

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний авіаційний університет

В. К. Цихановський, А. О. Белятинський,  
С. М. Талах

## БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА (СПЕЦКУРС)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки,  
молоді та спорту України як навчальний посібник  
для студентів напрямку підготовки «Будівництво»  
вищих навчальних закладів*

Київ 2015

## РОЗДІЛ 1

### 1. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ПІДПІРНИХ СТІНОК

#### 1.1. Теорія Кулона

Підпірні стінки, що утримують масу ґрунту від руйнування у виїмках, схилах, уступах тощо, застосовують у різних галузях цивільного, промислового та дорожнього будівництва. Задача розподілу напружень всередині сипучого тіла та на його поверхні, яка контактує з іншими тілами, належить до класу найбільш складних завдань будівельної механіки.

При розрахунках підпірних стінок існують теорії, згідно з якими оперують ідеально сипучими тілами, що мають однорідні гіпотетичні фізичні властивості. Ці теорії ґрунтуються на законі Ш.Кулона [4], коли одночасно з елементарними методами використовуються також методи теорії пружності та пластичності. Подібні дослідження професора В.В.Соколовського [1], що розглядаються у даному курсі, побудовані на загальній теорії граничного стану сипучого середовища, в яких враховується і внутрішнє тертя частинок ґрунту, і питоме зчеплення між ними.

У даному курсі викладено графоаналітичний метод розрахунку підпірних стінок. Запропоновано гіпотези, які ґрунтуються на теорії Кулона, що спрощують визначення загального тиску на підпірну стінку. Наведемо їх.

1. Ґрунтову масу розглядають як однорідне суцільне середовище, яке сприймає лише стискаючі та зсувні внутрішні зусилля.

2. Допускають, що при зрівноважуванні напружень від внутрішніх зусиль на будь-якій площині у просторі цього середовища відхилення від нормалі площини вектора напружень становитиме кут, значення якого не перевищує величини кута внутрішнього тертя „ $\varphi$ ” для відповідного типу ґрунту згідно з його фізичними властивостями. Цей кут пов'язаний з коефіцієнтом тертя залежністю:

$$f = tg\varphi. \quad (1.1)$$

На поверхні стику підпірної стінки з ґрунтом найбільш можливе відхилення рівнодіючої тиску ґрунту від нормалі, до цієї поверхні, становить величину кута „ $\delta$ ”. При цьому коефіцієнт тертя ґрунтової маси по поверхні підпірної стінки становитиме:

$$f_o = tg\delta. \quad (1.2)$$

3. Вважають, що стінка, підпадаючи під вплив ґрунтової маси, починає зсуватись. Тому треба знайти не ту рівнодіючу, яку стінка відчуває у звичайних умовах, а ту граничну, що відповідає миттєвому процесу початку її зсуву. Це допущення відомої теорії граничного стану (граничної рівноваги) Ш. Кулона, яка є не зовсім точною, тому при розв'язанні подібних задач розроблені інші, більш точні теорії, які ґрунтуються на співвідношеннях механіки суцільного середовища.

4. Приймають, що руйнування ґрунтової маси настає після початкового миттєвого зрушення підпірної стінки, яке відбувається наступним чином: від суцільної ґрунтової маси відокремлюється призма, яка обмежена поверхнею підпірної стінки з одного боку та площиною руйнування, що проходить через основу фундаменту стінки. Ця площинна поверхня називається плоскою поверхнею ковзання, а клин-призма – призмою сповзання. У дійсності поверхня ковзання не плоска, а криволінійна, однак це спрощення істотно не позначається на остаточних розрахунках на міцність. Сама призма сповзання розглядається як абсолютно тверде тіло.

5. Задачу розв'язують в умовах плоскої задачі теорії пружності, тобто передбачається, що підпірна стінка нескінченно довга і прямолінійна у плані, а профіль ґрунтової маси та інші умови загального тиску залишаються вздовж стінки сталими, тобто розрахункова модель за довжиною має одиничну величину (м, см).

## 1.2. Теорія Ребхана і графічна побудова Понселе

Призма руйнування має також одиничну висоту вздовж підпірної стінки. Наведений на розрахунковій схемі (рис. 1.1) трикутний клин ABC – є основою трикутної призми нескінченної висоти (товщини на рис. 1.1), з якої вирізається поодинокі призма (пластинка) BCC'.

Маємо основу призми сповзання ABC, лінія BC - слід площини руйнування, яка нахилена під кутом  $\theta$  до горизонту. Вага призми сповзання визначається залежністю:

$$G = \gamma_{ep} \cdot n.l.\Delta ABC . \quad (1.3)$$

Від ваги призми сповзання виникають узагальнені сили реакції підпірної стінки і реакції незруйнованого ґрунтового масиву за

площиною  $BC$  -  $\vec{R}$ . Вектори  $\vec{R}_0$  і  $\vec{R}$  відхиляються від нормалей до слідів підпірної стінки і непорушеного ґрунтового масиву відповідно

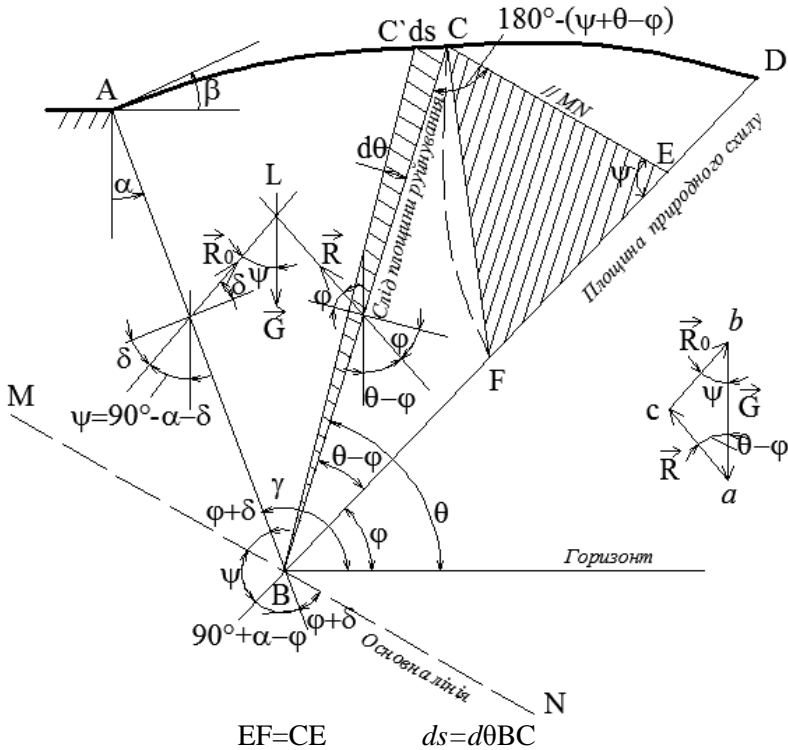


Рис. 1.1. Розрахункова схема підпірної стінки

на кут, значення якого не перевищує значень  $\delta$  і  $\phi$  (див. рис. 1.1). Для підвищення точності розрахунку приймаємо:

$$\delta = 0,5 \div 0,75\phi .$$

Отже, на призму сповзання  $ABC$ , як на абсолютно тверде тіло, діють три сили  $\vec{G}, \vec{R}_0, \vec{R}$ . Оскільки призма перебуває у стані рівноваги, ці сили зосереджені в точці  $L$ . У результаті можна побудувати трикутник сил  $abc$ . За теоремою синусів у трикутнику  $abc$  маємо:

$$\frac{\bar{R}_o}{\bar{G}} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin[180^\circ - (\psi + \theta - \varphi)]}. \quad (1.4)$$

З (1.4) отримаємо:

$$\bar{R}_0 = G \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)}. \quad (1.5)$$

У рівнянні (1.5) незалежною є величина  $\theta$ , яка змінюється в інтервалі  $90^\circ + \alpha > \theta > \varphi$ . При крайніх значеннях змінної  $\theta$  функція  $\bar{R}_o(\theta)$  буде нульовою:

- при  $\theta = 90^\circ + \alpha$  величина (1.3) дорівнює нулю (площа  $\Delta ABC \equiv 0$ );
- при  $\theta = \varphi$  призма перебуває на природному ухилі і не сповзає та не тисне на підпірну стінку.

Таким чином, дійсне положення точки  $C$  знаходиться між точками  $A$  і  $D$ . Для того, щоб визначити екстремальне значення функції однієї змінної  $R_o(\theta)$ , треба знайти похідну від функції (1.5) і прирівняти її до нуля (згідно з теорією індійського математика Ребхана):

$$\frac{dR_o}{d\theta} = \frac{dG}{d\theta} \left[ \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} \right] + G \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} \right] = 0. \quad (1.6)$$

З рівняння (1.6) враховуючи тригонометричні перетворення двох кутів, отримаємо:

$$\begin{aligned} G \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin \psi \cdot \cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) \cdot \cos \psi} \right] = \\ = - \frac{dG}{d\theta} \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Позначимо  $\theta - \varphi = \gamma$ ,  $\sin \gamma \equiv u$ ,  $\sin \psi \cdot \cos \gamma + \cos \psi \cdot \sin \gamma \equiv v$ .

Виходячи з похідної  $\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$  та після деяких перетворень,

отримаємо:

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{\sin \psi (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma)}{\sin^2(\psi + \theta - \varphi)} = \frac{\sin \psi}{\sin^2(\psi + \theta - \varphi)}. \quad (1.8)$$

З урахуванням (1.6) для (1.7) отримаємо:

$$G \frac{\sin \psi}{\sin^2(\psi + \theta - \varphi)} = - \frac{dG}{d\theta} \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)}. \quad (1.9)$$

З рівняння (1.9) маємо:

$$G = - \frac{dG}{d\theta} \frac{\sin(\theta - \varphi) \cdot \sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}. \quad (1.10)$$

Проведемо аналіз правої частини рівняння (1.10):

– для елементарної області  $BC'C$  можна записати, що її вага  $dG$  дорівнює:

$$dG = \frac{1}{2} ds \cdot BC \gamma_{zp}; \quad ds = d\theta \cdot BC, \quad (1.11)$$

звідки

$$dG = \frac{1}{2} \gamma_{zp} \cdot BC^2 \cdot d\theta,$$

або

$$\frac{dG}{d\theta} = \frac{1}{2} \gamma_{zp} \cdot BC^2. \quad (1.12)$$

Підставляючи (1.12) у (1.10), отримаємо:

$$G = - \frac{1}{2} \gamma_{zp} \cdot BC^2 \sin(\theta - \varphi) \frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}. \quad (1.13)$$

Запишемо вираз (1.12) з урахуванням знака в (1.13), тобто

$\frac{dG}{d\theta} = - \frac{1}{2} \gamma_{zp} \cdot BC^2$ . Це свідчить про те, що збільшення аргументу  $\theta$  призводить до зменшення функції  $G(\theta)$ . Розглянемо у рівнянні

(1.13) множник  $\frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}$ . У  $\Delta BCE$  величина  $\frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}$  є

співвідношенням за теоремою синусів (див. рис 1.1):

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\sin \angle BCE}{\sin \angle CEB} = \frac{\sin [180^\circ - (\psi + \theta - \varphi)]}{\sin \psi} = \frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}. \quad (1.14)$$

З рівняння (1.14) маємо:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\sin(\psi + \theta - \varphi)}{\sin \psi}. \quad (1.15)$$

З урахуванням (1.15) вираз (1.13) набуває вигляду:

$$G = -\frac{1}{2} \gamma_{zp} \cdot BC^2 \frac{BE}{BC} \sin(\theta - \varphi) = \frac{1}{2} \gamma_{zp} \cdot BC \cdot BE \sin(\theta - \varphi).$$

Остаточно, з урахуванням співвідношення (1.3), маємо:

$$G = \gamma_{zp} \cdot nл. \Delta BCE = \gamma_{zp} \cdot nл. \Delta ABC. \quad (1.16)$$

З рівняння (1.16), яке отримане з (1.6), випливає, що площі  $\Delta BCE$  і  $\Delta ABC$  є рівновеликими. Довівши це, вчений Ребхан сформулював теорему (теорема Ребхана 1) [4]: *“Найбільш небезпечна площина руйнування зі слідом BC займає таке положення, що площа основи призми руйнування за трикутником ABC є рівновеликою площі трикутника BCE”*.

Побудуємо трикутник  $ECF$ . Для цього сторону  $EC$  повернемо навколо точки  $E$  проти годинникової стрілки до суміщення зі стороною  $BD$ . Таким чином отримаємо точку  $F$ . Проаналізувавши трикутники  $ECF$  і  $ECB$ , запишемо їх площі, враховуючи сторони зі спільним кутом  $\psi$ :

$$\frac{nл. \Delta ECF}{nл. \Delta ECB} = \frac{EF \cdot EC \cdot \sin \psi}{BE \cdot EC \cdot \sin \psi} = \frac{EF}{BE}. \quad (1.17)$$

Відношення  $\frac{EF}{BE}$  за теоремою синусів має вигляд:

$$\frac{EF}{BE} = \frac{CE}{BE} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} = \frac{nл. \Delta ECF}{nл. \Delta ECB}. \quad (1.18)$$

З (1.18) отримаємо:

$$\begin{aligned} \gamma_{zp} \cdot nл. \Delta ECF &= \gamma_{zp} \cdot nл. \Delta ECB \cdot \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} = \\ &= G \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\psi + \theta - \varphi)} = R_o. \end{aligned} \quad (1.19)$$

З тотожності (1.19) маємо:

$$R_o = \gamma_{zp} \cdot nл. \Delta ECF.$$

(1.20)

На основі рівняння (1.20) вчений Ребхан сформулював другу теорему (теорема Ребхана 2) [4]: *“Найбільший тиск  $R_o^{\max}$  дорівнює площі  $\Delta ECF$  (трикутник Ребхана), помноженій на питому вагу ґрунту”*.

Крім графоаналітичного методу визначення максимального тиску на підпірну стінку  $R_o^{\max}$  існує також графічний спосіб, в основу якого покладено властивості силового трикутника  $авс$ : якщо сумістити його вершину  $a$  з точкою  $B$  і направити сторону  $ав$  за лінією природного ухилу  $BD$ , то сторона  $ас$  отримає напрям лінії руйнування  $BC$ , а сторона  $вс$  займе положення, яке паралельне основній лінії  $MN$ . Це впливає безпосередньо з рівності відповідних кутів, що було помічено французьким математиком Понселе [4].

Інший математик-геометр Кульман [4], виходячи із вказаної властивості силового трикутника  $авс$ , винайшов так звану криву Кульмана, яка використовується для більш точних розрахунків у випадку, коли поверхня землі викривлена (крива  $ACD$ ). Наведемо алгоритм побудови кривої Кульмана: з точки  $B$ , як з центра, проводимо жмуток слідів площин руйнування  $BC_1, BC_2, \dots, BC_k$ . Кожен промінь утвореного жмутка буде відтинати від масиву призми руйнування частину і приєднувати її до попередньої (рис. 1.2). Для кожної відокремленої призми знаходимо вагу  $G_1, G_2, \dots, G_k$  за формулою:

$$G = \gamma_{zp} \cdot n \cdot \Delta ABC_k$$

та відкладаємо її у масштабі на лінії  $BD$ , отримуючи при цьому точки  $b_1, b_2, \dots, b_k$ . З одержаних точок проводимо прямі, що паралельні лінії  $MN$ , які у перетині з променями жмутка фіксують положення точок  $c_1, c_2, \dots, c_k$ . Відрізки  $b_1c_1, b_2c_2, \dots, b_kc_k$  визначають відповідно тиск  $R_{(o)}^1, R_{(o)}^2, \dots, R_{(o)}^k$ . Геометричне місце точок  $c_1, c_2, \dots, c_k$  окреслює криву, що має назву *кривої Кульмана*. Дотична до цієї кривої є паралельною  $BD$ , а у точці дотику  $c$  вона задає найбільший за величиною відрізок  $bc$ , який визначає найбільше значення  $R_o^{\max}$ .



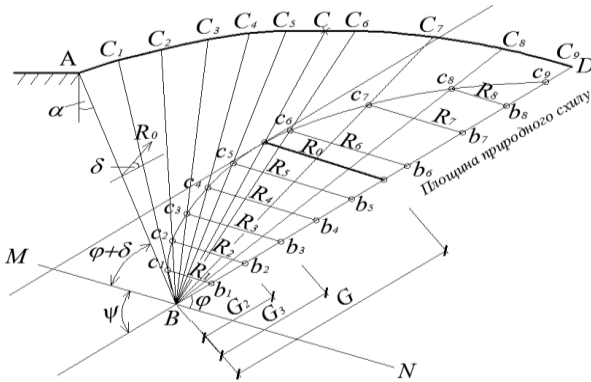


Рис. 1.2. Побудова кривої Кульмана

У випадку, коли поверхня землі є плоскою ( $ACD$  – пряма лінія), максимальний тиск  $R_0^{\max}$  визначається у графічний спосіб Понселе наступним чином: з точки  $A$  проводиться пряма, паралельна основній лінії  $MN$ , яка ділить відрізок  $BD$  навпіл у точці  $H$ . З отриманої точки  $H$ , як з центра, окреслюється півколо радіусом  $BD/2$  (рис. 1.3) і встановлюється перпендикуляр  $HI$  до  $BD$ , який перетинає півколо в точці  $I$ , яка з'єднується з точкою  $B$ . Хорда  $BI$  повертається навколо точки  $B$  до суміщення з  $BD$ . З отриманої точки  $E$  проводиться  $EC$  паралельно  $MN$  до перетину з  $AD$  у точці  $C$ . Пряма  $BC$  є в відтворенням шуканої площі руйнування. Будуємо трикутник Ребхана.

Відповідно до побудови  $BI^2 = BE^2 = BH \cdot BD$ ;

$$\frac{BE}{BH} = \frac{BD}{BE}. \quad (1.21)$$

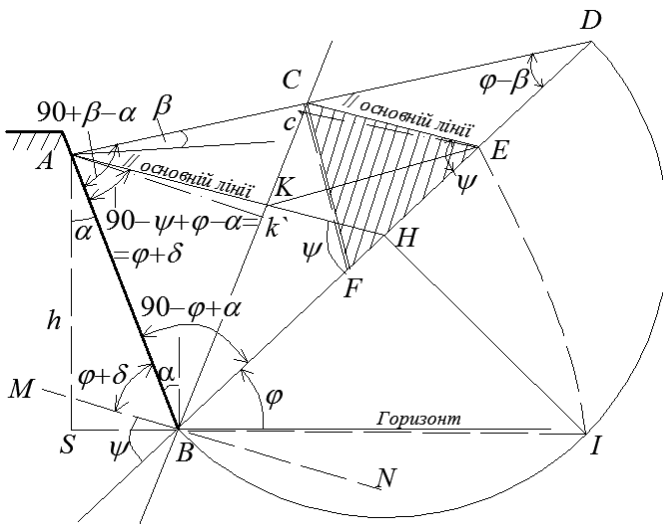


Рис. 1.3. Побудова за методом Понселе

З трикутників  $\Delta BKH$  і  $\Delta BCE$

$$\frac{BE}{BH} = \frac{BC}{BK} \quad (1.22)$$

Із порівняння (1.21) і (1.22) видно, що  $\frac{BD}{BE} = \frac{BC}{BK} \Rightarrow CD \parallel KE$ .

Тоді чотирикутник  $ACEK$  є паралелограмом  $AK = CE$ , висоти також рівні  $Ak' = Ec'$ . Отже, пряма  $BC$  задовольняє першу теорему Ребхана, що доводить правильність побудови Понселе.

### 1.3. Аналітичний метод визначення тиску ґрунту на поверхню підпірної стінки

Аналітично можна визначити тиск  $R_o$  на підпірну стінку за умови, що поверхня землі (півпростору) є площиною (див рис. 1.3), тобто графічні побудови Понселе можна перекласти на мову аналізу (аналітичну мову).

У трикутнику Ребхана  $CE = EF$ , кут  $CEF = \psi$ , тому з формули (1.20) отримуємо:

$$R_o = \gamma_{ep.пл.} \Delta ECF = \frac{1}{2} \gamma CE^2 \cdot \sin \psi, \quad (1.23)$$

де  $\psi = 90 - \alpha - \delta$ , але з трикутників  $ADH$  і  $DCE \rightarrow \frac{CE}{AH} = \frac{DE}{DH}$   
 або

$$CE = \frac{AH \cdot DE}{DH} = AH \frac{DB - EB}{DB - HB}. \quad (1.24)$$

З побудови Понселе випливає, що  $EB^2 = DB \cdot HB$ .

Отже (1.24) набуде вигляду:

$$CE = AH \left( \frac{DB - \sqrt{DB \cdot HB}}{DB - HB} \right). \quad (1.25)$$

Виконаємо деякі перетворення виразу  $\frac{DB - \sqrt{DB \cdot HB}}{DB - HB}$ , тобто розді-  
 лимо чисельник і знаменник на  $DB$  та запишемо у знаменнику різ-  
 ницю квадратів:

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{HB}{DB}}}{1 - \frac{HB}{DB}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{HB}{DB}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{HB}{DB}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{HB}{DB}}\right)} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{HB}{DB}}}$$

і отримаємо:

$$CE = \frac{AH}{1 + \sqrt{\frac{BH}{DB}}}. \quad (1.26)$$

Довжина стінки  $AB$  через її висоту  $h$  виражається співвідношенням  
 (див. рис. 1.3):

$$AB = s = \frac{h}{\cos \alpha}. \quad (1.27)$$

Із трикутників  $AHB$  і  $ADB$  за теоремою синусів знаходимо:

$$AH = s \frac{\sin(90^\circ - \varphi + \alpha)}{\sin \psi} = s \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\sin \psi}; \quad (1.28)$$

$$BH = s \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin \psi}; \quad (1.29)$$

$$BD = s \frac{\sin(90 - \alpha + \beta)}{\sin(\varphi - \beta)} = s \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\varphi - \beta)}. \quad (1.30)$$

Підставивши (1.28), (1.29) і (1.30) в (1.26), отримаємо вираз для  $CE$ , який підставимо в (1.23) з урахуванням (1.27) і остаточно отримаємо:

$$R_o = \frac{1}{2} \gamma h^2 \mu, \quad (1.31)$$

$$\mu = \frac{\cos^2(\varphi - \alpha)}{\left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\sin \psi \cdot \cos(\alpha - \beta)}} \right]^2 \sin \psi \cos^2 \alpha}, \quad (1.32)$$

де  $\mu$  - залежить тільки від кутів  $\varphi, \delta, \alpha$  і  $\beta$ .

За цією формулою можна обчислити тиск ґрунту на похилу стінку та похилу планувальну площу ґрунту за стінкою при будь-яких значеннях кутів  $\varphi, \delta, \alpha$  і  $\beta$ . Формула (1.31) свідчить, що повний тиск ґрунту на стінку пропорційний питомій вазі ґрунту та квадрату її висоти. За умови, що  $\alpha = \beta = 0$ , маємо:

$$\mu = \frac{\cos^2 \varphi}{\left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin \varphi}{\cos \delta}} \right]^2 \cos \delta}. \quad (1.33)$$

Якщо до формули (1.33) додати вимоги ідеальної гладкості поверхні стінки -  $\delta = 0$ , то отримаємо:

$$R_o = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1.34)$$

При  $\alpha \neq 0, \beta = \delta = 0$  маємо:

$$R_o = \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\cos^2(\varphi - \alpha)}{(\cos \alpha + \sin \varphi)^2 \cos \alpha}, \quad (1.35)$$

або 
$$R_o = \frac{1}{2} \gamma h^2 \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi - \alpha}{2} \right) + \operatorname{tg} \alpha \right]^2 \cos \alpha. \quad (1.36)$$

#### 1.4. Діаграма функції повного тиску та його інтенсивності

Для розрахунку підпірної стінки на міцність необхідно знати повний тиск на будь-яку її ділянку: від поверхні до заданого рівня. Якщо планувальна поверхня землі зверху обмежена площиною, то повний тиск пропорційний квадрату висоти стінки (див. формулу (1.31)), тобто епюра повного тиску описується квадратною параболою, а епюра інтенсивності тиску - прямою лінією (рис. 1.4). За епюрою  $R_o(h)$  можна визначити ординату повного тиску, наприклад  $R_o^1$  на ділянку стінки  $h_1$ , але не можна визначити точку прикладання цієї сили. Для цього необхідно побудувати епюру інтенсивності тиску  $q$ :

$$q = \gamma h \mu. \quad (1.37)$$

Центр ваги ділянки епюри  $q$  буде точкою прикладання сили  $R_o(h)$ . Для визначення ординати  $x_c$  центра ваги  $cdc'd'$  на ділянці  $cc'$  визначають статичний момент для трапеції  $cdc'd'$  за формулами опору матеріалів:

$$S_{x-x(cdc'd')} = F_{cdc'd'} \cdot \frac{\Delta h}{2} + F_{dd'd'} \cdot \frac{\Delta h}{3} = F_{cdc'd'} \cdot x_c. \quad (1.38)$$

Виконуємо перетворення:

$$F_{cdc'd'} = y_1 \Delta h; \quad F_{dd'd'} = \frac{1}{2} \Delta h (y_2 - y_1); \quad F_{cdc'd'} = \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta h$$

$$S_{x-x(cdc'd')} = y_1 \cdot \frac{\Delta h}{2} + \frac{(y_1 - y_2) \Delta h^2}{6} = \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta h \cdot x_c. \quad (1.39)$$

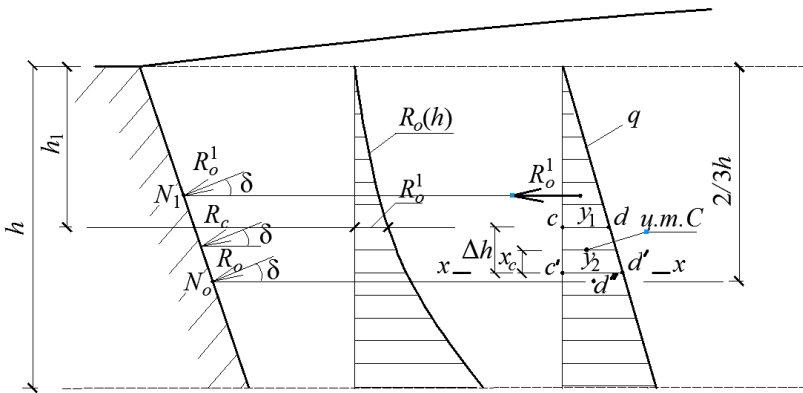


Рис. 1.4. Епюри повного тиску та його інтенсивності

З (1.39) можна визначити ординату центра ваги відносно  $c'd'$  для ділянки  $cc'(\Delta h)$ :

$$x_c = \frac{[3y_1 \cdot \Delta h^2 + (y_2 - y_1)\Delta h^2] \cdot 2}{6\Delta h(y_1 + y_2)} = \frac{(2y_1 + y_2)\Delta h}{3(y_1 + y_2)}.$$

Остаточно отримаємо формулу для визначення центра ваги трапецієдальної ділянки епюри інтенсивності тиску на підпірну стінку

$$x_c = \frac{(2y_1 + y_2)\Delta h}{3(y_1 + y_2)}$$

або

$$x_c = \frac{2y_1 + y_2}{y_1 + y_2} \frac{\Delta h}{3}. \quad (1.40)$$

### 1.5. Теорія лінійного деформування ґрунтового півпростору для визначення тиску на підпірну стінку

Визначимо бічний тиск на абсолютно нерухому жорстку стінку від дії зосереджених сил або місцевих навантажень (наприклад, смугового навантаження) за умови, що між напруженням та деформацією ґрунту існує лінійна залежність. Каротерс запропонував розв'язувати подібні задачі, застосовуючи метод відображень (рис. 1.5). Такі розв'язки добре узгоджуються з експериментальними даними [5, 6]. З умов симетрії встановлюємо, що в горизонтальній площині  $xOy$  при  $x = 0$  за напрямом  $Ox$  відсутні зсувні зусилля і переміщення рівні нулю, тому площину симетрії можна замінити площиною задньої грані жорсткої підпірної стінки, при цьому тиск на неї буде рівним подвійному тиску від дії місцевого навантаження, що визначається за теорією лінійного деформування тіла. Ці дані будуть дійсними для будь-якого місцевого навантаження (наприклад, смугового). В особливому випадку, при дії зосередженої сили, за умови, що  $\nu = 0,5$ , тиск на вертикальну підпірну стінку згідно з формулою Бусінеску становитиме [6]:

$$\sigma_x|_{x=a} = 2 \frac{3P}{2\pi} \left[ \frac{x^2 z}{R^5} + \frac{(1-2 \cdot 0,5)(\dots)}{3} \right] = \frac{3Pa^2 z}{\pi(a^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (1.39)$$

де  $P$  – зосереджена сила;  $z$  – глибина точки, що розглядається;  $a$  – відстань прикладання сили  $P$  від верхнього краю задньої стінки.

Для полегшення розрахунків складено допоміжні таблиці та графіки.

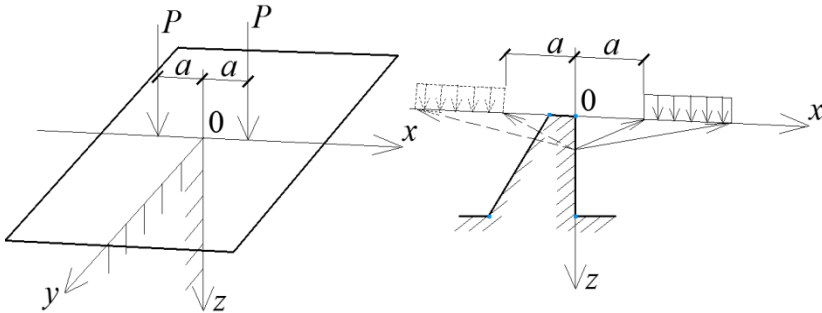


Рис. 1.5. Схеми до методу відображень

Визначимо тиск ґрунту на підпірну стінку за розв'язками диференційних рівнянь граничної рівноваги. Для цього візьмемо величину питомого зчеплення для зв'язних ґрунтів з інтенсивним всебічним тиском згідно з теорією Кулона за графіком на рис. 1.6:

$$P_\varepsilon = \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi} = c \cdot \operatorname{ctg} \varphi, \quad (1.40)$$

де  $c$  – питоме зчеплення ґрунту,  $\text{кг}/\text{см}^2$ ;  $P_\varepsilon$  – тиск зв'язності;

$\varphi$  – кут внутрішнього тертя ґрунту.

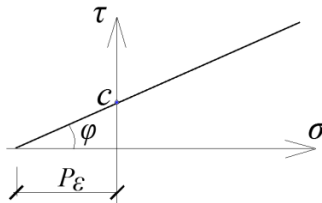


Рис. 1.6. Діаграма напружень  $\tau - \sigma$  для зв'язних ґрунтів

Схема дії всебічного зовнішнього тиску, що моделює питоме зчеплення ґрунту, наведена на рис. 1.7. Очевидно, поверхнєве зусилля буде збільшувати тиск на стінку, а тиск, що моделює зчеплення по поверхні контакту ґрунту з задньою гранню стінки, буде зменшувати бічний тиск ґрунту на величину  $P_\varepsilon$ .

Зважаючи на те, що додатковий тиск прийнятий у вигляді суцільного рівномірно розподіленого навантаження, то поверхня ковзання матиме вигляд площини із тим же напрямом, як і у сипучому тілі, що має нульове зчеплення.

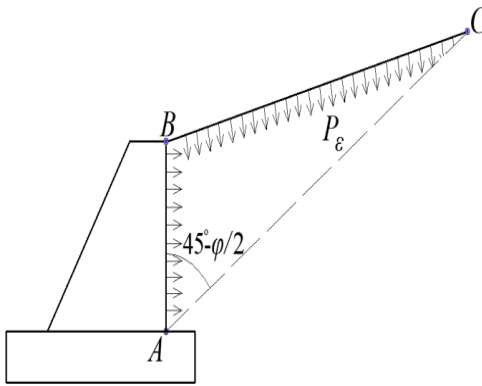


Рис. 1.7. Схема дії всебічного зовнішнього тиску

### 1.6. Приклад аналітичного розрахунку підпірної стінки

Для розрахунку підпірної стінки необхідно знати: об'ємну вагу ґрунту -  $\gamma$ ,  $\gamma = 1,1 - 2,2$  т/м<sup>3</sup>; кут внутрішнього тертя ґрунту -  $\varphi$ ,  $\varphi = 10 - 45^\circ$ ; кут тертя між ґрунтом і поверхнею стінки -  $\delta$ ,  $\delta = 5 - 40^\circ$ , при гладкій поверхні або вологій  $\delta = 0,5\varphi - 0,75\varphi$ .

Крім того, необхідно знати коефіцієнти тертя фундаменту стіни по основі та тертя мурування по кладці  $f$  і коефіцієнт поздовжнього згину  $\varphi$  при різних значеннях приведеної гнучкості  $\lambda_{пр}$ . Коефіцієнт тертя між шарами мурування  $f = 0,7$ . Мурування по сухому ґрунту:  $f = 0,5 - 0,6$ ; мурування по вологому ґрунту:  $f = 0,35 - 0,4$ .



Розглянемо вертикальну гладку підпірну стінку з горизонтальною площиною засипки ґрунту (рис. 1.8).

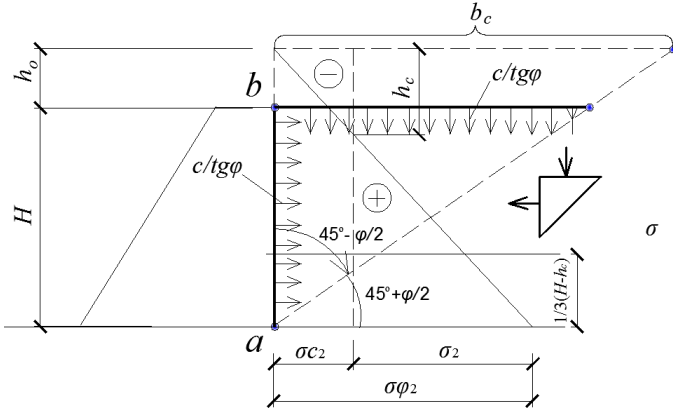


Рис. 1.8. Розрахункова схема тиску на задню вертикальну стінку з урахуванням зчеплення ґрунту

Дію навантаження на поверхню засипки (смугового навантаження) приймаємо як еквівалентний шар ґрунту заввишки  $h_o$ , що визначається за формулами:

$$h_o = \frac{P_{\varepsilon}}{\gamma} \quad \text{або} \quad h_o = \frac{c}{\gamma \operatorname{tg} \varphi}, \quad (1.41)$$

де  $\gamma$  - об'ємна вага ґрунту.

Бічний тиск у точці  $a$  (див. рис. 1.8) визначаємо за формулою:

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad \text{або} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1.42)$$

З рівняння (1.42) маємо:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1.43)$$

Враховуючи (1.40) і (1.41),

$$\sigma_2 = \gamma(H + h) \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (1.44)$$

або

$$\sigma_2 = \gamma \left( H + \frac{c}{\gamma \operatorname{tg} \varphi} \right) \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi},$$

$$\sigma_2 = \gamma H \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi} \left[ 1 - \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right],$$

або

$$\sigma_2 = \gamma H \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right); \quad (1.45)$$

$$\sigma_{\varphi 2} = \gamma H \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right); \quad (1.46)$$

$$\sigma_{c2} = 2c \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right); \quad (1.47)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\varphi 2} - \sigma_{c2},$$

де  $\sigma_{\varphi 2}$  - величина бокового тиску на стінку, що отримана з урахуванням тільки тертя ґрунту;  $\sigma_{c2}$  - величина бокового тиску на стінку, отримана з урахуванням тільки питомого зчеплення.

Таким чином, питоме зчеплення зменшує боковий тиск на величину  $\sigma_{c2}$ . На випадок пасивного опору у кожній точці буде збільшуватись опір ґрунту на величину

$$\sigma'_{c2} = 2c \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1.48)$$

Так як боковий тиск змінюється від додатного значення (внизу стінки) до від'ємного (зверху стінки), то глибину  $h_c$ , на якій величина бокового тиску буде нульовою, отримаємо з формули

$$h_c = \frac{2c}{\gamma \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}. \quad (1.49)$$

Повний активний тиск  $E_a$  на стінку зв'язного ґрунту визначається з площі трикутника з основою  $\sigma_2$ , завглибки  $H$ , і заввишки  $H - h_c$ :

$$E_a = \frac{\sigma_2 (H - h_c)}{2} \quad (1.50)$$

або

$$E_a = \frac{\gamma H^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c H \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{2c^2}{\gamma}. \quad (1.51)$$

Визначення тиску ґрунту на підпірну стінку з використанням строгих методів теорії граничної рівноваги виконується за розв'язками диференціальних рівнянь, які характеризують плоский граничний стан ґрунтів за підпірною стінкою, у полярній системі координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \sin \theta; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r} &= \gamma \cos \theta \end{aligned} \quad (1.52)$$

і умови рівноваги граничного стану

$$\frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{4}(\sigma_r + \sigma_\theta)^2. \quad (1.53)$$

Цей розв'язок отриманий чисельними інтегруваннями із застосуванням методу скінченних різниць.

Задача визначення тиску ґрунту на підпірну стінку має два розв'язки. Перший розв'язок полягає і визначенні активного тиску ґрунту, другий розв'язок полягає у визначенні пасивного тиску.

Для вертикальної гладкої стінки за умови, що  $\varphi = 0$ ,  $\theta = 90^\circ$  величина тиску, знайденого згідно з теорією Кулона, збігається з точним розв'язком.

Розглянемо аналітичний розрахунок підпірної стінки при визначенні тиску на задню її поверхню за формулами (1.31) ÷ (1.36). Як приклад взято розрахунок підпірної стінки мостового стояка [8, 31] згідно з розрахунковою схемою, що наведена на рис. 1.9, з

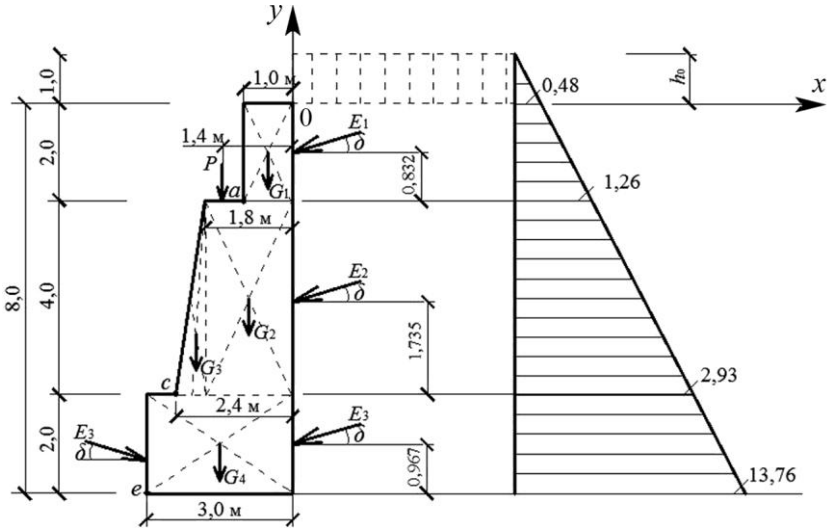


Рис. 1.9. Розрахункова схема підпійної стінки

наступними вихідними даними:

- ґрунт – волога глина, розрахунковий опір ґрунту  $R_{\text{гр}} = 3,5 \text{ кг/см}^2$ , об'ємна вага ґрунту  $\gamma_{\text{гр}} = 1,7 \text{ т/м}^3$ , кут внутрішнього тертя  $\varphi_{\text{гр}} = 35^\circ$ ;
- мурування з буту, розрахунковий опір мурування  $R_{\text{мр}} = 28,0 \text{ кг/см}^2$ , об'ємна вага мурування  $\gamma_{\text{к}} = 2,4 \text{ т/м}^3$ , марка каменю  $M_{\text{к}} = 200$ , марка розчину  $M_{\text{р}} = 10$ , кут тертя між ґрунтом і поверхнею стіни -  $\delta = 17^\circ$ .

Перевірка на міцність, стійкість і зсув виконується на рівні підфермової площадки  $ab$  (див рис. 1.9), по обрізу  $cd$  та підшві фундаменту  $ef$ . Для цього стінок розбивається на відсіки.

Для розрахунку приймається 1 м довжини стінки.

Алгоритм розрахунку складається з наступних етапів.

1. Визначаємо висоту еквівалентного шару землі, що замінює тимчасове навантаження на насип:

$$h_o = \frac{q}{\gamma_{\text{гр}}}; \quad h_o = \frac{1,7}{1,7} = 1,0 \text{ м.}$$

2. Визначаємо власну вагу та положення центрів ваги кожного відсіку стінки:

$G_1 = 1,0 \cdot 2,0 \cdot 1,0 \cdot 2,4 = 4,8$  т/м. Плечі сили  $G_1$  відносно точок  $a$ ,  $c$  і  $e$ :  
 $x_{1a} = 0,5$  м;  $x_{1c} = 1,9$  м;  $x_{1e} = 2,5$  м.

$G_2 = 1,8 \cdot 4,0 \cdot 1,0 \cdot 2,4 = 17,3$  т/м. Плечі сили  $G_2$  відносно точок  $c$  і  $e$  відповідно становлять:  $x_{2c} = 1,5$  м;  $x_{2e} = 2,1$  м.

$G_3 = \frac{0,6 \cdot 4,0 \cdot 1,0}{2} \cdot 2,4 = 2,88$  т/м. Плечі сили  $G_3$  відносно точок  $c$  і  $e$ :  $x_{3c} = 0,4$  м;  $x_{3e} = 1,0$  м.

$G_4 = 3,0 \cdot 2,0 \cdot 1,0 \cdot 2,4 = 14,4$  т/м. Плече сили  $G_4$  відносно точки  $e$ :  $x_{4e} = 1,5$  м.

Плечі сили  $P$  відносно точок  $c$  і  $e$  дорівнюють:

$$x_{pc} = 0,4 + 0,6 = 1,0 \text{ м}; \quad x_{pe} = 0,4 + 0,6 + 0,6 = 1,6 \text{ м}.$$

3. Визначаємо тиск ґрунту на стіну:

$$P_{qy} = \gamma_{ep} (y + h_0 k_q) k,$$

$$\text{де} \quad k_q = \frac{\cos \varepsilon \cdot \cos \alpha}{\cos(\varepsilon - \alpha)}; \quad k = \left[ \frac{\cos(\varphi_{mp} - \varepsilon)}{(1 + k_0 k_1) \cos \varepsilon} \right]^2 \cdot \frac{1}{\cos(\varepsilon + \delta_{mp})};$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{\sin(\varphi_{mp} + \delta) \cos(\varepsilon - \alpha)}{\cos(\varepsilon + \delta_{mp}) \sin(\varphi_{mp} - \alpha)}}; \quad k_1 = \frac{\sin(\varphi_{mp} - \alpha)}{\cos(\varepsilon - \alpha)}.$$

де  $\varepsilon$  - кут між задньою гранню стінки і віссю  $y$ ;  $\alpha$  - кут між поверхнею ґрунту і віссю  $x$ . У даному випадку  $\varepsilon = \alpha = 0$ .

$$k_q = \frac{1,0}{1,0} = 1,0; \quad k_1 = \frac{\sin 35^\circ}{\cos 0^\circ} = 0,574; \quad k_0 = \sqrt{\frac{\sin(35^\circ + 17^\circ) \cdot 1,0}{\cos 17^\circ \cdot \sin 35^\circ}} = 1,2;$$

$$k = \frac{\left[ \cos 35^\circ / 1 + 1,2 \cdot 0,574 \right]^2 \cdot 1}{\cos 17^\circ} = 0,246.$$

Тиск у верхній точці стіни при  $y = 0$  становить:

$$P_{q0} = 1,7 \cdot (0 + 1,0 \cdot 1,0) \cdot 0,246 = 0,418 \text{ т/м}^2.$$

У точці  $y = |b|$ :  $P_{qb} = 1,7(2,0 + 1,0 \cdot 1,0) \cdot 0,246 = 1,255 \text{ т/м}^2$ .

На верхній відсік стіни:  $E_1 = \frac{0,418 + 1,255}{2} \cdot 2 = 1,673 \text{ т/м}$ .

У точці  $d$ :  $P_{qd} = 1,7 \cdot (6,0 + 1,0 \cdot 1,0) \cdot 0,246 = 2,93 \text{ т/м}^2$ .

На відсік  $bd$ :  $E_2 = \frac{1,255 + 2,93}{2} \cdot 4 = 8,370 \text{ т/м}^2$ .

На весь стояк заввишки 6 м:  $E = E_1 + E_2 = 1,673 + 8,370 = 10,043 \text{ т/м}$ .

Для перевірки обчислимо повний тиск на стояк за формулою:

$$E = \frac{1}{2} \gamma_{zp} h (h + 2h_0 k_q) k,$$

$$E = 1,7 \cdot 6,0 / 2 (6,0 + 2 \cdot 1,0 \cdot 1,0) \cdot 0,246 = 10,0368 \text{ т/м}.$$

Тиск ґрунту на фундамент у точці  $f$  становить:

$$P_{qf} = 1,7 \cdot (8,0 + 1,0) \cdot 0,246 = 3,76 \text{ т/м}^2;$$

На відсік  $df$ :

$$E_3 = \frac{2,93 + 3,76}{2} \cdot 2 = 6,69 \text{ т/м}^2.$$

Пасивний тиск ґрунту

$$E_4 = \frac{1}{2} \gamma_{zp} h^2 k = \frac{1}{2} \cdot 1,7 \cdot 4,0 \cdot 0,246 = 0,835 \text{ т/м}^2.$$

4. Визначаємо вертикальні та горизонтальні складові сил  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ , і  $E_4$ . Всі ці сили напрямлені до горизонту під кутом  $\delta = 17^\circ$  ( $\cos 17^\circ = 0,956$ ,  $\sin 17^\circ = 0,292$ ).

Обчислюємо горизонтальні та вертикальні складові повного тиску

$$E_{1x} = 1,673 \cdot \cos 17^\circ = 1,599 \text{ т/м}; E_{2x} = 8,370 \cdot \cos 17^\circ = 8,002 \text{ т/м};$$

$$E_{3x} = 6,69 \cdot \cos 17^\circ = 6,4 \text{ т/м}; E_{4x} = -0,835 \cdot \cos 17^\circ = -0,8 \text{ т/м};$$

$$E_{1y} = 1,673 \cdot \sin 17^\circ = 0,49 \text{ т/м}; E_{2y} = 8,370 \cdot \sin 17^\circ = 2,45 \text{ т/м};$$

$$E_{3y} = 6,69 \cdot \sin 17^\circ = 1,96 \text{ т/м}; E_{4y} = 0,835 \cdot \sin 17^\circ = 0,244 \text{ т/м}.$$

5. Визначаємо плечі всіх сил  $E_y$ , і  $E_x$  відносно точок  $a$ ,  $c$  і  $e$ . Сили  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ , і  $E_4$  прикладені на грань відсіку на рівні центру ваги відповідних трапецій, що складають епюру розподілу тиску (див. рис. 1.9).

Центр першої трапеції віддалений від лінії  $ab$  на відстань  $y_1$ :

$$y_1 = \frac{2 \cdot 0,418 + 1,255}{0,418 + 1,255} \cdot \frac{2}{3} = 0,832 \text{ м}.$$

Центр другої трапеції віддалений від лінії  $cd$  на відстань  $y_2$ :

$$y_2 = \frac{2 \cdot 1,255 + 2,93}{1,255 + 2,93} \cdot \frac{4}{3} = 1,733 \text{ м.}$$

Центр третьої трапеції віддалений від лінії  $ef$  на відстань  $y_3$ :

$$y_3 = \frac{2 \cdot 2,93 + 3,76}{2,93 + 3,76} \cdot \frac{2}{3} = 0,957 \text{ м.}$$

Сила  $E_4$  прикладена на рівні центра ваги трикутника і відступає від підшови  $ef$  на відстань  $y_4$ :

$$y_4 = \frac{2,0}{3} = 0,67 \text{ м.}$$

6. Обчислюємо перекидні та утримувальні моменти, а також коефіцієнти стійкості на перекидання. При обчисленні утримувальних та перекидних моментів вводимо коефіцієнти перевантаження відповідно  $n_1 = 0,8$  і  $n_2 = 1,2$ . Всі обчислення заносимо до таблиці 1.1.

Коефіцієнт стійкості на перекидання верхнього відсіку

$$k_1 = \frac{M_{ym.a}}{M_{нк.a}} = \frac{G_1 \cdot x_{1a} \cdot 0,8 + E_{1y} \cdot 1,0 \cdot 0,8}{E_{1x} \cdot y_1 \cdot 1,2},$$

де  $M_{ym.a}$ ,  $M_{нк.a}$  - відповідно утримувальний та перекидний моменти відносно точки  $a$ .

$$k_1 = \frac{0,8(4,8 \cdot 0,5 + 0,49 \cdot 1,0)}{1,599 \cdot 0,832 \cdot 1,2} = 1,448.$$

Коефіцієнт стійкості на перекидання стінки відносно точки  $c$  становить:

$$k_2 = \frac{M_{ym.c}}{M_{нк.c}} = \frac{50,66}{25,85} = 1,959.$$

Коефіцієнт стійкості стіни разом з фундаментом відносно точки  $e$  дорівнює:

$$k_3 = \frac{M_{ym.e}}{M_{нк.e}} = \frac{96,06}{56,27} = 1,71.$$

7. Визначаємо коефіцієнти стійкості стояка на зсув.

Для верхнього відсіку сила зсуву по шву  $ab$  становить:

$$1,2 \cdot E_{1x} = 1,2 \cdot 1,599 = 1,919$$

Визначаємо утримувальну силу, приймаючи при цьому коефіцієнт тертя  $f = 0,5$ :

Результати обчислень утримувальних та перекидних моментів

Таблиця 1.1

Сили	Проекції сил на осі		Відносно точки <i>a</i>				Відносно точки <i>c</i>				Відносно точки <i>e</i>			
			Плечі сил		Моменти сил		Плечі сил		Моменти сил		Плечі сил		Моменти сил	
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	$M_{ум}$	$M_{нк}$	<i>x</i>	<i>y</i>	$M_{ум}$	$M_{нк}$	<i>x</i>	<i>y</i>	$M_{ум}$	$M_{нк}$
$G_1$	-	4,8	0,5	-	1,92	-	1,9	-	7,3	-	2,5	-	9,6	-
$G_2$	-	17,3	-	-	-	-	1,5	-	20,8	-	2,1	-	29,06	
$G_3$	-	2,88	-	-	-	-	0,4	-	0,92	-	1,0	-	2,3	
$G_4$	-	14,4	-	-	-	-	-	-	-	-	1,5	-	17,3	
$P$	-	20,0	-	-	-	-	1,0	-	16,0	-	1,6	-	25,6	
$E_1$	1,599	0,49	1,0	0,832	0,392	1,6	2,4	4,832	0,94	9,3	3,0	6,832	1,18	13,12
$E_2$	8,002	2,45	-	-	-	-	2,4	1,733	4,7	16,65	3,0	3,733	5,88	35,8
$E_3$	6,4	1,96	-	-	-	-	-	-	-	-	3,0	0,957	4,71	7,35
$E_4$	-0,8	0,244	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,67	0,43	-
	15,201	64,524			2,312	1,6			50,66	25,85			96,06	56,27



$$P_{ym} = 0,8 \cdot 0,5(4,8 + 0,49) = 2,116 \text{ т/м.}$$

Коефіцієнт стійкості на зсув становить:

$$k_{1zc} = \frac{0,8 \cdot 0,5(4,8 + 0,49)}{1,2 \cdot 1,599} = 1,1.$$

Сила, що зсуває стіну по обрізу фундаменту:

$$P_{cd} = 1,2(E_{1x} + E_{2x}) = 1,2 \cdot 9,605 = 11,52 \text{ т/м.}$$

Утримувальна сила

$$P_{ym} = f(G_1 + G_2 + G_3 + P + E_{1y} + E_{2y}) \cdot 0,8 = 0,5 \cdot 47,92 \cdot 0,8 = 19,17 \text{ т/м,}$$

$$k_{2zc} = \frac{19,17}{11,52} = 1,66.$$

Сила зсуву по підшві фундаменту

$$P_{zc} = \sum_{i=1}^4 E_{ix} \cdot 1,2 = 15,201 \cdot 1,2 = 18,24 \text{ т/м.}$$

Утримувальна сила при  $f = 0,4$  (тертя кладки по вологій глині)

$$P_{ym} = f(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + P + E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} + E_{4y}) \cdot 0,8 = 25,81 \text{ т/м,}$$

$$k_{3zc} = \frac{25,81}{18,24} = 1,42.$$

Враховуючи те, що розрахунок виконано за граничним станом, коефіцієнт стійкості можна вважати цілком допустимим.

