-е. – М.: «Наука». 1963. – 656 с.