## 8. Перевірка міцності стіни.

Опір кладки стіни визначимо за формулою

$$R = \frac{2Ne}{m \cdot m_k \cdot \varphi b h^2},$$

де  $N$  – нормальна складова всіх сил, що діють на шов;  $e$  – ексцентриситет рівнодіючої цих сил відносно найменш напруженої грані;  $m$ ,  $m_k$  – коефіцієнти умов роботи відповідно стіни та кладки;  $\varphi$  – коефіцієнт поздовжнього згину, приймається з таблиці Д.1 (див. додаток);  $b$ ,  $h$  – відповідно ширина та висота перерізу.

На основі експериментальних досліджень за малих ексцентриситетів  $m = m_k = 1,0$ ;  $b = 1$  м;  $\varphi$  залежить від приведеної гнучкості  $\beta$ :

$$\beta = \frac{l_o}{a} \sqrt{\frac{1000}{\alpha}},$$

де  $l_o$  - розрахункова висота;  $a$  – найменший розмір поперечного перерізу;  $\alpha$  - пружна характеристика кладки, що залежить від типу кладки та марки розчину, приймається з таблиці Д.2. (див. додаток).

При розрахунку міцності приймаємо поправочні коефіцієнти перевантаження – для сил тиску землі  $n_1=1,2$ ; для сил ваги -  $n_1=1,1$ .

Розглянемо верхній відсік. Визначаємо ексцентриситет  $e_a$  рівнодіючої всіх сил, що діють на цей відсік відносно точки  $a$ . Для цього алгебраїчну суму моментів всіх сил відносно точки  $a$  розділимо на суму вертикальних проекцій всіх сил, з урахуванням поправочних коефіцієнтів перевантаження.

$$e_a = \frac{4,8 \cdot 1,1 \cdot 0,5 + 0,49 \cdot 1,2 \cdot 1,0 - 1,599 \cdot 1,2 \cdot 0,832}{4,8 \cdot 1,1 + 0,43 \cdot 1,2} = 0,282 \text{ м.}$$

Ексцентриситет відносно центра ваги  $e_o = y - e_a$ .

$$e_o = 0,5 - 0,282 = 0,218 \text{ м} < 0,45 y = 0,45 \cdot \frac{1}{2} = 0,225 \text{ м,}$$

$$y = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ м.}$$

Для верхнього відсіку, як для стовпа з вільним кінцем  $l_o = 2 \cdot 2,0 = 4,0 \text{ м}$ ;  $a = 1,0 \text{ м}$ .

за табл. Д.2, приймаємо  $\alpha = 1000$ , тоді  $\beta = \frac{4,0}{1,0} \sqrt{\frac{1000}{100}} = 4,0$ .

За табл. Д.1,  $\varphi = 0,99$ . Ексцентриситет:

$$e = e_o + \frac{h}{2} = 0,218 + 0,5 = 0,718 \text{ м.}$$

$$R = \frac{2 \cdot 5868,0 \cdot 71,8}{1,0 \cdot 1,0 \cdot 0,99 \cdot 100,0 \cdot 100^2} = 0,85 \text{ кг/см}^2 < 28,0 \text{ кг/см}^2.$$

Як бачимо, необхідний розрахунковий опір мурування значно нижчий фактичного.

Перевіряємо міцність по шву  $cd$

$$e_c = \frac{(7,3 + 20,8 + 0,92) \frac{1,1}{0,8} + (16,0 + 0,94 + 4,7) \frac{1,2}{0,8} - 25,85}{(4,8 + 17,3 + 2,88)1,1 + (0,49 + 2,45)1,2 + 20,0 \cdot 1,2} = 1,13 \text{ м;}$$

$$e_0 = 1,2 - 1,13 = 0,07 \text{ м}; \quad e = e_0 + \frac{h}{2} = 0,07 + 1,2 = 1,27 \text{ м};$$

$$\beta = \frac{8,0}{7,1} \sqrt{\frac{1000}{1000}} = 1,126; \quad \varphi = 1,0.$$

$$R = \frac{2 \cdot 54440 \cdot 127}{1,0 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot 100 \cdot 240^2} = 2,3 \text{ кг/см}^2 < 28,0 \text{ кг/см}^2.$$

Перевіряємо міцність по підшві фундаменту.

Ексцентриситет

$$e_e = \frac{\frac{96,06}{0,8} + \frac{56,27}{1,2}}{4,8 + 17,3 + 2,88 + 14,4 + 0,49 + 2,45 + 1,96 + 0,244 + 20,0} = 1,15 \text{ м};$$

$$e_0 = 1,5 - 1,15 = 0,35 \text{ м}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{h} \left( 1 + \frac{6e_0}{h} \right) = \frac{64,52}{3,0} \left( 1 + 6 \cdot \frac{0,35}{3,0} \right) = 36,6 \text{ т/м}^2 = 3,66 \text{ кг/см}^2.$$

Згідно будівельних норм необхідно, щоб найбільше напруження біля краю підшви позакентровано навантаженого фундаменту не перевищувало  $1,2 R$ .

$$3,66 < 1,2 \cdot 3,5 = 4,2 \text{ кг/см}^2.$$

**1.7. Приклад розрахунку стійкості підпірної стінки з використанням методу круглоциліндричної поверхні ковзання**

Вихідні дані: (рис. 1.10)

- ширина підшви фундаменту  $- 2b = 4,0 \text{ м};$
- висота стінки від підшви фундаменту  $- 13,0 \text{ м};$
- ширина стінки на рівні обрізу фундаменту  $- 3,5 \text{ м};$
- ширина по верху  $- 1,0 \text{ м};$
- заглиблення фундаменту  $h_{\text{загл.}} = 3,0 \text{ м};$
- питома вага важкого бетону  $\gamma = 2,5 \text{ т/м}^3.$

Характеристики ґрунту (див. попередній приклад).

Потрібно знайти найменший коефіцієнт стійкості. Загальних правил знаходження центра обертання дуги ковзання по циліндричній поверхні не існує. Тому розраховуємо кілька кривих

ковзання і з них вибираємо криву з найменшим коефіцієнтом запасу.

Зазвичай спочатку розраховуємо дуги ковзання, центри яких розташовані на обраній вертикалі - вниз, вгору, з них обираємо криву з найменшим коефіцієнтом запасу. Потім - на горизонтальному рівні центра обраної кривої шукаємо точку з найменшим коефіцієнтом запасу - вправо, вліво від попередньо вибраного центру.

Алгоритм розрахунку:

1. Вибираємо центр обертання - точку  $O_1$ . Для цього відкладаємо промінь від верхнього зовнішнього кута  $M$  підпірної стінки, під кутом  $36^\circ$  (рекомендована величина) до її верхньої грані. На перетині променя з вертикаллю, яка проходить через кут  $C$  (край обрізу фундаменту), знаходимо точку  $O_1$ .

2. На перетинні вище згаданої вертикалі з горизонталлю, що проходить через верхню грань підпірної стінки отримаємо точку  $B$ .

3. З центра  $O_1$  проводимо дугу так, щоб вона проходила через нижній кут  $S$  підпірної стінки (див. рис. 1.10). Цю криву приймаємо за можливу поверхню ковзання.

4. Графічно, за масштабом, визначаємо відстань  $O_1B$  та обчислюємо радіус дуги обертання за формулою

$$R_1 = \sqrt{(2b)^2 + (4 + O_1B)^2}; \quad R_1 = 15,6 \text{ м.}$$

5. З трикутників  $ABO_1$ ,  $CDO_1$  та  $FEO_1$  визначаємо значення центральних кутів  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  за катетами  $O_1B$ ,  $O_1C$  і  $O_1E$ :

$O_1B = 2,0 \text{ м (200 см)}$ ;  $O_1C = 12,0 \text{ м (1200 см)}$ ;

$O_1E = 15,0 \text{ м (1500 см)}$ .

З  $\triangle ABO_1$  визначаємо:

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_1B}{R_1} = \frac{2}{15,6} = 0,12821; \quad \alpha_1 = 1,44223 = 82,63^\circ.$$

З  $\triangle CDO_1$  визначаємо:

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_1C}{R_1} = \frac{12}{15,6} = 0,7692; \quad \alpha_2 = 0,6932 = 39,72^\circ.$$

З  $\triangle FEO_1$  визначаємо:

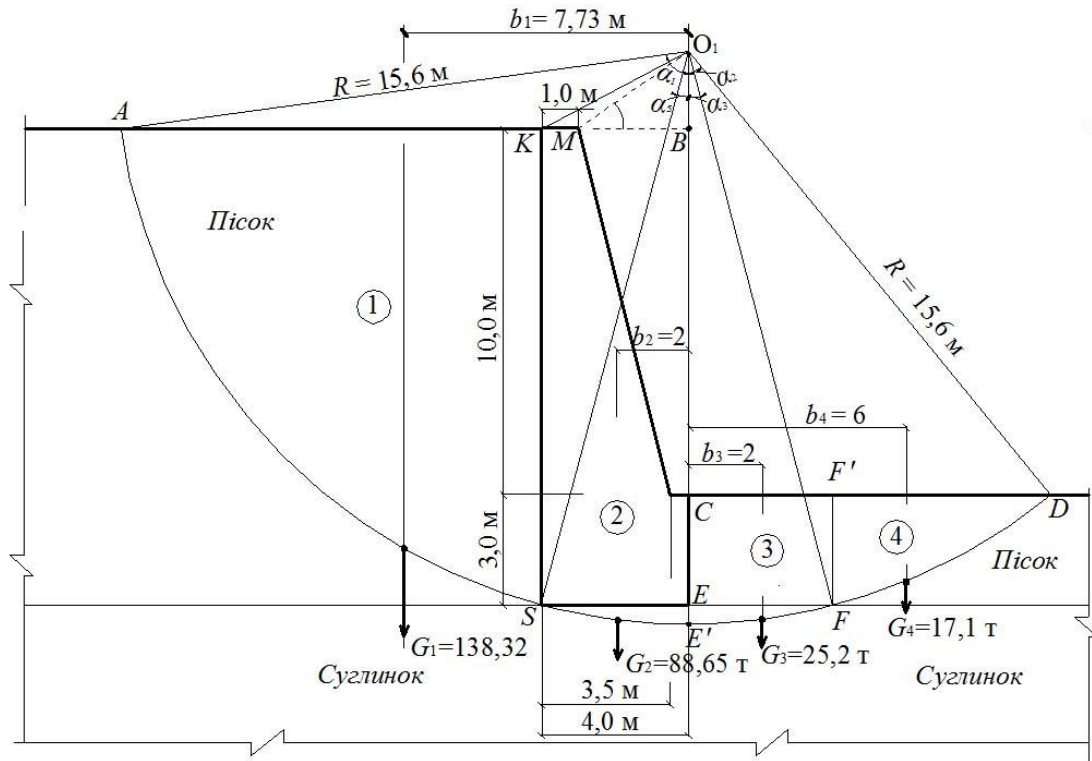


Рис. 1.10. Схема до розрахунку стійкості підпірної стійкості по круглоциліндричній поверхні ковзання

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_1 E}{R_1} = \frac{15}{15,6} = 0,9615 ; \quad \alpha_3 = 0,2784 = 15,95^\circ ; \quad \cos \alpha_5 = 0,9615 ;$$

$$\alpha_5 = \alpha_3 ; \quad \alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_3 = 0,6932 - 0,2784 = 0,4148 ,$$

$$39,72 - 15,95 = 23,77^\circ .$$

6. Визначаємо довжину дуги ковзання  $L$  та довжини ділянок кривої у обох шарах.

Загальна лінія ковзання  $L$  проходить у двох шарах ґрунту:

- у шарі піску - дві ділянки дуги ковзання, розміщені в межах кутів  $\alpha_1$  і  $\alpha_4$ ;

- у шарі суглинку - ділянка дуги з центральними кутами  $\alpha_3$  +  $\alpha_5$ .

Загальна довжина дуги ковзання вздовж  $ASFD$ :

$$L = (\alpha_1 + \alpha_2)R_1 = (1,44223 + 0,6932) \cdot 15,6 = 33,3127 \text{ м.}$$

Ділянки  $AS$  і  $FD$  у піщаному шарі:

$$L_1 = (\alpha_1 - \alpha_5 + \alpha_6)R_1 = (1,4422 - 0,9615 + 0,4148) \cdot 15,6 = 13,9698 \text{ м.}$$

Ділянка  $FE'S$ :

$$L_2 = 2\alpha_2 R_1 = 2 \cdot 0,2784 \cdot 15,6 = 8,69 \text{ м.}$$

Перевірка:

$$L = L_1 + L_2 = 22,50 + 12,94 = 33,44 \text{ м.}$$

$$\text{Похибка } \frac{0,013 \cdot 100}{33,44} \approx 0,04\% .$$

7. Визначаємо момент сил щеплення за дугою ковзання  $DFE'SA$ :

$$(L_1 \cdot C_1 + L_2 \cdot C_2)R_1 = (2250 \cdot 0,02 + 1294 \cdot 0,28)1560 = 635419 \text{ кг} \cdot \text{см} \cong 6,35 \text{ тм.}$$

8. Сектор ковзання розбиваємо на блоки 1÷4 і для кожного блока підраховуємо його площу, вагу, місце розташування центра ваги, момент відносно центра обертання і момент утримувальних сил. Для спрощення розрахунків, дугу ковзання апроксимуємо ламаною лінією, що дає можливість привести фігури окремих блоків до простих геометричних тіл, трикутників або трапецій.

$R_{br}$  - міцність на осьовий розтяг.

$$\text{I гр. стану } B_{12,5} - R_{br} = 6,73 \text{ кг/см}^2 ;$$

$$B_{15} - R_{br} = 7,65 \text{ кг/см}^2 ;$$

$$\text{II гр. стану } B_{12,5} - R_{br} = 10,2 \text{ кг/см}^2 ;$$

$$B15 - R_{bt} = 11,7 \text{ кг/см}^2.$$

При бетонуванні вертикальних конструкцій шаром заввишки більше 1,5 м:  $\gamma_6 = 0,85$

$$\text{III гр стану } B15 - R_{bt}^P = 12,0 \quad \gamma_{b3} \cdot R_{bt} = 0,85 \cdot 7,65 = 6,50 \text{ кг/см}^2.$$

$$\varphi_n^{pad} = \frac{3,14159 \cdot 32}{180^\circ} = 0,5585; \quad tg(0,5585) = 0,624;$$

$$\varphi_{сугл}^{pad} = \frac{3,14159 \cdot 18}{180^\circ} = 0,314159; \quad tg(0,31416) = 0,325.$$

9. Виконуємо обчислення для кожного блока, визначаючи його площу, вагу і координати центра ваги відносно центра обертання  $O_1$ .

Блок 1. Півпростір з шару піску *ASK* (див рис.1.10).

З  $\Delta ASK$  отримуємо

- площу

$$\omega_1 = \frac{AK \times KS}{2} = \frac{11,2 \times 13}{2} = 72,8 \text{ м}^2;$$

- вагу блока (товщина півпростору – 1 м)

$$G_1 = \omega_1 \cdot \gamma_n = 1 \cdot 72,8 \cdot 1,9 = 138,32 \text{ т};$$

- відстань центра ваги відносно центра обертання  $O_1$

$$b_1 = BK + \frac{AK}{3} = 4,0 + \frac{11,2}{3} = 7,73 \text{ м};$$

- діючий момент ваги блока 1 відносно центра обертання

$$G_1 b_1 = 138,32 \times 7,73 = 1069,2 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_1 \cdot tg \varphi_n \cdot R_1 = 138,32 \cdot tg 32^\circ \cdot 15,6 = 1346,5 \text{ тм},$$

$$G_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot tg \varphi_n \cdot R_1 = 138,32 \cdot 0,964 \cdot 0,624 \cdot 15,6 = 1298,0 \text{ тм}.$$

$$\text{Похибка } \frac{48,5 \cdot 100}{1298} \approx 3,7\% .$$

Блок 2. Площа самої стінки *KSECM* та півпростір із шару суглинки  $\Delta SE'E$ .

- площа стіни

$$\omega_2^{ст} = 3 \times 4,0 + \frac{3,5 + 1,0}{2} \cdot 10 = 34,5 \text{ м}^2;$$

- площа шару із суглинка

$$\omega_2^{\text{сугл}} = \frac{1}{2} 4,0 \times 0,6 = 1,2 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_2 = \omega_2^{\text{см}} \cdot \gamma_{\text{см}} + \omega_2^{\text{сyz}} \cdot \gamma_{\text{сyz}} = 34,5 \cdot 2,5 + 1,2 \cdot 2,0 = 88,65 \text{ т};$$

- координати центра ваги відносно  $O_1$ , приблизно вважаємо

$$b_2 \cong \frac{ES}{2} = \frac{4,0}{2} = 2 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блока 2 відносно  $O_1$  (за часовою стрілкою)

$$G_2 b_2 = 88,65 \times 2 = 177,3 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_2 \cdot \text{tg} \varphi_{\text{сyz}} \cdot R_1 = 88,65 \cdot 0,325 \cdot 15,6 = 449,5 \text{ тм}.$$

Блок 3. Містить площу з піщаного шару  $CEFD$  і шару суглинка  $\Delta EE'F'$ :

$$\omega_3 = 3 \times 4 + \frac{1}{2} 0,6 \cdot 4 = 13,2 \text{ м}^2;$$

$$\omega_3^n = 12,0 \text{ м}^2; \quad \omega_3^{\text{сyz}} = 1,2 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_3 = \omega_3^n \cdot \gamma_n + \omega_3^{\text{сyz}} \cdot \gamma_{\text{сyz}} = 12,0 \cdot 19 + 1,2 \cdot 2,0 = 25,2 \text{ т};$$

- координати центра ваги блока 3 відносно  $O_1$

$$b_3 \approx \frac{FC}{2} = \frac{4,0}{2} = 2 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блока 3 відносно точки  $O_1$  (проти годинникової стрілки)

$$G_3 b_3 = -25,2 \cdot 2 = -50,4 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил

$$G_3 \cdot \text{tg} \varphi_{\text{сyz}} \cdot R_1 = 25,2 \cdot 0,325 \cdot 15,6 = 127,8 \text{ тм}.$$

Блок 4. Містить площу півпростору з піщаного шару  $\Delta FF'D'$ :

- площа (розміри взяті з креслення)



$$\omega_4 = \frac{1}{2} DF' \times F'F = \frac{1}{2} 6 \times 3 = 9 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_4 = \omega_4 \cdot \gamma_n = 9,0 \cdot 1,9 = 17,1 \text{ т};$$

- координати центра ваги блока 4 відносно точки  $O_1$

$$b_4 = CF' + \frac{1}{3} DF' = 4,0 + \frac{6}{3} = 6,0 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блока 4 відносно  $O_1$  (проти годинникової стрілки)

$$- G_4 b_4 = -17,1 \cdot 6 = -102,6 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_4 \cdot \text{tg} \varphi_n \cdot R_1 = 17,1 \cdot 0,624 \cdot 15,6 = 166,5 \text{ тм}.$$

Результати обчислень активно-зсувних призм сил і утримувальних сил зводимо до таблиці 1.2.

10. Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості укосу підпірної стінки за формулою

$$K_{зан} = \frac{\sum_{i=1}^4 G_i \text{tg} \varphi_{n/c} R_1 + L_1 C_1 R_1 + L_2 C_2 R_1}{\sum_{i=1}^4 G_i b_i} = \frac{2090,3 + 456,0}{1093,5} = 2,33.$$

Таблиця 1.2

№ блока	Площа блока, м <sup>2</sup>	Вага блока, т	Плече моменту відносно $O_1$ , м	Діючий (активно) момент, $G_i b_i$ , тм	Утримувальний момент від сил тертя, тм
1	72,8	138,3	7,73	1069,2	1346,5
2	34,5/1,2	88,65	2,0	177,3	449,5
3	13,2/1,2	25,2	2,0	-50,4	127,8
4	9,0	17,1	6,0	-102,6	166,5
Всього:				1093,5	2090,3

11. Знаходимо найменше значення коефіцієнта запасу як функції від координати  $O_1$  у вертикальному напрямі.

Змістимо центр обертання другої кривої ковзання вгору по вертикалі на 2 м, отримаємо положення центра обертання  $O_2$  другої кривої ковзання.

Аналогічно обчислюємо всі параметри для отримання коефіцієнта запасу для другої кривої ковзання та зводимо їх до таблиці 1.5.

$$R_2 = 17,5\text{м}; \quad O_2E=17\text{м}; \quad O_2B=4\text{м}; \quad O_2C = 14\text{м}.$$

3  $\Delta A_2BO_2$

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_2B}{R_2} = \frac{4,0}{17,5} = 0,2286 \rightarrow \alpha_1^2 = 1,3402 = 76,79^\circ$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_2C}{R_2} = \frac{14,0}{17,5} = 0,80 \rightarrow \alpha_2^2 = 0,6435 = 36,87^\circ$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_2E}{R_2} = \frac{17,0}{17,5} = 0,9714 \rightarrow \alpha_3^2 = 0,2396 = 13,73^\circ$$

$$\alpha_5 \equiv \alpha_3, \quad \alpha_4^2 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2 = 1,3402 - 0,2396 = 1,101.$$

Довжина ліній ковзання

$$L_1^2 = (\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_3)R_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)R_2 = \\ = (1,3402 + 0,6435 - 2 \cdot 0,2396)17,5 = 26,31 \text{ м};$$

$$L_2^2 = 2\alpha_3 R_2 = 2 \cdot 0,2396 \cdot 17,5 = 8,4 \text{ м};$$

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 = 26,31 + 8,4 = 34,71 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення призми по дузі ковзання:

$$(L_1^2 \cdot C_1 + L_2^2 C_2)R_2 = (26,31 \cdot 0,02 + 8,4 \cdot 0,28)17,5 = 503,7 \text{ тм}.$$

Визначаємо активні та утримувальні зусилля в блоках.

#### Блок 1

- площа

$$\omega_1^2 = \frac{A^2 K \times KS}{2} = \frac{13,1 \cdot 13}{2} = 84,5 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_1^2 = \omega_1^2 \cdot \gamma_n = 84,5 \cdot 1,9 = 160,6 \text{ т};$$

- відстань центра ваги відносно центра обертання  $O_2$

$$b_1^2 = BK + \frac{A_2 K}{3} = 4,0 + \frac{13,1}{3} = 8,33 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блока 1 відносно  $O_2$

$$G_1^2 b_1^2 = 160,6 \cdot 8,33 = 1337,8 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил відносно  $O_2$   
 $G_1^2 \operatorname{tg} \varphi_n R_2 = 160,6 \cdot 0,624 \cdot 17,5 = 1753,8 \text{ тм.}$

Блок 2, 3

Зусилля  $G_2^2 \approx G_2$  (не змінюється)

Блок 4

- площа

$$\omega_4^2 = \frac{D_2 F' \times F' F}{2} = \frac{6,9 \cdot 3}{2} = 10,35 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_4^2 = \omega_4^2 \cdot \gamma_n = 10,35 \cdot 1,9 = 19,7 \text{ т};$$

- координата центра ваги відносно центра обертання  $O_2$

$$b_4^2 = CF' + \frac{D_2 F'}{3} = 4,0 + \frac{6,9}{3} = 6,3 \text{ м};$$

- діючий момент

$$-G_4^2 b_4^2 = -19,7 \cdot 6,3 = -124,1 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил

$$G_4^2 \operatorname{tg} \varphi_n R_2 = 19,7 \cdot 0,624 \cdot 17,5 = 215,1 \text{ тм.}$$

Зводимо результат обчислення по кривій ковзання відносно центру ковзання  $O_2$  до таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

№ блока	Площа блока, м <sup>2</sup>	Вага блока, т	Плече моменту відносно $O_1$ , м	Діючий (активно) момент, тм	Утримувальний момент від сил тертя, тм
1	84,5	160,6	8,33	1337,8	1753,8
2	34,5/1,2	88,65	2,0	177,3	449,5
3	13,2/1,2	25,2	2,0	-50,4	127,8
4	10,35	19,7	6,3	-124,1	215,1
Всього:				1340,6	2546,2

12. Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості укошу підпірної стінки за формулою

$$K_{san} = \frac{\sum_{i=1}^4 G_i \operatorname{tg} \varphi_{n/c} R_1 + L_1 C_1 R_1 + L_2 C_2 R_1}{\sum_{i=1}^4 G_i b_i} = \frac{2546,2 + 503,7}{1340,6} \cong 2,28.$$

Змішуємо центр обертання кривої ковзання вгору ще на 2 м:

$$R_3 = 19,5 \text{ м}; \quad O_3 E = 19,0 \text{ м}; \quad O_3 B = 6,0 \text{ м}; \quad O_3 C = 16,0 \text{ м};$$

З  $\Delta A_3 B O_3$

$$\cos \alpha_1^3 = \frac{O_3 B}{R_3} = \frac{6,0}{19,5} = 0,3077 \rightarrow \alpha_1^3 = 1,2580;$$

$$\cos \alpha_2^3 = \frac{O_3 C}{R_3} = \frac{16,0}{19,5} = 0,821 \rightarrow \alpha_2^3 = 0,6085;$$

$$\cos \alpha_3^3 = \frac{O_3 E}{R_3} = \frac{19,0}{19,5} = 0,9744 \rightarrow \alpha_3^3 = 0,2269;$$

$$\alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжини ліній ковзання

$$L_1^3 = (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) R_3 = \\ = (1,4127 + 0,6085 - 2 \cdot 0,353) \cdot 19,5 = 27,55 \text{ м};$$

$$L_2^3 = 2\alpha_3 \cdot R_3 = 2 \cdot 0,2269 \cdot 19,5 = 8,85 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення

$$(L_1^3 \cdot c_1 + L_2^3 \cdot c_2) R_3 = \\ = (5,51 \cdot 0,2 + 8,85 \cdot 2,8) \cdot 19,5 = 590,7 \text{ тм};$$

Активні та утримуючі зусилля в блоках

### Блок 1

- площа

$$\omega_1^3 = \frac{14,3 \cdot 13}{2} = 92,95 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_1^3 = \omega_1^3 \cdot \gamma_n = 32,95 \cdot 1,9 = 176,6 \text{ т};$$

- відстань центру ваги відносно  $O_3$

$$b_1^3 = BK + \frac{A_3 K}{3} = 4 + \frac{14,3}{3} = 8,77 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блоку 1 відносно  $O_3$

$$G_1^3 \cdot b_1^3 = 176,6 \cdot 8,77 = 1548,8 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил відносно  $O_2$

$$G_1^3 \cdot tg \varphi_n \cdot R_3 = 176,6 \cdot 0,624 \cdot 19,5 = 2148,9 \text{ тм}.$$

Блоки 2, 3 практично не змінюються.

#### Блок 4

- площа – не змінюється під тиском кривої відносно  $O_2$ .

Обчислення зводимо до таблиці 1.4.

Таблиця 1.4

№ блоку	Площа блоку, м <sup>2</sup>	Вага блоку, т	Плече моменту відносно $O_3 : b_i$ , м	Активний момент: $G_i b_i$ , тм	Утримувальний момент від сил тертя $G_1^3 \cdot tg \varphi_n \cdot R_3$
1	92,95	176,6	8,77	1548,8	2148,9
2	34,5/1,2	88,65	2,0	177,3	449,5
3	13,2/1,2	25,2	2,0	- 50,4	127,8
4	10,35	19,7	6,3	- 124,1	215,1
Всього:				1551,6	2941,3

$$K_{зал.} = \frac{2941,3 + 590,7}{1551,6} = \frac{3532,0}{1551,6} \cong 2,28.$$

12. Зміщуємо центр обертання вниз по вертикалі на 2,0 м:

$$R_4 = 13,6 \text{ м};$$

$$O_4 E = 13,0 \text{ м}; \quad O_4 B = 0 \text{ м}; \quad O_4 C = 10,0 \text{ м};$$

$$\alpha_1 = 90^\circ; \quad \alpha_1^4 = 1,5708;$$

$$\cos \alpha_2^4 = \frac{O_4 C}{R_4} = \frac{10,0}{13,6} = 0,7353 \rightarrow \alpha_2^4 = 0,7447, 42,67^\circ;$$

$$\cos \alpha_3^4 = \frac{O_4 E}{R_4} = \frac{13,0}{13,6} = 0,9559 \rightarrow \alpha_3^4 = 0,298, 17^\circ;$$

$$\alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжина ліній ковзання

$$\alpha_1^4 = (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)R_4 = (1,5708 + 0,7447 - 2 \cdot 0,298) \cdot 13,6 = 23,39 \text{ м};$$

$$\alpha_2^4 = 2\alpha_3 \cdot R_4 = 2 \cdot 0,298 \cdot 13,6 = 8,11 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення

$$(\alpha_1^4 \cdot c_1 + \alpha_2^4 \cdot c_2)R_4 = (23,39 \cdot 0,2 + 8,11 \cdot 2,8)13,6 = 372,5 \text{ тм}.$$

Активні та утримувальні зусилля у блоках.

#### Блок 1

- площа

$$\omega_1^4 = \frac{9,6 \cdot 13}{2} = 62,4 \text{ м}^2;$$

- вага блоку

$$G_1^4 = \omega_1^4 \cdot \gamma_n = 62,4 \cdot 1,9 = 117,8 \text{ т};$$

- координата центру ваги відносно  $O_4$

$$b_1^4 = BK + \frac{A_4K}{3} = 4 + \frac{9,6}{3} = 7,2 \text{ м};$$

- діючий активний момент від ваги блоку 1 відносно  $O_4$

$$G_1^4 \cdot b_1^4 = 117,8 \cdot 7,2 = 848,2 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил в блоці 1 відносно  $O_2$

$$G_1^4 \cdot tg \varphi_n \cdot R_4 = 117,8 \cdot 0,624 \cdot 13,6 = 999,7 \text{ тм}.$$

Блоки 2, 3 - без зміни.

#### Блок 4

- площа

$$\omega_4^4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,0 = 7,5 \text{ м}^2;$$

- вага блоку

$$G_4^4 = \omega_4^4 \cdot \gamma_n = 7,5 \cdot 1,9 = 14,25 \text{ т};$$

- координата центра ваги блока 4 відносно  $O_4$

$$b_4^4 = 4 + \frac{5}{3} = 5,67 \text{ м};$$

- активний момент

$$G_4^4 \cdot b_4^4 = -14,25 \cdot 5,67 = -80,8 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_4^4 \cdot tg \varphi_n \cdot R_4 = 14,25 \cdot 0,624 \cdot 13,6 = 120,9 \text{ тм}.$$

Обчислення заносимо до таблиці 1.5.

Таблиця. 1.5

№ блока	Площа блока, м <sup>2</sup>	Вага блока, т	Плече моменту відносно $O_4 : b_i$ , м	Активний момент: $G_i b_i$ , тм	Утримувальний момент від сил тертя $G_i \cdot tg \varphi_i \cdot R_4$
1	62,4	117,8	7,2	848,2	999,7
2	34,5/1,2	88,65	2,0	117,3	449,5
3	13,2/1,2	25,2	2,0	-50,4	127,8
4	7,5	14,25	5,67	-80,8	120,9
Всього:				849,3	1697,9

$$K_{зал.} = \frac{16979 + 372,5}{894,3} = 2,32.$$

13. Зміщуємо центр обертання вниз по вертикалі ще на 2,0 м:

$$R_5 = 21,5 \text{ м}; \quad O_5 E = 21,0 \text{ м}; \quad O_5 B = 8,0 \text{ м}; \quad O_5 C = 18,0 \text{ м};$$

$$\alpha_1 = 90^\circ.$$

$$3 \Delta A_5 B O_5$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_5 B}{R_5} = \frac{8,0}{21,5} = 0,3721 \rightarrow \alpha_1^5 = 1,1895 \quad 68,2^\circ;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_5 C}{R_5} = \frac{18,0}{21,5} = 0,8372 \rightarrow \alpha_2^5 = 0,5787 \quad 33,2^\circ;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_5 E}{R_5} = \frac{21,0}{21,5} = 0,9767 \rightarrow \alpha_3^5 = 0,2163 \quad 12,4^\circ;$$

$$\alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжини ліній ковзання

$$\alpha_1^5 = (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)R_5 =$$

$$= (1,1895 + 0,5787 - 2 \cdot 0,2163) \cdot 21,5 = 28,72 \text{ м};$$

$$\alpha_2^5 = 2\alpha_3 \cdot R_5 = 2 \cdot 0,2163 \cdot 21,5 = 9,3 \text{ м.}$$

Момент сил зчеплення

$$(\alpha_1^5 \cdot c_1 + \alpha_2^5 \cdot c_2)R_5 = (28,72 \cdot 0,2 + 9,3 \cdot 2,8)21,5 = 683,3 \text{ тм.}$$

Активні та утримувальні зусилля в блоках

Блок 1

- площа  $\omega_1^5 = \frac{15,8 \cdot 13}{2} = 102,7 \text{ м}^2;$

- вага блоку  $G_1^5 = \omega_1^5 \cdot \gamma_n = 102,7 \cdot 1,9 = 195,1 \text{ т};$

- координата центру ваги відносно  $O_5$

$$b_1^5 = 4 + \frac{15,8}{3} = 9,267 \text{ м};$$

- активний момент

$$G_1^5 \cdot b_1^5 = 195,1 \cdot 9,267 = 1808 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_1^5 \cdot tg \varphi_n \cdot R_5 = 195,1 \cdot 0,624 \cdot 21,5 = 2617,5 \text{ тм.}$$

Блоки 2, 3 - без змін.

Блок 4

- площа  $\omega_4^5 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 3,0 = 11,25 \text{ м}^2;$

- вага блоку

$$G_4^5 = \omega_4^5 \cdot \gamma_n = 11,25 \cdot 1,9 = 21,4 \text{ т};$$

- координата центру ваги відносно  $O_5$

$$b_4^5 = 4 + \frac{7,5}{3} = 6,5 \text{ м};$$

- активний момент

$$G_4^5 \cdot b_4^5 = -21,4 \cdot 6,5 = -139,1 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_4^5 \cdot tg \varphi_n \cdot R_5 = 21,4 \cdot 0,624 \cdot 21,5 = 287,1 \text{ тм.}$$

Результати обчислень заносимо до таблиці 1.8



Таблиця 1.8

№ блоку	Площа блоку, м <sup>2</sup>	Вага блоку, т	Плече моменту відносно $O_5 : b_i$ , м	Активний момент: $G_i b_i$ , тм	Утримувальний момент від сил тертя $G_i \cdot tg \varphi_i \cdot R_5$
1	102,7	195,1	9,27	1808,0	2617,5
2	34,5/1,2	88,65	2,0	177,3	449,5
3	13,2/1,2	25,2	2,0	- 50,4	127,8
4	11,25	21,4	6,5	-139,1	287,1
Всього:				1795,8	3481,9

$$K_{зал.} = \frac{3481,9 + 683,3}{1795,8} = 2,32.$$

14. Вибираємо оптимальну точку  $O_2$  розташування центра обертання від зміни координат по вертикалі (що проходить через початкову точку  $O_1$ ) і проводимо через неї горизонталь, уздовж якої зміщуємо точку  $O_2$  вліво на 2,0 м, отримуємо точку  $O_6$ , для якої маємо:

$$R_6 = 18,0 \text{ м}; \quad O_6 E_1 = 17 \text{ м}; \quad O_6 B_1 = 4,0 \text{ м}; \quad O_6 C_1 = 14,0 \text{ м};$$

$$\triangle A_6 B_1 O_6$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_6 B_1}{R_6} = \frac{4,0}{18,0} = 0,222 \rightarrow \alpha_1 = 1,3467 \quad 77,2^\circ;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_6 C_1}{R_6} = \frac{14,0}{18,0} = 0,777 \rightarrow \alpha_2 = 0,6797 \quad 38,94^\circ;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_6 E_1}{R_6} = \frac{17,0}{18,0} = 0,9444 \rightarrow \alpha_3 = 0,3349 \quad 19,19^\circ;$$

$$\alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжини ліній ковзання

$$\begin{aligned} \alpha_1^6 &= (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) R_6 = \\ &= (1,3467 + 0,6797 - 2 \cdot 0,3349) \cdot 18,0 = 24,42 \text{ м}; \end{aligned}$$

$$\alpha_2^6 = 2\alpha_3 \cdot R_6 = 2 \cdot 0,3349 \cdot 18,0 = 12,06 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення

$$(\alpha_1^6 \cdot c_1 + \alpha_2^6 \cdot c_2) R_6 = (24,42 \cdot 0,2 + 12,06 \cdot 2,8) \cdot 18,0 = 695,7 \text{ тм}.$$

Обчислення активних та утримувальних внутрішніх зусиль у блоках відносно центру обертання  $O_6$ .

Блок 1

- площа

$$\omega_1^6 = \frac{11,5 \cdot 13}{2} = 74,75 \text{ м}^2;$$

- вага блоку

$$G_1^6 = \omega_1^6 \cdot \gamma_n = 74,75 \cdot 1,9 = 142,03 \text{ т};$$

- відстань центру ваги блоку 1 відносно  $O_6$

$$b_1^6 = B_1K + \frac{KA_6}{3} = 4 + \frac{11,5}{3} = 9,833 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блоку  $G_1^6$  відносно  $O_6$

$$G_1^6 \cdot b_1^6 = 142,03 \cdot 9,833 = 1396,6 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил від сил тертя в блоці 1

$$G_1^6 \cdot \text{tg} \varphi_n \cdot R_6 = 142,03 \cdot 0,624 \cdot 18,0 = 1595,3 \text{ тм}.$$

Блоки 2

- площа

$$\omega_2^{cm} = 3 \cdot 4,0 + \frac{3,5 + 1,0}{2} \cdot 10 = 34,5 \text{ м}^2;$$

$$\omega_2^{cye} = \frac{1}{2} 4,0 \cdot 0,9 = 1,8 \text{ м}^2;$$

- вага блоку

$$G_2^6 = \omega_2^{cm} \cdot \gamma_{cm} + \omega_2^{cye} \cdot \gamma_{cye} = 34,5 \cdot 2,5 + \frac{1}{2} 4 \cdot 0,9 \cdot 2,0 = 89,9 \text{ т};$$

- координата центра ваги відносно  $O_6$

$$b_2^6 = C_1C + \frac{ES}{2} = 2,0 + \frac{4}{2} = 4,0 \text{ м};$$

- активний (зсுவний) момент від ваги блоку 2 відносно  $O_6$  (за часовою стрілкою)

$$G_2^6 b_2^6 = 89,9 \cdot 0,325 \cdot 18,0 = 525,9 \text{ тм}.$$

Блок 3'

- площа піщаного шару

$$\omega_{3'(n)}^6 = 2 \times 3 = 6,0 \text{ м}^2;$$

- площа шару суглинку

$$\omega_{3'(суг)}^6 = \frac{0,9 + 0,95}{2} \cdot 2 = 1,85 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_{3'}^6 = \omega_{3'(n)}^6 \cdot \gamma_n + \omega_{3'(суг)}^6 \cdot \gamma_{суг} = 6,0 \cdot 1,9 + 1,85 \cdot 2,0 = 15,1 \text{ т};$$

- координата центру ваги блока 3' відносно  $O_6$

$$b_{3'}^6 \cong \frac{C_1 C}{2} = \frac{2,0}{2} = 1,0 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блоку 3' відносно  $O_6$  (за часовою стрілкою)

$$G_{3'}^6 \cdot b_{3'}^6 = 15,1 \cdot 1,0 = 15,1 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_{3'}^6 \cdot \text{tg } \varphi_{суг} \cdot R_6 = 15,1 \cdot 0,325 \cdot 18,0 = 88,3 \text{ тм}.$$

Блок 3'' (половина блока 3)

- площа піщаного шару

$$\omega_{3''(n)}^6 = 2 \times 3 = 6,0 \text{ м}^2;$$

- площа шару суглинку

$$\omega_{3''(суг)}^6 = \frac{1,0 + 0,95}{2} \cdot 2 = 1,95 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_{3''}^6 = \omega_{3''(n)}^6 \cdot \gamma_n + \omega_{3''(суг)}^6 \cdot \gamma_{суг} = 6,0 \cdot 1,9 + 1,95 \cdot 2,0 = 15,3 \text{ т};$$

- координата центра ваги блока 3'' відносно  $O_6$

$$b_{3''}^6 = \frac{C_1 F_1}{2} = \frac{2,0}{2} = 1,0 \text{ м};$$

- активний (зсувний) момент від ваги блока «3''» відносно  $O_6$  (проти часової стрілки)

$$G_{3''}^6 \cdot b_{3''}^6 = -15,3 \cdot 1,0 = -15,3 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил

$$G_{3''}^6 \cdot tg \varphi_c \cdot R_6 = 15,3 \cdot 0,325 \cdot 18,0 = 89,5 \text{ тм.}$$

Блок 4' (включає 2 підблока 4' і 4'')

- площа піщаного шару

$$\omega_{4'(nec.)}^6 = 4 \cdot 3 = 12,0 \text{ м}^2;$$

- площа шару суглинку

$$\omega_{4'(суг.)}^6 = \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 4,0 = 2,0 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_{4'}^6 = \omega_{4'(nec.)}^6 \cdot \gamma_n + \omega_{4'(суг.)}^6 \cdot \gamma_{суг.} = 12,0 \cdot 1,9 + 2,0 \cdot 2,0 = 26,8 \text{ т};$$

- координата центру ваги блока «4'» відносно  $O_6$

$$b_{4'}^6 = C_1 F_1 + \frac{F_1 F_2}{2} = 2 + \frac{4}{2} = 4,0 \text{ м};$$

- активний (зсувний) момент від ваги блока «4'» відносно  $O_6$   
(проти часової стрілки)

$$G_{4'}^6 \cdot b_{4'}^6 = -26,8 \cdot 4 = -107,2 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил блок 4' відносно  $O_6$

$$G_{4'}^6 \cdot tg \varphi_{суг.} \cdot R_6 = 26,8 \cdot 0,325 \cdot 18,0 = 156,8 \text{ тм.}$$

Блок 4''

Включає площу трикутника  $\Delta D_6 F_3 F_4$

- площа

$$\omega_{4''}^6 = \frac{1}{2} 5,3 \cdot 3,0 \cong 8,0;$$

- вага

$$G_{4''}^6 = \omega_{4''}^6 \cdot \gamma_n = 8,0 \cdot 1,9 = 15,2 \text{ т};$$

- координата центру ваги блока «4''» відносно  $O_6$

$$b_{4''}^6 = \frac{D_6 F_3}{3} + C_1 F_3 = \frac{5,3}{3} + 6,0 = 1,707 + 6,0 = 7,77 \text{ м};$$

- активний (зсувний) момент від ваги блока «4''» відносно  $O_6$   
(проти часової стрілки)

$$G_{4''}^6 \cdot b_{4''}^6 = -15,2 \cdot 7,77 = -118,1 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил блока 4" відносно  $O_6$

$$G_{4''} \cdot tg \varphi_n \cdot R_6 = 15,2 \cdot 0,624 \cdot 18,0 = 170,7 \text{ тм.}$$

Всі результати обчислень для кривої ковзання з центром обертання  $O_6$  заносимо до таблиці 1.9.

Таблиця 1.9

№ блока	Площа блока, м <sup>2</sup>	Вага блока, т	Плече моменту відносно $O_6 : b_i$ , м	Активний момент: $G_i b_i$ , тм	Утримувальний момент від сил тертя $G_i \cdot tg \varphi_i \cdot R_6$
1	74,75	142,03	9,83	1396,6	1595,3
2	34,5/1,8	89,9	4,0	359,6	525,9
3'	6,0/1,85	15,1	1,0	15,1	88,3
3''	6,0/1,95	15,3	1,0	-15,3	89,5
4'	12,0/2,0	26,8	4,0	-107,2	156,8
4''	8,0	15,2	7,77	-118,1	170,7
Всього				1530,7	2626,5

$$K_{зем} = \frac{2626,5 + 695,7}{1530,7} = \frac{3322,2}{1530,7} = 2,17.$$

15. Зміщуємо точку  $O_2$  по горизонталі на 2 м і отримуємо точку  $O_7$ , центр обертання кривої ковзання, для якої маємо:

$$R_7 = 18,8 \text{ м, } O_7 B_7 = 4 \text{ м, } O_7 F_4 = 17 \text{ м, } O_7 F_1 = 14,0 \text{ м.}$$

З  $\Delta O_7 B_2 A_7, O_7 F_1 D_{74} O_7 F S$  :

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_7 B_2}{R_7} = \frac{4,0}{18,8} = 0,2128 \rightarrow \alpha_1 = 1,3564; 77,7^\circ;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_7 F_1}{R_7} = \frac{14,0}{18,8} = 0,7447 \rightarrow \alpha_2 = 0,7307; 41,87^\circ;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_7 F}{R_7} = \frac{17,0}{18,8} = 0,9043 \rightarrow \alpha_3 = 0,4412; 25,28^\circ;$$

$$\alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжини ліній ковзання

$$L_1^7 = (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) R_7 = (1,3564 + 0,7307 - 2 \cdot 0,4412) 18,8 = 22,65 \text{ м};$$

$$L_2^7 = 2\alpha_3 \cdot R_7 = 2 \cdot 0,4412 \cdot 18,8 = 16,59 \text{ м};$$

$$L^7 = L_1^7 + L_2^7 = 22,65 + 16,59 = 39,24 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення по кривій ковзання відносно  $O_7$

$$(L_1^7 C_1 + L_2^7 C_2) R_7 = (22,65 \cdot 0,2 + 16,59 \cdot 2,8) \cdot 18,8 = 958,46 \text{ тм}.$$

Обчислення активних та утримуючих внутрішніх зусиль в окремих блоках відносно  $O_7$ :

Блок 1

- площа

$$\omega_1^7 = \frac{10,3 \cdot 13}{2} = 66,95 \text{ м}^2;$$

- вага блоку

$$G_1^7 = \omega_1^7 \cdot \gamma_n = 66,95 \cdot 1,9 = 127,2 \text{ т};$$

- відстань центра ваги блоку 1 відносно  $O_7$

$$b_1^7 = B_2 K + \frac{KA_7}{3} = 8 + \frac{10,3}{3} = 11,433;$$

- діючий момент від ваги блоку  $G_1^7$  відносно  $O_7$

$$G_1^7 \cdot b_1^7 = 127,2 \cdot 11,433 = 1454,3 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил від ваги блока 1 (сил тертя)

$$G_1^7 \cdot \text{tg} \varphi_n \cdot R_7 = 127,2 \cdot 0,624 \cdot 18,8 = 1492,2 \text{ тм}.$$

Блок 2

- площа бетонної стіни

$$\omega_2^{cm} = 34,5 \text{ м}^2;$$

- площа суглинку

$$\omega_2^{сyz} = \frac{1}{2} 1,5 \cdot 4 = 3,0 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_2^7 = \omega_2^{cm} \cdot \gamma_{cm} + \omega_2^{сyz} \cdot \gamma_{сyz} = 34,5 \cdot 2,5 + 3,0 \cdot 2,0 = 92,25 \text{ т};$$

- координата центра ваги блоку 2 відносно  $O_7$

$$b_2^7 = F_1 C + \frac{ES}{2} = 4,0 + \frac{4}{2} = 6,0 \text{ м};$$

- активний момент від ваги блока 2 відносно  $O_7$  (проти часової стрілки)

$$G_2^7 \cdot b_2^7 = 92,25 \cdot 6,0 = 553,5 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил (сил тертя) блок 2

$$G_2^7 \cdot \text{tg } \varphi_{\text{сyz}} \cdot R_7 = 92,25 \cdot 0,325 \cdot 18,8 = 563,65 \text{ тм.}$$

Блок 3

- площа піщаного шару

$$\omega_{3(\text{нес.})}^7 = 4 \cdot 3 = 12,0 \text{ м}^2;$$

- площа шару суглинки

$$\omega_{3(\text{сyz.})}^7 = \frac{1,8 + 1,5}{2} \cdot 4,0 = 6,6 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_3^7 = \omega_{3(\text{нес.})}^7 \cdot \gamma_{\text{нес}} + \omega_{3(\text{сyz.})}^7 \cdot \gamma_{\text{сyz.}} = 12,0 \cdot 1,9 + 6,6 \cdot 2,0 = 36,0 \text{ т};$$

- координата центру ваги блоку «3» відносно  $O_7$

$$b_3^7 = \frac{F_1 C}{2} = \frac{4,0}{2} = 2,0 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блоку 3 відносно  $O_7$  (по часовій стрілці)

$$G_3^7 \cdot b_3^7 = 36,0 \cdot 2,0 = 72,0 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил в блоці 3 відносно  $O_7$

$$G_3^7 \cdot \text{tg } \varphi_{\text{сyz}} \cdot R_7 = 36,0 \cdot 0,325 \cdot 18,8 = 220,0 \text{ тм.}$$

Блок 4' (блок 4 містить два підблоки 4' і 4'')

- площа піщаного шару

$$\omega_{4'(\text{нес.})}^7 = 8 \cdot 3 = 24,0 \text{ м}^2;$$

- площа шару суглинки

$$\omega_{4'(\text{сyz.})}^7 = \frac{1}{2} \cdot 8,0 \cdot 1,8 = 7,2 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_{4'}^7 = \omega_{4'(\text{нес.})}^7 \cdot \gamma_n + \omega_{4'(\text{сyz.})}^7 \cdot \gamma_{\text{сyz.}} = 24,0 \cdot 1,9 + 7,2 \cdot 2,0 = 60,0 \text{ т};$$

- координата центра ваги блоку 4' відносно  $O_7$

$$b_{4'}^7 = \frac{F_1 D_5}{2} = \frac{8,0}{2} = 4,0 \text{ м};$$

- активний момент від ваги блока 4' відносно  $O_7$  (проти часо-  
вої стрілки)

$$G_{4'}^7 \cdot b_{4'}^7 = -60,0 \cdot 4 = -240,0 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил (тертя) в блоці 4' відносно  $O_7$

$$G_{4'}^7 \cdot tg \varphi_{\text{св}} \cdot R_7 = 60,0 \cdot 0,325 \cdot 18,8 = 366,7 \text{ тм}.$$

Блок 4''

Включає площу трикутника  $\Delta D_7 D_5 D_8$

$$\text{- площа } \omega_{4''}^7 = \frac{1}{2} 4,5 \cdot 3 = 6,75 \text{ м}^2;$$

$$\text{- вага } G_{4''}^7 = \omega_{4''}^7 \cdot \gamma_n = 6,75 \cdot 1,9 = 12,83 \text{ т};$$

- координата центра ваги блоку 4'' відносно  $O_7$

$$b_{4''}^7 = F_1 D_5 + \frac{D_5 D_7}{3} = 8,0 + \frac{4,5}{3} = 9,5 \text{ м};$$

- активний момент від ваги блока «4''» відносно  $O_7$  (проти  
часової стрілки)

$$G_{4''}^7 \cdot b_{4''}^7 = -12,83 \cdot 9,5 = -121,9 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил блока 4'' відносно  $O_7$

$$G_{4''}^7 \cdot tg \varphi_n \cdot R_7 = 12,83 \cdot 0,624 \cdot 18,8 = 150,5 \text{ тм}.$$

Всі результати обчислень для кривої ковзання з центром  
обертання  $O_7$  заносимо до таблиці 1.10

Таблиця 1.10

№ блока	Площа блока, м <sup>2</sup>	Вага блока, т	Плече моменту відносно $O_7$ : $b_i$ , м	Активний момент: $G_i b_i$ , тм	Утримувальний момент від сил тертя $G_i \cdot tg \varphi_i \cdot R_7$ , тм
1	66,95	127,2	11,43	1454,3	1492,2
2	34,5/3,0	92,25	6,0	553,5	563,65
3	12,0/6,6	36,0	2,0	72,0	220,0
4'	24,0/7,2	60,0	4,0	-240,0	366,6
4''	6,75	12,83	9,5	-121,9	150,5
Итого				1717,9	2793,0



$$K_{зем} = \frac{2793,0 + 958,5}{1717,9} = 2,184$$

16. Зміщуємо точку центра ваги обертання кривої  $O_2$  вправо в точку  $O_8$ , для якої маємо:

$$R_8 = 17,3 \text{ м}; \quad O_8B_3 = 4 \text{ м}, \quad O_8C_4 = 17,0 \text{ м}, \quad O_8C_3 = 14,0 \text{ м}.$$

$$3 \triangle O_8B_3A_8, \quad O_8C_3D_8, \quad O_8C_4S$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_8C_3}{R_8} = \frac{4,0}{17,3} = 0,2312 \rightarrow \alpha_1 = 1,3375;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{O_8C_3}{R_8} = \frac{14,0}{17,3} = 0,8092 \rightarrow \alpha_2 = 0,6279;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{O_8C_4}{R_8} = \frac{17,0}{17,3} = 0,9827 \rightarrow \alpha_3 = 0,1865;$$

$$\alpha_5 = \alpha_3.$$

Довжини ліній ковзання

$$L_1^8 = (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)R_8 = \\ = (1,3375 + 0,6279 - 2 \cdot 0,1865)17,3 = 27,55 \text{ м};$$

$$L_2^8 = 2\alpha_3 \cdot R_8 = 2 \cdot 0,1865 \cdot 17,3 = 6,45 \text{ м};$$

Загальна довжина

$$L^8 = L_1^8 + L_2^8 = 27,55 + 6,45 = 34,0 \text{ м}.$$

Момент сил зчеплення по кривій ковзання відносно  $O_8$

$$(L_1^8 C_1 + L_2^8 C_2)R_8 = (27,55 \cdot 0,2 + 6,45 \cdot 2,8) \cdot 17,3 = 407,8 \text{ тм}.$$

Обчислення активних і утримуючих внутрішніх зусиль в окремих блоках відносно  $O_8$ :

Блок 1

- площа

$$\omega_1^8 = \frac{14,4 \cdot 13}{2} = 93,6 \text{ м}^2;$$

- вага блока

$$G_1^8 = \omega_1^8 \cdot \gamma_n = 93,6 \cdot 1,9 = 177,8 \text{ т};$$

- відстань центра ваги блоку 1 відносно  $O_8$

$$b_1^8 = B_3K + \frac{KA_8}{3} = 2,0 + \frac{14,4}{3} = 6,8 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блоку  $G_1^8$  відносно  $O_8$

$$G_1^8 \cdot b_1^8 = 177,8 \cdot 6,8 = 1209,0 \text{ тм};$$

- момент утримуючих сил від ваги блоку 1 (сил тертя)

$$G_1^8 \cdot tg \varphi_n \cdot R_8 = 177,8 \cdot 0,624 \cdot 17,3 = 1919,4 \text{ тм.}$$

Блок 2

- площа бетонної стіни

$$\omega_2^{cm} = 34,5 \text{ м}^2;$$

- площа суглинку

$$\omega_2^{cыз} = \frac{1}{2} 0,3 \cdot 4 = 0,6 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_2^8 = \omega_2^{cm} \cdot \gamma_{cm} + \omega_2^{cыз} \cdot \gamma_{cыз} = 34,5 \cdot 2,5 + 0,6 \cdot 2,0 = 87,5 \text{ т};$$

- координата центра ваги блоку 2 відносно  $O_8$

$$b_2^8 = 0;$$

- активний момент від ваги блоку 2 відносно  $O_8$

$$G_2^8 \cdot b_2^8 = 87,5 \cdot 0 = 0;$$

- момент утримуючих сил

$$G_2^8 \cdot tg \varphi_{cыз} \cdot R_8 = 87,5 \cdot 0,325 \cdot 17,3 = 492,0 \text{ тм.}$$

Блок 3

- площа

$$\omega_3^8 = \frac{1}{2} 8,4 \cdot 3,0 = 12,6 \text{ м}^2;$$

- вага

$$G_3^8 = \omega_3^8 \cdot \gamma_{нec} = 12,6 \cdot 1,9 = 23,94 \text{ т};$$

- координата центра ваги блоку 3 відносно  $O_8$

$$b_3^8 = CC_3 + \frac{1}{3} D_8C = 2,0 + \frac{8,4}{3} = 4,8 \text{ м};$$

- діючий момент від ваги блоку 3 відносно  $O_8$  (проти часо-  
вої стрілки)

$$G_3^8 \cdot b_3^8 = -23,94 \cdot 4,8 = -114,9 \text{ тм};$$

- момент утримувальних сил у блоці 3 відносно  $O_8$

$$G_3^8 \cdot tg \varphi_n \cdot R_8 = 23,94 \cdot 0,624 \cdot 17,3 = 258,4 \text{ тм.}$$

Всі результати обчислень заносимо до таблиці 1.11

$$K_{зем} = \frac{2669,8 + 4078}{1094,1} = \frac{3077,6}{1094,1} = 2,81.$$

Таблиця 1.11

№ блока	Площа блока, м <sup>2</sup>	Вага блока, т	Плече моменту відносно $O_8 : b_i$ , м	Активний момент: $G_i b_i$ , тм	Утримувальний момент від сил терття $G_i \cdot tg \varphi_i \cdot R_8$
1	93,6	177,8	6,8	1209,0	1919,4
2	34,5/0,6	87,5	0,0	0,0	492,0
3	12,6	23,9	4,8	-114,9	258,4
Всього				1094,1	2669,8

### 1.8. Аналіз розрахунку підпірної стінки на міцність і стійкість з використання числових методів

Розглянемо класичну конструкцію підпірної стінки з похилою передньою і вертикальною задньою стінками з монолітного бетону. Вихідні дані наступні (рис. 1.11):

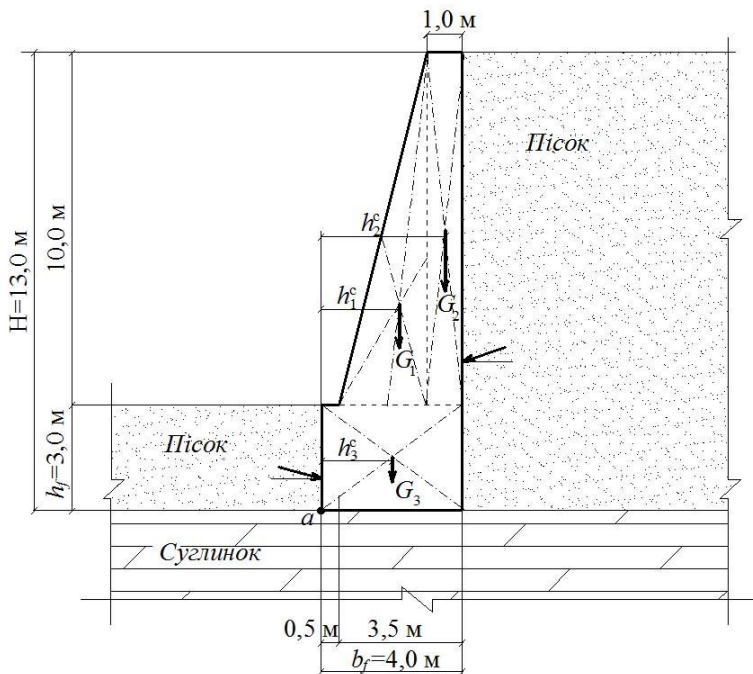


Рис. 1.11. Конструктивна схема підпірної стінки

- ширина фундаменту - 4,0 м;
- висота стінки від підшови фундаменту  $H = 13,0$  м;
- ширина стінки на рівні обрізу фундаменту - 3,5 м;
- ширина по верху - 1,0 м;
- заглиблення фундаменту - 3,0 м;
- об'ємна вага бетону  $\gamma = 2,4$  т/м<sup>3</sup>;
- клас бетону B20 –  $R_{bn} = 1170$  кгс/см<sup>2</sup>;  $R_{btm} = 9,18$  кгс/см<sup>2</sup>;
- Характеристики ґрунту засипки і основи:
- засипка: - пісок;
- об'ємна вага -  $\gamma = 1,9$  т/м<sup>3</sup>;
- кут внутрішнього тертя -  $\varphi = 32^\circ$ ;
- коефіцієнт зчеплення -  $C = 0,0$  (для числового розрахунку приймаємо  $C = 0,005$  кгс/см<sup>2</sup>);
- модуль загальної деформації ґрунту -  $E_0 = 250,0$  кгс/см<sup>2</sup>;
- $\gamma_0 = 0,32$ ;

- основа*: - суглинок;
- об'ємна вага -  $\gamma = 2,0 \text{ т/м}^3$ ;
  - кут внутрішнього тертя -  $\varphi = 18^\circ$ ;
  - коефіцієнт зчеплення -  $C = 0,28 \text{ кгс/см}^2$ ;
  - модуль загальної деформації ґрунту, коефіцієнт Пуассона -  $E_0 = 150,0 \text{ кгс/см}^2$ ;  $\gamma_0 = 0,34$ .

Алгоритм розрахунку конструкції підпірної стінки:

- розрахунок на міцність бетонної конструкції;
- на стиск, зсув і згин;
- розрахунок на стійкість;
- на перекидання відносно ребра  $a$  і визначення коефіцієнта

запасу.

Розрахунок виконаний аналітично та чисельно на основі моментної схеми скінченних елементів [2]. При розрахунку на стійкість використаний метод круглоциліндричних поверхонь за [3]. Проведено порівняльний аналіз результатів інженерного та числового розрахунків конструкції підпірної стінки, що розглядається.

Для реалізації числового розрахунку взаємодії підпірної стінки та ґрунтового півпростору у плоскій постановці, побудована відповідна дискретна модель і розрахункова схема півпростору одиничної товщини, що представлені на рис. 1.12. Розміри сіткової області півпростору складають  $M1 \times M2 \times M3 = 2 \times 33 \times 36$  ( $NUX = 2 \times 33 \times 36 = 2376$ ), що відповідає числу рівнянь  $K = NUX = 2376 \times 3 = 7128$  без урахування накладених в'язів.

Розміри півпростору по довжині  $L = 3400,0$  см і по ширині (глибини)  $B = 2100,0$  см. Дискретна модель дає можливість дослідити активну зону півпростору під подошвою фундаменту підпірної стінки на глибину до 8м ( $H_C = 800,0$  см).

На розрахунковій схемі представлені параметри для визначення радіуса і довжини кривої ковзання ґрунтової призми відповідно до методу круглоциліндричної поверхні [3], при цьому маємо:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 1,3467 \text{ рад} \equiv 77,2^\circ; \\
 \lambda_2 &= 0,6797 \text{ рад} \equiv 38,94^\circ; \\
 \lambda_3 &= 0,3349 \text{ рад} \equiv 19,19^\circ;
 \end{aligned}
 \tag{1.56}$$

$$\lambda = L_1 + L_2.$$

Радіус кривої визначається за критерієм найменшого коефіцієнта запасу [3] і остаточно визначений за шість ітерацій, тобто

$$R_6 = 18,0 \text{ м.} \quad (1.57)$$

Відповідно з (1.54) отримаємо (див. рис. 1.12)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3) R_6; \lambda_2 = 2 \lambda_3 R_6; \\ \lambda_1 &= (1,3467 + 0,6797 - 2 \cdot 0,3349) \cdot 18,0 = 24,42 \text{ м;} \\ \lambda_2 &= 2 \cdot 0,3349 \cdot 18,0 = 12,06 \text{ м;} \\ \lambda &= 24,42 + 12,6 = 36,48 \text{ м.} \end{aligned} \quad (1.58)$$

На рис. 1.12. представлена кругова крива ковзання призми руйнування з певним запасом стійкості. Знаком “х” показані локальні елементи, в яких пластичні деформації досягають максимуму при втраті стійкості підпірною стінкою.

Так як, при числовому розрахунку коефіцієнт зчеплення не може дорівнювати нулю, то його значення, у випадку засипання піском, приймаємо рівним  $C = 0,005 \text{ кг/см}^2$ . Визначаються максимальні активний та пасивний тиск у точках з максимальною глибиною при скінченноелементній дискретизації, тобто в скінченних елементах  $n_6^a = 959$ ,  $n_6^b = 947$ , для яких параметри глибини будуть рівні відповідно  $h_1 = 1250,0 \text{ см}$  і  $h_2 = 250,0 \text{ см}$ . Величина бічного тиску на підпірну стінку, з урахуванням

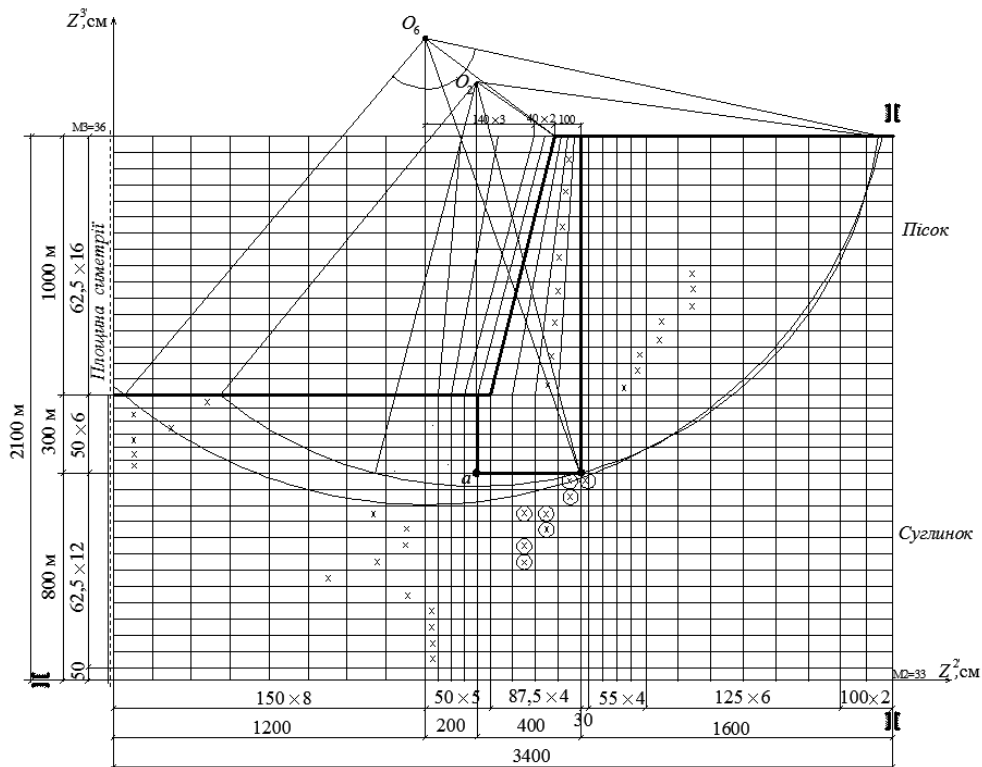


Рис. 1.12. Дискретна модель і розрахункова схема взаємодії підпірної стінки і ґрунтового півпростору

еквівалентного тиску, який заміняє величину зчеплення, визначається за формулами [4]:

$$\begin{aligned}\sigma_2^a &= \sigma_{\varphi 2}^a - \sigma_{c 2}^a = \gamma_1 \cdot h_1 \cdot \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) - 2c \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right); \\ \sigma_2^p &= \gamma_1 \cdot h_2 \cdot \operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - 2c \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right); \\ \sigma_2^a &= 0,0019 \cdot 1250 \cdot \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{32}{2}\right) - \\ &- 2 \cdot 0,005 \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{32}{2}\right) \cong 0,73 \text{ кг/см}^2\end{aligned}\quad (1.59)$$

$$\begin{aligned}\sigma_2^n &= \gamma_1 \cdot h_2 \cdot \operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - 2c \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right); \\ \sigma_2^n &= 0,0019 \cdot 250 \cdot \operatorname{tg}^2 61^\circ - \\ &- 2 \cdot 0,005 \cdot \operatorname{tg} 61^\circ \cong 1,564 \text{ кг/см}^2\end{aligned}\quad (1.60)$$

За результатами числового розрахунку згідно розрахунковій схемі (див. рис. 1.12) в зазначених точках  $n_6^a = 959$ ,  $n_6^n = 947$  (таблиці 1.12 і 1.13 в графі 2) отримали значення активного та пасивного тиску, які можна порівняти з аналітичними розрахунками (1.59) та (1.60):

$$\Delta\sigma_2^a = \frac{(0,78 - 0,73) \cdot 100}{0,73} \cong 6,8\%; \quad (1.61)$$

$$\Delta\sigma_2^p = \frac{(1,48 - 1,564) \cdot 100}{1,564} \cong 5,4\%; \quad (1.62)$$

Вважаємо, що розбіжність аналітичного та числового розрахунків (1.61), (1.62) за визначенням активного і пасивного тисків цілком задовільні.

При числовій реалізації розглянутого прикладу огорожувальної конструкції прораховувалися варіанти при різних критеріях навантаження та рівняннях стану в заграничному стані [5]:

1) з урахуванням і без урахування параметра «Лоде-Надаи» при описанні критерію руйнування поверхні (навантажування) (*lode = ,true.; lode = .falce.*);



Інтенсивність тиску на задню та передню грань підпірної стінки. Активний тиск

Таблиця 1.12

№ точки	№ вузла	$\sigma_N^{22}$ , кгс/см		$\sigma_N^{22}$ без корекції при $lode = false$	Осереднені $\sigma_N^{22}$ кгс/см	$\sigma^{23}$ , з корекц. кгс/см	Осереднені $\bar{\sigma}^{23}$	Реакція * $\bar{\sigma}^{23} \cdot h_4$
		Без корекції	З корекцією					
1	893	0,31	0,18	0,67	-0.39	1,25	0,7	+87.5
2	959	-1,09	-1,08	-0.78		0.15		
3	1025	-1,06	-1,03	-0.74	-1.16	-0.0065	-0,11	-13.75
4	1091	-1,26	-1,22	-0.89		-0.15		
5	1157	-1,20	-1,17	-0.90	-1.14	-0.22	-0,25	-31.25
6	1223	-1,12	-1,10	-0.89		-0.28		
7	1289	-1,05	-1,04	-0.86	-1.01	-0.32	-0.34	-42.5
8	1355	-0,97	-0,97	-0.82		-0.36		
9	1421	-0,90	-0,89	-0.77	-0.85	-0.38	-0.385	-48.13
10	1487	-0,83	-0,81	-0.72		-0.39		
11	1553	-0,75	-0,73	-0.68	-0.69	-0.40	-0.40	-50.0
12	1619	-0,67	-0,64	-0.63		-0.40		
13	1685	-0,59	-0,56	-0.59	-0.53	-0.40	-0.40	-50.0
14	1751	-0,51	-0,49	-0.54		-0.40		
15	1817	-0,44	-0,40	-0.49	-0.59	-0.44	-0.42	-52.5
16	1883	-0,49	-0,77	-0.44		-0.54		
17	1949	-0,72	-0,78	-0.39	-0.56	-1.48	-1.01	-101.0
18	2015	-0,64	-0,33	-0.33		-0.22		
19	2081	0,07	+0,33	-0.25	+0.31	-0.24	-0.23	-23.0
20	2147	0,19	+0,29	-0.13		-0.23		
21	2213	0,17	+0,20	-0.00	+0.55	-0.23	-0.36	-36.0
22	2279	0,80	+0,89	+0.95		-0.49		
Усього							-360,63	

Пасивний тиск

Таблиця 1.13

№ точки	№ вузла	$\sigma_N^{22}$ , кгс/см		$\sigma_N^{22}$ , Без корекції <i>lode=false</i>	Осереднений $\sigma_N^{22}$ , кгс/см
		без корекції	з корекцією		
1	881	-0,81	-1,04	-0,571	-0,126
2	947	-1,82	-1,48	-1,32	
3	1013	-1,44	-1,27	-1,20	
4	1079	-1,68	-1,36	-1,32	-2,045
5	1145	-1,79	-1,42	-1,45	
6	1211	-2,97	-2,12	-2,64	

2) облік або необлік впливу поперечної анізотропії багатошару на фізико-механічні характеристики ґрунтових шарів (без урахування корекції  $E_0$ ; з урахуванням корекції  $E_0$ ). у відповідних таблицях ці варіанти враховані і зазначені у вертикальних рядах.

На рис. 1.13 за результатами визначення активних і пасивних тисків на стінку побудовані епюри і відповідна гістограма для визначення дискретних \* повних тисків. Облік параметра \* (*lode = true.*) на кривих ділянках при визначенні тисків на стінку викликає певну нелінійність зміни функції тиску, а без його обліку епюра тисків носить практично лінійний характер (без урахування гарних спотворень) - друга епюра.

Згідно з поданими до епюр тисків і гістограм визначаємо повний активний і пасивний тиск та порівнюємо результати з аналітичними значеннями, які визначаємо за формулами:

$$E_a = \frac{1}{2} \sigma_2^a \cdot h_1 \cdot 1; \quad (1.63)$$

$$E_p = 2h_2 \cdot c \cdot tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2} \gamma_1 \cdot h_2^2 \cdot tg^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (1.64)$$

Підставляючи значення параметрів у (1.63) і (1.64) отримаємо:

$$\sigma_2^a = 0,2019 \cdot 1300 \cdot tg^2 29^\circ - 0,01 \cdot tg 29^\circ = 0,753 \text{ кгс/см}^2;$$

$$E_a = \frac{1}{2} \cdot 0,753 \cdot 1300 \cdot 1 = 489,45 \text{ кгс/см}^2;$$

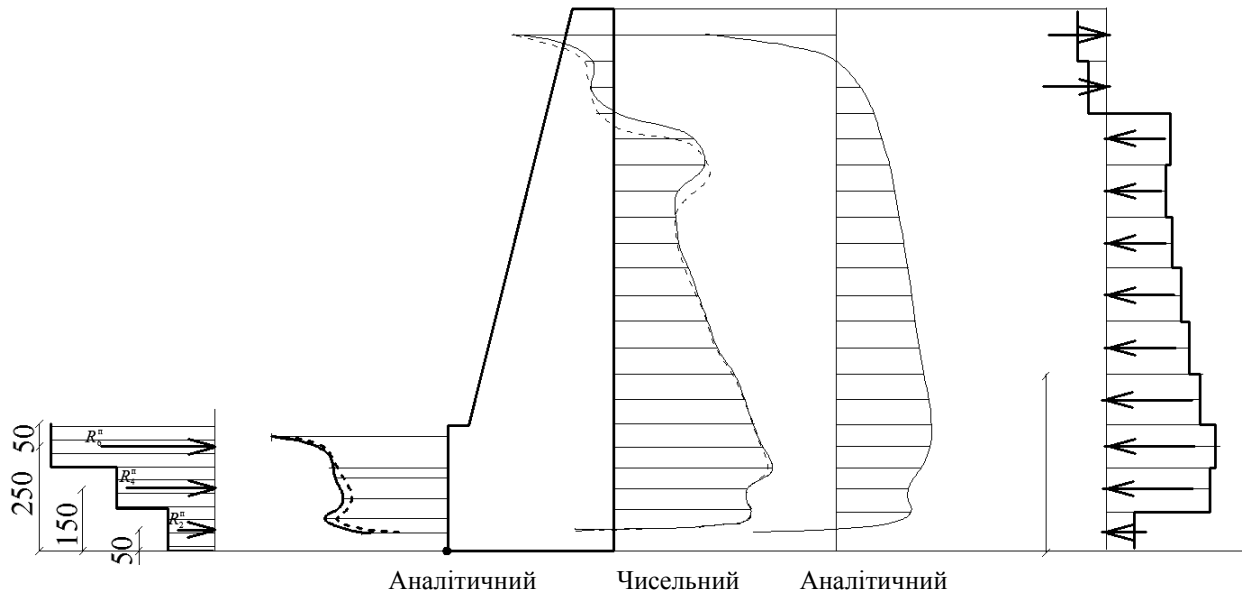


Рис. 1.13. Епюри та гістограми активного і пасивного тиску на підпірну стінку

$$E_a = 300,0 \cdot 0,018 + \frac{1}{2} \cdot 1,855 \cdot 300 = 286,65 \text{ кгс/см}^2;$$

$$E_a - E_p = 489,45 - 286,65 = 202,8 \text{ кг.}$$

Числові результати по гістограмі (див. рис. 1.13) та у відповідності з таблицею 1.14 дають наступні значення:

$$E'_a = \sum_{i=1}^9 R_i^a = 690,25 \text{ кгс;} \quad (1.65)$$

$$E'_p = \sum_{i=1}^3 R_i^p = 507,6 \text{ кгс;} \quad (1.66)$$

Повний тиск, перекидний та утримувальний моменти при дії ґрунту на підпірну стінку .....

Таблиця 1.14

Активний тиск			
№ точки	Реакції від активного тиску, кГс	Плече реакції відносно ребра «а», см	Момент перекидання кГс см
2	-39,0	50,0	-1950,0
4	-116,0	150,0	-17400,0
6	-114,0	250,0	-28500,0
8	-126,25	362,5	-45765,625
10	-106,25	487,5	-51796,875
12	-86,25	612,5	-52828,125
14	-66,25	737,5	-48859,375
16	-73,25	862,5	-63609,375
18	-70,0	987,5	-69125,0
20	+38,75	1112,5	+43109,375
22	+68,75	1237,5	+85078,125
Всього	-690,25	Всього	-251646,875
Пасивний тиск			
№ точки	Реакції від пасивного тиску, кГс	Плече реакції відносно ребра «а», см	Утримуючий момент кГс см
2	+126,0	50,0	+6300,0
4	+126,0	150,0	+18900,0
6	+255,6	250,0	+63900,0
Всього	507,6	Всього	89100,0

$$E'_a - E'_p = 690,25 - 507,6 = 182,65 \text{ кгс.} \quad (1.67)$$

Різниця тисків при аналітичному, з урахуванням кута тертя між ґрунтом і стінками  $\delta = 28$ , та числовим розрахунком складає:

$$\Delta E' \% = \frac{(182,6 - 202,8 \cdot \cos 20^\circ)}{202,8} \cong (-3,9)\%.$$

Розрахунок стійкості стінки на зсув при інженерному (аналітичному) розрахунку проводимо з використанням формули [3]:

$$K_{zan} = \frac{P_{cm} \operatorname{tg} \varphi + W_p c_0}{(E'_a - E'_p) \cos \delta}, \quad (1.68)$$

де  $P_{cm}$  – вага перерізу стінки одиничної ширини;  $\varphi$  – кут внутрішнього тертя ґрунту основи по підшві фундаменту підпірної стінки (для суглинку  $\varphi = 18^\circ$ );  $W_p$  – площа підшви фундаменту підпірної стінки одиничної товщини;  $\delta$  – кут внутрішнього тертя між вертикальними поверхнями підпірної стінки та ґрунту засипки, приймаємо  $\delta = 20^\circ$ ;  $C_0$  – коефіцієнт зчеплення ґрунту в основі фундаменту стінки,  $C_0 = 0,28 \text{ кгс/см}^2$ .

Статична вага перерізу підпірної стінки рівна сумі ваги окремих бетонних відсіків (див. рис. 1.11) переріз одиничної товщини ( $h_0 = 1,0 \text{ см}$ )

$$P_{cm} = G_1 + G_2 + G_3; \quad (1.69)$$

де:

$$G_1 = h_0 \cdot S_1 \cdot \gamma_\delta = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 1000 \cdot 0,0024 = 300,0 \text{ кг};$$

$$G_2 = h_0 \cdot S_2 \cdot \gamma_\delta = 1 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 0,0024 = 240,0 \text{ кг};$$

$$G_3 = h_0 \cdot S_3 \cdot \gamma_\delta = 1 \cdot 400 \cdot 1000 \cdot 0,0024 = 288,0$$

$$P_{cm} = 300 + 240 + 288 = 828 \text{ кгс.}$$

Остаточно маємо:

$$K_{zan} = \frac{828 \operatorname{tg} 18^\circ + 400 \cdot 1 \cdot 0,28}{(489,45 - 286,65) \cos 20^\circ} = \frac{381,02}{190,57} \cong 2,0 \quad (1.70)$$

При числових розрахунках на зсув використовуємо ту ж формулу тільки з використанням значення знаменника за отриманими числовими результатами: (див. формулу (1.67)):

$$K_{зан} = \frac{381,02}{182,65} \cong 2,09 \quad (1.71)$$

Таким образом, числовий результат (1.71) практично співпадає с аналітичним (1.70).

Стійкість підпірної стінки на перекидання відносно ребра (див. рис. 1.10) визначається за формулами:

$$K_{зан} = \frac{M_{ym}}{M_{нк}}; \quad (1.72)$$

де

$$M_{нк} = E_a \cdot \cos \delta \cdot h_0^a; \quad h_0^a = \frac{H}{3} \quad (1.73)$$

для аналітичного розрахунку:

$$M'_{нк} = \sum_{i=1}^9 R_i^a \cdot h_0^i \quad (1.74)$$

при числовому розрахунку з використанням гістограми, представленій на рис. 1.12. Добутки реакцій в ділянках гістограми на відповідні «плечі» зведені до таблиці 1.14, тобто маємо:

$$M'_{нк} = -251646,875 \text{ кгс} = -2,5165 \text{ тм}. \quad (1.75)$$

Відповідно до формули (1.80) маємо

$$M_{нк} = 489,45 \cdot \cos 20^\circ \cdot \frac{1300}{3} = 489,45 \cdot 0,94 \cdot 433,33 = 1,994 \cdot \text{тм}. \quad (1.76)$$

Утримуючий момент для аналітичного розрахунку визначається за формулою:

$$M_{ym} = G_1 \cdot h_1^c + G_2 \cdot h_2^c + G_3 \cdot h_3^c + \\ + E_n \cdot \cos \delta \cdot \frac{h_f}{3} + E_a \cdot \sin \delta \cdot b_f. \quad (1.77)$$

Відповідно з (1.77) маємо:

$$M_{ym} = 300 \left( 300 \frac{250}{3} \right) + 240(400 - 50) + 288 \frac{400}{2} + 286,65 \cdot \cos 20^\circ \times \\ \times \frac{300}{3} + 489,45 \cdot \sin 20^\circ \cdot 400 = 300501,95 \text{ кг см} \quad (1.78)$$

Підставляючи значення з формул (1.75)÷(1.78) до виразу (1.72), отримаємо:

$$K_{zan} = \frac{3,0050196 \cdot 10^5}{1,994 \cdot 10^5} = 1,507. \quad (1.79)$$

Утримуючий момент за результатами чисельного розрахунку визначається моментом від ваги окремих відсіків перетину підпірної стінки аналогічно виразу (1.77) та моменту від горизонтальної складової повного пасивного тиску (див. таблицю 1.11) і вертикальної складової повного активного тиску ( $\sigma^{23} \cdot h_u$  – див. графу 9 в табл. 1.12) тобто маємо:

$$M'_{ym} = \sum G_i \cdot h_i^c + R_i^n \cdot h_n^i + \sum \sigma^{23} h_v = 300 \cdot 216,667 + 240 + 288 \cdot 200 + 89100 + 360,63 \cdot 400 = 439952,1 \text{ кг см} \quad (1.80)$$

Враховуючи (1.80) коефіцієнт запасу при розрахунках на перекидання підпірної стінки відносно ребра «а», при обчисленні на основі числових результатів складає величину:

$$K'_{zan} = \frac{M_{ym}}{M'_{нк}} = \frac{4,3995 \cdot 10^5}{2,5165 \cdot 10^5} \cong 1,748,$$

що цілком згоджується з величиною (1.79).

Перевіряємо по міцності матеріалу підпірної стінки при поздовжньому згині - відцентровий стиск нормальних перерізів. Розглядаючи надземну конструкцію підпірної стінки відповідно до скінченноелементної моделі (див. рис. 1.12) використовуємо числові результати за нормальними напруженнями  $\sigma^{33}$  в крайніх скінченних елементах (лівий і правий): - ліворуч в точках 1÷9 ( $N = 1281 \div 2271$  через два шари - 132) і праворуч -  $N = 1287 \div 2277$  теж при нумерації вузлів через 132. Результати зведені до таблиці 1.15, при цьому епюра напружень в перерізі представляється у вигляді мембранної (постійної вздовж перерізу) і чистого згину:

$$\sigma_{(u)} = \frac{\sigma^{33(l)} - \sigma^{33(n)}}{2}; \quad (1.81)$$

$$\sigma_{(m)} = \frac{\sigma^{33(l)} + \sigma^{33(n)}}{2}; \quad (1.82)$$

$$M_u^i = \sigma_u^i \cdot W^i, i = 1,9; \quad (1.83)$$

$$N_*^i = \sigma_{(m)}^i \cdot A^i, i = 1,9. \quad (1.84)$$

Погонні згинальні моменти в одиничному перерізі підпірної стінки за її висотою  
Варіант з коефіцієнтом,  $Lude=falsi$

Таблиця 1.15

№ то-чки	№ лівих СЕ	$\sigma_N^{22(n)}$ , кгс/см <sup>2</sup>	№ правих СЕ	$\sigma_N^{22(n)}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$\sigma_{(4)}^{22}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$h_1$	Коефіцієнт $k$	$M_4$ , тм	$\sigma_{(4)}^{33}$ , кгс	N, кгс/т
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1281	-2,63	1287	-4,18	+0,775	350,0	$0,2042 \cdot 10^{-5}$	0,15	-3,14	-1191,75 -1,1918
2	1413	-0,99	1419	-4,82	+1,915	318,75	$0,1693 \cdot 10^{-5}$	0,3242	-2,905	-925,97 -0,926
3	1545	+0,26	1551	-5,56	+2,91	287,5	$0,1378 \cdot 10^{-5}$	0,401	-2,65	-761,88 -0,7619
4	1677	+1,41	1683	-6,11	+3,76	256,25	$0,1094 \cdot 10^{-5}$	0,4113	-2,35	-602,19 -0,602
5	1809	+2,39	1815	-6,39	+4,39	225,0	$0,0844 \cdot 10^{-5}$	0,371	-2,0	-450,0 -0,45
6	1941	+3,07	1947	-6,23	+4,65	193,75	$0,0626 \cdot 10^{-5}$	0,291	-1,58	-306,13 -0,306
7	2073	3,14	2079	-5,33	+4,24	162,5	$0,0440 \cdot 10^{-5}$	0,187	-1,095	-177,94 -0,178
8	2205	+2,00	2211	-3,16	+2,58	131,25	$0,0287 \cdot 10^{-5}$	0,074	-0,58	-76,125 -0,076
9	2271	+0,73	2277	-2,12	+1,43	115,62 5	$0,0223 \cdot 10^{-5}$	0,032	-0,695	-80,36 -0,080



Результати обчислень внутрішніх зусиль відповідно з (1.81)÷(1.84) на основі чисельного розрахунку з використанням нормальних напружень зведені до таблиці 1.14.

Перевіряємо розрахункові значення внутрішніх зусиль для матеріалу підпірної стінки - бетону класу В20 для граничного стану по 1-й групі [6]:

$R_{bt} = 9,18 \text{ кгс/см}^2$  - призмової осьової міцності на розтяг зразка;

$R_{bn} = 117 \text{ кгс/см}^2$  - призмової міцності на стиск зразка;

площа перерізу, що розглядається  $A = 1 \cdot 256,25 = 256,25 \text{ см}^2$  (див. графу «4» таблиці 1.14).

Для обчислення екстремальних значень напруги використовуємо формулу [6] при дії на переріз, що розглядається нормативної сили і згинального моменту:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{N^{cp}}{A} \pm \frac{M_{\max}^{(4)}}{W_{nep}}. \quad (1.85)$$

Для перерізу «4» маємо (див. таблицю 1.14):

$$W_{1677-1683} = \frac{bh_c}{6} = \frac{10 \cdot 256,25^2}{6} = 1,0944 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{-602,19}{256,25} + \frac{0,4113 \cdot 10^5}{1,0994 \cdot 10^4} = -2,35 + 3,76 = 1,41 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}.$$

З урахуванням екстраполяції лінійної функції згинальних напружень від майданчика в центрі СЕ і на його краю (див. розрахункову схему на рис. 1.12 і табл. 1.14) отримуємо:

$$\sigma_c \equiv \sigma_{\max} = 1,41 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2};$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma_c \cdot 128,25}{96,04} = 1,88 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} < 2R_{bt} = 2,0 \cdot 9,18 = 18,36 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} \quad (1.86)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{-602,19}{256,25} - \frac{0,4113 \cdot 10^5}{1,0944 \cdot 10^4} = -2,35 - 3,76 = -6,11 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}. \quad (1.87)$$

Враховуючи екстраполяції за аналогією з (1.86) маємо:

$$\sigma_c \equiv \sigma_{\max} = -6,11 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2};$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma_c \cdot 128,25}{96,094} = -8,15 \frac{кзс}{см^2} < 2R_{bn} = -117,0 \frac{кзс}{см^2} \quad (1.88)$$

$$\sigma_{(4)}^{22} = \frac{\sigma_N^{22(x)} - \sigma_N^{22(n)}}{2}; \quad h_i = \frac{250 \cdot n}{8} + 100; \quad \sigma_{(4)}^{33} = \frac{\sigma_N^{33(x)} - \sigma_N^{33(n)}}{2};$$

$$M_{(4)} = \frac{\sigma_{(4)} \cdot h^2}{6}; \quad M_4 = R \cdot K; \quad N = \sigma_{(n)} \cdot \sigma_{(i)}; \quad k = \frac{h^2}{6}.$$

За даними таблиці 1.14 побудована епюра згинальних моментів (рис. 1.14) по висоті конструкції підпірної стінки відносно нейтральної осі змінних перерізів.

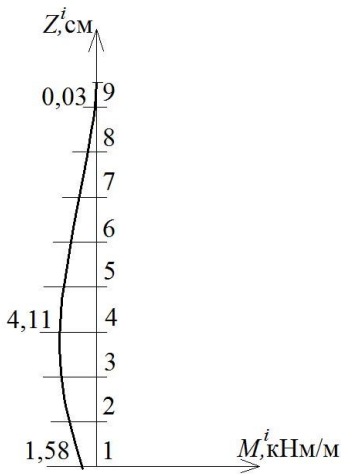


Рис. 1.14. Епюра згинних моментів приведених до нейтральної осі змінних перерізів

Для максимального моменту в перерізі «4» і відповідній цьому перерізу поздовжній силі за формулою (1.85) визначено екстремальні напруження. Значення нормальних напружень (1.86), (1.88) свідчать, що прийнятий клас бетону В20 задовольняє умовам міцності, додаткове армування можна виключити, за даними статичного розрахунку.

У даному прикладі для визначення характеру деформації півпростору переміщення - просадки від чисто компресійних впливів ваги ґрунтових мас виключені, тобто враховуються переміщення, які викликані порушенням рівноваги від утворення лужини в півпросторі.

У відповідності з побудованою скінченноелементною моделлю, що включає кількість скінченних елементів  $n_e = (m2-1) \times (m3-1) = (33-1) \times (36-1) = 1120$  без виключення порожнини в регулярній сіткової області ( $16 \times 13 = 208 \rightarrow n_b^p$ ) і накладених в'язів у розрахунковій схемі (див. рис. 1.12).

Результати числового розрахунку переміщень зведені до таблиць 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, в яких представлені:

Додаткові переміщення вузлів задньої грані підпірної стінки

Таблица 1.16

№ точки	№ вузла	Без корекції $E_{(z)}$		з корекцією $E_{(z)}$		$u_N^{2'}$ см без корекції $E_{(z)}$ <i>lade=false</i>
		$u_N^2$ см	$u_N^3$ см	$u_N^{2'}$ см	$u_N^{3'}$ см	
1	893	-2,90	4,08	-1,72	2,16	-3,13
2	959	-2,71	4,08	-1,62	2,16	-2,93
3	1025	-2,52	4,08	-1,53	2,16	-2,73
4	1091	-2,33	4,08	-1,43	2,16	-2,53
5	1157	-2,15	4,08	-1,34	2,16	-2,34
6	1223	-1,96	4,08	-1,24	2,16	-2,14
7	1289	-1,77	4,08	-1,15	2,16	-1,94
8	1355	-1,53	4,08	-1,03	2,16	-1,69
9	1421	-1,30	4,08	-0,91	2,16	-1,44
10	1487	-1,06	4,08	-0,79	2,16	-1,19
11	1553	-0,82	4,08	-0,67	2,16	-0,94
12	1619	-0,59	4,08	-0,55	2,16	-0,69
13	1685	-0,35	4,08	-0,43	2,16	-0,44
14	1751	-0,11	4,08	-0,30	2,16	-0,19
15	1817	+0,13	4,08	-0,18	2,15	0,06
16	1883	+0,37	4,08	-0,06	2,15	0,31
17	1949	0,61	4,08	0,07	2,15	0,57
18	2015	0,85	4,08	0,19	2,15	0,82
19	2081	1,09	4,08	0,32	2,15	1,07
20	2147	1,33	4,08	0,45	2,15	1,33
21	2213	1,58	4,08	0,58	2,15	1,59
22	2279	1,82	4,08	0,71	2,15	1,84
23	2345	2,07	4,08	0,84	2,15	2,10

Додаткові переміщення з урахуванням корекції: .....  
Днище котловану

Таблиця 1.17

№ точки	№ вузла	$u_N^{2'}$ см	$u_N^{3'}$ см
1	1255	0	+6,23
2	1257	-0,14	6,23
3	1259	-0,26	6,21
4	1261	-0,36	6,17
5	1263	-0,41	6,09
6	1265	-0,42	5,95
7	1267	-0,40	5,71
8	1269	-0,42	5,32
9	1271	-0,52	4,68
10	1273	-0,61	4,41
11	1275	-0,77	4,00
12	1277	-0,99	3,46
13	1279	-1,15	2,93
14	1281	-1,15	2,83

- 1) переміщення вузлів, що належать задній стороні підпірної стінки (див. табл. 1.13);
- 2) переміщення вузлів, що лежать на дні котловану - нижня площина укосу (див. табл. 1.14);
- 3) переміщення вузлів, що лежать на вільній поверхні півпростору (див. табл. 1.15);
- 4) переміщення вузлів, що лежать на підшві фундаменту підпірної стінки (див. табл. 1.16).

## Вільна поверхня

Таблиця 1.18

№ точки	№ вузла	$u_N^{2'}$ см	$u_N^{3'}$ см
1	2	3	4
1	2345	+0,84	+2,14
2	2347	0,87	1,96
3	2349	0,94	1,66
4	2351	1,00	1,40
5	2353	1,04	1,19
6	2355	1,05	1,00
7	2357	1,02	0,55
8	2359	0,94	0,15
9	2361	0,84	-0,13
10	2363	0,74	-0,38
11	2365	0,64	-0,58
12	2367	0,53	-0,75
13	2369	0,40	-0,92
14	2371	0,27	-1,03
15	2373	0,13	-1,11
16	2375	0,00	-1,13

Додаткові переміщення точок, що лежать на підшві фундаменту

Таблиця 1.19

№ точки	№ вузла	$u_N^{2'}$ см	$u_N^{3'}$ см
1	883	-1,72	+2,93
2	885	-1,72	2,83
3	887	-1,72	2,67
4	889	-1,72	2,50
5	891	-1,72	2,33
6	893	-1,72	2,33

Отримати числові результати по переміщенням при дослідженні неоднорідного ґрунтового півпростору вельми проблематично, що пов'язано з неадекватним описом фізико-механічних властивостей вузлів, отриманих лабораторними та польовими дослідженнями, проявом поперечної анізотропії багат шарового півпростору та ін.. [3, 4, 5].

У зв'язку з вищевикладеним при вирішенні даної тестової задачі розглядалися три варіанти рівнянь стану ґрунту: 1) без урахування корекції модуля загальної деформації ґрунту як функції від глибини півпростору; 2) з урахуванням корекції модуля загальної деформації як функції  $E(z)$ ; 3) без урахування параметра Лодена-Надаи в розглянутому критерії Мізеса. Ці три варіанти розв'язання задачі стійкості підірної стінки наведені в результатах по переміщенням задньої грані підірної стінки в таблиці 1.13 і відповідно побудовані епюри вузлових переміщень  $u_N^2(z^{3'})$ , що представлені на рис. 1.15. На рис. 1.16 і 1.17 побудовані епюри вузлових переміщень, що лежать на нижній поверхні укусу (на рівні обрізу фундаменту підірної стінки) і на вільній верхній поверхні укусу. Переміщення точок підірної стінки - на задній стороні і на підшві носять лінійний характер, причому за характером переміщень задньої сторони підірної стінки спостерігається поворот стінки як жорсткого цілого проти годинникової стрілки в бік активного впливу на підірну стінку.

Таким чином, за характером всіх представлених епюр переміщень можна зробити висновок, що стінка відчуває обертальний рух спільно з призмою сповзання. Центр цього обертального руху розташований у точці  $O_6$ , що визначена за методом круглоциліндричних поверхонь [3], при цьому розв'язок задачі по розрахунку стійкості основи підірної стінки здійснювався за мінімізацією функції коефіцієнта запасу стійкості, при цьому точка центру рухалася 3 рази по горизонталі і 2 рази по вертикалі. Радіус дуги ковзання призми дорівнює  $R = 18,0$  м і вимірюється від точки  $O_6$  до нижньої точки заднього боку стінки. При виконанні чисельного розрахунку скінченні елементи, в яких спостерігалися найбільше пластичні деформації групуються з певним розкидом в областях теоретичної лі-

нії ковзання, при цьому поверхня ковзання складається з комбінації дуг з радіусом кривизни від  $R_{min} = 18,5$  до  $R_{max} = 21,0$  м.

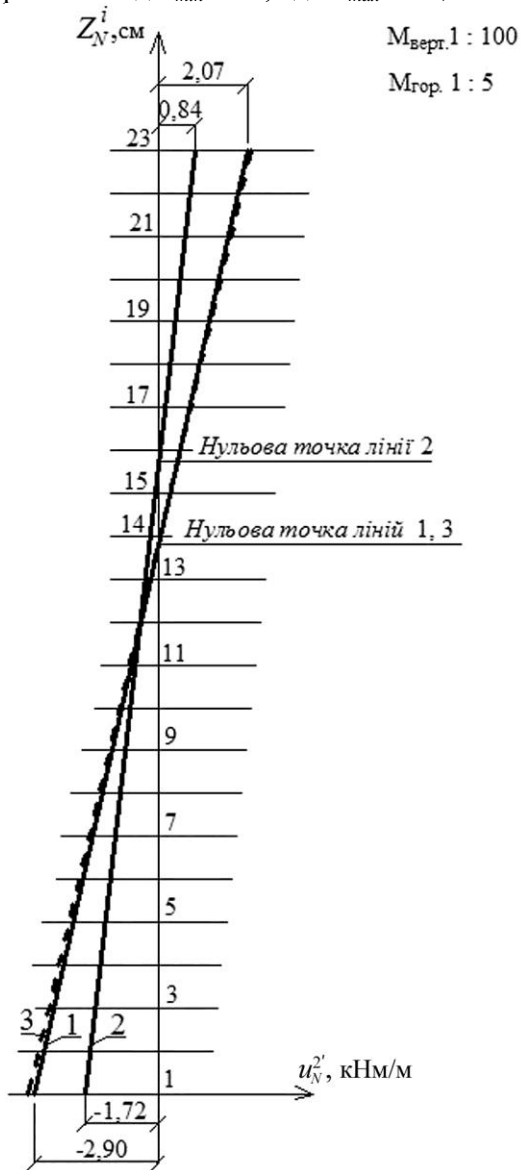


Рис. 1.15. Епюри переміщень задньої грані підпірної стінки: 1 – без урахування корекції  $E(z)$ ; 2 – з урахуванням корекції  $E(z)$ ; 3 – без урахування корекції  $E(z)$  і без урахування параметра Лодє-Надаи



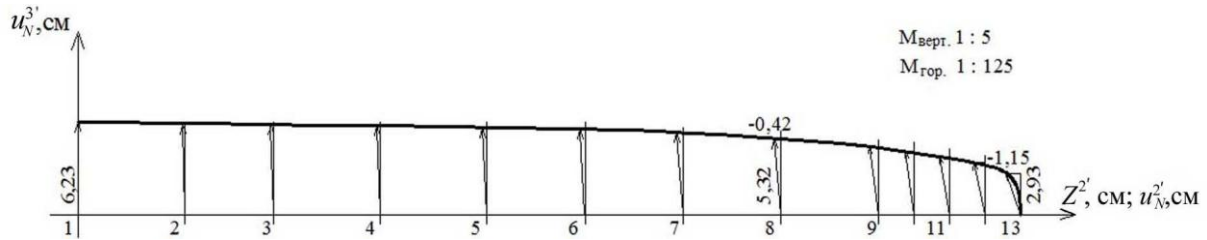


Рис. 1.16. Епюра вузлових векторів переміщень, що розміщені на нижній поверхні укосу

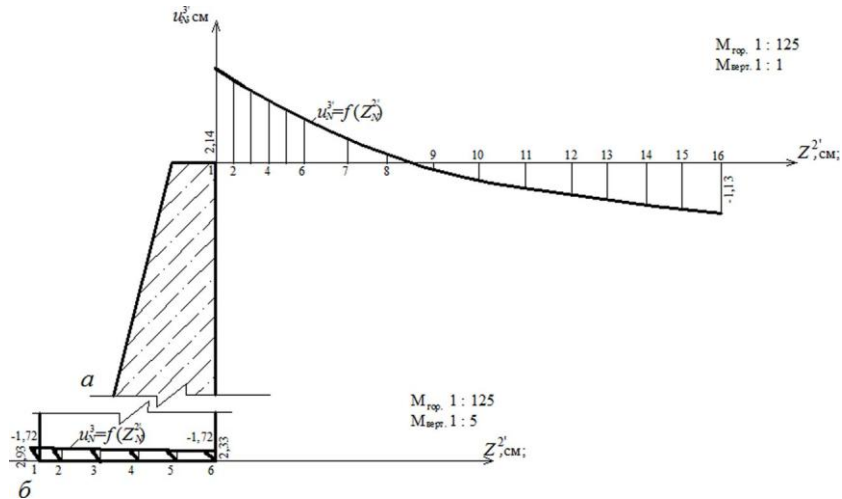


Рис. 1.17. Епюри переміщень  $u_N^3$ : а) вільної поверхні півпростору; б) підшви фундаменту підпірної стінки

## Запитання для самоперевірки

1. На яких припущеннях засновані теорії розподілу напружень всередині сипучого тіла з використанням закону Кулона.
2. В чому полягає загальна теорія граничного стану сипучого середовища.
3. Наведіть основні гіпотези визначення тиску ґрунтової маси на підпірну стінку на основі теорії Кулона.
4. У чому полягає суто графоаналітичного методу визначення тиску на підпірну стінку.
5. Побудуйте діаграму рівноваги сил, що діють від впливу призми руйнування за межами задньої поверхні підпірної стінки.
6. Сформулюйте першу теорему Ребхана і наведіть рівняння реакції поверхні підпірної стінки від дії призми руйнування.
7. Сформулюйте другу теорему Ребхана.
8. Побудуйте схему Понсельє, якщо поверхня землі горизонтальна.
9. Наведіть аналітичний вираз тиску ґрунту на підпірну стінку.
10. Наведіть формули і епюри для визначення повного тиску на підпірну стінку і його інтенсивності при горизонтальній поверхні землі.
11. Наведіть рівняння для окремого відсіку при розрахунку підпірної стінки на міцність та стійкість.
12. У чому полягає суть розрахунку на стійкість підпірної стінки методом кругло циліндричної поверхні ковзання.

## РОЗДІЛ 2

### РОЗРАХУНКИ ПЛОСКОНАПРУЖЕНИХ КОНСТРУКЦІЙ

#### 2.1. Співвідношення плоскої задачі теорії пружності у прямокутних координатах

Якщо досліджуване пружне тіло має об'єм, який визначається трьома вимірами, то розв'язуємо просторову задачу теорії пружності (ТП). Якщо один із вимірів дуже малий порівняно з іншими, то отримуємо *плоску задачу теорії пружності*.

У плоскій задачі слід відрізнити два випадки:

- 1) плоский напружений стан;
- 2) плоска деформація.

З плоским напруженим станом ми зустрічаємося у випадку, коли дуже тонка пластинка несе навантаження, яке прикладене до контуру по дотичній до площини пластинки. При цьому вважається, що зовнішні сили рівномірно розподілені по товщині пластинки. Внаслідок малої товщини напруження у пластинці не можуть суттєво змінюватися при переході від однієї граничної поверхні до іншої, тобто вони рівномірно розподілені по товщині і не залежать від координати "z". Усі процеси деформування відбуваються у площині  $XOY$ . Але завдяки здатності усіх пружних тіл до поперечної деформації (коли зусилля діють тільки у площині), то у загальному випадку пластинка у плоскому напруженому стані буде деформуватися у напрямі осі  $OZ$ , тобто у залежності від дії зовнішніх сил буде потовщуватися або потоншуватися, при цьому:

$$\sigma_z = 0, \quad \varepsilon_z \neq 0. \quad (2.1)$$

Прикладом такої пластинки є конструкція балки-стілки.

Плоска деформація має місце у разі, якщо пружне тіло у напрямі осі  $OZ$  є дуже великим за розміром і поперечні перерізи тіла у площинах, перпендикулярних до цієї осі, однакові за геометрією. При цьому навантаження діють у площинах, паралельних  $OXY$  і не залежать від координати  $Z$ . Прикладом такої системи є конструкція прямолінійної нескінченно довгої підпірної стінки, на яку діє тиск ґрунту, що рівномірно розподілений по довжині цієї стінки.

Розглянемо напружено-деформований стан цієї конструкції. Для розрахунку вирізаємо одиничну пластинку. Отримуємо плоску

задачу, так як деформування відбувається в одній площині. Цей випадок співпадає з першим, але за характером напружено-деформованого стану він суттєво відрізняється від першого. Поперечні деформації пластинки у напрямі осі  $OZ$  неможливі, тому що цьому протидіють сусідні пластинки, які знаходяться у однакових умовах.

Завдяки цій протидії у напрямі осі  $OZ$  при  $\nu > 0$  виникають напруження, тобто маємо:

$$\sigma_z \neq 0, \quad \varepsilon_z = 0. \quad (2.2)$$

Для плоскої задачі, як і для просторової, маємо три групи рівнянь [9, 10]:

1) Статичні рівняння.

Диференціальні рівняння рівноваги (у декартовій системі координат) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0; \end{aligned} \quad (2.3)$$

З урахуванням  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  маємо два рівняння з трьома невідомими ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ). Якщо розв'язувати задачу у напруженнях з умовами на контурі (складної конфігурації), то у загальному випадку:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x \cdot \sin \alpha + \tau_{xy} \cdot \cos \alpha; \\ \bar{Y} &= \sigma_x \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2) Геометричні рівняння (диференціальні рівняння Коші)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.5)$$

3) Фізичні рівняння – узагальнений закон Гука:

– для плоского напруженого стану:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \quad (2.6)$$

– для плоскої деформації:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}[(-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Якщо позначити у (2.7)  $\frac{E}{1-\nu^2} \equiv E_1$ ;  $\frac{\nu}{1-\nu} \equiv \nu_1$ , то отримаємо для плоскої деформації:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1\sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\tau_{xy}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Тоді фізичні рівняння для плоского напруженого стану і плоскої деформації за формою співпадають, тобто для плоскої задачі при розв'язку у деформаціях (переміщеннях) маємо вісім рівнянь: два рівноваги, три – Коші, три – закону Гука; та вісім невідомих  $u, \nu, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , які задовольняють умовам цих восьми рівнянь.

Такий розв'язок теорії пружності є достатньо складним. Якщо піти шляхом спрощень для плоскої задачі, можна звести цю задачу до невідомих у напруженнях. Для цього у рівняння сумісності деформацій [9] треба підставити рівняння закону Гука. Виконуючи диференціювання рівняння Коші двічі відповідно по  $y$  і  $x$ , а потім склавши результати, отримаємо рівняння сумісності деформацій (рівняння нерозривності деформацій):

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.\tag{2.9}$$

Підставляючи у (2.9) рівняння (2.6), після деяких перетворень з урахуванням рівнянь (2.3) для виключення  $\tau_{xy}$ , остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = -(1 - \nu(\nu_1)) \left( \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

або

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 - \nu(\nu_1)) \left( \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad (2.10)$$

У рівнянні (2.10) показано, що може використовуватися величина  $\nu$  або  $1 - \nu(\nu_1)$ . Якщо на однорідне тіло будуть діяти об'ємні сили власної ваги, які не будуть залежати від координат  $x$ , і  $y$ , то права частина рівняння (2.10) дорівнюватиме нулю:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (2.11)$$

тому рівняння сумісності у напруженнях для обох випадків плоскої задачі буде єдиним (2.11).

Отже, можна зробити висновок, що для обох випадків плоскої задачі напруження будуть однакові, але деформації різні.

Рівняння (2.11) можна записати з використанням оператора (введений для диференціювання тензорних (векторних) функцій) – умовного вектора

$$\nabla = \bar{e}^s \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^s}; \quad \nabla \varphi - \text{вектор}; \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi - \text{скаляр};$$

$\nabla^2 \varphi$  - має ще назву оператора Лапласа другого порядку. Він вказує, що треба взяти другі похідні окремо по  $x^1, x^2, x^3$  і скласти їх. Користуючись правилом Ейнштейна [27] тензорного аналізу (сумуванням за однаковими індексами, що стоять на різних рівнях), маємо:

$$\nabla = \bar{e}^s \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^s}, \quad s = 1, 2;$$

$$\nabla = \sum_{s=1}^2 \bar{e}^s \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^s} = \bar{e}^1 \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^1} + \bar{e}^2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^2}. \quad (2.13)$$

Для дії об'ємної сили власної ваги для розв'язку плоскої задачі маємо три невідомих і три рівняння:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - P = 0; \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

із забезпеченням умов на контурі.

Ця задача має велике практичне значення.

Якщо ввести так звану скалярну функцію напружень або функцію *Epi*, то потрібно задатися умовами:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Px. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отже, якщо перші два рівняння тотожно задовольняються, то при розв'язку задачі вони непотрібні і залишається одне рівняння у (2.14). Якщо у нього підставити (2.15), то маємо:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (2.16)$$

З використанням набла-оператора, у окремому випадку оператора Лапласа, отримаємо бігармонічне рівняння для плоскої задачі теорії пружності:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0 \rightarrow \nabla^4 \varphi = 0. \quad (2.17)$$

У розгорнутому вигляді:

$$\left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Таким чином, спочатку для розв'язання внутрішньо статично невизначеної задачі ми мали вісім рівнянь, які звели до шести (виключивши переміщення). Після виключення деформацій - до трьох і шляхом вводу функції Ері дістали одне рівняння.

З математичного аналізу відомо, що коли деяка функція задовольняє однорідне диференціальне рівняння, то і будь-яка похідна його задовольняє. Тобто можна вважати, що:

$$\frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial y^4} = 0 \text{ і т.д. для } \sigma_y, u, v.$$

Розв'язуючи будь-яку задачу, ми повинні підібрати таку функцію  $\varphi(x, y)$ , яка б забезпечувала рівняння (2.18) і одночасно граничні умови на контурі. Визначивши функцію  $\varphi(x, y)$ , можна отримати відповідні формули для визначення напружень у будь-якій точці з заданими координатами. Потім з рівнянь стану знаходяться деформації. Якщо треба знайти переміщення, то, виходячи з формул Коші, підставляючи деформації як функції координат, їх треба проінтегрувати. Необхідність розв'язку одного рівняння є значною перевагою цього підходу. Однак полягають труднощі у підборі функцій, що задовольняють одночасно граничні умови. Тому деякі задачі треба розв'язувати у полярних координатах.

## 2.2. Розв'язок плоскої задачі теорії пружності у поліномах.

Вище було зазначено, що необхідно підібрати функцію напружень  $\varphi$ , яка задовольняла б рівняння сумісності (2.18) і граничні умови (на контурі). Як правило, це пов'язано з певними труднощами. Тому на певному класі функцій доцільно зробити аналіз через зворотню задачу:

- 1) *задатись видом функції;*
- 2) *дослідити для якого випадку напруженого стану вона відповідає.*

Задамось, наприклад, функцією у вигляді степеневого поліному:



$$\varphi = (a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) + (a_3x^2 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3) + (a_4x^4 + c_4x^2y^2 + d_4xy^3 + e_4y + c_5x^3y^2 + d_5x^3y^2 + e_5xy^4) + \dots, \quad (2.19)$$

для якого можна отримати цілий ряд розв'язків.

Члени з координатами у першому степені брати недоцільно, тому що при визначенні напружень за формулами (2.15) вони будуть рівними нулю, тобто функція  $\varphi$  при цьому описує натуральний (ненапружений) стан. Розглядаючи спочатку прості випадки, коли функція  $\varphi$  складається з одного або декількох членів поліному (2.19) до п'ятого степеня включно, проаналізуємо, які умови на контурі вона задовольняє, а потім перейдемо до більш складних випадків із комбінації найпростіших.

Виконаємо дослідження напруженого стану у прямокутній пластинці завдовжки  $l$  і заввишки  $h$ , з одиничною товщиною (рис. 2.1). Вважаємо, що смуга невагома ( $P = 0$  у рівняннях (2.14)).

Розглянемо поліном 2-го та 3-го степеня:

$$\varphi = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + a_3x^2 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3. \quad (2.20)$$

Поліном (2.20) задовольняє рівняння (2.18) при будь-яких значеннях коефіцієнтів:

$$\frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^4} = 0; \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2 \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial y^4} = 0. \quad (2.21)$$

Але зручніше відповідно до поставленої мети провести дослідження, поступово задаючи всі коефіцієнти, крім одного, рівними нулю. Маємо сім випадків:

1)  $\varphi = a_2x^2$ ; напруження:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a_2; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.22)$$

Аналізуючи граничні умови на контурі, засвідчуємо, що напруження на верхній і нижній поверхнях повинні врівноважуватися зовнішнім навантаженням згідно з рис. 2.2, де епюри напружень одночасно є епюрами зовнішнього навантаження. Тут ми маємо випадок простого розтягу у вертикальному напрямі.

2)  $\varphi = b_2xy$ ; напруження:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_2. \quad (2.23)$$

Маємо випадок чистого зсуву. По контуру прикладені рівномірно-розподілені зсувні напруження (рис. 2.3).

3)  $\varphi = c_2 y^2$ ; напруження:  $\sigma_x = 2c_2$ ;  $\sigma_y = 0$ ;  $\tau_{xy} = 0$ .

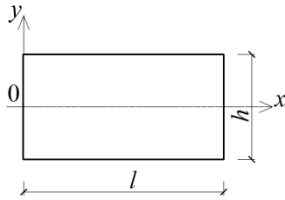


Рис. 2.1

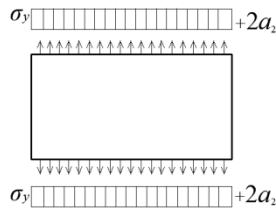


Рис. 2.2

У цьому випадку смуга знаходиться під дією рівномірного розтягу у горизонтальному напрямку (рис. 2.4).

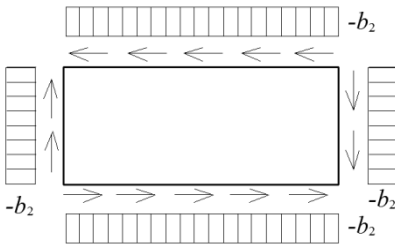


Рис. 2.3

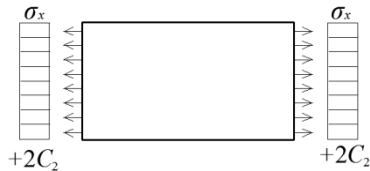


Рис. 2.4.

4)  $\varphi = a_3 x^2$ ; напруження:  
 $\sigma_x = 0$ ;  $\sigma_y = 6a_3 x$ ;  $\tau_{xy} = 0$ .

Для цього випадку вертикальне навантаження розподіляється за трикутником (рис. 2.5, а). Якщо взяти початок координат у середині смуги, то отримаємо випадок чистого згину (рис. 2.5, б)

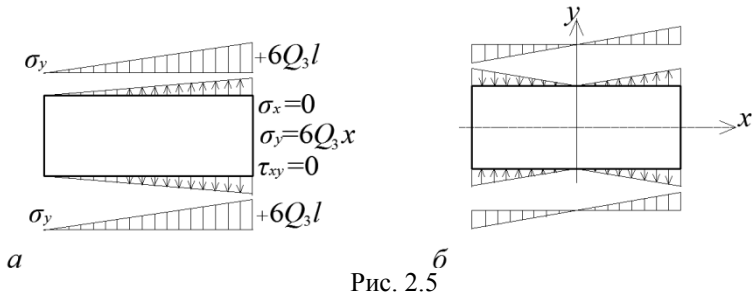


Рис. 2.5

5)  $\varphi = b_3x^2y$ ; напруження:

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 2b_3y; \quad \tau_{xy} = -2b_3x.$$

Тут маємо випадок, коли до смуги прикладені нормальні і дотичні навантаження на нижньому і верхньому контурі пластинки (рис. 2.6). Зверху діють розтягувальні сили, тому що при

$$y = +\frac{h}{2} \sigma_y = +2b_3h/2 = +b_3h. \text{ Знизу - стискаючі сили, тому що при}$$

$$y = -\frac{h}{2} \sigma_y = -2b_3h/2 = -b_3h.$$

Дотичні зусилля розподіляються зверху і знизу за законом прямої. Зліва на контурі дотичних зусиль немає, справа вони розподілені рівномірно. Всі сили, прикладені до смуги, знаходяться у рівновазі.

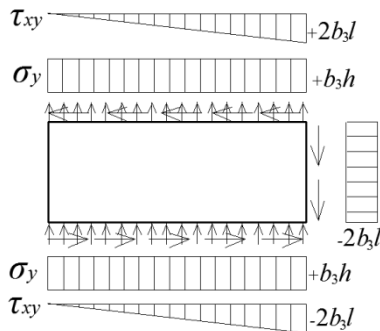


Рис. 2.6

б)  $\varphi = c_3xy^2$ ; напруження:

$$\sigma_x = 2c_3x; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -2c_3y.$$

Нормальні зусилля прикладені до правого кінця пластинки, дотичні – розподілені рівномірно зверху та знизу і змінюються за прямою на лівому і правому контурах (рис. 2.7).

$$7) \varphi = d_3 y^3; \text{ напруження: } \sigma_x = 6d_3 y; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0.$$

Тут маємо випадок згину моментами, прикладеними до кінців пластинки (рис. 2.8).

Використання поліномів 4-го і 5-го степеня. Розглянемо поліном 4-го степеня:

$$\varphi = a_4 x^4 + b_4 x^3 y + c_4 x^2 y^2 + d_4 x y^3 + e_4 y^4. \quad (2.24)$$

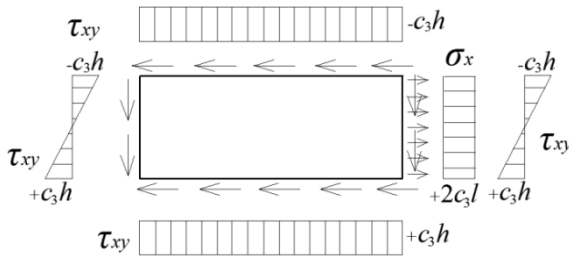


Рис. 2.7

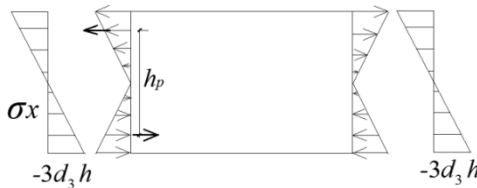


Рис. 2.8

Поліном (2.24) має деякі особливості. Він задовольняє рівняння сумісності (2.18) не при будь-яких значеннях коефіцієнтів. Між деякими з них повинна бути певна залежність. Візьмемо похідні відповідно до (2.18):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 24a_4;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4c_4;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 24e_4.$$

Підставимо їх у (2.18):

$$24a_4 + 2 \cdot 4c_4 + 24c_4e_4 = 0, \quad (2.25)$$

З (2.25) отримаємо:

$$e_4 = -(a_4 + c_4/3). \quad (2.26)$$

З урахуванням (2.27) маємо:

$$\varphi = a_4x^4 + b_4x^3y + c_4x^2y^2 + d_4xy^3 - (a_4 + c_4/3)y^4 \quad (2.27)$$

Функція (2.27) задовольняє рівняння сумісності вже при будь-яких значеннях коефіцієнтів, що входять до її складу.

Розглянемо випадок, який важливий тільки для реальних прикладів, коли всі коефіцієнти, крім  $d_4$ , дорівнюють нулю:

8)  $\varphi = d_4xy^3$ ; напруження:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6d_4xy; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -3d_4y^2. \quad (2.28)$$

Нормальні зусилля прикладені тільки до правого кінця. Дотичні зусилля рівномірно розподілені зверху і знизу та змінюються за законом параболи справа і зліва (рис. 2.9).

Розглянемо поліном 5-го степеня:

$$\varphi = a_5x^5 + b_5x^4y + c_5x^3y^2 + d_5x^3y^2 + e_5xy^4 + f_5y^5, \quad (2.29)$$

який також задовольняє рівняння сумісності тільки при деяких співвідношеннях між коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= 120a_5x + 24b_5y; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= 12c_5x + 12d_5y; \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} &= 24e_5x + 120f_5y. \end{aligned} \quad (2.30)$$

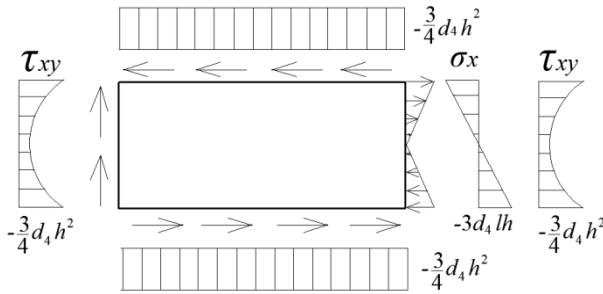


Рис. 2.9

Підставимо (2.30) у (2.18):

$$120a_5x + 24b_5y + 24c_5x + 24d_5y + 24e_5x + 120f_5y = 0, \quad (2.31)$$

згрупуємо складові (2.32) відносно  $x$  і  $y$ :

$$x(120a_5 + 24c_5 + 24e_5) + y(24b_5 + 24d_5 + 120f_5) = 0,$$

Враховуючи незалежність  $x$  і  $y$ , кожний вираз у дужках окремо повинен дорівнювати нулю. Таким чином, отримуємо два рівняння:

$$\begin{cases} 120a_5 + 24c_5 + 24e_5 = 0; \\ 24b_5 + 24d_5 + 120f_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо ці рівняння відповідно відносно  $e_5$  і  $f_5$ :

$$e_5 = -(5a_5 + c_5);$$

$$f_5 = -1/5(b_5 + d_5). \quad (2.32)$$

З урахуванням (2.32) рівняння функції (2.30) має вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi = & a_5 x^5 + b_5 x^4 y + c_5 x^3 y^2 + d_5 x^3 y^2 - \\ & - (5a_5 + c_5) x y^4 - 1/5 (b_5 + d_5) y^5. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Функція (2.33) задовольняє рівняння сумісності при будь-яких значеннях коефіцієнтів, які входять до її складу. Розглянемо найбільш потрібний для подальшого випадок значення функції (2.33), коли  $d_5$  не дорівнює нулю:

9)  $\varphi = d_5(x^2 y^3 - y^5/5)$ ; напруження:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = d_5(6x^2 y - 4y^3); \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2d_5 y^3;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -6d_5 x y^2. \quad (2.34)$$

У цьому випадку маємо достатньо складний напружений стан із навантаженням рівномірно розподілених і дотичних сил знизу і зверху, а також дії згинальних моментів на кінцях зліва і справа, дотичних сил - справа (рис. 2.10).

### 2.3. Аналіз розрахунку балки на згин від рівномірно-розподіленого навантаження

Використовуючи розглянуті випадки для підбору функції у залежності від граничних умов, розглянемо реальний приклад: згин

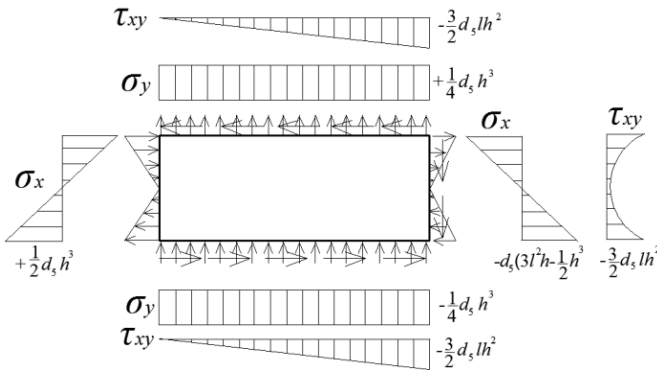


Рис. 2.10

консольної пластинки силою, яка прикладена на краю. Розрахункова схема наведена на рис. 2.11.

Навантаження не можна враховувати як зосереджену силу, тому що у місці її прикладання виникають нескінченно великі напруження. Вважасмо, що навантаження здійснюється дотичними зусиллями, які прикладені на вільному кінцевому перерізі.

Здійснюємо пошук виразу функції напружень. Умови на контурі розглянутої пластинки потребують пошуку такого розв'язку, при якому верхня і нижня поверхня консолі не сприймають навантажень. Тобто, для них  $\sigma_y = 0$ , і  $\tau_{xy} = 0$ . На лівому вільному кінці консолі прикладені дотичні зусилля.

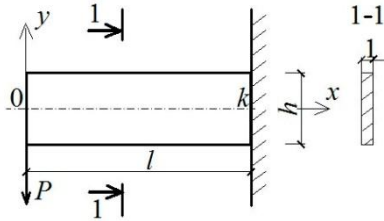


Рис. 2.11

Серед наведених вище простих розв'язків, які б точно відповідали такому навантаженню, немає прикладу, але можна створити подібну комбінацію з наявних простих розв'язків. Наприклад, нас задовольняють розв'язки, при яких до вільного лівого кінця консолі прикладені тільки дотичні зусилля. Такими є випадки (2) і (6). Але (6)-ий випадок не зовсім підходить, тому що по верхній і нижній поверхнях контуру дотичні зусилля направлені в одну сторону. Іншого такого розв'язку з направленнями зусиль в одну сторону немає.

Тоді залишається розв'язок (2), що відповідає чистому зсуву, але його треба доповнити розв'язком, у якому дотичні зусилля на вільному краю направлені у різні сторони. Розглянемо близькі (5), (8) і (9) випадки. У (5) і (9) мають місце нормальні навантаження. Вони не підходять. Остаточо можна дійти висновку: доцільно взяти одночасно випадки (2) і (8), тоді функція напружень має вид:



$$\varphi = b_2 xy + d_4 xy^3. \quad (2.35)$$

Визначаємо напруження і враховуємо умови на контурі:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6d_4 xy; & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_2 - 3d_4 y^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Враховуючи умови на контурі, можна знайти невідомі коефіцієнти  $b_2$  і  $d_4$ .

Згідно з прийнятою функцією (2.35) напруження  $\sigma_x$  на лівому кінці консолі дорівнюють нулю при  $x=0$  (див. перше рівняння (2.36)), вертикальні напруження нульові (див. друге рівняння (2.36)). Дотичні напруження зверху і знизу повинні бути рівні нулю, звідси умова:

$$\begin{aligned} \text{при } y = \pm \frac{h}{2} \rightarrow \tau_{xy} &= 0 \text{ або} \\ \tau_{xy} = -b_2 - 3d_4 \left(\frac{h}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

- це перша умова, що зв'язує  $b_2$ ,  $d_4$ .

Друга умова полягає у тому, що сума дотичних зусиль на лівому кінці консолі дорівнює  $P$ :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dy &= P \text{ або} \\ \int_{-h/2}^{+h/2} (-b_2 - 3d_4 y^2) dy &= -b_2 y \Big|_{-h/2}^{+h/2} - 3d_4 \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-h/2}^{+h/2} = -b_2 h - \frac{d_4}{4} h^3 = P. \end{aligned}$$

Остаточнo  $b_2$  і  $d_4$  визначаємо з рівнянь

$$\begin{cases} -b_2 - 3/4 d_4 h^2 = 0; \\ -b_2 h - d_4 / 4 h^3 = P, \end{cases}$$

розв'язуючи які, отримаємо

$$b_2 = -3/2 \cdot P/h;$$

$$d_4 = 2P/h^3. \quad (2.38)$$

Підставляючи значення коефіцієнтів  $b_2$  і  $d_4$  у (2.36), отримаємо остаточно формули для визначення напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 12P/h^3 xy; \quad \sigma_y = 0; \\ \tau_{xy} &= 3P/h^3 - 6P/h^3 y^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Вважаємо, що момент інерції перерізу консолі рівний  $I = 1 \cdot h^3/12$ , тоді:

$$\sigma_x = P/I xy; \quad (2.40)$$

$$\sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = P/I \left( h^2/8 - y^2/2 \right), \quad (2.41)$$

де  $Px$  – згинальний момент;  $\left( h^2/8 - y^2/2 \right)$  – статичний момент частин перерізу, яка відокремлюється координатою  $y$ , тому остаточно маємо:

$$\sigma_x = -M_y/I; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = PS/I. \quad (2.42)$$

Результати (2.42) повністю співпадають з формулами опору матеріалів. Це відповідає прийнятому допущенню, що сила  $P$  визначалась за дотичними зусиллями, розподіл яких відповідає формулі для визначення  $\tau_{xy}$ . При іншому способі прикладання сили і розв'язок буде іншим. Однак різниця у результатах буде суттєвою тільки у перерізах, які межують з вільним краєм консолі, а за принципом Сен-Венана не буде суттєвою достатньо далеко від нього.

#### 2.4. Розв'язок плоскої задачі теорії пружності у тригонометричних рядах

Розв'язки у поліномах можна застосувати тільки для балок, висота яких не перевищує приблизно півпрогону. При більших висотах напруження у перерізах, близьких до кінців, впливають на напруження у прогоні. Тому слід задавати  $\varphi$  в іншому вигляді, наприклад, застосовуючи тригонометричні ряди. Наприклад:

$$\varphi = \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot F(y), \quad (2.43)$$

де  $n$  – будь-яке ціле число;  $l$  – довжина пластинки у напрямку осі  $x$ ;  $F(y)$  – деяка функція, що залежить від координати  $y$ .

Підставляючи (2.43) в (2.16), знаходимо функцію  $F(y)$ . Для зручності позначимо:

$$\alpha = n\pi x/l, \quad (2.44)$$

Тоді:

$$\varphi = \sin(\alpha x) \cdot F(y), \quad (2.45)$$

Похідні:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 \sin(\alpha x) \cdot F(y);$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 \sin(\alpha x) \cdot F''(y); \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \sin(\alpha x) \cdot F^{IV}(y).$$

Підставивши (2.46) в (2.16), отримаємо:

$$\alpha^4 \sin(\alpha x) \cdot F(y) - 2\alpha^2 \sin(\alpha x) \cdot F''(y) + \sin(\alpha x) \cdot F^{IV}(y) = 0. \quad (2.47)$$

Загальний інтеграл рівняння (2.47), після скорочення на  $\sin(\alpha x)$  можна виразити через гіперболічні функції [9]:

$$\begin{aligned} \alpha^4 F(y) - 2\alpha^2 F''(y) + F^{IV}(y) &= 0; \\ F(y) &= c_1 sh(\alpha y) + c_2 ch(\alpha y) + c_3 ysh(\alpha y) + \\ &+ c_4 ych(\alpha y). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Функція напружень, що задовольняє рівняння сумісності, має вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi &= \cos(\alpha x)[c_5 sh(\alpha y) + c_6 ch(\alpha y) + c_7 ysh(\alpha y) + \\ &+ c_8 ych(\alpha y)]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Задаючи різні значення числа  $n$ , отримуємо нескінченну множину часткових розв'язків. Загальний розв'язок можна навести нескінченними рядами:

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin(\alpha x) [c_1 sh(\alpha y) + c_2 ch(\alpha y) + c_3 ysh(\alpha y) + \\ & + c_4 ych(\alpha y)] + \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos(\alpha x) [c_5 sh(\alpha y) + c_6 ch(\alpha y) + c_7 ysh(\alpha y) + \\ & + c_8 ych(\alpha y)]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Коефіцієнти  $c$  в (2.50) залежать від порядкового номера члена ряду. По суті у формулу (2.50) входить нескінченна кількість коефіцієнтів, але вони пов'язані між собою певним співвідношенням і знаходяться з граничних умов на контурі пластинки. Для можливості розв'язку задачі зовнішнє навантаження за контуром також повинно бути розкладене у нескінченні тригонометричні ряди:

$$q = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos(\alpha x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin(\alpha x),$$

або після деяких перетворень для симетричного навантаження у вигляді:

$$q = 2q_1 \left[ \frac{a}{2l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha l} \cos(\alpha x) \right] \quad (2.51)$$

За допомогою тригонометричних рядів можуть бути знайдені розв'язки для широкого кола плоских задач теорії пружності. Застосування тригонометричних функцій все ж не є універсальним методом, тому що далеко не завжди вдається забезпечити граничні умови по бокових поверхнях розрахункового фрагменту конструкції балок-стінок.

### Запитання для самоперевірки

1. Які дві складові задачі розглядаються у плоскій теорії пружності?
2. Які допущення використовуються у задачах плоскої деформації та плоского напруженого стану?
3. Запишіть геометричні рівняння для плоскої задачі теорії пружності.
4. Запишіть фізичні рівняння теорії пружності.

5. Запишіть статичні рівняння рівноваги для задач плоскої деформації і плоского напруженого стану. Чим вони відрізняються і що у них є загального?
6. Наведіть бігармонічне рівняння функції напружень  $E_r$ .
7. Запишіть диференціальні співвідношення функцій компонент тензора напружень і скалярної функції напружень  $E_r$ .
8. Яким тригонометричним функціям задовольняє бігармонічне рівняння сумісності?
9. Запишіть поліном другого і третього ступеня, які задовольняють функції напружень (рівнянню сумісності).
10. У яких випадках для розв'язання плоскої задачі доцільно застосовувати поліном 4-го і 5-го ступенів?
11. Обґрунтуйте, який поліном треба застосовувати для рівняння сумісності при розв'язку задачі згину консолі силою, яка прикладена на кінці.

## РОЗДІЛ 3

### МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ У РОЗРАХУНКАХ БАЛОК-СТІНОК

#### 3.1. Основи теорії скінченних різниць

Теорія скінченних різниць полягає у заміні похідних відношеннями скінченних величин. Замість одного диференціального рівняння розв'язують систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ідея методу скінченних різниць (МСР) полягає у тому, що замість часткових похідних у диференціальних рівняннях розв'язуваної задачі використовують співвідношення різниць змінних, які називаються скінченними різницями. Наприклад, якщо розглянути деяку функцію  $\varphi(x)$  одномірної задачі (рис. 3.1), то похідна

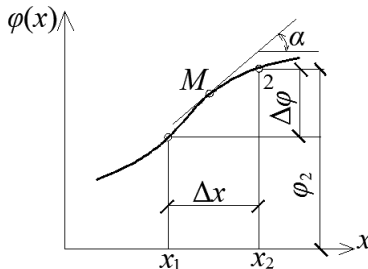
$\frac{d\varphi}{dx}$  у точці  $M$  дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної в точці

$M$  до кривої  $\varphi(x)$ , тобто маємо:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.1)$$

Якщо виділити деякий інтервал  $\Delta x$  в околі точки  $M$  достатньо малих, але скінченних розмірів, тоді можна записати наближений вираз для похідної (3.1):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cong \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.2)$$



3.1. Схема до побудови скінченнорізницевого співвідношення для одномірної задачі

Чим меншим буде інтервал  $\Delta x$ , тим більш точним буде вираз (3.2).

Для одномірної задачі, що описується диференціальним рівнянням, яке утримує тільки першу похідну шуканої функції  $\varphi(x)$ , треба розділити інтервал зміни аргументу  $x$  на скінченне число ділянок  $\Delta x$ , що обмежуються вузлами. Диференціальні рівняння зазначеної задачі можна перетворити, використовуючи співвідношення типу (3.2) і записати їх для кожного вузла. Надавши відповідні граничні умови, ми прийдемо до системи рівнянь, число яких дорівнює числу невідомих значень функції у вузлах.

При розв'язанні двовимірних задач у межах досліджуваної області треба побудувати скінченнорізницьву сітку з відповідними кроками за координатами  $\Delta x$  і  $\Delta y$ . Для отримання формул, за якими необхідно обчислювати похідні будь-якого порядку, скористаємося співвідношеннями з теорії скінченних різниць, які наведені в [9].

Задамо деяку криву  $\varphi(x)$  (рис. 3.2), три ординати якої  $\varphi_{3л}, \varphi_0, \varphi_{3н}$  відомі, причому  $\varphi_0$  співпадає з віссю ординат. Відстані між ординатами рівні  $\Delta x$ . Треба знайти наближене значення похідної у точці  $0'$ . Криву у межах  $1'0'2'$  можна апроксимувати параболою, тобто задати її рівнянням параболи:

$$\varphi = ax^2 + bx + c. \quad (3.3)$$

Знайдемо коефіцієнти рівняння (3.1) з умови, що парабола проходить через три точки з ординатами  $\varphi_{3л}, \varphi_0, \varphi_{3н}$ , тобто запишемо три рівняння параболи відповідно для точок  $1', 0', 2'$ :

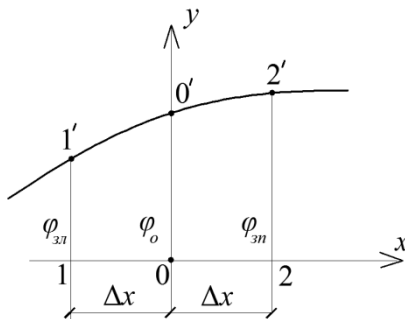


Рис. 3.2. Схема апроксимації кривої параболою

$$\begin{cases} \varphi_{3л} = a(-\Delta x)^2 + b(-\Delta x) + c \\ \varphi_0 = c \\ \varphi_{3н} = a(\Delta x)^2 + b(\Delta x) + c \end{cases} \quad (3.4)$$

Розв'язавши рівняння (3.4) відносно невідомих коефіцієнтів  $a, b, c$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2\varphi_0 + \varphi_{3л.} + \varphi_{3н.}}{2(\Delta x)^2}; \\ b &= \frac{\varphi_{3н.} - \varphi_{3л.}}{2(\Delta x)}; \\ c &= \varphi_0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Підставивши (3.5) в (3.4), маємо:

$$\varphi = \frac{-2\varphi_0 + \varphi_{3л.} + \varphi_{3н.}}{2(\Delta x)^2} x^2 + \frac{\varphi_{3н.} - \varphi_{3л.}}{2(\Delta x)} x + \varphi_0.$$

Знайдемо першу і другу похідні при  $x = 0$  (у точці  $0'$ ):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_{3н.} - \varphi_{3л.}}{2(\Delta x)}. \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_0 + \varphi_{3л.} + \varphi_{3н.}}{\Delta x^2}. \quad (3.7)$$

Якщо вертикальну вісь провести будь-де, формули залишаються вірними. Ці формули будемо використовувати при розв'язанні плоскої задачі теорії пружності.

### 3.2. Виведення формул для похідних функцій напружень у скінченних різницях із застосуванням рівномірних сіток

На задану пластину, завантажену зовнішніми впливами, накладаємо рівномірну сітку з постійними кроками  $\Delta x$  і  $\Delta y$  відповідно по горизонталі та вертикалі (рис. 3.3).

Розглянемо функцію напружень для плоскої задачі теорії пружності  $\varphi(x, y)$  у точці  $k$  через  $\varphi_k$ . Значення функції напружень для вузлів, сполучених з вузлом « $k$ », позначимо  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d \dots \varphi_n$ . Всі ці значення функції вважаємо невідомими, але на підставі рівнянь рівноваги з рівнянням сумісності між ними повинна бути



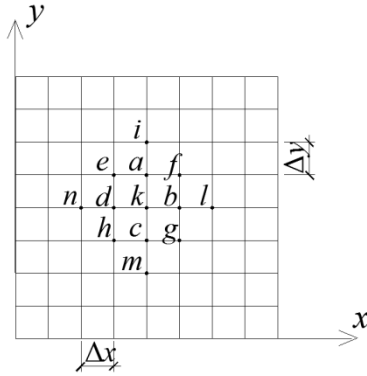


Рис. 3.3. Схема рівномірної сітки з постійними кроками  $\Delta x$  і  $\Delta y$

певна залежність. Знайдемо цю залежність.

На основі формул (3.6), (3.7) запишемо значення похідних у точці  $k$ :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2\Delta x}; \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_b + \varphi_d}{\Delta x^2}. \quad (3.9)$$

За аналогією маємо:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2\Delta y}; \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_c + \varphi_a}{\Delta y^2}; \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_a - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_c}{2\Delta y} = \frac{\frac{\varphi_e - \varphi_f}{2\Delta x} - \frac{\varphi_g - \varphi_h}{2\Delta x}}{2\Delta y} = \\ &= \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{4\Delta x \Delta y}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Знайдемо четверту похідну використовуючи (3.9):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{-2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_b + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_d}{\Delta x^2}.$$

Другі похідні визначаємо за тими ж формулами (3.9), (3.11) та підставляємо у формулу четвертої похідної:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= \frac{-2(-2\varphi_k + \varphi_b + \varphi_d) + (-2\varphi_d + \varphi_n + \varphi_k) + (-2\varphi_b + \varphi_k + \varphi_e)}{\Delta x^4}, \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= \frac{6\varphi_k - 4(\varphi_d + \varphi_b) + (\varphi_n + \varphi_e)}{\Delta x^4}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

За аналогією маємо:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{6\varphi_k - 4(\varphi_c + \varphi_a) + (\varphi_m + \varphi_i)}{\Delta y^4}. \quad (3.14)$$

Четверта змішана похідна визначається з використанням (3.7) та (3.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_k = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{-2\varphi_k + \varphi_b + \varphi_d}{\Delta x^2} \right) = \\ &= \frac{-2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_b + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_d}{\Delta x^2} = \\ &= \frac{-2(-2\varphi_k + \varphi_c + \varphi_a) + (-2\varphi_d + \varphi_h + \varphi_e) + (-2\varphi_b + \varphi_g + \varphi_f)}{\Delta x^2 \Delta y^2}; \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{4\varphi_k - 2(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + (\varphi_e + \varphi_f + \varphi_h + \varphi_g)}{\Delta x^2 \Delta y^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Знайдені значення похідних (3.13), (3.14) і (3.15) підставимо у рівняння сумісності  $\nabla^4 \varphi = 0$ :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (3.16)$$

тоді отримаємо:

$$\varphi_k (6\alpha^2 + 8\alpha + 6) - 4(\varphi_a + \alpha\varphi_b + \varphi_c + \alpha\varphi_d)(\alpha + 1) +$$

$$+ 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h)\alpha + (\varphi_i + \varphi_l\alpha^2 + \varphi_m + \varphi_n\alpha^2) = 0, \quad (3.17)$$

де  $\alpha = \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}$ .

У рівняння сумісності (3.17), у скінченних різницях, входить 13 невідомих значень функції  $\varphi(x, y)$ .

Якщо сітку прийняти квадратною ( $\Delta y = \Delta x$  і  $\alpha = 1$ ), то рівняння дещо спроститься:

$$20\varphi_k - 8(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) + (\varphi_i + \varphi_l + \varphi_m + \varphi_n) = 0. \quad (3.18)$$

Це рівняння має деяку подібність з рівнянням трьох моментів методу переміщень при розрахунках статично невизначених систем.

Визначимо в скінченних різницях напруження у точці  $k$ .

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_c + \varphi_a}{\Delta y^2}; \quad (3.19)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_d + \varphi_b}{\Delta x^2}; \quad (3.20)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{4\Delta x \Delta y}. \quad (3.21)$$

Також можна отримати і формули для переміщень.

### 3.3. Побудова систем рівнянь для прямокутної сіткової області з використанням балкових функцій

Рівняння сумісності (3.17) і (3.18) можна скласти для кожного вузла сіткової області. Їх буде стільки, скільки є вузлів всередині контуру, але в ці рівняння увійдуть невідомі значення функції напружень  $\varphi(x, y)$  для вузлів на контурі та для вузлів на відстанях  $\Delta x$  і  $\Delta y$  зовні контуру (рис. 3.4).

Приймаємо за невідомі значення функції  $\varphi$  на контурі і зовні нього, а додаткові рівняння отримаємо, виходячи з умов на контурі, наприклад:  $\sigma_y = q$ ,  $\tau_{xy} = 0$ , або  $\sigma_x = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$  і т. ін.

Для прикладу пластинки, наведеної на рис. 3.4, маємо 60 невідомих значень функції напружень  $\varphi$ , а кількість рівнянь – 56, бо відпадають умови в кутах, тому що дотичні напруження рівні нулю. Якщо їх ввести, то потрібно буде знаходити  $\varphi$  ззовні контуру в кутах сітки (за зовнішнім обводом).

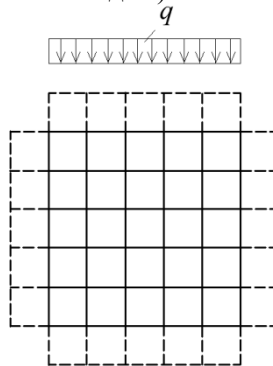


Рис. 3.4. Схема пластинки з накладеною сіткою

Таким чином, не вистачає чотирьох рівнянь. Їх можна прийняти довільно, якщо відкласти перпендикулярно до пластинки ординати, які б дорівнювали значенням  $\varphi$  (у будь-якому масштабі).

При цьому отримані вершини ординат на деякій площині не змінюють напруження, тому що зміни всіх значень  $\varphi$  відбуваються на величини, які пропорційні відстаням від  $x$  і  $y$  (різниця залишаються без змін).

На практиці більш зручно мати справу з меншою кількістю рівнянь, тому доцільно застосувати інший варіант: вилучити рівняння для контурних і позаконтурних значень  $\varphi$  безпосередньо, виходячи з граничних умов [11].

Наприклад, припустимо, що на верхньому контурі пластинки прикладене рівномірно-розподілене навантаження, що направлене зверху вниз. Тоді граничні умови на верхньому контурі пластинки наступні:

$$\sigma_y = -q = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (3.22)$$

Інтегруючи рівняння (3.22), отримуємо:

$$\varphi = -\iint q dx^2 + f_1(y)x + f_2(y). \quad (3.23)$$

Але  $f_1(y)$  і  $f_2(y)$  на верхньому контурі є постійними, тоді маємо:

$$\varphi = -\iint q dx^2 + c_1 x + c_2. \quad (3.24)$$

Згадаємо, що для стрижневої системи, наприклад, для балки, подвійним інтегралом від рівномірно-розподіленого навантаження є згинальний момент зі зворотнім знаком, тобто:

$$\varphi = M + c_1 x + c_2. \quad (3.25)$$

Таким чином, по верхньому краю пластинки значення функції  $\varphi$  повинно дорівнювати значенням згинального моменту від рівномірно-розподіленого навантаження для умовної балки. Додатні члени  $c_1$  і  $c_2$  можуть братися довільно, при цьому не має значення, яку умовну балку обираємо – вільно сперту, чи на опорах: різниця буде у значеннях довільних постійних  $c_1$  і  $c_2$ . Балку також можна вважати ригелем рами – тоді будемо мати рамну аналогію за контуром пластинки.

Нагадаємо, що всі значення  $\varphi$  можна змінювати на одну й ту ж величину або на величини, пропорційні відстаням від осей.

Для нижнього краю контуру пластинки значення  $\varphi$  дорівнюють моментам зі зворотнім знаком. Там, де по контуру не прикладені навантаження, функція  $\varphi$  змінюється за законом прямої, або є постійною, чи дорівнює нулю. Значення функції  $\varphi$  у кутах пластинки та по краях слід призначити однаковими.

Окрім самих значень функції  $\varphi$  по верхньому, нижньому та по бокових краях треба визначити похідні, відповідно  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  і  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ .

Також використовуємо умову

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (3.26)$$

без урахування об'ємного навантаження.

Інтегруючи для кожної ділянки (3.26), отримаємо похідні: для верхнього та нижнього країв пластинки  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , для бокових країв

-  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . При цьому враховуємо рівність похідних у місцях сполучення ділянок.

Маючи похідні для певних ділянок контуру, визначаємо позаконтурні значення  $\varphi$  за формулами (3.8), (3.10). Для верхнього краю (рис. 3.5, а) маємо:

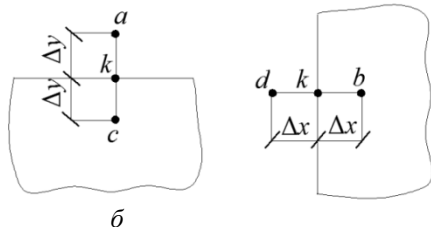


Рис. 3.5. Схеми для визначення  $\varphi$  зовні контуру:  
а – для верхнього краю; б – для бокового краю

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2\Delta y}, \quad \varphi_a = 2\Delta y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_c. \quad (3.27)$$

Для бокового краю пластинки (рис. 3.5, б):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2\Delta x}, \quad \varphi_d = 2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_b. \quad (3.28)$$

Отже, за невідомі значення функції  $\varphi$  залишається прийняти лише значення  $\varphi$  у внутрішніх точках сіткової області пластинки. Так, для прикладу (див рис. 3.4) замість 60 невідомих маємо тільки 16 і відповідно - 16 рівнянь. Тобто маємо сумісну систему для знаходження невідомих значень функції  $\varphi$ .

Після знаходження значень  $\varphi$  у сітковій області пластинки знаходимо відповідні значення функцій напружень, деформацій і переміщень.

Використання методу скінченних різниць пов'язано зі значним обчислювальним процесом. Чим більша потрібна точність визначення внутрішніх зусиль і деформацій, тим густішою повинна бути сіткова область розрахункового фрагмента пластинки і відповідно тим більшою за розмірами буде система розв'язувальних рівнянь рівноваги.

Переваги методу скінченних різниць у порівнянні з раніше розглянутими полягають у тому, що його можна використати у

будь-яких випадках: для складного контуру з отворами, вирізами тощо.

### 3.4. Приклад розрахунку балки-стілки за методом сіток для реальної конструкції стінової панелі

Розглянемо розрахунок балки-стілки за методом сіток для реальної конструкції стінової панелі.

На рис. 3.6 наведена розрахункова схема конструкції окремої стінової панелі, яка з точки зору будівельної механіки називається «балка-стілка». При розрахунках власна вага балки-стілки не враховується, її товщина одинична, тобто в розрахунки теж не входить. Розміри балки-стілки наведені на рис. 3.6.

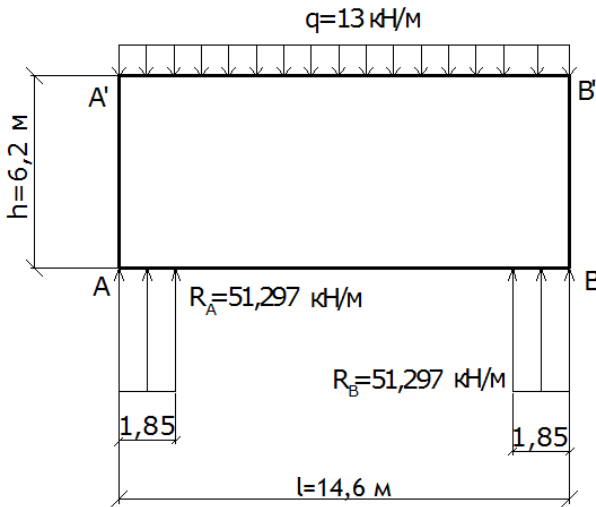


Рис. 3.6. Розрахункова схема балки-стілки

Напруження визначаються на одиницю довжини або висоти. Реакції пілонів приймаємо як рівномірно розподілені по довжині спирання  $1,85 \text{ м}$ . Інтенсивність реакцій пілонів визначаємо з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_B = 0:$$

$$R_A \cdot 1,85 \cdot 14,6 - q \cdot 14,6 \cdot \frac{14,6}{2} = 0$$

$$R_A \cdot 1,85 \cdot 14,6 = q \cdot 14,6 \cdot \frac{14,6}{2}$$

$$R_A \cdot 1,85 = q \cdot 7,3$$

$$R_A = \frac{q \cdot 7,3}{1,85} = \frac{13 \cdot 7,3}{1,85} = 51,297 \text{ кН/м};$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$-R_B \cdot 1,85 \cdot 14,6 + q \cdot 14,6 \cdot \frac{14,6}{2} = 0$$

$$R_B \cdot 1,85 \cdot 14,6 = q \cdot 14,6 \cdot \frac{14,6}{2}$$

$$R_B \cdot 1,85 = q \cdot 7,3$$

$$R_B = \frac{q \cdot 7,3}{1,85} = \frac{13 \cdot 7,3}{1,85} = 51,297 \text{ кН/м}.$$

Для побудови дискретної моделі розрахункового фрагмента (тільки для навчального прикладу) обмежуємося рідкою сіткою, приймаючи:  $\Delta x = \frac{l}{4} = \frac{14,6}{4} = 3,65 \text{ м}$ ;  $\Delta y = \frac{h}{4} = \frac{6,2}{4} = 1,55 \text{ м}$ . Початок координат приймаємо в лівому нижньому куті сітки (рис. 3.7).

Типи вузлів сіткової області наступні (див. рис. 3.7): внутрішні, контурні та позаконтурні (1-26 з урахуванням симетрії).

Невідомими є значення *функції напружень*  $E_{pi} - \varphi(x, y)$ .

Виконуємо моделювання країв пластинки 1, 2, 3, 4, які приймаємо як звичайні балки на двох опорах. Тоді значення  $\varphi$  на цих краях будуть визначені як значення згинальних моментів у балках, тобто використовуємо балкові функції.



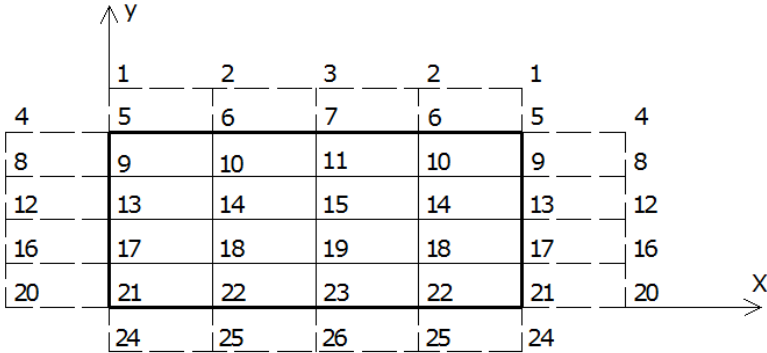


Рис. 3.7. Дискретна модель розрахункового фрагменту балки-стілки

Визначимо контурні значення  $\varphi(x, y)$  для кожної ділянки (1, 2, 3, 4), починаючи з верхньої – 1.

#### Ділянка 1

Моделюємо верхню ділянку краю балки-стілки вільно опертою балкою, прогоном 14,6 м, на двох опорах – шарнірно-нерухомій і шарнірно-рухомій (рис. 3.8).

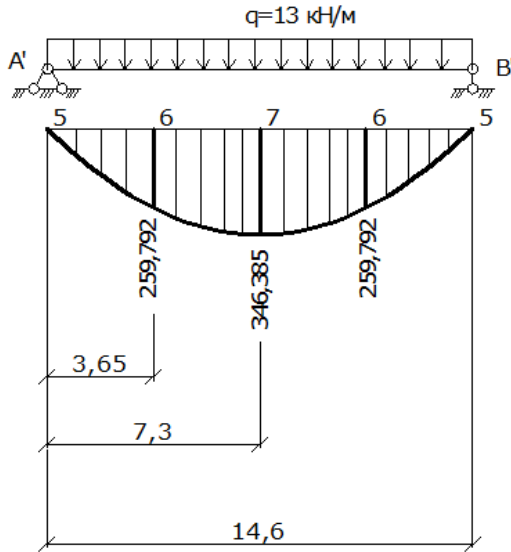


Рис. 3.8. Моделювання верхнього краю балки-стілки.

(балкова епюра згинальних моментів)

Визначаємо функцію згинального моменту в балці за розрахунковою схемою (див. рис. 3.8):

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - q\frac{x^2}{2} = q\left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = 94,9 \cdot x - 6,5 \cdot x^2, \quad (3.29)$$

$$\text{Так як } M_x \equiv \varphi, \text{ то } \varphi = q\left(7,3 \cdot x - \frac{x^2}{2}\right)$$

Для точок 5, 6, 7 маємо:

$$\varphi_5 = 0; \quad \varphi_6 = M_{(x=3,65)} = q\left(7,3 \cdot 3,65 - \frac{3,65^2}{2}\right) = 259,792 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\varphi_7 = M_{(x=7,3)} = q\left(7,3 \cdot 7,3 - \frac{7,3^2}{2}\right) = 26,645q = 346,385 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знайдемо похідну по  $x$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = q(7,3 - x), \quad (3.30)$$

$$\text{Тоді на лівій опорі при } x = 0: \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = 7,3 \cdot q.$$

Другу похідну отримуємо за формулою:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (3.31)$$

За контуром 1, для даної задачі  $\tau_{xy} = 0$ , тому

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.32)$$

Інтегруючи похідну (3.32), знаходимо:

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(y) = c_1,$$

тому що для верхнього краю  $f(y)$  не залежить від  $y$ .

Величину  $c_1$  знайдемо пізніше з умови рівності похідних у точці 5 (у куті).

### Ділянка 2

Навантаження відсутнє, тому  $\varphi$  може змінюватися за законом прямої (яку можна провести через дві точки), відповідно маємо значення  $\varphi_5 = 0$  і далі  $\varphi_{21} = 0$ , тобто пряма проходить по самій ділянці 2, тому приймаємо:

$$\varphi_5 = \varphi_9 = \varphi_{13} = \varphi_{17} = \varphi_{21} = 0. \quad (3.33)$$

Похідна по  $y$  відповідно буде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

З рівності похідних у точці стику ділянок 1 і 2 у верхньому куті 5 маємо:

$$c_1 = 0. \quad (3.34)$$

Таким чином, і по верхньому краю  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ .

$$\text{З умови } \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0, \quad (3.35)$$

Після інтегрування (3.35) знаходимо:

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(x) = c_2, \quad (3.36)$$

але у точці 5  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 7,3 \cdot q$ , тому на ділянці 2:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x) = c_2 = 7,3 \cdot q. \quad (3.37)$$

### Ділянка 3

Маємо вільно обперту балку на двох опорах (рис 3.9).

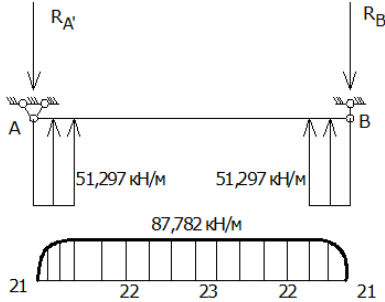


Рис. 3.9. Моделювання нижнього краю балки-стінки

Визначасмо реакції  $R_{A'}$  і  $R_{B'}$ :

$$\sum M_{B'} = 0:$$

$$R_{A'} \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$R_{A'} = q \cdot \frac{l}{2}$$

$$R_{A'} = \frac{q \cdot 14,6}{2} = \frac{13 \cdot 14,6}{2} = 94,9 \text{ кН/м}$$

$$\sum M_{A'} = 0:$$

$$-R_{B'} \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$R_{B'} = \frac{q \cdot 14,6}{2} = \frac{13 \cdot 14,6}{2} = 94,9 \text{ кН/м}$$

На ділянці 3:

$$M_{(x)} = R_{A'} \cdot x \cdot \frac{x}{2} - R_{A'} \cdot x = 51,297 \frac{x^2}{2} - 94,9 \cdot x, \quad (3.38)$$

$$\varphi = -M = 94,9x - 51,297 \frac{x^2}{2}. \quad (3.39)$$

Рівняння (3.39) не потрібне для визначення функції  $\varphi$  на ділянці 3, тому що довжина ділянки є меншою, ніж значення  $\Delta x$ . Однак потрібно визначити похідну на ділянці 3:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 94,9 - 51,292 \cdot x. \quad (3.40)$$

У точці 21 (при  $x = 0$ ):  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 7,3 \cdot q = 94,9$ .

Отже, у точці 21 похідна  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  така ж, що і в точці 5 ділянки 1. Так і повинно бути, тому що вони дорівнюють опорним реакціям балок зверху і знизу.

З умови на ділянці 3

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0,$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(y) = c_3. \quad (3.41)$$

Але так як на ділянці 2 у точці 21  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ , то й у межах ділянки 3 маємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c_3 = 0. \quad (3.42)$$

#### Ділянка 4

Згинальний момент визначаємо за формулою:

$$M_{(x)} = R_A \cdot 1,85 \cdot \left(x - \frac{1,85}{2}\right) - R_{A'} \cdot x = -R_A \cdot \frac{1,85^2}{2} = -87,782 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\varphi = -M = 87,782 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad (3.43)$$

$$\varphi_{22} = \varphi_{23} = 87,782 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Похідна  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ .

З умови на ділянці 4  $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$  отримаємо:

$$\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(y) = c_4, \quad (3.44)$$

У точці стику ділянок 3 і 4 похідні однакові, тому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c_4 = 0. \quad (3.45)$$

*Визначення функції  $\varphi(x, y)$  в поза контурних точках.*

*Ділянка 1*

З формули  $\varphi_a = 2\Delta y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi_c$  знаходимо:

$$\varphi_1 = 2\Delta y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi_9 = 2\Delta y \cdot 0 + \varphi_9 = \varphi_9 = 0;$$

$$\varphi_2 = 2\Delta y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi_{10} = \varphi_{10};$$

$$\varphi_3 = 2\Delta y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi_{11} = \varphi_{11}.$$

*Ділянка 2*

З формули  $\varphi_d = -2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_b$  отримаємо:

$$\varphi_4 = -2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_6 = -2 \cdot 3,65 \cdot 94,9 + 259,792 = -432,978;$$

$$\varphi_8 = -2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{10} = \varphi_{10} - 692,770;$$

$$\varphi_{12} = -2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{14} = \varphi_{14} - 692,770;$$

$$\varphi_{16} = -2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{18} = \varphi_{18} - 692,770;$$

$$\varphi_{20} = -2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{22} = -2 \cdot 3,65 \cdot 94,9 + 87,782 = -604,988.$$

*Ділянки 3 і 4*

$$\varphi_{24} = -2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{17} = -2\Delta y \cdot 0 + \varphi_{17} = 0;$$

$$\varphi_{25} = -2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{18} = \varphi_{18};$$

$$\varphi_{26} = -2\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi_{19} = \varphi_{19}.$$

Для зручності випишемо отримані значення на сітковій області балки-стілки (рис. 3.10)

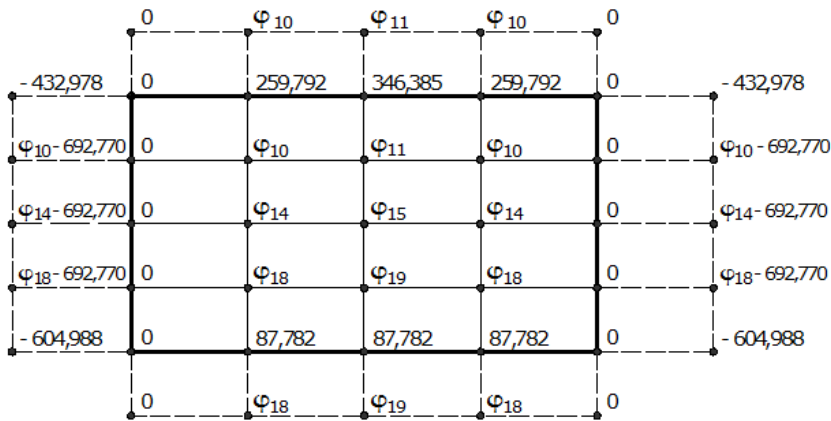


Рис. 3.10. Значення невідомих функцій дискретної моделі балки-стілки

Рівняння сумісності в скінченних різницях треба скласти тільки для внутрішніх (середніх) вузлів сіткової області, з урахуванням симетрії їх буде шість (для вузлів з невідомими функції напружень -  $\varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{14}, \varphi_{15}, \varphi_{18}, \varphi_{19}$ ):

$$\alpha = \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = \frac{1,55^2}{3,65^2} = \frac{2,4025}{13,3225} = 0,180334;$$

*T.10*

$$\begin{aligned} & \varphi_{10} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - 4 \cdot (259,792 + \varphi_{14} + \\ & + 0 \cdot 0,180334 + 0,180334 \cdot \varphi_{11}) \cdot (0,180334 + 1) + \\ & + 2 \cdot (0 + 346,385 + 0 + \varphi_{15}) \cdot 0,1803 + \\ & + (\varphi_{10} + \varphi_{18} + 0,180334^2 \cdot (\varphi_{10} - 692,77) + 0,180334^2 \cdot \varphi_{10} = 0; \end{aligned}$$

*T.11*

$$\begin{aligned} & \varphi_{11} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - \\ & - 4 \cdot (346,385 + \varphi_{15} + \varphi_{10} \cdot 0,180334 + \\ & + 0,180334 \cdot \varphi_{10}) \cdot (0,180334 + 1) + 2 \cdot (259,792 + 259,792 + \\ & + \varphi_{14} + \varphi_{14}) \cdot 0,1803 + (\varphi_{11} + \varphi_{19} + 0,180334^2 \cdot 0 + 0,180334^2 \cdot 0) = 0; \end{aligned}$$

*T.14*

$$\begin{aligned} & \varphi_{14} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - 4 \cdot (\varphi_{10} + \varphi_{18} + 0 \cdot 0,180334 + \\ & + 0,180334 \cdot \varphi_{15}) \cdot (0,180334 + 1) + \\ & + 2 \cdot (0 + \varphi_{11} + 0 + \varphi_{19}) \cdot 0,1803 + (259,792 + 87,782 + \\ & + 0,180334^2 \cdot (\varphi_{14} - 692,77) + 0,180334^2 \cdot \varphi_{14}) = 0; \end{aligned}$$

*T.15*

$$\begin{aligned} & \varphi_{15} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - 4 \cdot (\varphi_{11} + \varphi_{19} + \\ & + \varphi_{14} \cdot 0,180334 + 0,180334 \cdot \varphi_{14}) \cdot (0,180334 + 1) + \\ & + 2 \cdot (\varphi_{10} + \varphi_{10} + \varphi_{18} + \varphi_{18}) \cdot 0,1803 + \\ & (346,385 + 87,782 + 0,180334^2 \cdot 0 + 0,180334^2 \cdot 0) = 0; \end{aligned}$$

*T.18*

$$\begin{aligned} & \varphi_{18} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - \\ & - 4 \cdot (\varphi_{14} + 87,782 + 0 \cdot 0,180334 + 0,180334 \cdot \varphi_{19}) \cdot (0,180334 + 1) + \\ & + 2 \cdot (0 + \varphi_{15} + 0 + 87,782) \cdot 0,1803 + \\ & + (\varphi_{10} + \varphi_{18} + 0,180334^2 \cdot (\varphi_{18} - 692,77) + 0,180334^2 \cdot \varphi_{18}) = 0; \end{aligned}$$

*T.19*



$$\begin{aligned} & \varphi_{19} \cdot (6 \cdot 0,180334^2 + 8 \cdot 0,180334 + 6) - 4 \cdot (\varphi_{15} + \\ & + 87,782 + \varphi_{18} \cdot 0,180334 + 0,180334 \cdot \varphi_{18}) \cdot (0,180334 + 1) + \\ & + 2 \cdot (\varphi_{14} + \varphi_{14} + 87,7872 + 87,782) \cdot 0,1803 + \\ & + (\varphi_{11} + \varphi_{19} + 0,180334^2 \cdot 0 + 0,180334^2 \cdot 0) = 0; \end{aligned}$$

Для отримання системи з симетричними коефіцієнтами домножимо на два рівняння 1, 3 і 5. Необхідність домноження у два рази цих рівнянь зумовлена тим, що з урахуванням симетрії ми не складаємо таких самих рівнянь для правої половини балки-стілки. Після розкриття дужок і приведення подібних членів маємо:

$$\begin{aligned} 17,41\varphi_{10} - 1,70\varphi_{11} - 9,44\varphi_{14} + 0,72\varphi_{15} + 2\varphi_{18} & = 2248,33; \\ -1,7\varphi_{10} + 8,64\varphi_{11} + 0,72\varphi_{14} - 4,72\varphi_{15} + \varphi_{19} & = 1448,04; \\ -9,44\varphi_{10} + 0,72\varphi_{11} + 15,41\varphi_{14} - 1,7\varphi_{15} - 9,44\varphi_{18} + & \\ + 0,72\varphi_{19} & = -650,08; \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} 0,72\varphi_{10} - 4,72\varphi_{11} - 1,7\varphi_{14} + 7,64\varphi_{15} + 0,72\varphi_{18} - \\ - 4,72\varphi_{19} & = -434,17; \end{aligned}$$

$$2\varphi_{10} - 9,44\varphi_{14} + 0,72\varphi_{15} + 17,4\varphi_{18} - 1,7\varphi_{19} = 810,62;$$

$$\varphi_{11} + 0,72\varphi_{14} - 4,72\varphi_{15} - 1,7\varphi_{18} + 8,64\varphi_{19} = 351,36.$$

Розв'язавши систему рівнянь (3.46), отримаємо:

$$\varphi_{10} = 230,55; \quad \varphi_{11} = 295,66; \quad \varphi_{14} = 174,04;$$

$$\varphi_{15} = 202,01; \quad \varphi_{18} = 117,25; \quad \varphi_{19} = 113,68.$$

Розв'язок системи рівнянь виконувався матричним методом у програмі Microsoft Excel (рис. 3.11).

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
		17,41	-1,7	-9,44	0,72	2	0			2248,33
		-1,7	8,64	0,72	-4,72	0	1			1448,04
A=		-9,44	0,72	15,41	-1,7	-9,44	0,72			-650,08
		0,72	-4,72	-1,7	7,64	0,72	-4,72			-434,17
		2	0	-9,44	0,72	17,4	-1,7			810,62
		0	1	0,72	-4,22	-1,7	8,64			351,36
		0,100396	0,027886	0,083707	0,030428	0,033893	0,013088			230,5508
		0,02795	0,200088	0,030733	0,162983	0,013156	0,065906			295,6561
A(-1)=		0,083624	0,03017	0,170913	0,057575	0,08368	0,030183			174,036
		0,030117	0,160637	0,057871	0,326061	0,030137	0,160641			202,0083
		0,03367	0,011902	0,083334	0,028033	0,100263	0,02672			117,2546
		0,011131	0,055128	0,026863	0,141111	0,025952	0,189316			113,6812

Рис. 3.11. Розв’язання рівнянь сумісності деформацій матричним методом у програмі Microsoft Excel

Для зручності обчислення напружень в характерних точках балки-стінки виносимо обчислені значення функції Ері на окремий рисунок (рис.3.12).

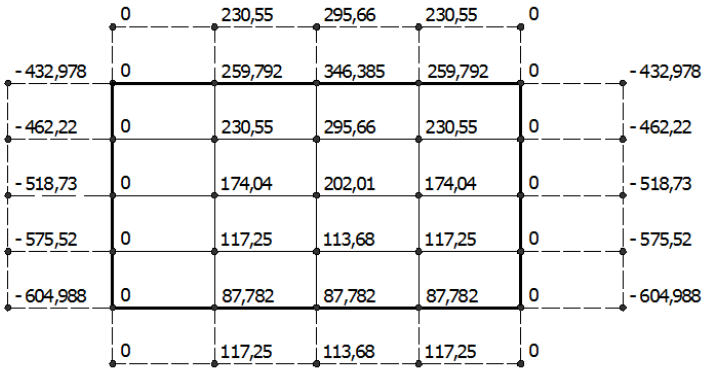


Рис. 3.12. Значення функцій Ері дискретної моделі балки-стінки

Визначимо напруження в характерних точках та побудуємо епюри (рис. 3.13):

У точці 6

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_6 + \varphi_{10} + \varphi_2}{\Delta y^2} = \frac{-2 \cdot 259,79 + 230,55 + 230,55}{1,55^2} =$$
$$= -24,34 \frac{\kappa H}{M^2};$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_6 + \varphi_5 + \varphi_7}{\Delta x^2} = \frac{-2 \cdot 259,79 + 0 + 346,39}{3,65^2} = -13 \frac{\kappa H}{M^2}.$$

У точці 10

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_{10} + \varphi_{14} + \varphi_6}{\Delta y^2} = \frac{-2 \cdot 230,55 + 174,04 + 259,79}{1,55^2} =$$
$$= -11,35 \frac{\kappa H}{M^2};$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_{10} + \varphi_{11} + \varphi_9}{\Delta x^2} = \frac{-2 \cdot 230,55 + 295,66}{3,65^2} = -12,42 \frac{\kappa H}{M^2}.$$

У точці 23

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_{23} + \varphi_{26} + \varphi_{19}}{\Delta y^2} = \frac{-2 \cdot 87,782 + 113,68 + 113,68}{1,55^2} =$$
$$= 21,559 \frac{\kappa H}{M^2};$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_{23} + \varphi_{22} + \varphi_{22}}{\Delta x^2} = \frac{-2 \cdot 87,782 + 87,782 + 87,782}{3,65^2} = 0.$$

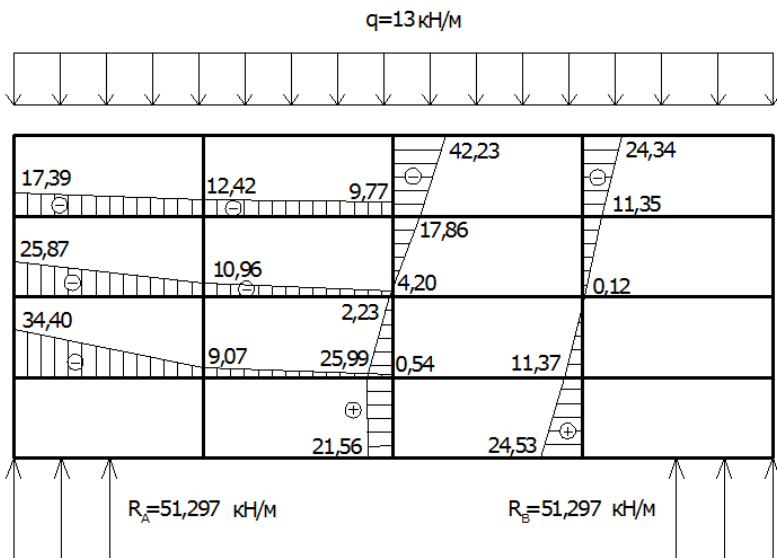


Рис. 3.13. Епюри напружень  $\sigma_x$  і  $\sigma_y$

## Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає суть теорії скінченних різниць?
2. Запишіть рівняння кривої параболи у декартовій плоскій системі координат. Визначте похідні у центральній точці кривої при  $x = 0$ .
3. Побудуйте сітку на площині з постійними кроками координат  $-\Delta x$ ,  $\Delta y$  і знайдіть часткові четверті похідні у різницях у точці  $k$ .
4. Наведіть рівняння сумісності у скінченних різницях для функції напружень у точці  $k$  при  $\Delta x = \Delta y$ .
5. У чому полягає суть розв'язання плоскої задачі теорії пружності за допомогою методу скінченних різниць?
6. Наведіть дискретну модель розрахунку балки-стілки методом скінченних різниць. З яких умов визначається число невідомих системи розв'язувальних рівнянь для побудованої дискретної моделі.
7. Наведіть розрахункову модель конструкції балки-стілки на двох опорах з використанням балкових функцій, як граничних умов.
8. З яких умов отримуємо значення функції напружень у контурних і позаконтурних точках дискретної моделі?
9. Як формується система розв'язувальних рівнянь для дискретної моделі конкретної конструкції балки-стілки з урахуванням площини симетрії?
10. Наведіть якісний характер епюр нормальних напружень у дискретному просторі балки-стілки. Як він відрізняється від розв'язків балок за опором матеріалів?

## РОЗДІЛ 4

### РОЗРАХУНОК ТОНКИХ ПЛАСТИНОК НА ЗГИН

#### 4.1. Теорія розрахунку тонких пластинок з використанням гіпотез Кірхгоффа-Лява

Тонкими вважаються плити (пластинки), що мають відношення товщини "t" до найменшого характерного розміру "b" у плані в таких межах [12]:

$$\frac{1}{5} \geq \frac{t}{b} \geq \frac{1}{80} \quad (4.1)$$

та величину очікуваних прогинів не більше  $\frac{1}{4}t$ .

Пластинки, у яких  $\frac{t}{b} > \frac{1}{5}$ , розраховують за теорією товстих плит

(пластин), а пластинки, що мають прогини більше  $\frac{1}{4}t$ , розраховують за теорією гнучких пластинок або мембран.

Тонкі пластинки можна розраховувати за наближеною теорією технічного згину пластинок, що ґрунтується на гіпотезах Кірхгоффа-Лява [13]:

1. Гіпотеза прямих незмінних нормалей: елемент нормалі до серединної поверхні пластинки залишається нормальним і незмінним (за довжиною) до цієї поверхні після деформації. Виконується гіпотеза плоских перерізів\* плити як і у балці, тобто зсуви (зсувні деформації) у площинах за товщиною відсутні:

$$\gamma_{zy} = 0; \quad \gamma_{zx} = 0, \quad (4.2)$$

а також відсутні деформації уздовж товщини t (рис. 4.1):

$$\varepsilon_z = 0. \quad (4.3)$$

2. Гіпотеза про нерозтяг серединної поверхні площини пластинки свідчить про те, що відсутні деформації розтягу, стиску і зсуву на серединній поверхні, а це значить, що серединна площина є *нейтральною* і тангенціальні переміщення у ній нульові:

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0. \quad (4.4)$$

\* за терміном дисципліни опору матеріалів

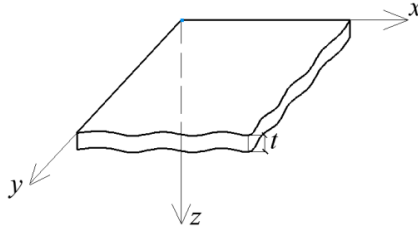


Рис. 4.1. Розрахункова схема пластинки

3. Гіпотеза про відсутність тиску між шарами пластинки та напруженнями  $\sigma_z$  можна знехтувати:

$$\sigma_z = 0. \quad (4.5)$$

Пластинка, таким чином, досліджується на *поперечне нормальне навантаження*. Під дією навантаження пластинка прогинається і мають місце лише вертикальні переміщення  $W$ . Відповідно до гіпотези Кірхгоффа-Лява прогини  $W$  не залежать від координати  $z$ :  
 $\omega = \omega(x, y), \quad (4.6)$

а точки, що розташовані на одній вертикалі, отримують однакові зміщення. Тобто достатньо визначити прогини серединної площини пластинки (як у балці визначити прогини *нейтральної осі стрижня*).

На основі гіпотези Кірхгоффа-Лява (4.2) (з рівнянь деформацій Коші) маємо:

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0; \quad (4.7)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (4.8)$$

При інтегруванні по  $z$  з (4.8) отримаємо:

$$u = -z \frac{\partial \omega}{\partial x} + f_1(x, y);$$

$$v = -z \frac{\partial \omega}{\partial y} + f_2(x, y).$$
(4.9)

З граничних умов, коли  $z = 0$ ,  $u_0 = v_0 = 0$ , а з рівняння (4.9) маємо:

$$u_0 = f_1(x, y) = 0;$$

$$v_0 = f_2(x, y) = 0$$
(4.10)

і тоді остаточно отримаємо:

$$u = -z \frac{\partial \omega}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$
(4.11)

Таким чином, згідно з рівняннями (4.11) складові вектора переміщень точок пластинки у напрямі осей  $x$  і  $y$  визначаються через функцію прогинів серединної поверхні, і, як наслідок, за формулами Коші можна визначити складові тензора деформацій у тонкій пластинці:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}.$$
(4.12)

## 4.2. Рівняння Коші і узагальненого закону Гука з урахуванням гіпотез і допущень технічної теорії згину

Якщо використати рівняння стану на основі узагальненого закону Гука з урахуванням  $\sigma_z = 0$ , то отримаємо:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{3}(\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad (1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3}(\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad (2).$$
(4.13)



Складемо рівності (1) і (2) з (4.13), попередньо помноживши (2) на  $\nu$ :

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_x = \frac{1}{3}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\
 & + \\
 & \nu\varepsilon_y = \frac{1}{3}(\nu\sigma_y - \nu^2\sigma_x) \\
 & \hline
 \varepsilon_x + \nu\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y + \nu\sigma_y - \nu^2\sigma_x); \\
 \varepsilon_x + \nu\varepsilon_y &= \sigma_x \frac{1 - \nu^2}{E}. \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

З (4.14) отримаємо:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \tag{1}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x); \tag{2} \tag{4.15}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{xy}. \tag{3}$$

Підставивши (4.12) у (4.15), отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{(1 - \nu^2)} \left( -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \left( -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \right); \\
 \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right); \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_y &= \frac{E}{(1 - \nu^2)} \left( -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \left( -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \right); \\
 \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu^2)} \left( -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{Ez}{(1 + \nu^2)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}. \tag{4.18}$$

Дотичні напруження у двох площинах, ортогональних до серединної поверхні, за формулами закону Гука і гіпотезою (2) обертуються у нульові значення:

$$\begin{aligned}\tau_{zy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zy} = 0; \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} = 0.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Цей результат отриманий згідно з гіпотезою Кірхгофа-Лява, але він суперечить умовам рівноваги, тобто в дійсності ці дотичні напруження не дорівнюють нулю і їх не можна визначити за формулами (4.19). Щоб знайти вирази для цих напружень, розглянемо вихідні рівняння рівноваги. Для першого з них, нехтуючи об'ємними силами, маємо:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0.\tag{4.20}$$

З рівняння (4.20) і формул (4.16), (4.18) отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2}.\end{aligned}\tag{4.21} \text{ Пiс-}$$

ля спрощення (4.21) маємо:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right),\tag{4.22}$$

або

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega.\tag{4.23}$$

Інтегруючи (4.23) по  $z$ , отримаємо:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1+\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega + f_1(x, y).\tag{4.24}$$

Для визначення довільної функції  $f_1(x, y)$  маємо граничні умови: на верхній і нижній поверхнях пластинки, де відсутні дотичні на-

вантаження, тобто при  $z = \pm \frac{h}{2}$   $\tau_{zx} = 0$ . Підставляючи ці умови в

(4.24), маємо:

$$0 = \frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega + f_1(x, y) \quad (4.25)$$

і визначаємо

$$f_1(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega. \quad (4.26)$$

Підставимо (4.26) у (4.24) і отримаємо:

$$\tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega. \quad (4.27)$$

Розв'язавши друге загальне рівняння рівноваги, отримаємо:

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega. \quad (4.28)$$

Рівняннями (4.27), (4.28) доповнюємо рівняння (4.16), (4.17) і (4.18):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu^2)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y};$$

$$\tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega;$$

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega.$$

Напруження чистого згину  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  і  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  розподіляються, перетворюючись у нуль у точках серединної площини пластинки, а

напруження  $\tau_{yz}$  і  $\tau_{zx}$  розподіляються за параболою, досягаючи у точках серединної площини максимального значення.

### 4.3. Диференціальне рівняння рівноваги тонкої пластинки від дії поперечного навантаження.

У перерізах, які ортогональні серединній площині пластинки уздовж  $x$  і  $y$ , виникають напруження, представлені на рис. 4.2.

Якщо ці напруження проінтегрувати за товщиною пластинки по  $z$ , то отримаємо внутрішні зусилля у перерізах, ортогональних серединній площині. Ці внутрішні зусилля дають складові погонних згинальних моментів  $M_x, M_y, M_{xy}$  та поперечних зусиль  $Q_x$  і  $Q_y$ .

Випишемо ці рівняння:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz,$$

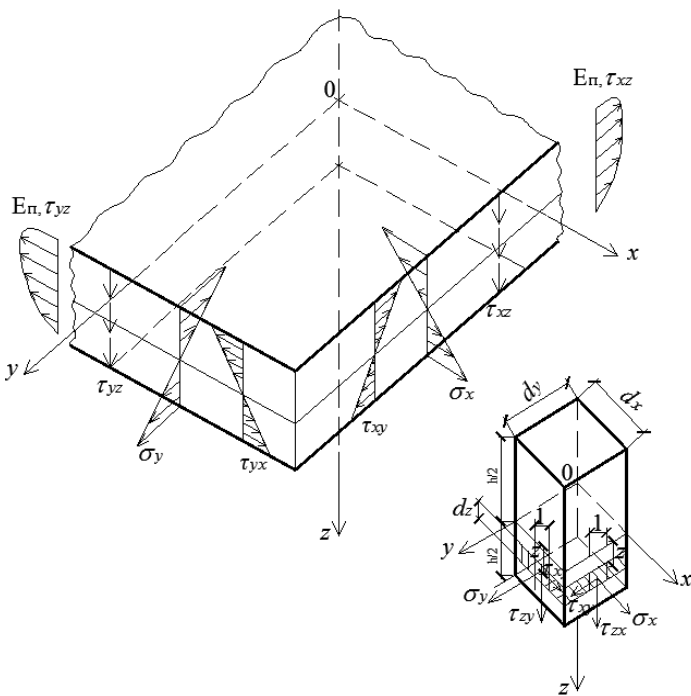


Рис. 4.2. Епюри розподілу напружень по товщині пластинки

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{1}{3} \left( \frac{h^3}{8} - \left( -\frac{h^3}{8} \right) \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} h^3 = \frac{1}{12} h^3.$$

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (4.30)$$

де  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  - циліндрична жорсткість.

Циліндрична жорсткість пластинки є її фізичною і геометричною характеристикою при згинанні.

Аналогічно отримуємо:

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \quad (4.31)$$

$M_x$   $M_y$  – згинальні моменти у перерізах з нормаллями за  $x$ ,  $y$ ,

$M_{yx} = M_{xy} \equiv H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$  - крутні моменти.

Погонна поперечна сила у перерізі з нормаллю  $x$  дорівнює:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz. \quad (4.32)$$

Після інтегрування одержимо:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega. \quad (4.33)$$

Аналогічно:

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega. \quad (4.34)$$

Таким чином, у перерізах пластинки, перпендикулярних до її середньої площини, під дією поперечного навантаження виникають наступні погонні зусилля:

- згинальні моменти:

$$\begin{cases} M_x = -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right); \\ M_y = -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \end{cases} \quad (4.35)$$

- поперечні сили:

$$\begin{cases} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega; \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega; \end{cases} \quad (4.36)$$

- крутні моменти:

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}. \quad (4.37)$$

Напрями додатних значень знайдених внутрішніх зусиль показані на рис. 4.3, при цьому додатні значення зусиль співпадають з напрямками дії відповідних додатних складових напружень, а також з правилами визначення знаку внутрішніх зусиль в опорі матеріалів (рис. 4.4).

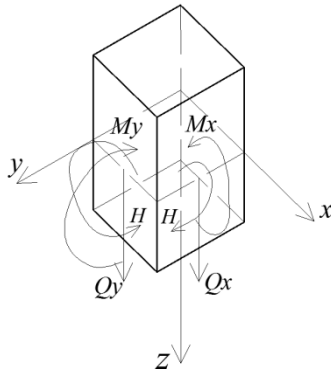


Рис. 4.3. Схема елемента пластинки із зображенням напрямів дії внутрішніх зусиль

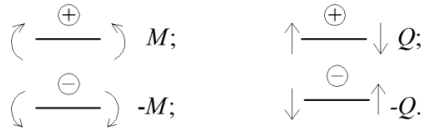


Рис. 4.4. Правила визначення знаку внутрішніх зусиль

Запишемо диференціальні рівняння рівноваги відносно серединної площини пластинки, що згинається під дією зусиль. З цією метою вирізаємо з серединної площини пластинки нескінченно малий елемент розмірами  $dx$ ,  $dy$  та знаходимо всі діючі на нього зусилля і навантаження у додатному напрямі (рис. 4.5).

Спроектуємо всі сили на вісь  $z$  і моменти відносно осей  $x$ ,  $y$ , отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q(x, y) + p(x, y) \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x \quad (2) \end{array} \right. \quad (4.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_x \quad (3) \end{array} \right.$$

Із системи рівнянь (4.38) виключаємо поперечні сили. Для цього диференціюємо рівняння (2) і (3) відповідно за  $x$  та  $y$ , складаємо їх і замість отриманої правої частини підставляємо її значення з рівняння (1). Остаточоно отримаємо:

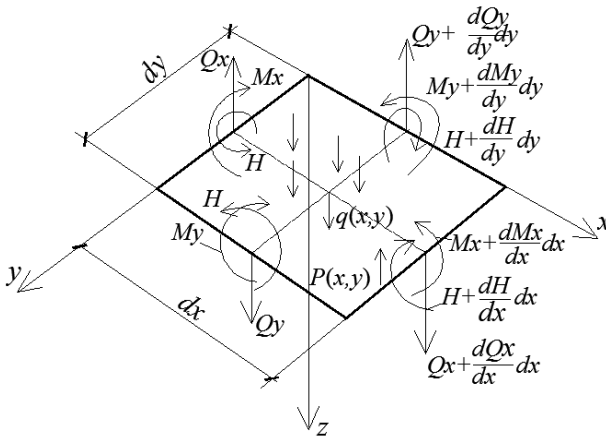


Рис. 4.5. Схема діючих зусиль та навантажень на елемент серединної поверхні пластинки:  $q(x, y)$  - зовнішнє поперечне навантаження;  $p(x, y)$  - реакція пружної основи

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) + p(x, y). \quad (4.39)$$

Підставляємо в (4.39) значення  $M_x$ ,  $M_y$  і  $H$ , відповідно використовуючи (4.35) і (4.37), отримаємо:

$$\begin{aligned} -D \left[ \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = \\ = -q(x, y) + p(x, y), \end{aligned} \quad (4.40)$$

Спростивши (4.40), отримаємо:

$$D \left( \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = q(x, y) - p(x, y) \quad (4.41)$$

або

$$D \nabla^4 \omega - q(x, y) + p(x, y) = 0. \quad (4.42)$$

Отримане рівняння (4.42) є диференціальним рівнянням зігнутої серединної поверхні пластинки і має назву рівняння Софі Жермен.



При інтегруванні рівняння (4.42), виникнуть довільні постійні інтегрування, які визначають із умов на контурі пластинки, що залежать від характеру закріплення її країв.

#### 4.4. Методика розв'язків задач на згин тонких пластинок, умови на контурі

Визначимо загальний порядок розв'язання задачі на поперечний згин тонких пластинок. Розрахунок тонкої пластинки слід почина-ти з пошуку такої функції прогину  $\omega$ , яка б задовольняла основне диференціальне рівняння Софі Жермен та умови на контурі. Пошук цієї функції здійснюється шляхом її поступового підбору і перевірки на відповідні умови на контурі та диференціальному рівнянні рівноваги. Якщо для даного конкретного випадку буде знайдена функція прогинів  $\omega$ , то далі знаходимо згинальні та крутні моменти у будь-якому перерізі пластинки за відповідними координатами  $x$  і  $y$ .

Поперечні сили можна визначити, використовуючи рівняння рівно-ваги, підставляючи у них значення згинальних і крутних моментів:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y};$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad (4.43)$$

або за формулами (4.36).

$$Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right);$$

$$Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (4.44)$$

Якщо скористатися формулами (4.29) і (4.35):

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

визначивши множник у дужках з рівняння (2) і підставивши його в (1), з урахуванням (4.30), отримаємо:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{M_x}{D} \right) = +\frac{M_x Ez \cdot 12(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)Eh^3} = \frac{M_x}{I} z; \quad (4.45)$$

де  $I$  - момент інерції одиничної смуги пластинки,  $I = \frac{1 \cdot h^3}{12}$ .

Вираз (4.45) свідчить, що напруження  $\sigma_x$  в тонких пластинках визначаються за згинальними моментами так само, як і у звичайних балках:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z,$$

а для екстремальних значень у верхньому і нижньому волокнах пластинки за відповідними формулами опору матеріалів:

$$\sigma_{x \max} = \pm \frac{M_x}{W}; \quad \sigma_{y \max} = \pm \frac{M_y}{W}, \quad (4.46)$$

де  $W$  – момент опору розрахункового перерізу пластинки.

Відповідно для горизонтальних дотичних напружень у вертикальних перерізах пластинки маємо:

$$\tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z; \quad \tau_{xy \max} = \pm \frac{M_{xy}}{W}. \quad (4.47)$$

Для вертикальних дотичних напружень, а також таких, що дорівнюють їм, дотичних напружень у горизонтальних площинах (закон парності дотичних напружень) теж застосовуються формули опору матеріалів:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_x S}{I}; \quad \tau_{yz} = \pm \frac{Q_y S}{I}, \quad (4.48)$$

де  $S$  – статичний момент у точці для відсіченої площі одиничного перерізу пластинки. Для точки у центрі перерізу на серединній площині маємо:

$$S = \frac{1 \cdot h^2}{8} = \frac{h^2}{8}; \quad I = \frac{1 \cdot h^3}{12}.$$

Тоді максимальні вертикальні дотичні напруження в ортогональних перерізах пластинки на нейтральній площині визначаються за формулами опору матеріалів:

$$\tau_{xz_{\max}} = \frac{Q_x \cdot h^2 \cdot 12}{28 \cdot h^3} = \frac{3Q_x}{2h}; \quad \tau_{yz_{\max}} = \frac{3Q_y}{2h}. \quad (4.49)$$

Умови на контурі, які використовуються для визначення постійних інтегрування, залежать від характеру закріплення країв пластинки. На краях пластинки можуть бути задані прогини і кути повороту серединної площини, згинальні і крутні моменти, поперечні сили. Умови, за яких на контурі задаються узагальнені переміщення, тобто прогини, або кути повороту серединної площини, називаються *геометричними граничними умовами*. Якщо на контурі задані узагальнені зусилля, тобто згинальні або крутні моменти та поперечні сили, то такі умови називаються *статичними*. Якщо на контурі одночасно задані і переміщення, і зусилля, то такі умови вважаються *змішаними*. На кожному краю треба задавати дві граничні умови. Таким чином маємо:

- 1) Геометричні граничні умови;
- 2) Статичні граничні умови;
- 3) Змішані граничні умови.

Розглянемо деякі граничні умови на прикладі прямокутної пластинки (рис. 4.6):

1. Закріплений край –  $OA$  (геометричні умови):

$$y = 0 \rightarrow W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0; \quad (4.50)$$

2. Шарнірно-обперті краї  $OC$  і  $AB$  (змішані умови).

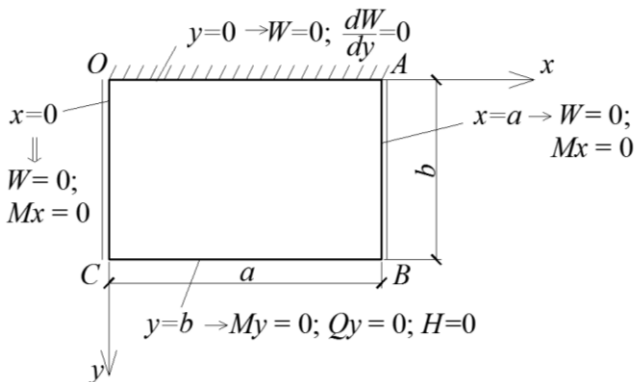


Рис. 4.6. Розрахункова схема прямокутної пластинки

$$\begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases} \Rightarrow W=0; \quad M_x=0. \quad (4.51)$$

Якщо виразити  $M_x$  через функцію прогину, то матимемо:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \text{ повністю геометричні умови).} \quad (4.52)$$

3. Вільний край  $CB$  (статичні умови)

$$y=b \rightarrow M_y=0; \quad Q_y=0; \quad H=0. \quad (4.53)$$

На вільному краю  $CB$  замість двох граничних умов з'являються три умови. Це протиріччя пов'язано з тим, що задача розв'язується наближено і задовольнити всі граничні умови неможливо. Але його можна уникнути, якщо об'єднати дві останні умови ( $Q_y=0$ ,  $H=0$ ), тобто крутний момент і поперечну силу на контурі пластинки можна замінити однією силою, яка буде їм статично еквівалентною.

Розглянемо крутний момент інтенсивністю  $H$  (погонний), який розподілений уздовж грані  $CB$ , паралельній осі  $x$  (рис. 4.7, а). На проміжку  $dx$  діє крутний момент, що дорівнює величині  $Hdx$ , який можна подати у вигляді пари протилежно направлених сил  $H$  з плечем  $dx$  (рис. 4.7, б). На сусідньому елементі  $dx$  крутний момент буде збільшений на нескінченно малу величину  $dH$ , тобто:

$$(H + dH)dx = \left( H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right) dx. \quad (4.54)$$

Крутний момент також можна подати у вигляді пари вертикальних протилежно направлених сил величиною  $H + \frac{\partial H}{\partial x} dx$  з плечем  $dx$ .

Таку заміну крутних моментів вертикальними силами можна здійснити на довжині всієї ділянки грані  $CB$ . На межі кожного нескінченно малого елемента  $dx$ , за винятком крайніх точок  $C$  і  $B$ , будуть діяти дві протилежно направлені сили, різниця між якими дорівнює  $\frac{\partial H}{\partial x} dx$ . Таким чином, уздовж грані  $CB$  буде діяти розподілене по

довжині навантаження інтенсивністю  $\frac{\partial H}{\partial x}$  (рис. 4.7, в). У точках  $C$  і

$B$  будуть виникати зосереджені сили  $H_C$  і  $H_B$ .

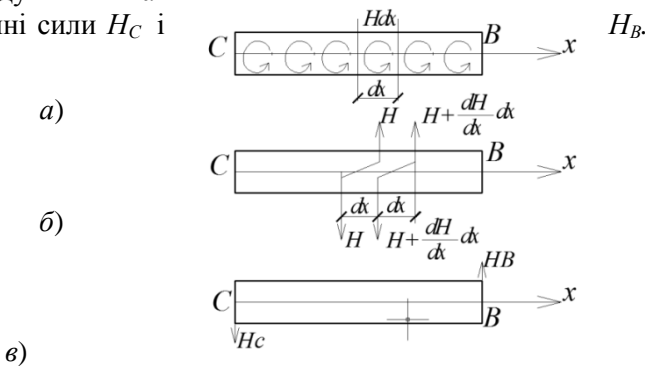


Рис. 4.7. Схеми розподілу крутного моменту на контурі пластинки

Остаточно отримане вертикальне навантаження можна об'єднати з поперечною силою  $Q_y$  і вважати, що на грані  $CB$  діє приведена поперечна сила інтенсивністю

$$Q_y^{прив.} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (4.55)$$

Аналогічно уздовж граней контуру пластинки, що паралельні осі  $y$ , буде діяти приведена поперечна сила інтенсивністю

$$Q_x^{прив.} = Q_x + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (4.56)$$

Похідні крутних моментів по  $x$  і  $y$  знайдемо у відповідності з формулою (4.37), тобто:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y}; \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Підставляючи у формули (4.55), (4.56) значення поперечних сил (4.44) і похідних крутного моменту (4.57), отримаємо:

$$\begin{aligned} Q_x^{прив.} &= -D \left[ \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right]; \\ Q_y^{прив.} &= -D \left[ \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right]; \end{aligned} \quad (4.58)$$

Таким чином, на кожній грані пластинки замість трьох зусиль: згинального моменту, крутного моменту і поперечних сил, можна розглядати тільки два зусилля: згинальний момент та приведену поперечну силу. На рис. 4.8 показані додатні напрями цих приведених поперечних сил на всіх гранях прямокутної пластинки, а також зосередженні сили, що виникають у кутах пластинки.

У результаті такої заміни зусиль на вільному від закріплення краю пластинки  $CB$  замість трьох умов:

$$M_y = 0; \quad Q_y = 0; \quad H = 0$$

можна вимагати виконання лише двох:

$$M_y = 0; \quad \text{і} \quad Q_y^{прив.} = 0. \quad (4.59)$$

Звичайно, при цьому граничні умови задовольняються наближено, але за принципом Сен-Венана така заміна поперечної сили і крутного моменту статично еквівалентною приведеною поперечною силою викликає лише місцеві напруження поблизу розглянутого краю пластинки. Якщо умови (4.59) виразити через функцію прогину  $\omega(x, y)$ , тоді на вільній грані  $CB$  при  $y = b$  повинно бути:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^3} + (2 - 1) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} = 0. \end{cases} \quad (4.60)$$

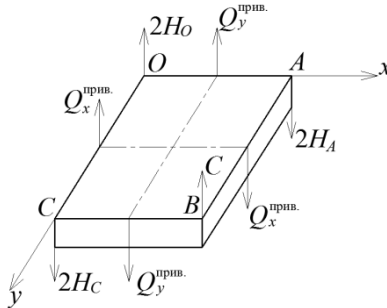


Рис. 4.8. Схема елемента пластинки із зображенням приведених перерізувальних та зосереджених сил

#### 4.5. Приклад аналітичного розрахунку еліптичної тонкої пластинки на поперечний згин

Розглянемо приклад еліптичної тонкої пластинки, закріпленої по контуру та звантаженої по всій площині рівномірно розподіленим навантаженням  $q$  (рис. 4.9).

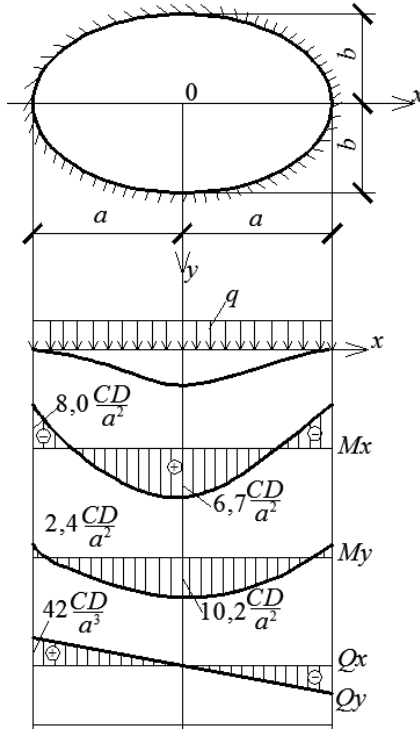


Рис. 4.9. Епюри згинальних моментів та поперечних сил для еліптичної пластинки

Розв'язок диференціального рівняння (4.42) без урахування пружної основи для такої пластинки може бути отриманий у замкненому (аналітичному) вигляді. При розв'язанні задачі застосовуємо зворотний метод, тобто обираємо за основу вид функції прогинів  $\omega(x, y)$  і визначаємо, чи задовольняє вона диференціальному рівнянню (4.42), прийнятому навантаженню і граничним умовам.

Рівняння контуру еліптичної пластинки (див. рис. 4.9) відповідає канонічній формі еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (4.61)$$

Беремо функцію прогинів у вигляді степеневого поліному:



$$\omega(x, y) = c \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad (4.62)$$

де  $c$  – постійний коефіцієнт, є невідомою величиною в (4.62).

Вияснимо, чи задовольняється основне рівняння (4.42):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{4c}{a^2} \left( \frac{x^3}{a^2} + \frac{xy^2}{b^2} - x \right); \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \frac{4c}{a^2} \left( \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right); \\ \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} &= \frac{4c}{a^2} \left( \frac{6x}{a^2} \right); \\ \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} &= \frac{24c}{a^4}; \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{24c}{b^4}; \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} = \frac{4c}{a^2} \left( \frac{2y}{b^2} \right); \quad \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{8c}{a^2 b^2}.$$

Підставимо (4.63) у рівняння Софі Жермен (4.42):

$$\frac{24c}{a^4} + 2 \frac{8c}{a^2 b^2} + \frac{24c}{b^4} = \frac{q}{D}. \quad (4.64)$$

Рівняння (4.42) задовольняється, якщо прийняти:

$$c = \frac{q}{D \left( \frac{24c}{a^4} + \frac{16c}{a^2 b^2} + \frac{24c}{b^4} \right)}. \quad (4.65)$$

Оскільки “ $c$ ” є постійною величиною, то і “ $q$ ” повинно бути постійним. З цього слідує, що функція (4.62) є розв’язком диференціального рівняння (4.42) при поперечному навантаженні  $q$ , яке рівномірно розподілене по поверхні пластинки.

До виразу  $\omega(x, y)$  входить рівняння еліпса, тому для будь-якої точки контура  $\omega = 0$ ,

$$\omega(x, y) = \frac{q}{\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4}} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (4.66)$$

Крім того, завдяки закріпленню по контуру пластинки, похідні функції прогинів також повинні дорівнювати нулю:  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$  і  $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ .

Перевіримо це:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{4cx}{a^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right); \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{4cy}{b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

До (4.67) також входять рівняння еліпса, тому скрізь по контуру  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$  і  $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ . Таким чином, і прогини, і кути повороту середньої площини на контурі пластинки дорівнюють нулю. Це свідчить про те, що функція задана правильно і отриманий точний розв'язок. Прогин у центрі пластинки дорівнює значенню "с".

При  $x = 0$  і  $y = 0$ , тобто на осях симетрії, крутний момент дорівнює нулю:

$$H = -\frac{8cD}{a^2b^2}(1-\nu)xy. \quad (4.68)$$

У центрі пластинки згинальний момент при  $x = 0$  і  $y = 0$  становить:

$$M_x = \frac{q}{2 \left( \frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{3}{b^4} \right)} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right). \quad (4.69)$$

Якщо пластинка кругла, то маємо частковий випадок еліптичної пластинки:

$$\text{при } b = a \quad \max \omega = \frac{qa^4}{64D}. \quad (4.70)$$

Момент у центрі при  $x = 0$  і  $y = 0$  буде дорівнювати:

$$M_x = \frac{(1+\nu)qa^2}{16}. \quad (4.71)$$

#### 4.6. Основні рівняння згину круглої тонкої пластинки

Для розв'язання задачі на згин круглої пластинки всі рівняння згину пластинки, що отримані у декартовій системі, необхідно перетворити в полярну систему координат (рис. 4.10).

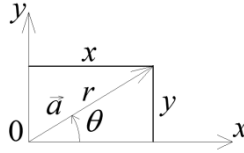


Рис. 4.10. Схема перетворення з декартової у полярну систему координат

Якщо у декартовій системі координат функція прогину і функція зовнішнього впливу для серединної площини пластинки мають вигляд  $\omega(x, y)$ ,  $q(x, y)$ ,  $p(x, y)$ , то у полярній системі координат вони набудуть вигляду  $\omega(r, \theta)$ ,  $q(r, \theta)$ ,  $P(r, \theta)$ .

Рівняння згину серединної площини пластинки у полярній системі координат має вигляд:

$$\begin{cases} D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) = \\ = q(r, \theta) - p(r, \theta); & (4.72) \\ \omega(r, \theta) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \iint_F \frac{p(\rho, \varphi) d\rho d\varphi}{|\vec{r} - \vec{\rho}|}. \end{cases}$$

Замінюємо похідні по  $x$  і  $y$  на похідні по  $r$  і  $\theta$ :

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta &= -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \right]; & (4.73) \end{aligned}$$

$$H = -D(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right); \quad (4.74)$$

$$Q_r^{np.} = Q_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta};$$

$$Q_{\theta}^{np.} = Q_{\theta} + \frac{\partial H}{\partial r}. \quad (4.75)$$

Для круглої пластинки, в осесиметричній задачі, коли навантаження та граничні умови не залежать від полярного кута  $\theta$ , функція прогинів буде залежати від однієї координати  $r$ :

$$\omega = \omega(r), \quad q = q(r), \quad p = p(r).$$

При цьому, бігармонічне рівняння Софі Жермен спрощується і визначається звичайними диференціальними рівняннями четвертого порядку:

$$\begin{cases} D \left( \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \omega}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\omega}{dr} \right) = q(r) - p(r); \\ \omega(r, \theta) = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \int_0^a \frac{p(\xi) d\xi}{r - \xi}; \end{cases} \quad (4.76)$$

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \nu \frac{d\omega}{r dr^2} \right); \quad (4.77)$$

$$M_{\theta} = -D \left( \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} + \nu \frac{d^3 \omega}{dr^3} \right);$$

$$H = 0;$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right); \quad (4.78)$$

$$Q_{\theta} = 0;$$

$$Q_r^{np.} = Q_r;$$

$$Q_{\theta}^{np.} = Q_{\theta}.$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} + \nu \frac{\omega}{r} \right);$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{\omega}{r} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial r} \right). \quad (4.79)$$

З рівнянь рівноваги за відсутності об'ємних сил залишається одне рівняння:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (4.80)$$

Підставляючи (4.80) у (4.79), маємо диференціальне рівняння відносно переміщення  $\omega$ :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} = 0 \quad (4.81)$$

Диференціальне рівняння (4.81) зі змінними коефіцієнтами зводимо, виконавши підстановки до рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$t = \ln r; \quad r = e^t; \quad \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}. \quad (4.82)$$

Зв'язок між похідними від функції  $\omega$  за старою та новою змінними:

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (4.83)$$

З урахуванням (4.83), друга похідна має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left( \frac{d\omega}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{d\omega}{dt} \right) = \\ &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{d^2 \omega}{dt^2} - \frac{d\omega}{dt} \right). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Підставляючи (4.83) і (4.84) у (4.81), отримаємо:

$$\frac{d\omega}{dt^2} - \omega = 0. \quad (4.85)$$

Розв'язок диференціального рівняння (4.85) відомий:

$$\omega = Ae^t + Be^{-t}, \quad (4.86)$$

або, переходячи до старої змінної  $r$ , маємо:

$$\omega = Ar + \frac{B}{r}. \quad (4.87)$$

Знаючи складову переміщення  $\omega$  з рівнянь Коші, отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= A - \frac{B}{r^2}, \\ \varepsilon_\theta &= A + \frac{B}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

З формул закону Гука отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (1+\nu)A - (1-\nu)\frac{B}{r^2} \right], \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (1+\nu)A + (1-\nu)\frac{B}{r^2} \right]. \end{cases} \quad (4.90)$$

Постійні  $A$  і  $B$  визначаються з граничних умов для конкретної задачі.

### Запитання для самоперевірки

1. Які пластинки вважаються тонкими? У чому полягає наближена теорія технічного згину пластинки?
2. Наведіть складові гіпотези Кірхгофа-Лява. Які функції переміщень матеріальної точки пластинки незалежні?
3. Наведіть рівняння деформації Коші з урахуванням гіпотези Кірхгофа-Лява для тонкої пластинки.
4. Наведіть рівняння узагальненого закону Гука з урахуванням гіпотези Кірхгофа-Лява для тонкої пластинки.
5. Наведіть схему дії внутрішніх і зовнішніх сил елементарної площини на середній поверхні пластинки і виведіть диференціальні рівняння рівноваги.
6. Виведіть диференціальне рівняння Софі Жермен із диференціальних рівнянь рівноваги діючих зовнішніх і внутрішніх сил у елементарному околі пластинки.
7. Які умови використовуються на контурі для визначення постійних інтегрування при розв'язку диференціального рівняння Софі Жермен?
8. Що таке приведена поперечна сила і для чого вона використовується?
9. У чому полягає розв'язок Нав'є для задачі згину прямокутної пластинки.

10. Наведіть диференціальне рівняння прогинів нескінченної смуги на пружній основі.

## РОЗДІЛ 5

### РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

#### 5.1. Статично невизначувані системи. Основи теорії розрахунку методом сил

Статично невизначуваною механічною системою називають таку систему, яка має зайві в'язі і тому не може бути розрахована з використанням лише умов рівноваги статички, виходячи з системи рівнянь теоретичної механіки.

Система рівнянь вільної механічної моделі з точки зору теоретичної механіки: «геометрично незмінна механічна система буде у рівновазі під дією зовнішніх сил за умови, що головний вектор і головний момент дорівнюють нулю». За зайві в'язі приймають ті в'язі, які необхідно відкинути для отримання статично визначуваної і геометрично незмінної системи. Кількість зайвих в'язів, які треба відкинути для перетворення її в основну систему – статично визначувану та геометрично незмінну – називають *ступенем статичної невизначеності*. Ступінь невизначуваності можна підрахувати за формулою:

$$n_c = 3k - u, \quad (5.1)$$

де  $k$  – кількість замкнених контурів;  $u$  – кількість простих шарнірів.

За видом статичної невизначуваності розрізняють механічні системи [14, 15, 16]: зовнішньо статично невизначувані і внутрішньо статично невизначувані.

*Зовнішньо статично невизначуваною* системою називають таку систему, яка має тільки зовнішні зайві в'язі, тобто зайві в'язі в опорних елементах. Наприклад, трипрогонова рама, наведена на рис. 5.1, є п'ять разів статично невизначуваною ( $n_c = 3 \cdot 3 - 4 = 5$ ).

*Внутрішньо статично невизначуваною* системою для плоских рам називають систему, що має зайві в'язі, які введені для взаємного з'єднання окремих частин (елементів) системи. Наприклад, двохпорна рама з підвищеною затяжкою (рис. 5.2), є зовнішньо статично визначуваною, але внутрішньо один раз статично невизначува-



ною. На рис. 5.3 зображена рама, що зовнішньо є статично визначуваною, але внутрішньо є дев'ять разів статично невизначуваною. Статично невизначувані системи мають наступні властивості:

- 1) є більш жорсткими;
- 2) більш економічні. Тобто в статично невизначуваних системах із великою кількістю елементів за таких самих навантажень (у порівнянні з подібними статично визначуваними системами) мають місце менші внутрішні зусилля;

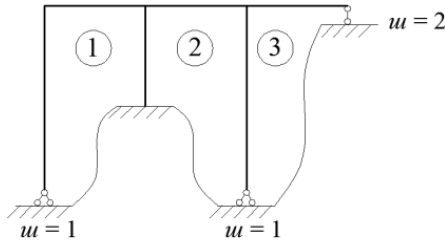


Рис. 5.1

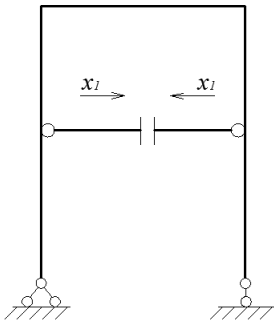


Рис. 5.2.

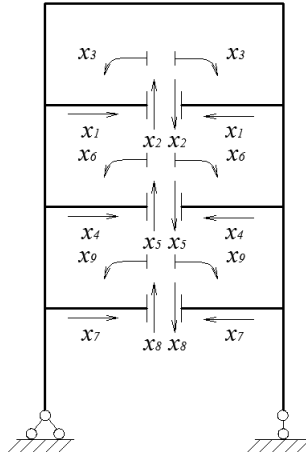


Рис. 5.3.

3) порушення зайвих в'язей не призводить до раптової геометрично змінної системи, отже не спричиняє фізичного руйнування всієї системи;

4) внутрішні зусилля залежать від жорсткості елементів (тобто розподіляються у залежності від форми, структури та жорсткості елементів механічної системи – будівлі або споруди). Зміна розмірів і форми перерізів елементів статично невизначуваної системи призводить до зміни зусиль у в'язях та перерозподілу внутрішніх зусиль у всій системі;

5) усадка опор або зміна температури призводять до додаткової деформації та внутрішніх зусиль.

Методи розрахунку статично невизначуваних систем:

1) за характером основних невідомих;  
2) за ступенем точності;  
3) за ділянками (областями) роботи матеріалу елементів механічної системи;

4) за особливістю розрахункових операцій.

1. За характером основних невідомих маємо:

- метод сил;
- метод переміщень (деформацій);
- змішаний метод.

При розрахунках за методом сил – за основні невідомі приймаються зусилля в зайвих (відкинутих) в'язях.

При розрахунках за методом переміщень невідомими є переміщення, що зумовлені деформаціями системи, значення яких достатні для визначення всіх зусиль.

При використанні змішаного методу за невідомі вибирають частково сили, частково переміщення.

2. За ступенем точності відрізняють:

- точні методи;
- наближені методи.

Точні методи розрахунку базуються на загальних основних положеннях, які прийняті при розрахунках достатньо жорстких споруд. До таких методів відносяться методи, в яких використовуються у лінійних системах: узагальнений закон Гука, розрахунки за недеформованою схемою, принцип суперпозиції – складання дії сил та інші.

Наближені методи: крім загальних допущень і гіпотез використовуються додаткові допущення, що зумовлюють відсутність відхилень від результатів точних методів .

3. За областями роботи матеріалів відрізняють розрахунок конструкцій і споруд у пружній стадії і за граничними станами.

4. За особливістю розрахункових операцій:

- аналітичні та напіваналітичні;

- числові методи;

- експериментальні методи.

*Основною системою* називають систему, яка приймається за основу розрахунку заданої статично невизначуваної конструкції. Основну систему отримуємо із заданої (статично невизначуваної) після відкидання зайвих в'язів і заміни їх відповідними зовнішніми зусиллями. За основною системою устанавлюються переміщення і внутрішні зусилля, за якими знаходять зайві невідомі, застосовуючи рівняння деформацій і переміщень, а також визначаються остаточні зусилля для заданої системи.

Розглянемо методи сил для плоских рам. Порядок розрахунку рами методами сил [15, 16, 17]:

1. Від заданої статично невизначуваної системи переходимо до основної системи – статично визначуваної, але адекватної заданій. Основна система повинна бути геометрично незмінною системою і утворюватися шляхом відкидання зайвих в'язів.

2. Замість відкинутих зайвих в'язів вводимо відповідні їм невідомі сили  $x_1$  і т. д.

3. Складаємо рівняння деформацій, що визначають умови рівності нулю переміщень за направленням кожної зайвої в'язі.

4. Визначаємо всі коефіцієнти при невідомих і вільні члени рівнянь деформації, розв'язуємо систему цих рівнянь і знаходимо зайві невідомі, після чого будуємо епюри  $M$ ,  $Q$  і  $N$  для заданої рами.

Рівняння деформацій, що записані у певній прийнятній формі, називаються канонічними рівняннями методу сил.

Розглянемо цей алгоритм на прикладі два рази статично невизначуваної рами (рис. 5.4),  $n_c = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ .

Для прикладу, що розглядається можна скласти декілька варіантів основних систем: наводимо два варіанти *OC1* і *OC2*. Доцільно вибирати той, який має однорідні невідомі замість відкинутих в'язів: тільки сили або тільки згинальні моменти.

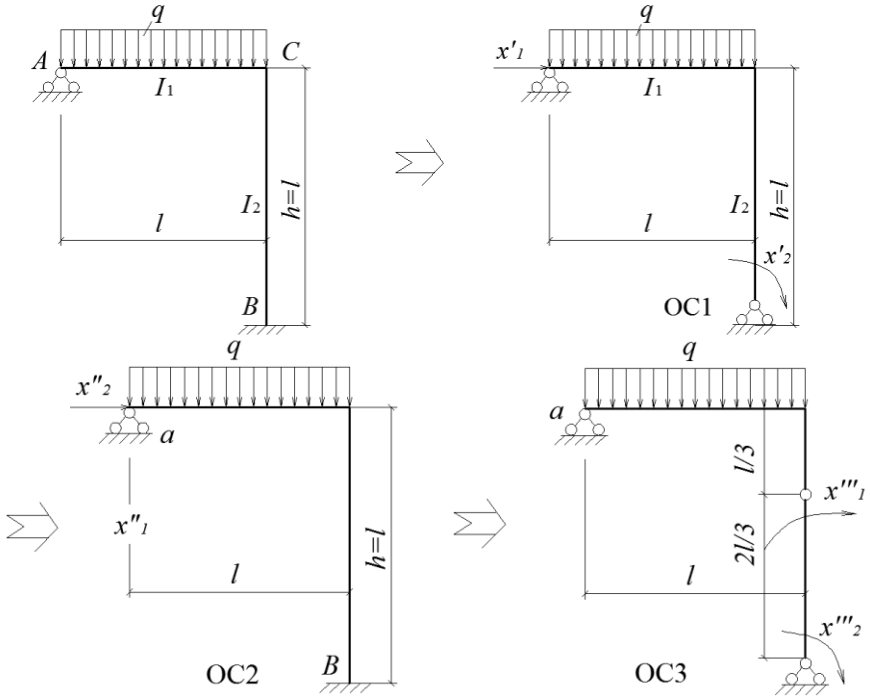


Рис. 5.4

## 5.2. Система розв'язувальних рівнянь і обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

Вибираємо основну систему *OC2*, тоді маємо умови рівності нулю вертикальних і горизонтальних переміщень точки *a*:

$$\begin{cases} \Delta x_1(x_1, x_2, q) = 0; \\ \Delta x_2(x_1, x_2, q) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

У явній формі через зайві невідомі  $x_1, x_2$  застосовуємо принцип суперпозиції як для лінійної системи: переміщення, що викликане системою сил  $x_1, x_2, q$  подаємо у вигляді суми переміщень, що зумовлені силами  $x_1, x_2, q$ . Для лінійно деформованої системи переміщення  $\Delta x_1$  і  $\Delta x_2$  можуть мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \Delta x_1 x_1 + \Delta x_1 x_2 + \Delta x_1 p = 0; \\ \Delta x_2 x_1 + \Delta x_2 x_2 + \Delta x_2 p = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Для скорочення форми запису (5.2) знехтуємо в індексах буквою  $x$  і отримаємо:

$$\begin{cases} \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1p} = 0; \\ \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2p} = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Покажемо графічно переміщення від дії окремих сил  $x_1, x_2, q$  (рис. 5.5) в основній системі: для лінійно деформованої системи переміщення  $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}$ , що викликані силами  $x_1, x_2$  за законом Гука, пропорційні силам  $x_1, x_2$ :

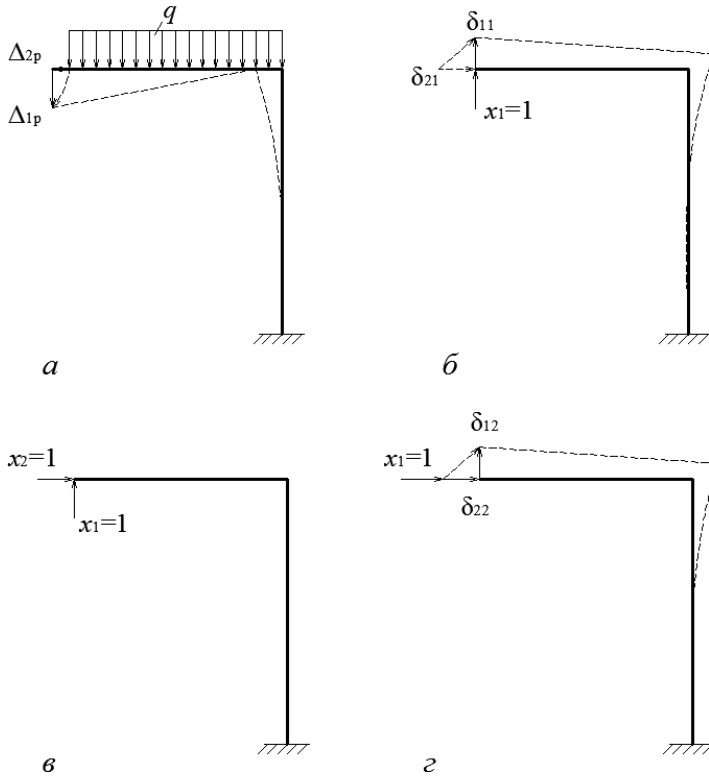


Рис. 5.5

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \delta_{11}x_1; & \Delta_{12} &= \delta_{12}x_2; \\ \Delta_{21} &= \delta_{21}x_1; & \Delta_{22} &= \delta_{22}x_2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

де  $\delta_{11}$  - переміщення, викликане за напрямом  $x_1$  від дії одиничної сили  $x_1=1$ ;  $\delta_{12}$  - переміщення, викликане за напрямом  $x_1$  від дії одиничної сили  $x_2=1$ ;  $\delta_{21}$  - переміщення, викликане за напрямом  $x_2$  від дії одиничної сили  $x_1=1$ ;  $\delta_{22}$  - переміщення, викликане за напрямом  $x_2$  від дії одиничної сили  $x_2=1$ . Тоді остаточно з умов (5.1) маємо канонічні рівняння за методом сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Визначаємо коефіцієнти рівнянь (5.5), використовуючи формули Максвела-Мора для звичайних рам, тобто утримуємо члени, які пов'язані тільки зі згинальними моментами:

$$\delta_{ij} = \sum_{n=1}^{n=k} \int_0^{S(n)} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI_{(S(n))}} dS_{(n)}, \quad (5.6)$$

де  $\overline{M}_i, \overline{M}_j$  – функції згинального моменту у будь-якому перерізі стрижня рами основної системи від дії сил  $x_i = 1, x_j = 1$ ;  $S$  – довжина стрижня рами;  $n$  – кількість стрижнів.

Для коефіцієнтів від дії навантаження маємо:

$$\Delta_{ip} = \sum_{n=1}^{n=k} \int_0^{S(n)} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_p}{EI_{(S(n))}} dS. \quad (5.7)$$

Відшукавши функції згинальних моментів  $\overline{M}_1, \overline{M}_2$  і  $\overline{M}_p$ , обчислюємо переміщення за формулами Максвела-Мора, розв'язуємо рівняння і визначаємо зайві невідомі  $x_1$  і  $x_2$ .

Будуємо одиничні епюри (рис. 5.6).

Перемноживши одиничні епюри на їх значення після розв'язку рівнянь (5.5), будуємо епюри для  $x_1$  і  $x_2$ , підсумовуємо їх між собою, а потім з епюром  $M_p$ . Таким чином, отримуємо епюру згинальних моментів для статично невизначуваної системи (рис. 5.7).

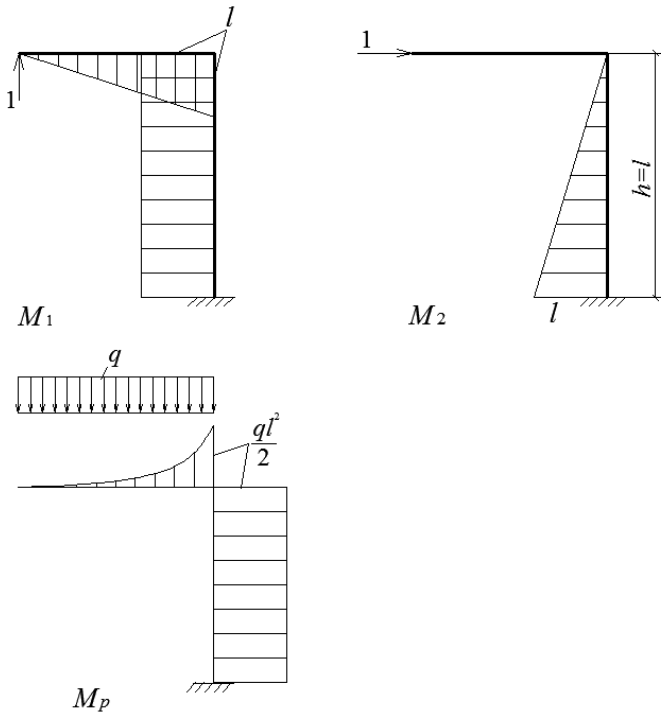


Рис. 5.6

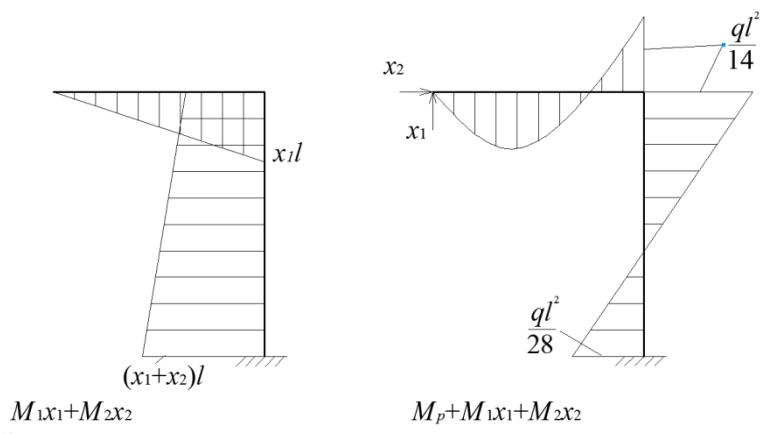


Рис. 5.7



Зазначимо властивості коефіцієнтів канонічної системи методу сил:

1) якщо записати систему канонічних рівнянь методу сил у матрично-векторній формі, то отримаємо:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \end{Bmatrix}; \quad (5.8)$$

2) ліва частина системи рівнянь називається матрицею піддатливості, коефіцієнти якої визначаються переміщеннями від одиничних сил зайвих невідомих:  $\delta_{11}, \delta_{22}$  - головні коефіцієнти (переміщення), а  $\delta_{12}, \delta_{21}$  - побічні коефіцієнти (переміщення). Матриця є симетричною, тому що  $\delta_{21} = \delta_{12}$ . За теоремою про взаємність роботи сил заданої механічної системи [14]: «робота сил заданої системи на переміщення іншої системи сил дорівнює роботі сил другої системи на переміщення першої»;

3) переміщення від одиничних сил з однаковими індексами завжди додатні  $\delta_{11}, \delta_{22} > 0$ , виходячи з підінтегральних виразів формул Максвела-Мора (квадрати згинальних моментів  $\overline{M}_i \overline{M}_j, i = j$ ). Розв'язок системи канонічних рівнянь методу сил [15]:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} \Delta_{1p} & \delta_{12} \\ \Delta_{2p} & \delta_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}} = - \frac{\Delta_{1p} \delta_{22} - \Delta_{2p} \delta_{12}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2}; \quad (5.9)$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \Delta_{1p} \\ \delta_{21} & \Delta_{2p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}} = - \frac{\Delta_{2p} \delta_{11} - \Delta_{1p} \delta_{12}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2}. \quad (5.10)$$

*Визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь за правилами перемноження епюр.*

Правило Верещагіна: якщо хоча б одна епюра є прямолінійною, то інтеграл (5.6) основної системи дорівнюють добутку площі однієї

епюри на ординату другої. Ордината береться під центром ваги першої (криволінійної) епюри.

$$\sum_{n=1}^{n=k} \int_0^{S(n)} \bar{M}_l \bar{M}_p dS = \Omega_i y_{j(q,m,i)}. \quad (5.11)$$

Необхідно звернути увагу:

- принаймні одна з епюр, які перемножуються за правилом Верещагіна, має бути прямолінійною;
- ордината  $y_j$  повинна бути взята на прямолінійній епюрі.

Правило Корноухова-Сімпсона – *окремий випадок* відомої з математичного аналізу формули Сімпсона для обчислення визначених інтегралів, коли інтервал інтегрування розкладається на дві ділянки (рис. 5.8):

$$\int_0^l M_l M_p dx = \frac{l}{6} (a_i a_p + 4c_i c_p + b_i b_p).$$

При використанні формули Корноухова-Сімпсона необхідно, щоб обидві епюри, що перемножуються, не мали зламів, розривів і точок перегину. В іншому разі інтервал інтегрування треба розкласти на окремі підінтервали.

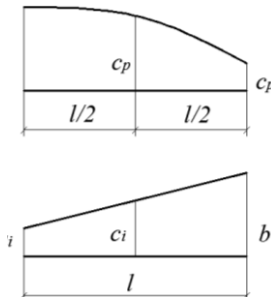


Рис. 5.8

### 5.3. Визначення дійсних внутрішніх зусиль у статично невизначуваних системах

Остаточна епюра згинальних моментів для статично невизначуваної рами, що розглядається, визначається за формулою:

$$M = M_p + M_1x_1 + M_2x_2, \quad (5.12)$$

Тобто, для її отримання треба домножити ординати одиничних епюр згинальних моментів на знайдені значення невідомих сил  $x_1$  і  $x_2$ , скласти ці добутки та додати до них епюру  $M_p$ . Ці операції можна здійснювати або аналітично, або графічно [15] (див. рис. 5.7).

Епюри поперечних сил у перерізах статично невизначуваної рами можна побудувати двома шляхами:

1) сумуванням основних епюр (побудованих в основній системі) за формулою

$$Q = Q_p + Q_1x_1 + Q_2x_2 \quad (5.13)$$

де  $Q_1, Q_2, Q_p$  - епюри поперечних сил, що відповідають епюрам одиничних та вантажних моментів основної системи (рис. 5.9, 5.10);

2) аналітично за диференціюванням епюри дійсних згинальних моментів (див. рис. 5.7).

Епюра дійсних поперечних сил розглянутої статично-невизначеної рами з використанням (5.13) наведена на рис. 5.11.

Поздовжні (нормальні до перерізів) сили за аналогією з (5.13) можна визначити за формулою:

$$N = N_p + N_1x_1 + N_2x_2, \quad (5.14)$$

де  $N_1, N_2, N_p$  – отримані з використанням значень реакцій в основній системі при дії одиничних сил та сил зовнішнього навантаження (див. рис. 5.9). За значеннями реакцій в основній системі побудуємо одиничні епюри  $N_1, N_2$  та епюру  $N_p$ . помножимо одиничні епюри на  $x_1, x_2$  та складемо з епюрою  $N_p$ . Остаточо отримаємо епюру поздовжніх внутрішніх зусиль, що наведена на рис. 5.12.

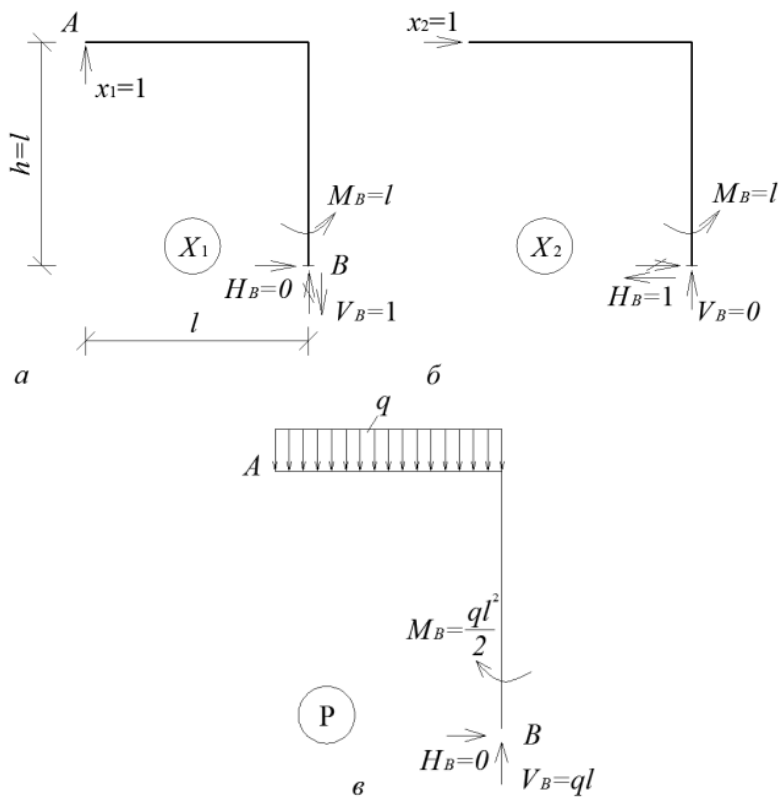


Рис. 5.9

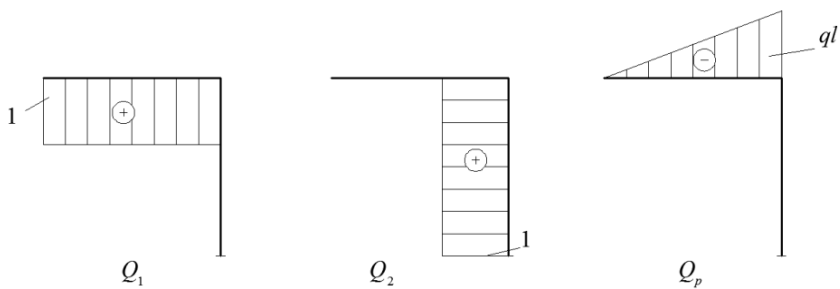


Рис. 5.10

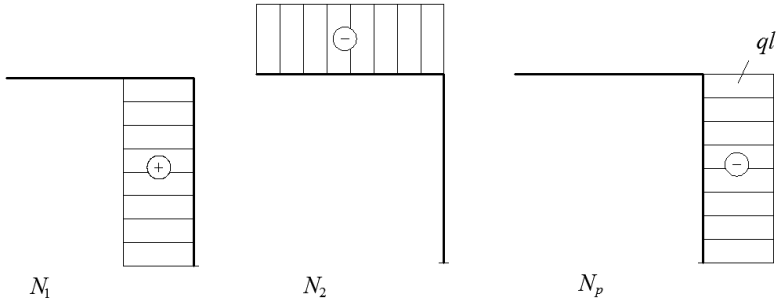


Рис. 5.11

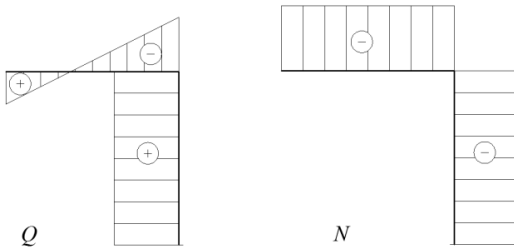


Рис. 5.12

#### 5.4. Статичні та кінематичні перевірки розрахунку

Статична перевірка розрахунку рами здійснюється вирізанням її окремих частин.

Для перевірки достовірності отриманих умов рівноваги зусиль у розглянутій статично невизначуваній рамі вирізаємо вузол  $C$  (стику ригеля та стояна), на який наносимо, у вигляді стрілок, згинальні моменти, що відображають дію відкинутих частин рами на залишену. Стрілки розміщуємо так, щоб розтягнуті волокна кожного стержня з'являлися з належної сторони відповідно до епюри згинальних моментів (див. рис. 5.7). З рис 5.13 видно, що алгебраїчна сума моментів дорівнює нулю. Аналогічно перевіряємо алгебраїчні суми вертикальних та горизонтальних реакцій у вузлі  $C$  (див. рис 5.13) (на схемі рівновага забезпечена з точністю до закону).

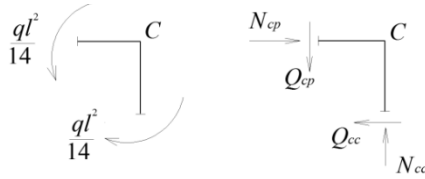


Рис. 5.13

Необхідно також виконати кінематичну перевірку, яка дає змогу переконатись у тому, що деформації і переміщення механічної системи задовольняють умови опорних закріплень та нерозривності контуру. Задану статично невизначувану раму розглядаємо як основну статично невизначувану систему, яка завантажена зовнішнім навантаженням та залишковими невідомими реакціями у відкинутих в'язях. Переміщення за направленням цих в'язів повинно дорівнювати нулю, тому для розглянутої рами маємо:

$$\sum_{n=1}^{n=2} \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} dS = 0;$$

$$\sum_{n=1}^{n=2} \frac{\bar{M}_2 M_p}{EI} dS = 0; \quad (5.15)$$

де  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$  - епюри згинальних моментів в одиничних станах;  $M_p$  - епюра згинальних моментів у стані зовнішніх впливів.

При обчисленні інтегралів (5.15) різниця між сумою додатних та від'ємних значень повинна складати величину у межах 0,05÷0,1%. Така точність є цілком достатньою.

## 5.5. Приклад розрахунку статично невизначуваної рами за методом сил

Особливості методу сил для розрахунку плоских статично невизначуваних рам найбільш зручно виявити на прикладі трьохконтурної стержневої системи, розрахункова система якої наведена на рис 5.14, а.

Перш за все визначаємо ступінь статичної невизначеності за формулою (5.1):

$$n_c = 3K - III = 3 \cdot 3 - 6 = 3,$$

тобто маємо тричі статично невизначувану раму.

Будуємо основну систему, забезпечуючи умови її геометричної незмінності та однорідності невідомих силових факторів. Основна система наведена на рис. 5.14, б).

Для отримання основної системи у вузлах C і B відкидаємо три зайві в'язі і замінюємо їх відповідними зовнішніми зусиллями. Далі виконуємо розрахунки в основній статично визначуваній системі, що є адекватною заданій розрахунковій системі (див. рис. 5.14, а).

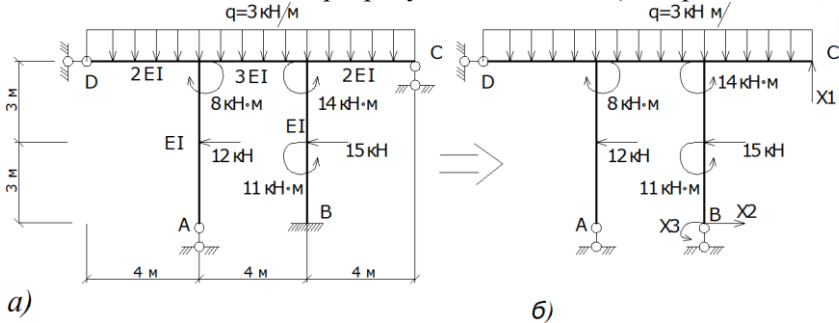


Рис. 5.14. Схема статично невизначуваної рами:  
а) - розрахункова система б) - основна система

Маючи три невідомих силових змінних  $x_1, x_2, x_3$  з умов адекватності деформацій основної і заданої системи (рівності нулю переміщень за направленням відкинутих в'язів), складаємо рівняння деформацій, що визначають умови рівності нулю переміщень за напрямом кожної зайвої в'язі  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{cases} \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{1p} = 0 \\ \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} + \Delta_{2p} = 0 \\ \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

Приймаємо  $\Delta_{ij} = \delta_{ij} x_j$ , тоді

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

Будуємо одиничні епюри в основній системі (рис. 5 15).

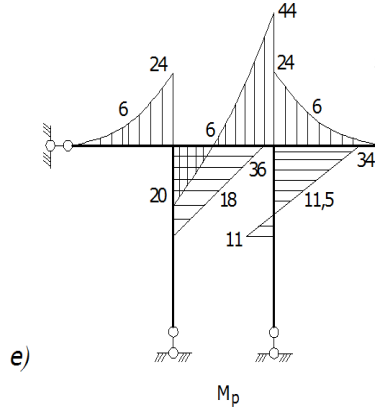
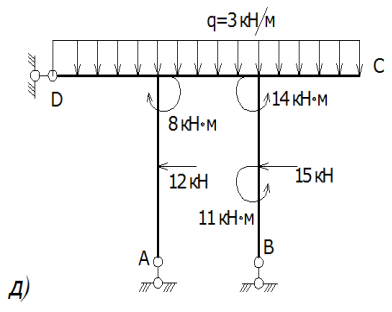
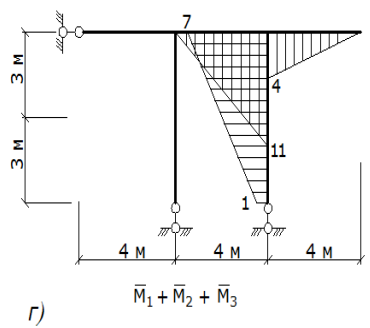
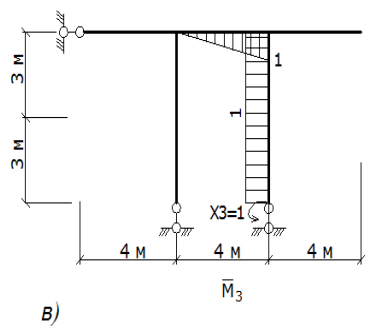
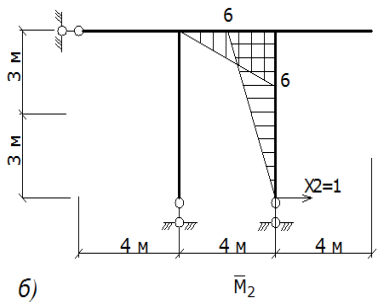
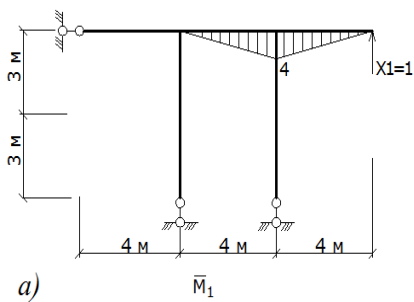


Рис. 5.15

Складаємо комбіновану систему рівноваги методом сил (для трьох відкинутих в'язей маємо три умови рівноваги основної системи) або:



$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{cases}$$

Остаточню маємо систему з трьох алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими  $X_1, X_2, X_3$ . Для визначення коефіцієнтів  $\delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$  (з урахуванням симетрії) і вільних членів (5,16)  $\Delta_{ip}, i = 1, 2, 3$  будемо епюри згинальних моментів в основній системі від одиничних сил  $M_i - X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$  та зовнішнього навантаження  $-M_p$ , які наведені на рис. 5.16, а, б, в, г, д (у т.ч. і сумарна епюра  $M_1 + M_2 + M_3$ ).

Записуємо систему канонічних рівнянь методу сил у матрично-векторній формі [15]:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Delta_{1p} \\ -\Delta_{2p} \\ -\Delta_{3p} \end{Bmatrix}. \quad (5.17)$$

Обчислюємо коефіцієнти матриці податливості при невідомих системи рівнянь (5.17) за правилами перемноження епюр (Верещагіна і Корноухова-Сімпсона):

$$\delta_{ij} = \sum_{n=1}^{n=7} \int_0^s \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI_s} dS \quad (5.18)$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4) + \frac{4}{12EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4) = \frac{17,777}{EI};$$

$$\delta_{12} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4) = \frac{10,666}{EI};$$

$$\delta_{13} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 1) = \frac{1,777}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) + \frac{6}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) = \frac{88}{EI}.$$

$$\delta_{23} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 3 + 1 \cdot 6) + \frac{0,5 \cdot 6 \cdot 6}{EI} = \frac{20,666}{EI};$$

$$\delta_{33} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1) + \frac{1 \cdot 6 \cdot 1}{EI} = \frac{6,444}{EI}.$$

Виконуємо послідовно всі перевірки.

Перевірки обчислення коефіцієнтів  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{33}$  (головна перевірка на етапі формування системи рівнянь).

Перемножуємо саму на себе епюру  $M_1 + M_2 + M_3$ . Результат повинен дорівнювати  $\delta_{11} + 2\delta_{12} + 2\delta_{13} + \delta_{22} + 2\delta_{23} + \delta_{33}$ .

$$\int_0^s (M_1 + M_2 + M_3)(M_1 + M_2 + M_3) \frac{1}{EI} ds = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 0 +$$

$$+ 4 \cdot 5,5 \cdot 5,5 + 11 \cdot 11) + \frac{4}{12EI} (4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0) +$$

$$+ \frac{6}{6EI} (7 \cdot 7 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1) = \frac{178,444}{EI}.$$

$$\sum_{i=1,3} \sum_{j=1,3} \delta_{ij} = (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23}) =$$

$$= \int_0^s (M_1 + M_2 + M_3)(M_1 + M_2 + M_3) \frac{1}{EI} ds = \left( \frac{17,78}{EI} + \frac{88}{EI} + \frac{6,44}{EI} \right) +$$

$$+ 2 \cdot \left( \frac{10,66}{EI} + \frac{1,77}{EI} + \frac{20,66}{EI} \right) = \frac{178,444}{EI};$$

Перевірка виконується.

Обчислюємо вільні члени системи канонічних рівнянь методу сил:

$$\Delta_{ip} = \sum_{n=1}^{n=4} \int_0^s \frac{\bar{M}_l M_p}{EI} dS. \quad (5.19)$$

Використовуємо при цьому формулу Корноухова-Сімпсона:

$$\Delta_{1p} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 20 - 4 \cdot 6 \cdot 2 - 44 \cdot 4) +$$

$$+ \frac{4}{12EI} (-4 \cdot 24 - 4 \cdot 6 \cdot 2) = \frac{-97,777}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 20 - 4 \cdot 3 \cdot 6 - 6 \cdot 44) +$$

$$+ \frac{3}{6EI} (11 \cdot 3 - 4 \cdot 4,5 \cdot 11,5 - 34 \cdot 6) = \frac{-263,666}{EI};$$

$$\Delta_{3p} = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 20 - 4 \cdot 6 \cdot 0,5 - 1 \cdot 44) +$$

$$+ \frac{3}{6EI} (1 \cdot 11 - 4 \cdot 1 \cdot 11,5 - 1 \cdot 34) = -\frac{46,944}{EI}.$$

Перевірка обчислення коефіцієнтів, вільних членів системи (5.17):

«добуток сумарної епюри ( $M_1 + M_2 + M_3$ ) і епюри  $M_p$  повинен

дорівнювати  $\Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \Delta_{3p}$ »

$$\int_0^s \frac{(M_1 + M_2 + M_3)M_p}{EI_{(s)}} dS = \frac{4}{18EI} (0 \cdot 20 - 4 \cdot 5,5 \cdot 6 -$$

$$- 11 \cdot 44) + \frac{4}{12EI} (-4 \cdot 24 - 4 \cdot 2 \cdot 6 + 0 \cdot 0) + \quad (5.20)$$

$$+ \frac{3}{6EI} (4 \cdot 11 - 4 \cdot 5,5 \cdot 11,5 - 7 \cdot 34) = \frac{-408,388}{EI}.$$

Перевірка на рівні обчислення коефіцієнтів системи (5.17) достовірна.

Розв'язуємо чисельно систему рівнянь (5.17):

$$\begin{cases} \frac{17,777}{EI} X_1 + \frac{10,666}{EI} X_2 + \frac{1,777}{EI} X_3 - \frac{97,777}{EI} = 0; \\ \frac{10,666}{EI} X_1 + \frac{88}{EI} X_2 + \frac{20,666}{EI} X_3 - \frac{263,666}{EI} = 0; \\ \frac{1,777}{EI} X_1 + \frac{20,666}{EI} X_2 + \frac{6,444}{EI} X_3 - \frac{46,944}{EI} = 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\begin{cases} 17,777 X_1 + 10,666 X_2 + 1,777 X_3 - 97,777 = 0; \\ 10,666 X_1 + 88 X_2 + 20,666 X_3 - 263,666 = 0; \\ 1,777 X_1 + 20,666 X_2 + 6,444 X_3 - 46,944 = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Остаточню маємо (у матрично-векторній формі):

$$\begin{bmatrix} 17,77 & 10,666 & 1,777 \\ 10,666 & 88 & 20,666 \\ 1,777 & 20,666 & 6,444 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 97,777 \\ 263,666 \\ 46,944 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

На основі формул (5.9),(5.10) маємо:

$$X_1 = -\frac{D_1}{D}; X_2 = -\frac{D_2}{D}; X_3 = -\frac{D_3}{D}. \quad (5.24)$$

Обчислюємо детермінант  $D$  за першим рядком:

$$\begin{aligned} D &= 17,777(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 88 & 20,666 \\ 20,666 & 6,444 \end{vmatrix} + 10,666(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10,666 & 20,666 \\ 1,777 & 6,444 \end{vmatrix} + \\ &+ 1,777(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10,666 & 88 \\ 1,777 & 20,666 \end{vmatrix} = 2488,656 - 341,347 + 113,786 = \\ &= 2261,09. \end{aligned}$$

Обчислюємо детермінанти  $D_1, D_2, D_3$  і відповідно  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{bmatrix} -97,777 & 10,666 & 1,777 \\ -263,666 & 88 & 20,666 \\ -46,944 & 20,666 & 6,444 \end{bmatrix} = \\
&= -97,777(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 88 & 20,666 \\ 20,666 & 6,444 \end{vmatrix} + \\
&+ 10,666(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -263,666 & 20,666 \\ -46,944 & 6,444 \end{vmatrix} + \\
&+ 1,777(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -263,666 & 88 \\ -46,944 & 20,666 \end{vmatrix} = \\
&= -13688,654 + 7775,994 - 2343,104 = -8255,764.
\end{aligned}$$

$$x_1 = -\left(-\frac{8255,764}{2261,09}\right) = 3,651 \text{ } \kappa H.$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \begin{bmatrix} 17,777 & -97,777 & 1,777 \\ 10,666 & -263,666 & 20,666 \\ 1,777 & -46,944 & 6,444 \end{bmatrix} = 17,777 \cdot \\
&\cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -263,666 & 20,666 \\ -46,944 & 6,444 \end{vmatrix} - \\
&- 97,777(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10,666 & 20,666 \\ 1,777 & 6,444 \end{vmatrix} + \\
&+ 1,777(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10,666 & -263,666 \\ 1,777 & -46,944 \end{vmatrix} = \\
&= -12959,6 + 3128,896 - 56,925 = -9887,629.
\end{aligned}$$

$$x_2 = -\left(\frac{-9887,629}{2261,09}\right) = 4,372 \text{ } \kappa H.$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= \begin{vmatrix} 17,777 & 10,666 & -97,777 \\ 10,666 & 88 & -263,666 \\ 1,777 & 20,666 & -46,944 \end{vmatrix} = \\
&= 17,777(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 88 & -263,666 \\ 20,666 & -46,944 \end{vmatrix} + \\
&+ 10,666(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10,666 & -263,666 \\ 1,777 & -46,944 \end{vmatrix} - \\
&- 97,777(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10,666 & 88 \\ 1,777 & 20,666 \end{vmatrix} = \\
&= 23431,366 + 341,327 - 6258,238 = 17514,455.
\end{aligned}$$

$$x_3 = -\left(\frac{17514,455}{2261,09}\right) = -7,742 \text{ кН}.$$

Остаточно маємо значення невідомих:

$$x_1 = 3,651 \text{ кН}; \quad x_2 = 4,372 \text{ кН}; \quad x_3 = -7,742 \text{ кН}\cdot\text{м}. \quad (5.25)$$

Перемножуємо одиничні епюри (рис. 5,16 *а, б, в*) на значення невідомих (5.25). Потім складаємо їх разом з епюром  $M_p$  основної системи (рис. 5.17). Сумуємо епюри:  $M_1 \cdot x_1 + M_2 \cdot x_2 + M_3 \cdot x_3 + M_p$  та отримуємо епюру  $M$  для вихідної статично невизначуваної рами (рис. 5.18). Аналітичним способом, тобто диференціальними залежностями  $Q$  від  $M$ , будуємо епюру  $Q$  (рис. 5.19).

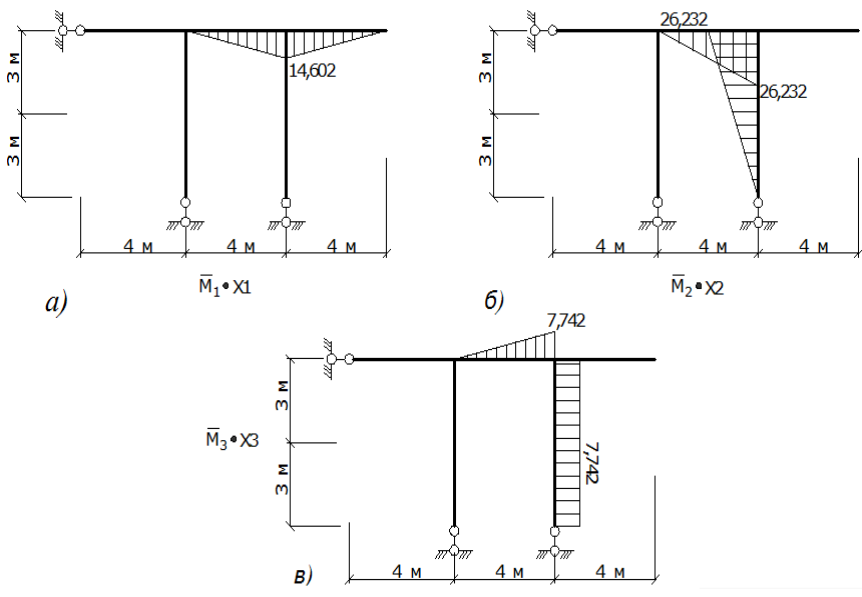


Рис. 5.16

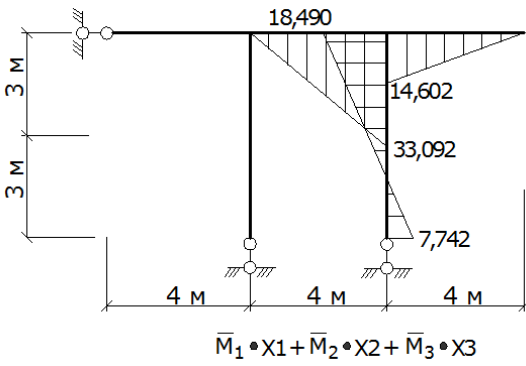
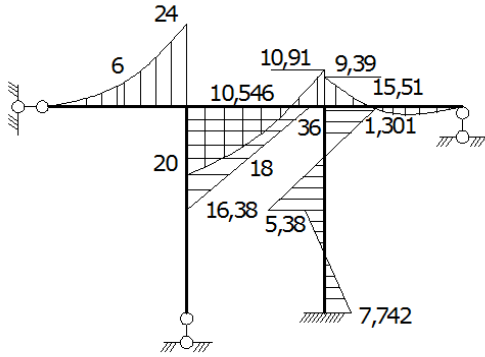


Рис. 5.17



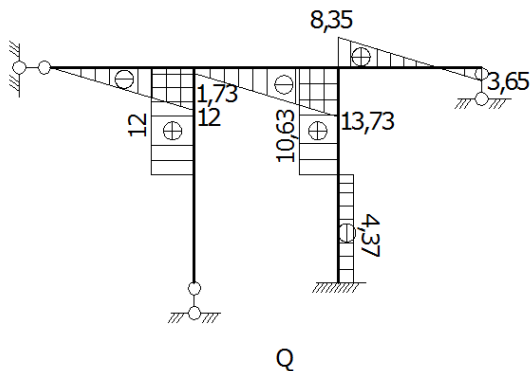
М

Рис. 5.18

Виконуємо кінематичну перевірку. Перемножуємо епюру дійсних згинальних моментів (рис. 5.18) на будь-яку одиничну епюру. В даному випадку беремо сумарну одиничну епюру:

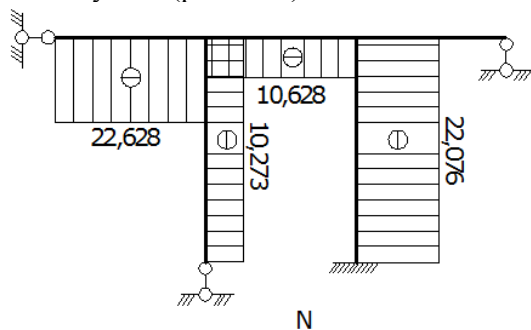
$$\begin{aligned}
 \Delta_{\Sigma P} &= \frac{4}{18EI} (0 \cdot 20 + 4 \cdot 10,546 \cdot 5,5 - 11 \cdot 10,91) + \\
 &+ \frac{3}{6EI} (-1 \cdot 7,742 - 4 \cdot 1,181 \cdot 2,5 + 5,38 \cdot 4) + \\
 &+ \frac{3}{6EI} (4 \cdot 16,38 + 4 \cdot 0,435 \cdot 5,5 - 15,51 \cdot 7) + \\
 &+ \frac{0,82}{12EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 1,25 \cdot 0,41 + 2 \cdot 0,82) + \\
 &+ \frac{3,18}{12EI} (2 \cdot 0,82 + 4 \cdot 0,088 \cdot 2,41 - 9,39 \cdot 4) \approx \\
 &\approx 0.
 \end{aligned}$$





Q  
Рис. 5.19

Визначивши опорні реакції в статично невизначеній рамі, будемо епюру поздовжніх зусиль (рис. 5.20).



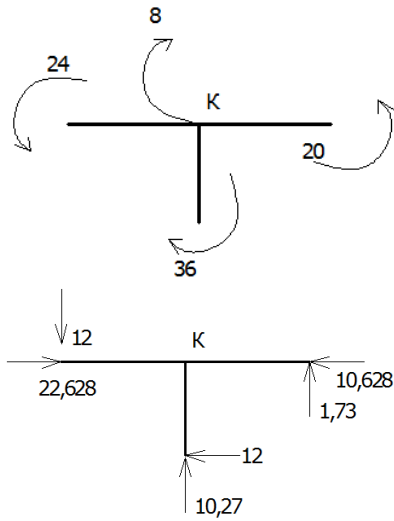
N  
Рис. 5.21

Виконуємо статичні перевірки вузлів К і Т.

Вузол К:

$$\sum M_K = 0;$$

$$-24 - 20 + 8 + 36 = 0;$$



$$\sum F_X = 0;$$

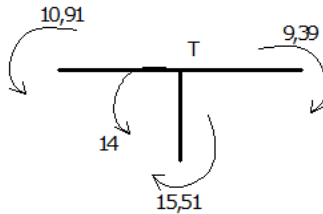
$$22,628 - 12 - 10,628 = 0$$

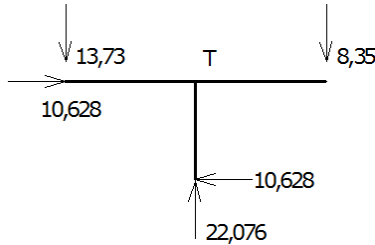
$$\sum F_Y = -12 + 10,27 + 1,73 = 0;$$

Вузол Т:

$$\sum M_T = 0;$$

$$-10,91 - 14 + 15,51 + 9,39 = 0;$$





$$\sum F_x = 0;$$

$$10,628 - 10,628 = 0$$

$$\sum F_y = 22,076 - 13,73 - 8,35 = 0;$$

### Запитання для самоперевірки

1. Що значить побудувати основну систему розрахункової схеми статично невизначуваної рами за методом сил?
2. Суть розрахунку статично невизначуваних плоских рам методом сил.
3. Порядок розрахунку плоских рам методом сил. Побудуйте формально систему канонічних рівнянь рівноваги плоскої статично невизначуваної рами за методом сил.
4. Визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь методу сил.
5. Правило Верещагіна: за яких умов воно використовується?
6. З яких умов складається рівняння методу сил? Правило Корноухова-Сімпсона.
7. Основні властивості системи канонічних рівнянь методу сил.
8. Система канонічних рівнянь методу сил у матрично-векторному вигляді. Що визначають коефіцієнти матриці системи рівнянь методу сил?
9. У чому полягає кінематична перевірка обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь методу сил?
10. Сформулюйте теореми Кастільяно і Менабреа.

## РОЗДІЛ 6

### РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

#### 6.1 Припущення методу переміщень для розрахунку плоских рам

Метод переміщень, розроблений і впроваджений у практику пізніше, ніж метод сил. Цей метод набув поширення завдяки простоті та меншій трудомісткості обчислень для значної кількості досліджуваних об'єктів. Метод переміщень у порівнянні з методом сил передбачає першочергове обчислення певного набору переміщень. Їх знання дозволяє одержати зусилля та переміщення в інших перерізах конструкції. Це стає можливим завдяки тому, що напружено-деформований стан (НДС) стержневого однозв'язного елемента цілком визначається прикладеним до нього навантаженням і переміщеннями перерізів, у яких цей елемент приєднується до інших частин споруди. Але для статично невизначуваних елементів означену залежність необхідно визначати заздалегідь.

Очевидно, найпростіше визначити таку залежність для елементів, якими є *прямолінійні* стержні. Для таких стержнів при будь-яких закріпленнях на кінцях зусилля і поперечні переміщення в усіх перерізах визначаються кутами повороту та відносними лінійними переміщеннями їх кінців і зовнішніми навантаженнями на стержні.

Тому у методі переміщень як *основний елемент* обирають саме прямолінійний стержень постійної (сталого) жорсткості. Такий підхід наближує метод переміщень до методу скінченних елементів (МСЕ) у переміщеннях для стержневих систем. Але введення до методу переміщень спрощених переміщень значно зменшує кількість основних невідомих, що дає змогу застосовувати його для «ручного» розрахунку на відміну від МСЕ, який призначений лише для комп'ютерного розрахунку.

Існують дві форми реалізації методу переміщень – *канонічна* та *розгорнута* [15]. Розглянемо канонічну форму методу переміщень.

Припущення методу переміщень.

Метод переміщень для рамних конструкцій ґрунтується на наступних спрощених припущеннях, від яких залежить кількість основних невідомих методу.

1. Кути між стержнями, які збігаються у жорсткі вузли, не змінюються після деформації споруди. Це означає, що при деформуванні всі кінці стержнів, які з'єднанні між собою припайками, повертаються на однаковий кут.

2. Для стержнів, що згинаються, деформаціями від *поздовжніх* і *поперечних сил* можна знехтувати.

3. Зближення кінців стержня після його згину не береться до уваги.

4. Довжини проєкції стержня на його початковий напрям до і після деформації залишаються незмінними.

5. Тангенси і синуси кутів нахилу стержнів, що виникають за рахунок деформацій системи, внаслідок малої величини дорівнюють самим кутам.

Ці припущення ґрунтуються на тому, що в реальних стержневих

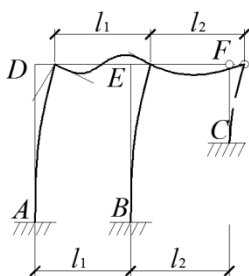


Рис. 6.1

системах переміщення від пружних деформацій значно менші у порівнянні з розмірами споруди, а відтак і їхній вплив на зміну форми споруди можна не враховувати.

Вузли *D*, *E*, *F* рамної конструкції, наведеної на рис. 6.1, після деформації споруди не мають вертикальних переміщень, а їх горизонтальні переміщення однакові.

З урахуванням вищенаведених припущень у межах методу переміщень, однопрогоновим балкам, зображеним на рис. 6.2, *а*, *б*, *в*, *г*, еквівалентними є балки на рис. 6.2, *д*, *е*, *ж*, *з* відповідно.

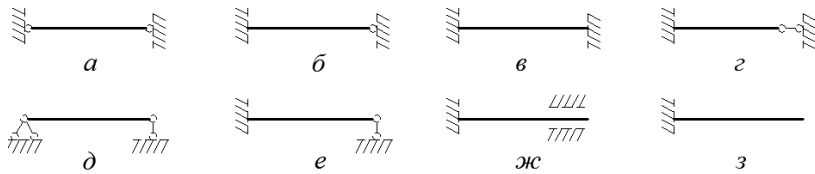


Рис. 6.2

## 6.2. Основна система та основні невідомі методу переміщень

Найбільш поширений спосіб розрахунку статично невизначуваних систем полягає в тому, що замість реальної статично невизначуваної системи розглядається така, що створена з вихідної механічної системи, розрахунок якої можна здійснити за допомогою вже відомих нам засобів. Ця нова система називається *основною системою методу*.

У методі переміщень створюється така основна система, яка складається з основних добре відомих *елементів* – однопрогонових балок постійної жорсткості з будь-якими опорами на кінцях. Для цих балок заздалегідь можна визначити НДС залежно від зовнішнього навантаження і переміщення їх опор, *тобто основною системою методу переміщень* для плоскої статично невизначеної рами є стержнева система з набору *однопрогонових балок постійної жорсткості з нерухомими опорами*, які унеможливають кутові та лінійні переміщення кінців балок. Для цього необхідно усунути можливість кінематичних переміщень всіх вузлів системи. Цієї мети досягають введенням у вузли системи *додаткових в'язів двох видів*:

1. Для усунення повороту всіх жорстких вузлів вводяться так звані *рухомі затиснення* - умовні в'язі, які не дозволяють вузлам повертатись, але не заважають їх поступальним переміщенням. Нагадуємо, що жорсткими в'язями є всі місця з'єднання за допомогою припайок, між якими ділянка стержня має постійну жорсткість, тому до жорстких вузлів треба віднести місця, у яких:

- з'єднуються без наскрізних шарнірів два і більше стержнів;
- змінюється під кутом напрям осі;

- до стержня приєднується, за допомогою прилеглого шарніра, інший стержень або декілька стержнів;
- змінюється жорсткість стержня;
- приєднується за допомогою шарніра стержень або інший вузол до жорсткого вузла будь-якого з перелічених типів.

На рис. 6.3 *е, ж, з, і, к* наведені рухомі затиснення при утворенні основної системи методу переміщень, що вставлені до жорстких вузлів, зображених на рис. 6.3, *а, б, в, г, д* відповідно.

2. Можливі незалежні (кінематичні) лінійні переміщення вузлів усієї системи виключаються встановленням *додаткових*

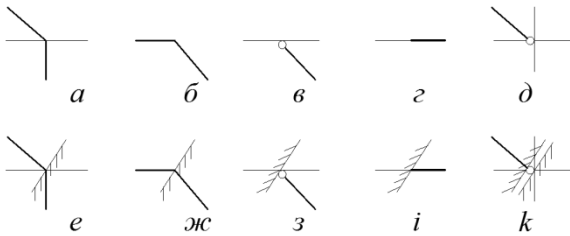


Рис. 6.3

*опорних стержнів*. Кількість таких стержнів повинна бути мінімальною, але достатньою для забезпечення незмінності, нерухомості (збереження початкової форми) положення всіх стержнів системи. Наприклад, для рами, зображеної на рис. 6.1, горизонтальні переміщення *D, E, F* взаємозалежні, тому для виключення геометрично (лінійно) залежних переміщень вузлів цієї системи достатньо ввести один додатковий горизонтальний опорний стержень, прикріплений до будь-якого з цих 3-х вузлів. Отже, додаткові опорні стержні потрібно встановлювати не до всіх вузлів системи, а лише до тих, що мають незалежні лінійні переміщення. Для цього з успіхом можна скористатися шарнірною схемою системи.

Шарнірна схема системи утворюється з вихідної статично невизначуваної системи введенням наскрізних шарнірів у всі жорсткі вузли, включаючи опорні. Можна зауважити, що при створенні основної шарнірної схеми споруди консолі можна відкинути.

Далі виконується якісний кінематичний аналіз одержаної таким чином шарнірної схеми, яку можна вважати за стандартними

схемами [14, 15, 16] – жорсткий трикутник, схема Полонсо, схема Шухова, спосіб “діад” для ферми тощо. Якщо схема геометрично незмінювана, це свідчить про те, що вихідна система не має незалежних лінійних переміщень. Якщо ж у процесі якісного (структурного) аналізу виявляється можливість лінійного незалежного переміщення якогось вузла шарнірної схеми, необхідно ввести додатковий опорний стержень, який перешкоджає появі цього переміщення. Кількість таких додаткових опорних стержнів визначає кількість незалежних лінійних переміщень вузлів вихідної статично невизначуваної системи. При створенні основної системи методу переміщень необхідно встановити додаткові опорні стержні у тих самих місцях, що і у шарнірній схемі.

Розглянемо приклад, наведений на рис. 6.4. Вихідна рама має одне незалежне лінійне переміщення. Наведена шарнірна схема має нерухомі вузли  $A, B, C$ . Вузли  $D, E, F$  не можуть мати вертикальних переміщень і у горизонтальному напрямі будуть з'єднанні між собою. Вони не прикріплюються до якогось нерухомого вузла, тому один з них, наприклад, вузол  $D$  слід закріпити горизонтальним опорним стержнем, а вузли  $E$  і  $F$  послідовно приєднуються двома стержнями. Тобто маємо стандартну схему за способом діад, що забезпечує геометрично незмінювану механічну систему.

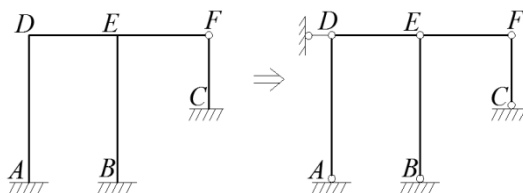


Рис. 6.4

Вихідна рама (рис. 6.5) має три незалежних лінійних переміщення – 1, 2, 3, на які накладаються у якості опорних в'язі – відповідно у вузлах  $i, B, C$ .

Вихідна система (рис. 6.6) має одне незалежне лінійне переміщення у вузлі  $E$  або зміщення вузла у положення  $E'$ , тоді вихідна система не має незалежних лінійних переміщень.

Таким чином, можна дійти висновку, що для побудови *основної системи методу переміщень* необхідно ввести рухомі затис-



нення в усі жорсткі вузли та додаткові опорні стержні для виключення незалежних лінійних переміщень усіх вузлів.

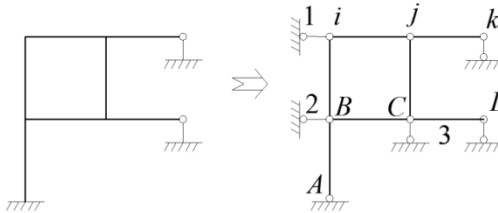


Рис. 6.5

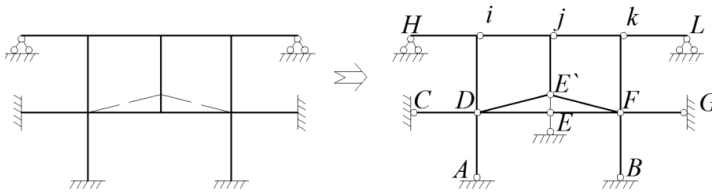


Рис. 6.6

В основних системах методу переміщень вихідні конструкції перетворюються у *набори однопрогонових балок з рухомими опорами*. Між *вихідною* статично невизначуваною конструкцією та її *основною системою* існують дві суперечності:

- жорсткі вузли вихідної конструкції можуть мати кутові та всі вузлові лінійні переміщення, які в основній системі усуваються додатковими в'язями;

- у додаткових в'язях основної системи від навантаження виникають реактивні сили, яких немає у вихідній конструкції через відсутність цих в'язів.

Перша суперечність усувається введенням основних невідомих методу переміщень, друга – використовується для складних розв'язувальних рівнянь методу переміщень.

Основними невідомими методу переміщень виступають узагальнені переміщення (кути повороту жорстких рухомих затиснень і лінійні переміщення у вузлах, в яких накладені в'язі для виключення незалежних лінійних переміщень).

При використанні канонічної форми методу переміщень ці невідомі позначаються літерами  $z_i$  (рис. 6.7). Для зручності обчислення пропонується нумерувати спочатку невідомі кутові переми-

щення, а потім лінійні переміщення, хоча принципово це не має ніякого значення.

Кількість основних невідомих методу переміщень називається *ступенем кінематичної невизначуваності системи*, яка визначається за формулою:

$$k = k_{\varphi} + k_{\delta}, \quad (6.1)$$

де  $k_{\varphi}$  - кількість кутових переміщень рухомих затиснень основної системи;  $k_{\delta}$  - кількість незалежних лінійних переміщень вузлів основної системи.

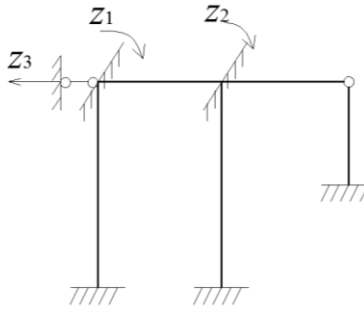


Рис. 6.7

**Висновок:** ступінь кінематичної невизначуваності дорівнює мінімальній кількості додаткових в'язей, які повністю закріплюють вузли системи від можливих узагальнених переміщень (кутових і поступальних).

### 6.3. Розв'язувальні рівняння методу переміщень

Для складання розв'язувальних рівнянь методу переміщень використовуємо другу суперечність між вихідною статично невизначуваною системою стержневої конструкції та її основною системою, яка полягає в тому, що у додаткових в'язях основної системи від навантаження виникають реактивні сили, яких немає у вихідній конструкції через відсутність цих в'язей.

Розглянемо ці умови на прикладі плоскої рами, що зображена на рис. 6.8.

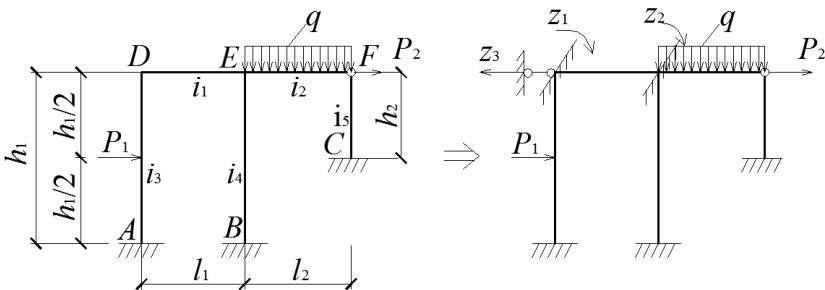


Рис. 6.8

Для усунення відмінностей у деформаціях двох систем надамо додатковим в'язям невідомі узагальнені переміщення  $z_1, z_2, z_3$  і розглянемо окремі стани цієї основної системи (рис.6.9), в кожному з яких на систему діє один чинник.

У кожному стані в усіх додаткових в'язях виникають реактивні сили. Вводимо для цих реактивних сил позначення  $R_{ik}$ , де  $i$  – номер в'язі,  $k$  – номер стану (причини дії), у якому виникає реакція на підставі принципу суперпозиції: сумарний реактивний момент, у першому рухомому затисненні від дії всіх невідомих переміщень і зовнішнього навантаження дорівнює сумі відповідних реактивних моментів у всіх станах:

- у першому стані

$$R_{\Sigma 1} = R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{1p}; \quad (6.2)$$

- у другому стані

$$R_{\Sigma 2} = R_{21} + R_{22} + R_{23} + R_{2p} \quad (6.3)$$

у третьому стані – сумарна реакція у додатковому стержні (третья додаткова в'язь) від усіх невідомих узагальнених переміщень і зовнішнього навантаження:

$$R_{\Sigma 3} = R_{31} + R_{32} + R_{33} + R_{3p}. \quad (6.4)$$

Але у вихідній системі ці додаткові в'язі відсутні, тому для забезпечення еквівалентності НДС вихідної і основної систем необхідно, щоб сумарні реактивні сили у додаткових в'язях дорівнювали нулю:

$$R_{\Sigma 1} = 0; \quad R_{\Sigma 2} = 0; \quad R_{\Sigma 3} = 0. \quad (6.5)$$

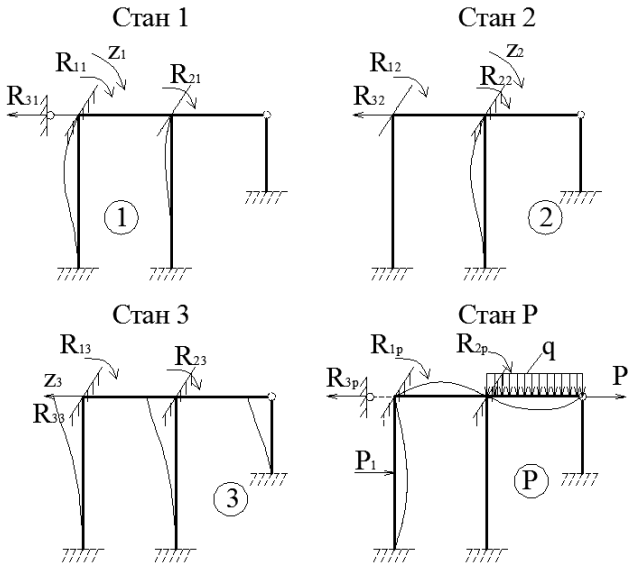


Рис. 6.9

Реактивні сили у додаткових в'язях від невідомого переміщення, що дорівнює «1», називають одиничними реактивними силами. Введемо для їх позначення  $r_{ik}$ . Виходячи з лінійного закону Гука, маємо:

$$R_{ik} = r_{ik} Z_k \quad (6.6)$$

Підставляючи (6.6) в (6.5), отримаємо систему канонічних рівнянь методу переміщень:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

Кількість отриманих рівнянь дорівнює кількості додаткових в'язей, тобто ступеню кінематичної невизначуваності системи, яка дорівнює кількості основних невідомих методу переміщень. Таким

чином, система рівнянь (6.7) є канонічною системою розв'язувальних рівнянь методу переміщень.

Фізичний зміст кожного з рівнянь полягає у тому, що сумарна реактивна узагальнена сила у відповідній додатковій в'язі (реактивні моменти у рухомому затисненні або реакція в опорному стежні) основної системи методу переміщень від усіх невідомих переміщень і зовнішніх сил навантаження дорівнює нулю через відсутність цієї в'язі у вихідній системі. Система рівнянь у матрично-векторній формі має вигляд:

$$[r]\{Z\} + \{R\} = 0, \quad (6.8)$$

де  $[r]$  – матриця коефіцієнтів системи розв'язувальних канонічних рівнянь методу переміщень (матриця жорсткості основної системи);

$$[r] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & \dots & r_{3n} \end{bmatrix}; \quad (6.9)$$

$\{Z\} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}^T$  – вектор основних невідомих системи канонічних рівнянь методу переміщень;

$\{R\} = \{R_{1p}, R_{2p}, \dots, R_{np}\}^T$  – вектор реакцій від навантаження в основній системі методу переміщень.

Коефіцієнти  $r_{ii}(r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn})$ , розташовані на головній діагоналі матриці коефіцієнтів системи рівнянь, називаються головними. Коефіцієнти  $r_{ik}, i \neq k$  називаються побічними. Згідно з теоремою про взаємність робіт, побічні коефіцієнти, що розташовані симетрично відносно головної діагоналі, дорівнюють один одному:

$$r_{ik} = r_{ki}. \quad (6.10)$$

Розв'язувальні рівняння (6.7) називаються системою канонічних рівнянь методу переміщень. Для визначення коефіцієнтів  $r_{ik}$  і вільних членів  $R_{ip}$  системи канонічних рівнянь необхідно мати епюри зусиль в основній системі методу переміщень в одиничних станах та вантажному стані.

Матриця коефіцієнтів системи розв'язувальних рівнянь методу переміщень називається ще матрицею жорсткості системи ка-

нонічних рівнянь методу переміщень. Кожен коефіцієнт матриці жорсткості визначає реакцію від одиничного узагальненого переміщення у відповідній додатковій в'язі.

#### 6.4. Побудова епюр внутрішніх зусиль в основній і вихідній системах методу переміщень

Основна система методу переміщень являє собою рамну конструкцію, яка складається з набору однопрогонових балок (як статично визначуваних, так і статично невизначуваних). У статично невизначуваних балках необхідно заздалегідь визначити епюри внутрішніх зусиль (згинальних моментів і поперечних сил) за відомим методом, наприклад, методом сил. Розглянемо два основні типи статично невизначуваних балок з цього набору. На рис. 6.10 наведена балка з лівим затисненням і правим рухомим шарніром. Обираємо для цієї один раз статично невизначеної балки основну систему за методом сил, будуємо одиничні епюри, визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь, складаємо цю систему, розв'язуємо її відносно невідомих методу сил і будуємо епюри внутрішніх зусиль. Розглянемо епюри зусиль від одиничного повороту рухомого затиснення і від одиничного переміщення:

1. Епюри зусиль від одиничного повороту затисненої опори.

Таким чином, спочатку замінюємо затиснення шарнірно-рухомою опорою, відкидаючи в'язь на поворот. Основним невідомим у відкинутій в'язі є реактивний момент  $x_1$ , напрям якого збігається з напрямом кута повороту, тобто за годинниковою стрілкою. При цьому маємо канонічне рівняння з одним невідомим:

$$\delta_{11}x_1 = 1, \quad (6.11)$$

$$\text{де } \delta_{11} = \sum_{n=1}^l \int_0^l \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l}{3EI}. \quad (6.12)$$

Відповідно до (6.9) маємо одиничні епюри до основної системи і епюри  $x_1$  для вихідної системи (рис. 6.11).

Підставляємо (6.12) в (6.11) і розв'язуємо рівняння:

$$\frac{l}{3EI} x_1 = 1; \quad (6.13)$$

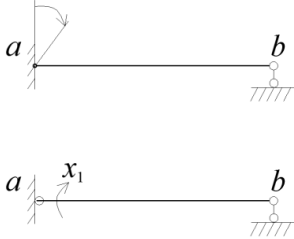


Рис. 6.10

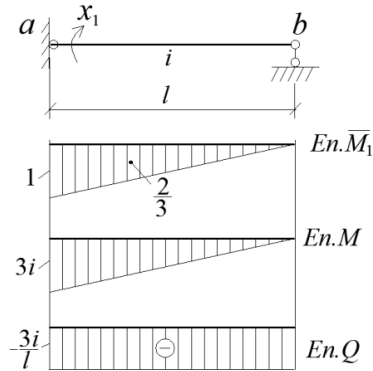


Рис. 6.11

$$\frac{(EI)_{ab}}{l_{ab}} = i_{ab}. \quad (6.14)$$

З урахуванням (6.14), отримаємо:

$$x_1 = + \frac{1}{\delta_{11}} = + \frac{1}{\frac{1}{3i_{ab}}} = 3i_{ab}$$

2. Епюри зусиль від одиничного поступального переміщення шарнірної опори.

Будуємо канонічне рівняння і епюри від одиничного переміщення  $\Delta = 1$  (рис. 6.12):

$$\delta_{11} x_1 = -1,$$

$$\delta_{11} = \sum_{n=10}^1 \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l^3}{3EI_1} = \frac{l^2}{3i};$$

$$EI = i_{ab} \cdot l;$$

$$x_1 = -\frac{1}{\delta_{11}} = -\frac{3i}{l^2}; \quad M_a = \bar{M}_1 \cdot lx_1; \quad M_b = -l \cdot \frac{3i}{l^2} = -\frac{3i}{l};$$

$$M_b = 0; \quad Q_a = Q_b = \frac{3i}{l^2}.$$

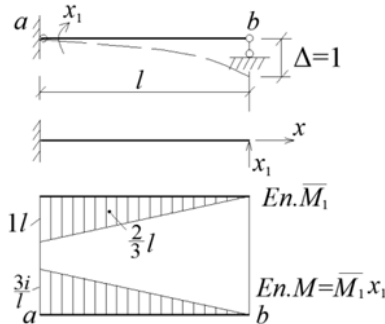


Рис. 6.12

Таким чином, для розтягнутого типу однопрогонової балки можна побудувати епюри згинальних моментів для будь-якого узагальненого переміщення і навантаження [15].

Для статично невизначуваної балки з постійною жорсткістю і затисненням з обох кінців необхідно побудувати одиничні епюри для двох канонічних рівнянь методу сил (епюри наведені у вигляді таблиць (табл. 12.1 у [15]).

$$\text{Наприклад: } \begin{cases} \delta_{11}x_1 - \delta_{12}x_2 = 1 \\ -\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \sum_{n=1}^1 \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \frac{2}{3} = \frac{l}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \sum_{n=1}^1 \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{-1}{2} \cdot 1 \cdot l \frac{1}{3} = -\frac{l}{6EI}$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{l}{3EI}; \quad \delta_{21} = \delta_{12} = \frac{l}{6EI}.$$



$$\begin{cases} \frac{l}{3EI}x_1 - \frac{l}{6EI}x_2 = 1; \\ -\frac{l}{6EI}x_1 + \frac{l}{3EI}x_2 = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

З урахуванням (6.12) маємо:

$$\begin{cases} \frac{1}{3i}x_1 - \frac{1}{6i}x_2 = 1; \\ -\frac{1}{6i}x_1 + \frac{1}{3i}x_2 = 0 \end{cases} \cdot \left. \vphantom{\begin{cases} \frac{1}{3i}x_1 - \frac{1}{6i}x_2 = 1; \\ -\frac{1}{6i}x_1 + \frac{1}{3i}x_2 = 0 \end{cases}} \right|^{x_2^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.16)$$

Складаємо рівняння (6.16), попередньо помноживши перше з них

на  $\frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6i}x_1 - \frac{1}{12i}x_2 = \frac{1}{2} \\ + \\ & -\frac{1}{6i}x_1 + \frac{1}{3i}x_2 = 0 \\ \hline & -\frac{1}{12i}x_2 + \frac{1}{3i}x_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x_2 \left( \frac{1}{3i} - \frac{1}{12i} \right) = \frac{1}{2}; \quad x_2 \frac{1}{4i} = \frac{1}{2}; \quad \cdot x_2 = -\frac{4i}{2} = 2i; \quad (6.17)$$

Підставляємо (6.17) у перше рівняння з (6.16):

$$\begin{aligned} \frac{1}{3i}x_1 - \frac{1}{6i}2i = 1; \quad \frac{1}{3i}x_1 - \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{1}{3i}x_1 = 1 + \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{3i}x_1 = \frac{4}{3}; \quad x_1 = 4i. \end{aligned}$$

Остаточню маємо:

$$M_{ab} = 4i; \quad M_{ba} = 2i; \quad Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{6i}{l}.$$

Внутрішні зусилля защемленої з обох кінців балки від одиничного зміщення опори:

1. Будуємо основну систему за методом сил, відкладаючи праворуч дві зайві в'язі (заздалегідь перетворюючи за допущенням методу переміщень жорстке защемлення до опори «повзун») і заміняючи їх невідомими силами  $x_1 = 1$  і  $x_2 = 1$ .

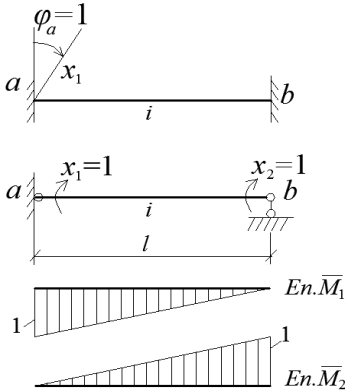


Рис. 6.13

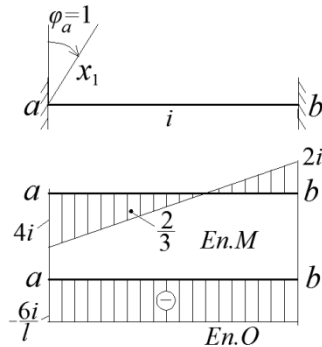


Рис. 6.14

2. Будуємо одиничні епюри в основній системі від  $x_1 = 1$  і  $x_2 = 1$ .

3. Записуємо систему канонічних рівнянь методу сил і обчислюємо коефіцієнти при невідомих на вільні члени (у вигляді зовнішніх впливів). Маємо:  $\Delta_{1p} = 0$ ;  $\Delta_{2p} = 1$ :

$$\delta_{11} = \sum_{n=10}^1 \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot l \cdot 1 = \frac{l}{EI} = \frac{1}{i};$$

$$\delta_{12} = \sum_{n=10}^1 \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot 1 = \frac{l^2}{2EI} = \frac{1}{2i};$$

$$\delta_{22} = \sum_{n=10}^1 \int \frac{\overline{M}_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l^3}{3EI} = \frac{1^2}{3i};$$

$$\begin{cases} \frac{l}{i}x_1 - \frac{l}{2i}x_2 = 0; \\ \frac{l}{2i}x_1 + \frac{l^2}{3i}x_2 = 1. \end{cases} \quad (6.18)$$

4. Розв'язуємо (6.18). Методом підстановки з першого рівняння (6.18), отримаємо:  $\frac{1}{i}x_1 = -\frac{l}{2i}x_2$ ;  $x_1 = -\frac{l}{2}x_2$ .

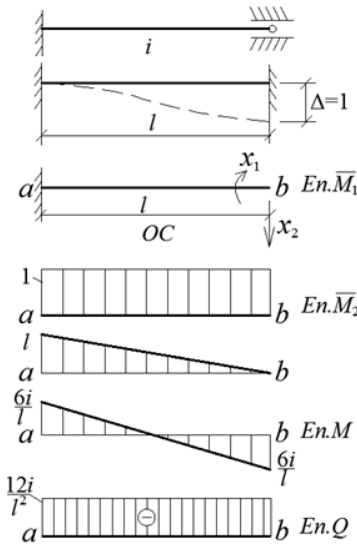


Рис.6.15

Підставляємо у друге рівняння системи (6.18):

$$-\frac{l}{2i} \frac{l}{2}x_2 + \frac{l^2}{3i}x_2 = 1; \quad \frac{l^2}{12i}x_2 = 1; \quad x_2 = -\frac{12i}{l^2}; \quad (6.19)$$

Підставляємо (6.19) в перше рівняння (6.18):

$$\frac{1}{i}x_1 + \frac{l}{2i} \frac{12i}{l^2} = 0; \quad x_1 = -\frac{6i}{l}.$$

Склавши епюри  $\bar{M}_1x_1 + \bar{M}_2x_2 = M$ , отримаємо епюри згинальних моментів  $M$ :

$$M_a = -\frac{6i}{l} + \frac{12il}{l^2} = \frac{6i}{l}; \quad M_b = -\frac{6i}{l}.$$

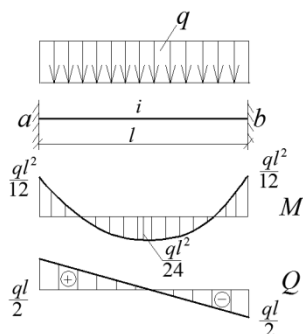
Поперечні сили дорівнюють значенню  $Q_b \equiv x_2 = \frac{12i}{l^2}$ .

Остаточно маємо (рис. 6.15):

$$M_{ab} = M_{ba} = -\frac{6i}{l}; \quad Q_{ab} = Q_{ba} = \frac{12i}{l^2}.$$

Випишемо значення згинальних моментів і поперечних сил від зовнішнього навантаження для однопрогонової балки з двома защемленнями. Побудуємо епюри:

1. Рівномірно-розподілене навантаження (рис. 6.16):



$$M_{ab} = -M_{ba} = -\frac{ql^2}{12};$$

$$M_{\max} = -\frac{ql^2}{24};$$

$$Q_{ab} = -Q_{ba} = \frac{ql}{2}. \quad (6.20)$$

Рис. 6.16

2. Зосереджена сила у довільній точці (рис. 6.17):

$$M_{ab} = -Pluv^2;$$

$$M_{ba} = Plv^2; \quad Q_{ab} = Pv^2(1 + 2u); \quad (6.21)$$

3. Зосереджена сила у середній точці:

$$M_{ab} = -M_{ba} = -\frac{Pl}{8}; \quad Q_{ab} = -Q_{ba} = \frac{P}{2}. \quad (6.22)$$

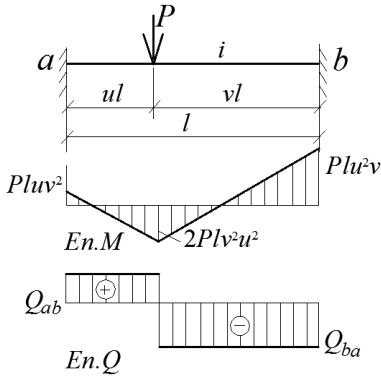


Рис. 6.17

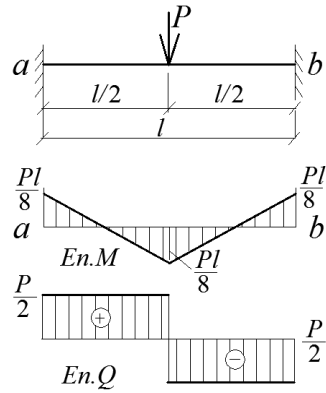


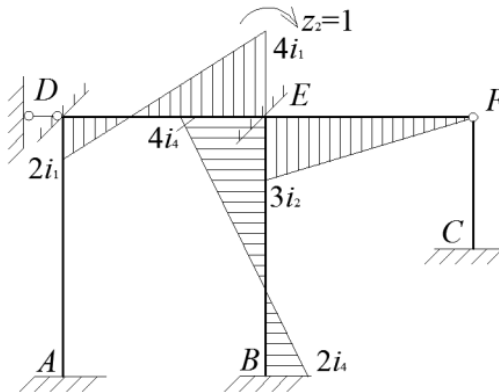
Рис. 6.18

### 6.5. Статичний спосіб визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

Будуємо епюри згинальних моментів в основній системі методу переміщень для рами, яка зображена на рис. 6.8, в одиничному і вантажному станах:  $En. \bar{M}_1$  (рис. 6.19),  $En. \bar{M}_2$  (рис. 6.20),  $En. \bar{M}_3$  (рис. 6.21),  $En. M_p$  (рис. 6.22).



Рис. 6.19



$En. \bar{M}_2$

Рис. 6.20

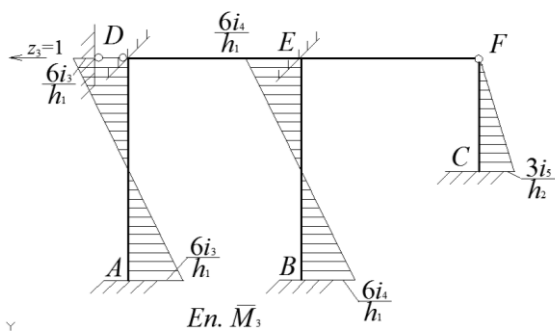


Рис. 6.21

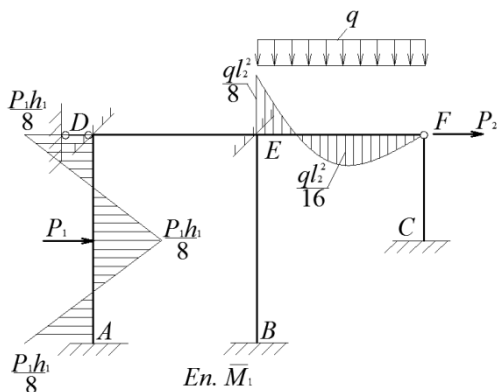


Рис. 6.22

Коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь визначаються виходячи з фізичного змісту – реактивні зусилля, що виникають у відповідній додатковій в’язі основної системи від одиничного значення невідомого переміщення або від зовнішнього навантаження, повинні дорівнювати нулю. додатні напрями реактивних зусиль збігаються з напрямками відповідних невідомих переміщень. Для визначення реактивного моменту необхідно відокремити вузол основної системи разом із введенням рухомих затиснень. До цього вузла прикладається невідомий реактивний момент у рухомому затисненні, а також згинальні моменти від одиничних станів, або від вантажного стану  $(r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{12}, r_{13}, r_{23})$ .

Коефіцієнт канонічної системи методу переміщень  $r_{11}$  - це реактивний момент у рухомому затисненні, який утворюється у вузлі  $D$  основної системи від одиничного кута повороту  $Z_1 = 1$ , тобто у першому стані. Схема прикладених реактивного моменту у вузлі  $D$  і моментів одиничного першого стану наведені на рис. 6.23. Суми моментів у вузлі  $D$ :

$$\sum M_D = r_{11} - 4i_1 - 4i_3 = 0; \quad r_{11} - 4i_1 - 4i_3. \quad (6.22)$$

Коефіцієнт канонічної системи методу переміщень  $r_{12}$  - це реактивний момент у рухомому затисненні вузла  $D$  основної системи від дії кута повороту  $Z_2 = 1$  у другому стані. Вирізаємо вузол  $D$  і складемо рівняння рівноваги моментів реактивного і другого стану (рис: 6.24):

$$\sum M_D = r_{12} - 2i_1 = 0; \quad r_{12} = 2i_1. \quad (6.23)$$

Коефіцієнт канонічної системи методу переміщень  $r_{13}$  – це реактивний момент у рухомому затисненні, який встановлений у вузлі  $D$  основної системи від дії одиничного лінійного переміщення  $Z_3 = 1$  у третьому стані (рис. 6.25):

$$\sum M_D = r_{13} - \frac{6i_3}{n_1} = 0; \quad r_{13} = \frac{6i_3}{n_1}. \quad (6.24)$$

Вільний член канонічної системи методу переміщень  $R_{1p}$  – це реактивний момент у рухомому затисненні, утворений у вузлі  $D$  у стані « $P$ » (рис. 6.26):

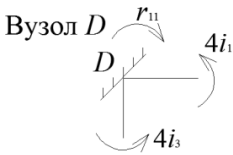


Рис. 6.23

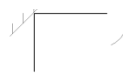


Рис. 6.24



Рис. 6.25

$$\sum M_D = R_{1p} - \frac{Ph_1}{8} = 0; \quad R_{1p} = \frac{Ph_1}{8}. \quad (6.25)$$

Аналогічно маємо картину розподілу згинальних моментів у затисненні вузла  $E$ . Розглянемо у в'язі другого затиснення реактивні і діючі моменти:

від дії сил першого стану (рис. 6.27):

$$r_{21} = 2i; \quad (6.26)$$

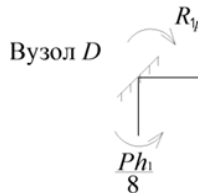


Рис. 6.26

- від дії сил другого стану (рис. 6.28):



$$r_{22} = 4i_1 + 3i_2 + 4i_4; \quad (6.27)$$

- від дії сил третього стану (рис. 6.29):

$$r_{23} = \frac{6i_4}{h_1}; \quad (6.28)$$

- від дії сил у стані «P» (рис. 6.30):

$$\sum M_E = R_{2p} + \frac{ql_2^2}{8} = 0; \quad R_{2p} = -\frac{ql_2^2}{8}. \quad (6.29)$$

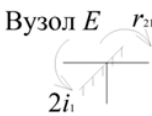


Рис. 6.27

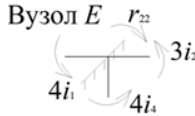


Рис. 6.28

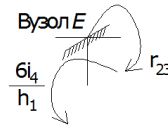


Рис. 6.29

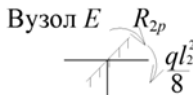


Рис. 6.30

Розглянемо другий вид коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень, до якого відносяться незалежні лінійні переміщення. Для обчислення їх величини за статичним способом необхідно розглянути умови рівноваги відокремленого сегмента основної системи. Якщо розглянути шарнірну модель основної системи, перетин для відокремлення цього сегмента повинен обов'язково проходити через введений додатковий стержень, в якому обчислюється реакція, а також через усі стрижні основної системи, які зазнають перетину від невідомих незалежних лінійних зміщень. Стрижні доцільно перерізати нескінченно близько до одного з його кінців. У розглянутому прикладі перетин проходить через стрижні  $AB$ ,  $BE$ ,  $CF$  і через додатковий стрижень, прикріплений до вузла  $D$  (рис. 6.30).

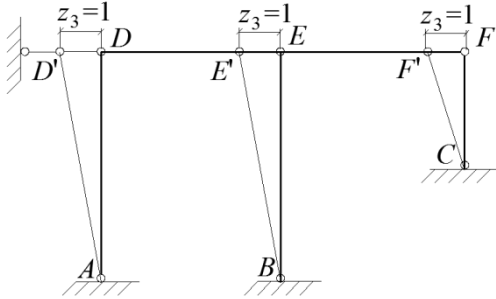


Рис. 6.30

До відокремленого фрагмента слід прикласти всі сили, що діють на нього, у тому числі зусилля у перерізах. Перерізувальні сили у розрізаних стрижнях отримуємо з епюр згинальних моментів відповідно до стану, використовуючи диференціальні залежності функцій  $M$  і  $Q$ .

Невідомі реакції у додатковому стержні визначаються з рівняння рівноваги у вигляді суми проєкцій всіх сил на вісь відокремленого сегменту. Цю вісь треба вибрати так, щоб на неї не проєктувались невідомі поздовжні сили у перерізах стержнів.

Обчислюючи коефіцієнти і вільні члени третього рівняння рівноваги канонічної системи методу переміщень для розглянутого прикладу, маємо: коефіцієнт  $r_{31}$  - це реакція у додатковому стрижні від одиничного кута повороту  $Z_1 = 1$  - перший одиничний напружений стан. У відокремленому фрагменті основної системи реакція у додатковому стрижні збігається з напрямом невідомого переміщення  $Z_3 = 1$ . Величини та напрями перерізувальних сил залежать від характеру епюри згинальних моментів першого стану  $\bar{M}_1$ . На епюрі  $\bar{M}_1$  на стрижнях  $BE$  і  $CE$  епюри згинальних моментів відсутні, звідки перерізувальні сили є нульовими, а у стрижні  $AD$  дорівнюють  $\frac{(4i_3 + 2i_3)}{h_1}$  зі знаком "-", тобто направлені проти годинникової

стрілки відносно вузла  $D$ . Таким чином, похідна лінійної функції згинального моменту дорівнює "tg" кута нахилу лінійної епюри

до осі стрижня  $AD$ . Складаємо рівняння рівноваги за умови  $\sum F_x = 0$  (рис. 6.31):

- від дії сил у першому стані

$$\sum F_x = 0; \quad \frac{6i_3}{h_1} - r_{31} = 0; \quad r_{31} = \frac{6i_3}{h_1}. \quad (6.30)$$

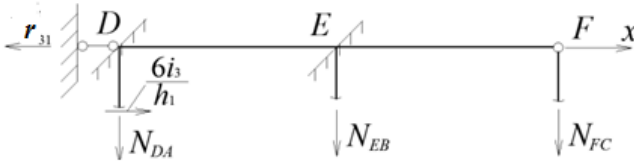


Рис. 6.31

Коефіцієнт  $r_{32}$  – це реакція у додатковому опорному стрижні від одиничного кута повороту у другому стані, відповідно маємо схему прикладання сил на відокремлений фрагмент основної системи і рівняння рівноваги (рис. 6.32):

- від дії сил у другому стані

$$\sum F_x = 0; \quad \frac{6i_4}{h_1} - r_{32} = 0; \quad r_{32} = \frac{6i_4}{h_1}. \quad (6.31)$$

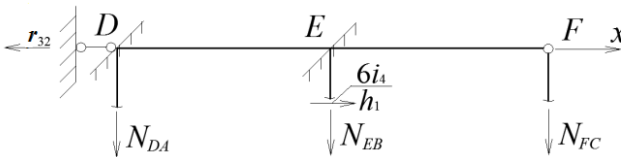


Рис. 6.32

- від дії сил у третьому стані (рис. 6.33):

$$\sum F_x = 0; \quad \frac{12i_3}{h_1^2} + \frac{12i_4}{h_1^2} \pm \frac{3i_5}{h_2^2} r_{33} = 0; \quad r_{33} = \frac{12i_3}{h_1^2} + \frac{12i_4}{h_1^2} + \frac{3i_5}{h_2^2}. \quad (6.32)$$

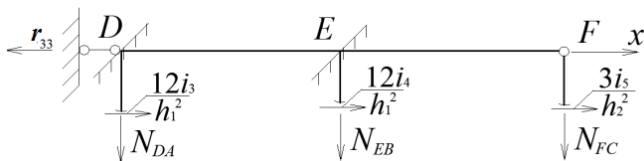


Рис. 6.33

Вільний член  $R_{3p}$  - це реакція у додатковому опорному стрижні основної системи від зовнішнього навантаження у вантажному стані «P» (рис. 6.34).

$$\sum F_x = 0; \quad \frac{P_1}{2} + P_2 - R_{3p} = 0; \quad R_{3p} = \frac{P_1}{2} + P_2. \quad (6.33)$$

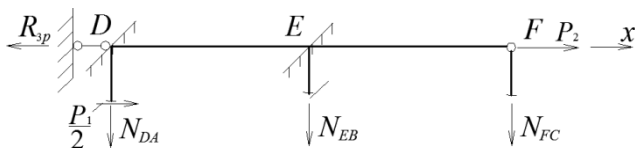


Рис. 6.34

Підставляємо визначені коефіцієнти матриці жорсткості та вільні члени у систему канонічних рівнянь методу переміщень, отримуємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4(i_1 + i_3)Z_1 + 2i_1Z_2 + \frac{6i_3Z_3}{h_1} + \frac{P_1h_1}{8} = 0; \\ 2i_1Z_1 + (4(i_1 + i_4) + 3i_2)Z_2 + \frac{6i_4Z_3}{h_1} + \frac{ql_2^2}{8} = 0; \\ \left( \frac{6i_3Z_1}{h_1} + \frac{6i_4Z_2}{h_1} + \left( \frac{12(i_3 + i_4)}{h_1^2} + \frac{3i_5}{h_2^2} \right) Z_3 + \frac{P_1}{2} + P_2 = 0. \end{array} \right. \quad (6.34)$$

Система алгебраїчних рівнянь (6.34) на головній діагоналі має додатні коефіцієнти, а побічні коефіцієнти відносно головної діагоналі повинні бути симетричними, що дозволяє при обчисленні здійснювати перевірку.

В результаті розв'язання системи рівнянь (6.34) будуть знайдені основні невідомі методу переміщень, що дасть змогу побуду-

вати епюри внутрішніх сил у вихідній системі розрахункової схеми реальної конструкції.

### **6.6. Кінематичний аналіз розрахунку статично невизначуваної рами методом переміщень**

При розрахунках статично невизначуваних систем методом переміщень, споруди розглядаються як такі, що лінійно-деформуються, для яких справедливі принципи незалежності дії сил та пропорційності.

У якості невідомих виступають переміщення вузлів від заданих дій: лінійні переміщення шарнірних і жорстких вузлів та кути поворотів жорстких вузлів. Сумарну кількість невідомих кутових  $n_\varphi$  та незалежних лінійних переміщень вузлів  $n_\delta$  називають *ступенем кінематичної невизначуваності споруди*:

$$k = n_\varphi + n_\delta. \quad (6.35)$$

Кількість невідомих кутових переміщень  $n_\varphi$  дорівнює кількості жорстких вузлів споруди. Кількість незалежних лінійних переміщень вузлів споруди  $n_\delta$  можна визначити за його шарнірною схемою, використовуючи формулу:

$$n_\delta = 2Y - C - C_{on}, \quad (6.36)$$

де  $Y$  - кількість вузлів;  $C$  - кількість стрижнів, що з'єднують вузли;  $C_{on}$  - кількість опорних в'язей.

Основна система методу переміщень утворюється накладанням на вузли споруди в'язей, які перешкоджають їх кутовим і лінійним переміщенням. Якщо кількість накладених на вузли кутових і лінійних в'язей співпадає зі ступенем кінематичної невизначеності споруди, то в основній системі методу переміщень всі вузли будуть нерухомі.

Такий спосіб вибору основної системи дає можливість уявити будь-яку плоску стрижневу систему у вигляді набору стандартних стрижнів, кожен із яких може бути розрахований методом сил.

Розглянемо приклад статично невизначуваної рами, конструктивна схема якої наведена на рис. 6.35, і проведемо кінематичний аналіз. Неважко помітити, що вибрана для розрахунку конструктивна схема рами (рис. 6.35) повністю співпадає з тією схемою, яка наведена на рис. 5.14, а. Це зроблено авторами задля того, щоб по-

рівняти, наскільки простіший розв'язок рамної конструкції за методом переміщень від розв'язку аналогічної рами за методом сил.

Якщо рамну конструкцію розраховувати методом сил, то отримаємо:

$$n_c = 3K - III = 3 \cdot 3 - 6 = 3.$$

Таким чином, рама є трічі статично невизначуваною. Розв'язок цієї рами за методом сил наведений в п.5.5 даної книги.

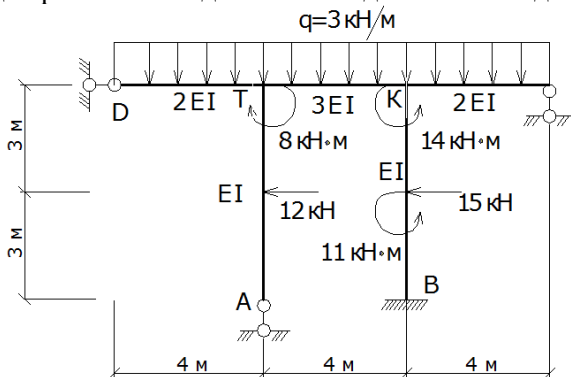


Рис. 6.35. Конструктивна схема статично невизначуваної рами для розрахунку методом переміщень

Розрахуємо раму методом переміщень:

$$n_\delta = 0,$$

$$n_\varphi = 2,$$

$$K = n_\varphi + n_\delta = 2.$$

Маємо раму два рази кінематично невизначувану. Так як для цієї рами  $n_\delta = 0$ , то накладаються лише кутові в'язі, які перешкоджають поворотам вузлів  $T$  і  $K$  (рис. 6.36). Шарнірна схема цієї рами геометрично незмінна і не потребує накладання додаткових лінійних в'язей на вузли:

$$i_1 = \frac{EI}{6}; i_2 = \frac{2EI}{4} = \frac{EI}{2}; i_3 = \frac{3EI}{4} = 0,75EI.$$

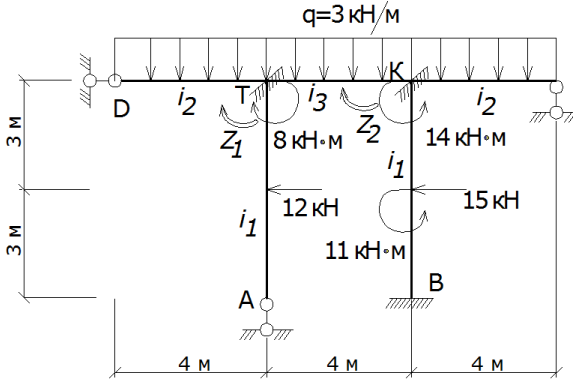


Рис. 6.36. Основна система

Невідомі кутові і лінійні переміщення вузлів споруди  $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_n$  від різних зовнішніх впливів визначаються з системи канонічних рівнянь методу переміщень,  $i$ -те рівняння якої заперечує реакцію в  $i$ -й накладеній в'язі в основній системі методу переміщень від переміщення  $n$  накладених в'язей на величини, що дорівнюють  $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_n$ , і від зовнішніх впливів.

Побудуємо систему канонічних рівнянь методу переміщень:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases} \quad (6.37)$$

У системі рівнянь (6.37) коефіцієнти при невідомих  $r_{ii}$  є головними, а коефіцієнти  $r_{ij}$  – побічними. Фізичний зміст коефіцієнтів  $r_{ii}$  і  $r_{ij}$  – це реакції у  $i$ -й накладеній в'язі відповідно від зміщення  $i$ -ї в'язі на величину, що дорівнює одиниці, та зміщення  $j$ -ї в'язі на величину = 1. Побічні коефіцієнти підлягають теоремі щодо взаємності реакцій, тобто  $r_{ij} = r_{ji}$ .  $R_{1p}$  – це силові реакції в 1-й накладеній в'язі від зовнішніх впливів.

Розв'язанню системи рівнянь (6.37) передує обчислення коефіцієнтів при невідомих  $r_{ii}$  і  $r_{ij}$  та вільних членів  $R_{1p}$ ,  $R_{2p}$ . У методі переміщень вище названі коефіцієнти можна визначити, побудувавши епюри внутрішніх зусиль в основній системі від зміщення накладених в'язей на величини, які дорівнюють одиниці, і від сило-

вих впливів, тобто маючи результати розрахунків стандартних стрижнів.

Будуємо одиничні епюри в основній системі  $M_1$ ,  $M_2$  (рис. 6.37, 6.38) та епюру згинальних моментів від дії зовнішніх силових факторів (рис. 6.39) згідно з рис. 6.35 і рис. 6.36:

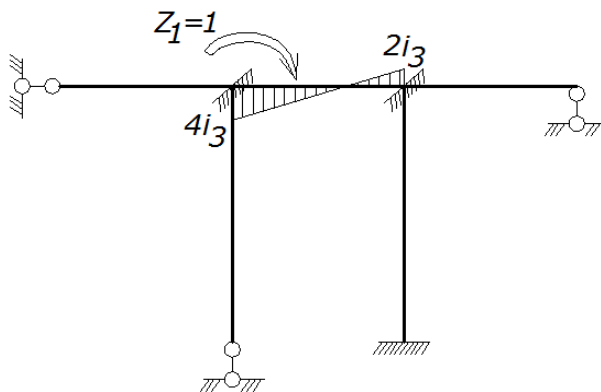


Рис. 6.37. Одинична епюра  $M_1$

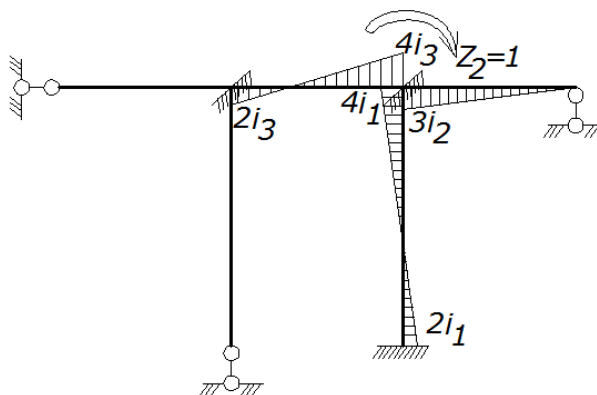


Рис. 6.38. Одинична епюра  $M_2$



З використанням епюр згинальних моментів, наведених на рис. 6.37-6.39, визначимо коефіцієнти і вільні члени системи рівнянь рівноваги (6.37):

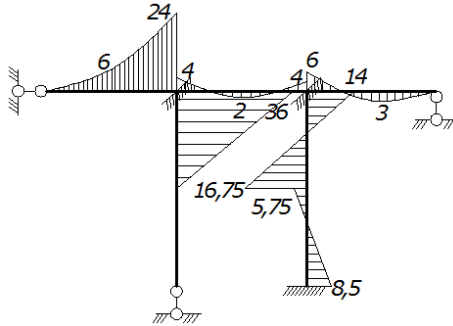


Рис. 6.39. Вантажна епюра

З одиничної епюри  $M_1$  (див. рис. 6.37) визначаємо коефіцієнт  $r_{11}$  з рівноваги реакцій у затисненні кута  $T$  від дії кута повороту  $z_1 = 1$  (рис. 6.40).

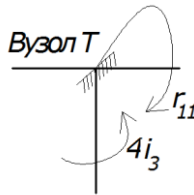


Рис. 6.40

Запишемо умову  $\sum M_T = 0$ ;

$$\sum M_c = r_{11} - 4i_3 = 0;$$

$$r_{11} = 4i_3. \tag{6.38}$$

З епюри  $\bar{M}_2$  (див. рис. 6.38) визначаємо коефіцієнт  $r_{12}$  з рівноваги реакцій у затисненні кута  $T$  від дії повороту  $z_2 = 1$  (рис. 6.41).

Випишемо умову  $\sum M_T = 0$ :

$$\begin{aligned}
 r_{12} - 2i_3 &= 0; \\
 r_{12} &= 2i_3.
 \end{aligned}
 \tag{6.39}$$

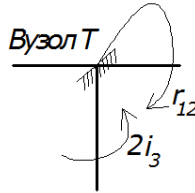


Рис. 6.41

З епюри  $\bar{M}_2$  визначаємо коефіцієнт  $r_{22}$  з рівноваги реакцій у затиснені вузла «К» від дії кута повороту  $z_2 = 1$  (рис. 6.42).

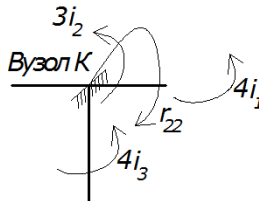


Рис. 6.42

Випишемо умову  $\sum M_K = 0$ :

$$r_{22} - 4i_3 - 4i_1 - 3i_2 = 0; \quad r_{22} = 4i_3 + 4i_1 + 3i_2.
 \tag{6.40}$$

Для перевірки з епюри  $\bar{M}_2$ , з рівноваги реакцій в затиснені кута К від дії кута повороту  $z_1 = 1$ , визначаємо коефіцієнт  $r_{21}$  (рис. 6.43):

Випишемо умову  $\sum M_K = 0$ :

$$r_{21} - 2i_3 = 0; \quad r_{21} = 2i_3.
 \tag{6.41}$$

Бачимо, що рівняння (6.39) і (6.41) тотожні, тобто обчислення виконані правильно.

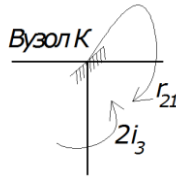


Рис. 6.43

Від дії навантаження в стані  $P$  (див. рис. 6.39) визначаємо вільний член  $R_{1p}$  з рівноваги реакцій у затисненні вузла  $T$  (рис.6.44).

Випишемо умову  $\sum M_T = 0$ ;

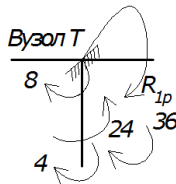


Рис. 6.44

$$R_{1p} + 36 + 4 - 24 + 8 = 0;$$

$$R_{1p} = -24. \quad (6.42)$$

Вільний член  $R_{2p}$  визначаємо з рівняння рівноваги реакцій у затисненні вузла  $K$  (рис. 6.45) від дії навантаження в стані  $P$  (див. рис. 6.39):

Випишемо умову  $\sum M_K = 0$ ;

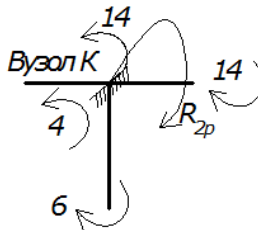


Рис. 6.45

$$R_{2p} - 4 + 14 + 6 - 14 = 0;$$

$$R_{2p} = -2. \quad (6.43)$$

Обчислюємо коефіцієнти і вільні члени, підставивши їх значення в (6.37):

$$r_{11} = 4i_3 = 3EI;$$

$$r_{12} = 2i_3 = 1,5EI;$$

$$r_{22} = 4i_3 + 4i_1 + 3i_2 = 5,167EI; \quad (6.44)$$

$$R_{1p} = -24 \text{ кНм};$$

$$R_{2p} = -2 \text{ кНм}.$$

Остаточно (6.37) має вигляд:

$$\begin{cases} 3EI \cdot Z_1 + 1,5EI \cdot Z_2 - 24 = 0; \\ 1,5EI \cdot Z_1 + 5,167EI \cdot Z_2 - 2 = 0 \end{cases} \quad (6.45)$$

або

$$EI \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1,5 \\ 1,5 & 5,167 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$Z_1 = -\frac{D_1}{D}; \quad Z_2 = -\frac{D_2}{D}. \quad (6.46)$$

Визначаємо числові значення детермінантів:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1,5 \\ 1,5 & 5,167 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5,167 - 1,5 \cdot 1,5 = 15,501 - 2,25 = 13,251;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -24 & 1,5 \\ -2 & 5,167 \end{vmatrix} = -24 \cdot 5,167 + 2 \cdot 1,5 = -124,008 + 3 =$$

$$= -121,008;$$

$$Z_1 = \frac{121,008}{13,251} = 9,132; \quad (6.47)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -24 \\ 1,5 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 + 24 \cdot 1,5 = -3 + 36 = 30;$$

$$Z_2 = -\frac{30}{13,251} = -2,264. \quad (6.48)$$

Домножимо одиничні епюри  $M_1$  і  $M_2$  на значення невідомих (6.47), (6.48) та складемо результуючі епюри (рис. 6.46 і рис. 6.47) з епоєю  $M_p$  (рис. 6.48):

$$Z_1 = \frac{9,132}{EI}; \quad Z_2 = \frac{-2,264}{EI}.$$

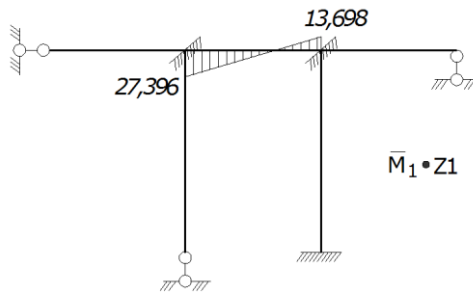


Рис. 6.46

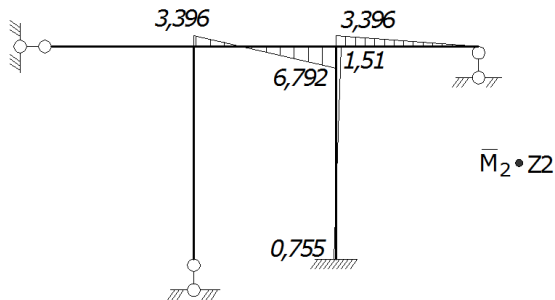


Рис. 6.47

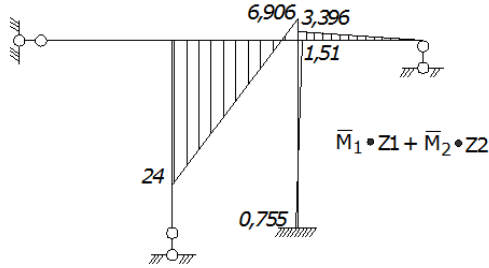


Рис. 6.48

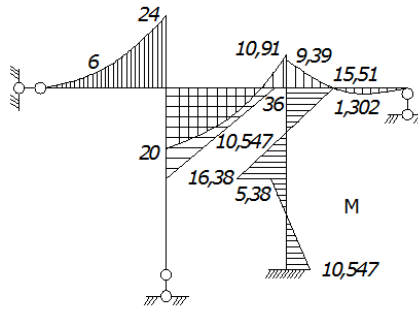


Рис. 6.49

Здійснимо статичну перевірку:

- рівновага вузлів  $T$ ,  $K$ :

$$\sum M_T = 0; \quad 36 + 8 - 20 - 24 = 0 \quad (\text{рис. 6.50, а});$$

$$\sum M_K = 0; \quad 15,51 + 9,39 - 10,91 - 14 \approx 0 \quad (\text{рис. 6.50, б}).$$

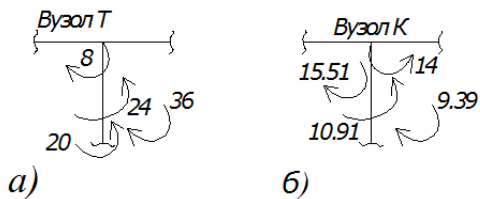


Рис. 6.50

За дійсними епорами згинальних моментів (див. рис. 6.49) побудуємо епору поперечних зусиль  $Q$  (рис. 6.51).

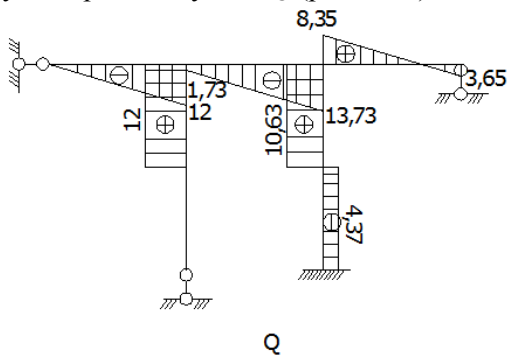


Рис. 6.51

За сумарною епорою  $Q$  будуємо епору поздовжніх сил в основній системі (рис.6.52).

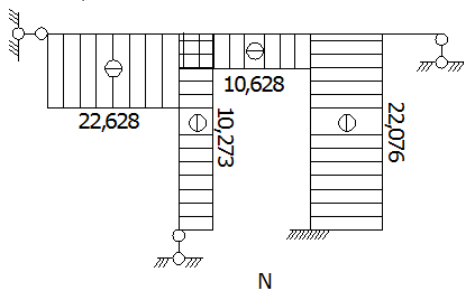


Рис. 6.52

Виконуємо статичну перевірку у вузлі  $T$  (рис. 6.53):

$$\sum F_x = 22,628 - 10,628 - 12 = 0;$$

$$\sum F_y = 12 - 10,27 - 1,73 = 0.$$

Виконуємо статичну перевірку у вузлі  $K$  (рис. 6.54):

$$\sum F_x = 10,628 - 10,628 = 0;$$

$$\sum F_y = 13,73 + 8,35 - 22,076 = 0.$$

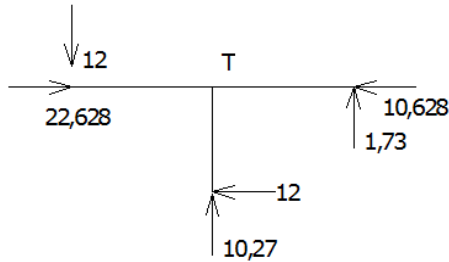


Рис. 6.53

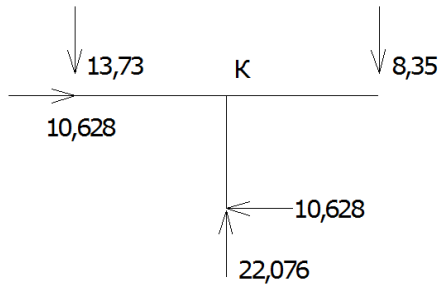


Рис. 6.54

**Запитання для самоперевірки**



1. Припущення методу переміщень. Основні переваги методу переміщень.
2. У чому полягає побудова основної системи статично невизначуваної рами за методом переміщень?
3. Принципи побудови основної системи методу переміщень.
4. Що спільного між методом переміщень і методом скінченних елементів? Чим вони відрізняються?
5. Наведіть систему канонічних рівнянь методу переміщень і її основні властивості.
6. Як визначається ступінь кінематичної невизначуваності плоскої рами ?
7. Умови побудови рівнянь методу переміщень. Як визначаються незалежні лінійні переміщення у методі переміщень?
8. Побудова одиничних епюр і епюр від навантаження у методі переміщень.
9. Наведіть основні типи однопрогонових статично невизначуваних балок при побудові основної системи методу переміщень. Як визначаються параметри епюр внутрішніх зусиль від узагальнених одиничних переміщень.
10. Наведіть приклад визначення внутрішніх зусиль від одиничного повороту рухомого затиснення для балки з двома защемленнями.
11. З яких умов визначаються коефіцієнти та вільні члени системи канонічних рівнянь методу переміщень?
12. З яких умов складаються рівняння для незалежних лінійних зміщень при розрахунках плоских рам методом переміщень?

## РОЗДІЛ 7

### РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ ЖОРСТКИХ РАМ ІЗ УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ

#### 7.1. Основні положення розрахунку рам із урахуванням зсувних деформацій.

У прикладних задачах будівельної механіки зазвичай розглядаються пружні однорідні ізотропні матеріали (тіла). Тіло називається *однорідним ізотропним*, коли у всіх його точках пружні властивості у всіх напрямках однакові. У сучасній техніці крім ізотропних набули застосування, конструктивно-анізотропні тіла. *Анізотропним пружним тілом* називається таке тіло, у якого пружні властивості за різними напрямками різні і однакові за паралельними напрямками у всіх точках тіла. По суті, усі реальні матеріали анізотропні і у більшій або меншій мірі неоднорідні, у тому числі і вироби зі сталі, у залежності від технології виготовлення і форми лиття та прокату. Анізотропні матеріали за своїм походженням можна розділити на природні і синтетичні. До природних головним чином відносяться вироби з дерева, до других – різні полімерні матеріали (склопластик, пластмаси, вироби з пінополіуретану, пінопласту та інших полімерів). Ми звертаємо увагу на конструктивні полімерні вироби, призначені для силових впливів – жорсткі склопластики, текстоліти, деревинно-шаруваті та полістирольні плити тощо.

Полімерні матеріали характеризуються рядом позитивних властивостей: низькою теплопровідністю, малою питомою вагою, високою міцністю, високим коефіцієнтом конструкційної якості тобто відношенням границі міцності до об'ємної ваги, хімічною стійкістю, доброю технологічністю та ін. Використання анізотропних матеріалів дає можливість більш раціонально розміщати матеріал у конструкції. Це досягається шляхом суміщення напрямку великої міцності або жорсткості з направленням найбільших напружень або переміщень, наприклад, використання ортотропних плит у містобудівництві. У різних галузях промислового будівництва, літакобудуванні, суднобудуванні та ін. полімерні матеріали використовуються для виготовлення конструкцій у вигляді оболонок, пластин та стрижнів. Ці конструкції у більшості випадків є тонкостінними: вони більш економічні. Тонкостінні стрижні використовув-

ються як шпангоути і стрингери у панелях, пластинах та оболонках несучих елементів будівель та споруд.

Однорідне пружне анізотропне тіло у загальному випадку відповідно з узагальненим законом Гука [20] характеризується 21 пружною незалежною сталою  $a_{ij}$  або  $A_{ij}$ . Симетрія внутрішньої будови матеріалу призводить до симетрії пружності. У тілі з'являються симетричні напрямлення (конструктивно заплановані), вздовж яких пружні властивості будуть однаковими. Для таких матеріалів узагальнений закон Гука спрощується, кількість незалежних констант зменшується. Так, наприклад, для тіла з однією площиною симетрії їх кількість буде дорівнювати 13 (такі тіла називаються неортотропними), а на випадок, коли у кожній точці тіла є три взаємодіючі площини пружної симетрії кількість незалежних пружних сталих становитиме дев'ять (такі тіла відповідно з [20] називаються ортотропними). Якщо в кожній точці тіла є площина пружні властивості якої у всіх напрямках однакові, а відрізняються тільки в ортогональному напрямі по відношенню до цієї площини ізоотропії, то для таких тіл кількість незалежних пружних констант дорівнює п'яти (такі тіла називаються трансверсально-ізоотропними, або транстропними). У разі повної симетрії, коли у кожній точці тіла будь-яка площина є площиною пружної симетрії, кількість пружних незалежних констант дорівнює трьом –  $E, G, \nu$ : модуль пружності Юнга, модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона (такі тіла називаються ізоотропними). Матеріалами, які наближено можна вважати ортотропними, є деревина, фанера, деревинно-шаруватий пластик, текстоліт, склопластик типу СВМ та ін. Прикладом транстропного тіла може бути однонаправлений склопластик, якщо нитки вважати рівномірно розподіленими по перерізу.

Пружні сталі ортотропного матеріалу у головних напрямках (коефіцієнти поздовжніх деформацій) можна визначити, виконавши один із дослідів на розтяг, стиск або згин, при цьому вихідними рівняннями при випробуваннях є вираження узагальненого закону Гука для ортотропного матеріалу [20]. Модулі пружності, знайдені в результаті окремих досліджень, практично співпадають, тобто метод визначення пружних сталих різномодульних матеріалів із дослідів на згин може бути використаним у лабораторній практиці [19, 21].

Коефіцієнти поперечних деформацій ортотропних матеріалів можна також визначати при випробуваннях на розтяг, стиск і згин, вибираючи з досліджуваного матеріалу три зразка у вигляді призм прямокутного перерізу, які орієнтовані по головних напрямках бази-су ортотропії, коефіцієнти Пуассона визначаються як відношення поперечної відносної деформації до поздовжньої [21]. В окремих випадках анізотропії – ізотропного, поперечно ізотропного (трансверсального), ортотропного або з однією площиною пружної симетрії матеріалу зразка гіпотеза плоских перерізів при чистому згині є справедливою, проте в загальному випадку анізотропії ця гіпотеза стає несправедливою і зазначені способи визначення пружних властивостей матеріалів використовувати не можна.

Для визначення сталих зсуву з ортотропного матеріалу, що досліджується, виготовляють три діагональні зразка прямокутного перерізу, при цьому вісь зразка першого типу (вздовж першої головної осі ортотропії) [21] паралельна головній площині пружності 1-2 і в той же час становить кут  $45^\circ$  із головними напрямками пружності матеріалу. З досліду на розтяг (стиснення) цього зразка першого типу визначають коефіцієнти поздовжніх і поперечних деформацій, а сталу зсуву у площині 1–2 обчислюють як їх подвійну різницю, яка є еквівалентною формулі зсуву для цієї площини

$$G_{12} = \frac{E_{45}}{2(1 + \nu_{45})} \quad (7.1)$$

де  $E_{45}, \nu_{45}$  - модулі Юнга і коефіцієнт Пуассона, знайдені в результаті дослідження зразка першого типу. Аналогічно при дослідженні зразків II і III типів (уздовж 2-ї та 3-ї головних осей ортотропії) знаходять коефіцієнти деформації і модулі зсуву  $a_{44}(G_{23})$  і  $a_{55}(G_{13})$  відповідно.

У будівельній механіці пружні переміщення стрижня і стрижневих систем, як правило визначаються способом Максвелла-Мора, коли будь-яке (узагальнене) переміщення  $\delta_{ij}$  за напрямом  $i$ , викликане причиною  $j$ , через вираження віртуальної роботи внутрішніх сил. Загальна формула для тонкостінного стрижня містить 30 інтегралів, до того ж п'ять з них визначають переміщення тонкостінного стрижня без урахування деформацій зсуву, всі інші від зсуву. Для перерізу

симетричного відносно обох головних осей з десяти коефіцієнтів зсуву  $\mu_{ij} = \mu_{ji}$  шість дорівнюють нулю. Коефіцієнти зсуву, як правило, обчислюються відносно головних координат  $x$ ,  $y$ ,  $w$  і залежать від форми і розмірів перерізу. Для прямокутного перерізу коефіцієнт зсуву  $\mu_{xx} = 1$ ,

Рис. 7.1. Переріз двотаера

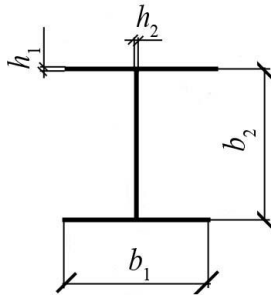
юридного матеріалу,

складеного з вузьких прямокутників (рис. 7.1),

$$\mu_{xx} = \frac{Fb_2^2}{120I_x^2} \left[ \frac{5b_1^3h_1^2}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} (30b_1^2h_1^2 + 10b_1h_2 \cdot h_1h_2 + b_2^2h_2^2) \right];$$

$$\mu_{yy} = \frac{3F}{5b_1h_1};$$

$$\mu_{ww} = \frac{2,4F^2}{h_1b_1b_2^2}.$$



(7.2)

Як свідчать рів [21], ураїстотно вплиливо в статиї і практично роту жорстмах.

дослідження багатьох автохування деформацій зсуву ває на переміщення, особливо невизначених системах не впливають на кути повоких кутових елементів у ра-

Тонкостінні стрижні відносяться до статично невизначуваних механічних систем.

При проектуванні комбінованих великопрогонових оболонкових систем складної конфігурації для забезпечення місцевої стійкості тонколистових фрагментів широко використовуються ребра (шпангоути, стрингери) вставки та інші стабілізуючі елементи з комбінації тонкостінних прокатних і гнутих (закритих і відкритих перерізів) профілів [18, 19]. У загальній дискретній моделі та розрахунковій схемі зазначених комбінованих механічних систем ці тонкостінні стрижневі елементи зводяться до еквівалентних прямокутних перерізів з адекватними поздовжньою і згинальною жорсткістю. У результаті розрахунків на міцність комбінованої оболонкової конструкції на основі ітераційного процесу нелінійного деформування ми отримуємо інтегральні внутрішні зусилля (поздовжні і перерізвальні сили, поперечні тангенціальні, поздовжні та крутні моме-

нти), що діють в елементах ребер і стабілізуючих елементів комбінованої механічної системи. Проте внутрішні напруження у еквівалентних дискретних системах, які відповідають інтегральним внутрішнім зусиллям, абсолютно не відповідають дійсним нормальним і зсувним напруженням у дійсних профілях реальних тонкостінних стрижневих елементах. Тому для забезпечення обмежень за міцністю і деформативністю для перерізів із максимальними інтегральними зусиллями необхідно розв'язувати задачу для статички невизначених тонкостінних стрижнів, підставляючи до формули Максвелла-Мора з урахуванням зсувних інтегралів дійсні внутрішні зусилля з визначенням коефіцієнтів зсуву  $i$ , як наслідок, дійсних деформацій і зусиль  $U$  зв'язку з цим були проведені дослідження для статично невизначуваних рам із тонкостінних профілів або для прямокутних і двотаврових перерізів із низько-модульних матеріалів, наприклад, із клеєної деревини, на вплив зсувних деформацій. У сучасному будівництві широкого використання набули споруди з композитних, полімерних матеріалів, металопластику, проте використання зазначених матеріалів у конструюванні споруд потребує більш досконалих методів їх розрахунків на міцність та деформативність.

Зазвичай розрахунки рам на міцність та деформативність виконуються без урахування деформації зсуву. Проте у деяких випадках доводиться враховувати не тільки деформації згину, а й деформації зсуву. Особливо суттєво деформації зсуву відображаються на роботі рам, які складаються з коротких стрижнів, виготовлених із дерева, композитних, полімерних матеріалів або металопластику. Їх широке використання у сучасному будівництві пояснюється тим, що зазначені матеріали мають порівняно незначну жорсткість на зсув. Практика свідчить, що деформації зсуву також необхідно враховувати при розрахунках металевих рам, при використанні тонкостінних стрижнів.

## **7.2. Використання формул Корноухова для основного типу балкового стрижня**

Розрахунки стрижня рами з урахуванням деформації зсуву за методом переміщень розглядав професор М.В. Корноухов. У статті [8]

наведені формули для стрижня рами  $ab$  (рис. 7.2) у загальному випадку завантаження, ці формули мають вигляд:

$$M_{ab} = -\frac{EI}{l} [(3\theta + 1)\varphi_a + (3\theta - 1)\varphi_b - 6\theta\varphi_{ab}] + M'_{ab}, \quad (7.3)$$

$$Q_{ab} = -\frac{6EI\theta}{l^2} [\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}] + Q'_{ab}, \quad (7.4)$$

де

$$M'_{ab} = -\sum_{n=1}^n \frac{P_n b_n}{2} \left\{ \left[ \left( 3 - \frac{2b_n}{l} \right) \theta - 1 \right] \frac{b_n}{l} + 1 - \theta \right\} - \frac{ql^2}{12}; \quad (7.5)$$

$$Q'_{ab} = -\sum_{n=1}^n \frac{P_n b_n}{l} \left\{ \left[ \left( 3 - \frac{2b_n}{l} \right) \theta - 1 \right] \frac{\theta b_n}{l} + 1 - \theta \right\} - \frac{ql}{2}; \quad (7.6)$$

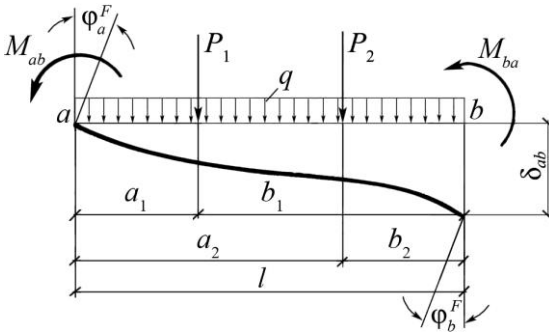


Рис. 7.2. Розрахункова схема стрижня  $ab$

$$\psi_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}}; \quad \theta = \frac{1}{1 + \frac{12EI}{l^2 GF}}; \quad F_1 = \frac{F}{\mu} = \frac{J^2}{\int_F \left( \frac{S}{b} \right)^2 dF}. \quad (7.7)$$

$$\mu_I \equiv \mu_{xx} = \frac{F}{F_1}. \quad (7.8)$$

Коефіцієнти зсуву залежать від форми і розмірів перерізу стрижня.

Наприклад:  $\mu_{\square} = 1,2$ ;  $\mu_I = \frac{F^I}{F_{em}}$ .

Для двотавра, складеного з вузьких прямокутників (див. рис. 7.2),

$$\mu = \frac{Fb_2^2}{I_x^2 \left[ 5b_1^2 h_1 + \frac{b_2}{h_2} (30b_1^2 h_1^2 + 10b_1 b_2 h_1 h_2 + b_2^2 h_2^2) \right]}.$$

Виконуємо розрахунок простої симетричної рами з кососиметричним рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 7.3). Розрахункова схема рами три рази кінематично (і статично) невизначувана, але для даного кососиметричного навантаження маємо лише два невідомих.

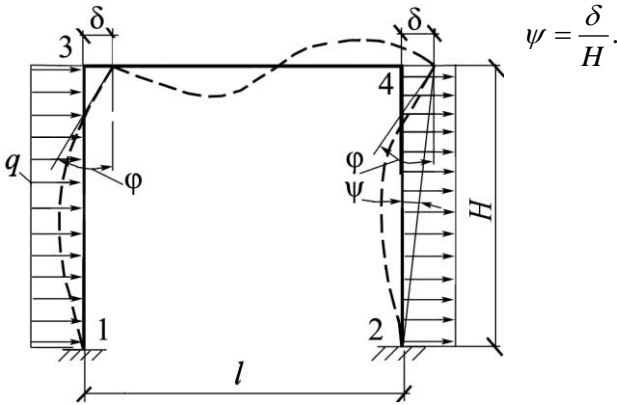


Рис. 7.3. Розрахункова схема рами

Таким чином, невідомими будуть: кут повороту вузла  $\varphi$  і кут перекосу стояка  $\psi$  (адекватного незалежному переміщенню). Складемо систему з двох рівнянь для рами - одне основне рівняння і одне додаткове.

$$\begin{cases} M_{31} + M_{34} = 0 \\ Q_{13} + Q_{24} - \sum W = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

Виразимо зусилля через невідомі:

$$M_{31} = -\frac{EI}{H} [(3\theta + 1)\varphi_3 - 6\theta\psi_{31}] - \frac{qH^2}{12}; \quad (7.10)$$

$$M_{34} = -\frac{EI}{l} [(3\theta + 1)\varphi_3 + (3\theta - 1)\varphi_4 - 0] + 0; \quad (7.11)$$



$$Q_{13} = -\frac{6EI\theta}{H^2} [0 + \varphi_3 - 2\psi_{13}] + \frac{qH}{2};$$

$$Q_{24} = -\frac{6EI\theta}{H^2} [0 + \varphi_4 - 2\psi_{24}] + \frac{qH}{2};$$

$$\Sigma W = -2qH; \quad (7.12)$$

$$\varphi \equiv \varphi_3 = \varphi_4; \quad \psi \equiv \psi_{31} = \psi_{24}. \quad (7.13)$$

Рівняння рівноваги (7.3) набудуть вигляду

$$\begin{cases} -EI \left[ 3\theta \left( \frac{1}{H} + \frac{2}{l} \right) + \frac{1}{H} \right] \varphi + \frac{6EI}{H} \theta \psi - \frac{qH^2}{12} = 0; & (1) \\ -\frac{12EI}{H^2} \theta \varphi + \frac{24EI}{H^2} \theta \psi - qH = 0. & (2) \end{cases} \quad (7.14)$$

Розв'язавши систему, отримаємо:

$$\varphi = \frac{qH^2}{6EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)}; \quad \psi = \frac{qH^2}{24EI} \left( \frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right). \quad (7.15)$$

### 7.3. Визначення коефіцієнтів та вільних членів системи канонічних рівнянь із урахуванням зсувних деформацій.

Задля забезпечення достовірності отриманих результатів (7.15) виконаємо розв'язок тієї ж П-подібної рами на основі канонічного розв'язку методом переміщень без урахування зсуву три рази кінематично невизначуваної рами на основі алгоритму, запропонованого у [15].

Будуємо основну систему, наведену на рис. 7.4. Вихідна статично невизначувана симетрична рама з косиметричним навантаженням зображена на рис. 7.4, а. У відповідності з основною системою (див. рис. 7.4, б) маємо три невідомі:  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $\delta$ . Враховуючи площину косиметричної дії, маємо:  $z_1 = z_2$ . Будуємо чотири стани: два одиничних від  $z_1 = 1$  і  $z_2 = 1$  (рис. 7.5, а, б), один одиничний додатковий (рис. 7.5, в) і завантажений стан  $P$  (рис. 7.5, г, з).

Відповідно до [15] формулюємо канонічну систему методу переміщень (7.14), яка, виходячи з загального підходу, включає три рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0; & (1) \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0; & (2) \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0; & (3) \end{cases} \quad (7.16)$$

Враховуючи косу симетрію, отримаємо  $z_2 = z_1$ .

Тоді будемо мати два рівняння 1) сума 1-го і 2-го – як основне:

2) третє – додаткове.

Сума рівнянь по вертикалі задає систему

$$\begin{cases} (r_{11} + r_{21})Z_1 + (r_{22} + r_{12})Z_2 + (r_{13} + r_{23})Z_3 + R_{1p} + R_{2p} = 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0, \end{cases}$$

або, враховуючи суму по горизонталі, отримаємо:

$$\begin{cases} (r_{11} + r_{12})Z_1 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0; \\ 2r_{31}Z_1 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0. \end{cases} \quad (7.17)$$

Обчислення коефіцієнтів  $r_{ij}$ , задіяних у системі рівнянь (7.17), узгоджуються з наступними

З метою визначення моментів рами значення невідомих підставляємо в рівняння

$$\begin{aligned} M_{31} = M_{42} &= -\frac{EI}{H} \left[ (3\theta + 1) \frac{qH^2}{6EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \right. \\ &- 6\theta \frac{qH^2}{24EI} \left. \left( \frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right) \right] - \frac{qH^2}{12} = \\ &= \frac{qH^3}{6H + l} \left[ 1 + \frac{l}{6H} - \frac{l}{H \left( 6\theta + \frac{l}{H} \right)} - \frac{l^2}{6H^2 \left( 6\theta + \frac{l}{H} \right)} \right]; \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$M_{13} = -\frac{EI}{H} \left[ (3\theta - 1) \frac{qH^2}{6EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - 6\theta \frac{qH^2}{12EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \frac{qH^3}{4EI} \right] +$$

$$+ \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^2}{3} + \frac{qHl}{6 \left( 6\theta + \frac{l}{H} \right)}$$

або

$$M_{13} = \frac{qH^2(4H+l)}{2(6H+l)} \left[ \frac{2 \left( 6 + \frac{l}{H} \right)}{3 \left( 4 + \frac{l}{H} \right)} + \frac{l \left( 6 + \frac{l}{H} \right)}{3H \left( 6\theta + \frac{l}{H} \right) \left( 4 + \frac{l}{H} \right)} \right];$$

Позначимо  $\frac{l}{H} = k$ , тоді

$$M_{31} = M_{42} = \frac{qH^3}{6H+l} \left[ 1 - \frac{k(1-\theta)}{6\theta+k} \right]; \quad (7.19)$$

$$M_{13} = \frac{qH^2(4H+l)EI}{2(6H+l)} \left[ 1 + \frac{2k(1-\theta)}{(4+k)(6\theta+k)} \right].$$

#### 7.4. Приклад аналітичного розрахунку статично невизначуваної рами методом переміщень із урахуванням зсувних деформацій

За отриманими значеннями моментів будуюмо епюру моментів рами (рис. 7.6). За основними формулами 7.4 знаходимо значення перерізуючих сил.

$$Q_{13} = -\frac{6EI\theta}{H^2} \left[ \frac{qH^2}{6EI\left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H}\right)} - \frac{qH^2}{6EI\left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H}\right)} - \frac{2qH^3}{24EI\theta} \right] + \frac{qH}{2} = qH;$$

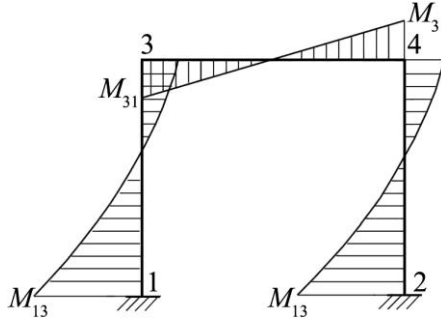


Рис. 7.6. Епюра моментів рами

$$Q_{31} = -\frac{6EI\theta}{H^2} [0 + \varphi - 2\psi] - \frac{qH}{2}; \quad (7.20)$$

Перша складова частина аналогічна  $Q_{13}$  і дорівнює  $\frac{qH}{2}$ , тому

$$Q_{13} = \frac{qH}{2} - \frac{qH}{2} = 0;$$

$$Q_{34} = -\frac{6EI\theta}{l^2} 2\varphi = -\frac{12EI\theta qH^2}{l^2 6EI\left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H}\right)} = -\frac{2qH^2\theta}{l\left(6\theta + \frac{1}{H}\right)}; \quad (7.21)$$

або

$$Q_{34} = -\frac{2qH^3}{6EI + l^2} \left[ 1 - \frac{k(1-\theta)}{6\theta + k} \right];$$

$$Q_{24} = Q_{13} = qH; \quad (7.22)$$

$$Q_{42} = Q_{31} = 0.$$

За отриманими значеннями будемо епюру перерізувальних сил для даної рами (рис. 7.7).

Задля перевірки достовірності отриманих результатів рама розраховувалася і за методом сил, без урахування зсуву, при  $\theta=1$ , отримані епюри моментів та перерізувальних сил порівнювалися відповідно з рис. 7.6 та рис. 7.7.

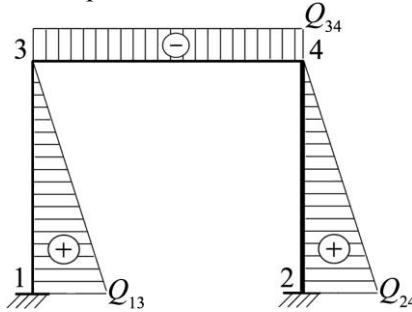


Рис. 7.7. Епюра перерізувальних сил

Для дослідження впливу деформації зсуву на величини зусиль і переміщень у даній рамі побудуємо графіки значень найбільшого моменту  $M_{13}$ , поперечної сили  $Q_{34}$  та незалежного зміщення вузлів рами  $\delta$  при різних значеннях  $\theta$ , тобто побудуємо графіки функцій:

$$M_{13} = f_1(\theta); \quad Q_{34} = f_2(\theta); \quad \delta = f_3(\theta).$$

Перетворимо формулу (7.19):

$$M_{13} = \frac{qH^2(4H+l)}{2(6H+1)} \eta_M(\theta), \tag{7.23}$$

де  $\eta_M(\theta) = 1 + \frac{2k(1-\theta)}{(4+k)(6\theta+k)}$ .

Виконуємо розрахунки  $\eta_M(\theta)$  для різних значень  $k$ , результати обчислень заносимо до табл. 7.1, за якими будуємо графіки функції  $\eta_M(\theta) = f(\theta)$ , (рис. 7.8).

Таблиця 7.1

$\theta$	Значення $\eta_M$			
	$k=0,2$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0	1,09	1,33	1,05	1,6

0,2	1,06	1,15	1,35	1,43
0,4	1,03	1,07	1,23	1,29
0,6	1,02	1,03	1,14	1,18
0,8	1,01	1,01	1,06	1,08
1,0	1,0	1	1	1

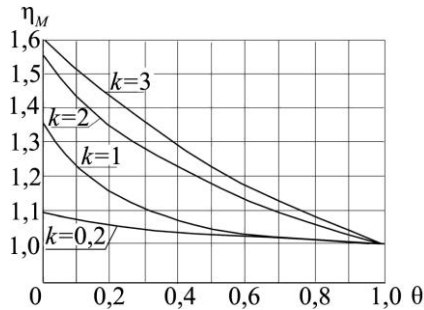


Рис. 7.8. Графіки функції  $\eta_M = f(\theta)$  для різних значень  $k$

Аналогічно для поперечної сили отримаємо:

$$Q_{34} = -\frac{2qH^3}{6HI + l^2} \eta_Q, \quad (7.24)$$

де  $\eta_Q = 1 - \frac{k(1-Q)}{6\theta + k}$ .

Виконуємо обчислення і заносимо їх до табл. 7.2.

За даними табл. 7.2 будемо графіки -  $\eta_Q = f(\theta)$ , (рис. 7.9).

Таблиця 7.2

$\theta$	Значення $\eta_Q$	
	$k=1$	$K=2$
0	0	0
0,2	0,64	0,5
0,4	0,82	0,73
0,5	0,88	0,80
0,6	0,91	0,86

0,8	0,97	0,94
1,0	1,0	0,0

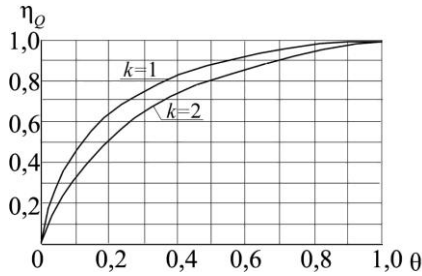


Рис. 7.9. Графіки функції  $\eta_Q = f(\theta)$

Знаючи кут перекосу стояка  $\psi$ , знайдемо зміщення вузлів рами  $\delta$

$$\delta_{13} = \frac{qH^3}{24EI} \left[ \frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right] = \frac{qH^4}{24EI} \left[ \frac{2\frac{l}{H}\theta + 6\theta + \frac{l}{H}}{\theta \left( 6\theta + \frac{l}{H} \right)} \right]$$

або

$$\delta = \frac{qH^4(2H+l)}{8EI(6H+l)} \eta_\delta(\theta),$$

$$\text{де } \eta_\delta(\theta) = \frac{(2\theta + k)(6 + k)}{\theta(6\theta + k)(2 + k)}.$$

Обчислення функції  $\eta_\delta$  виконуємо при  $k = 1$ , так як при значеннях  $\epsilon = 2$  і  $k = 3$  графік майже не змінюється.

Значення функції  $\eta_\delta = f(\theta)$ , заносимо до табл. 7.3 та будуємо графік (рис. 7.10).

Таблиця. 7.3

$\theta$	$\eta_\delta$
0	0
0,2	7,4
0,4	3,1
0,5	2,34

0,6	1,86
0,8	1,3
1	1

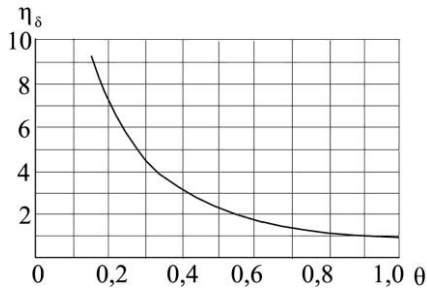


Рис. 7.10. Графік функції  $\eta_{\delta} = f(\theta)$

Виконавши функціональний аналіз за отриманими результатами, можна дійти наступних висновків:

1. Деформації зсуву у більшій мірі впливають на переміщення, ніж на внутрішні зусилля.
2. Вплив деформації зсуву більше проявляється на низьких рамах при  $k=3$ , ніж на високих, тобто деформації зсуву пропорційні погонній жорсткості стрижневих елементів рами.
3. Деформації зсуву при розрахунках рам необхідно враховувати (маючи на увазі уточнення величини внутрішніх зусиль при розрахунках на міцність на величину більше 5%), коли для заданого стрижня маємо величину  $\theta$  у межах 0,2 для низьких рам при  $k=2-3$ , або у межах  $\theta=0,2-0,4$  при  $k=1$ , або у межах  $\theta=0,2-0,8$  при  $k=2-3$  і вище.

Отже, при розрахунках рам на міцність деформації зсуву потрібно враховувати при низьких рамах, коли  $\theta \leq 0,8$ . Коли ж значення  $\theta > 0,8$ , при розрахунках на міцність деформаціями зсуву можна знехтувати.

4. За рахунок деформації зсуву перерізувальні зусилля в незавантажених стрижнях рами зменшуються, причому швидше ніж збільшується момент у небезпечному перерізі рами.



5. Для уточнення зміщень рами при розрахунках, особливо при використанні тонкостінних стрижнів, коли значення  $\theta \leq 0,75$ . деформації зсуву необхідно враховувати для всіх високих і низьких рам при  $k = 0,2 - 3$ .

### **Запитання для самоперевірки**

1. У яких випадках при розрахунках статично невизначуваних рам необхідно врахувати деформації зсуву?
2. У яких випадках треба враховувати деформації зсуву при розрахунках металевих рам?
3. Наведіть формули М.В.Корноухова при визначенні внутрішніх зусиль для балки з двома защемленнями від одиничного повороту рухомого защемлення і кута перекосу стійки з защемленням.
4. Наведіть формули аналітичного розв'язку системи рівнянь рівноваги для П-подібної рами з урахуванням деформацій зсуву.
5. Наведіть графіки залежності внутрішніх зусиль для П-подібної рами від погонної жорсткості елементів рами.
6. Як впливає на величину внутрішніх зусиль в елементах жорсткої рами значення модулів пружності і зсуву матеріалу?

## РОЗДІЛ 8

### ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

#### 8.1. Дискретні моделі розрахункової схеми стрижневої системи

Метод скінченних елементів (МСЕ) для опису НДС суцільних середовищ вперше був застосований у середині 50-х років ХХ сторіччя. Цей метод набув широкого розповсюдження при розрахунках складних континуальних механічних систем, у гідродинаміці, теорії поля та інших фізико-математичних задачах. Про розповсюдженість МСЕ свідчать понад 20 тисяч посилань, що зустрічаються в наукових роботах видатних вчених в сфері будівельної механіки та теорії пружності. Хоча МСЕ застосовується для розв'язку тих самих задач, що і метод скінченних різниць (МСР), вони ґрунтуються на різних фундаментальних співвідношеннях і теоріях. У МСР виконується різницева апроксимація похідних, що входять до диференціальних рівнянь, а математичною основою МСЕ є варіаційне обчислення.

Диференціальні рівняння, що описують конкретну крайову задачу з відповідними граничними умовами застосовуються для постановки варіаційної задачі, яка потім розв'язується безпосередньо.

Варіаційний підхід – це універсальний засіб опису фізичних процесів і закономірностей. У реальних природних процесах, які відбуваються навколо нас, деякі величини досягають свого екстремального значення. Ще Аристотель писав, що природа у своїх явищах завжди йде найкоротшим шляхом із найменшими витратами. Перше формулювання варіаційного принципу стосовно закону заломлення променя світла на межі двох середовищ дав Ферма [22]: “...з різних напрямів променя світла реалізується той, який доставляє мінімум часу...” (тобто який розповсюджується з найбільшою швидкістю). Варіаційний принцип почали застосувати як в оптиці, так і в механіці. Цим займалися відомі вчені XVII-XVIII століть. Основи сучасного варіаційного числення були закладені Леонардом Ейлером, який узагальнив принцип французького вченого Мопертґе: “в істинному русі добуток маси на швидкість і шлях є мінімальним, тобто дія є мінімальною”. Ейлер вперше записав функцію дії:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} mv^2 dt. \quad (8.1)$$

Відомий вчений Лагранж завершив розробку принципу найменшої дії, при цьому сформулював закон збереження енергії

$$k(q, \dot{q}) + v(q) = \text{const} \quad (8.2)$$

в своїй книзі «Аналітична механіка». Формулювання були недостатньо прозорі, що призвело до модифікації принципу найменшої дії вченими Гамільтоном, Якобі, Пуанкаре, Остроградським. У формулюванні Якобі стверджується: «... істинний рух є стаціонарною точкою функціоналу дії». Гамільтон запропонував функціонал у вигляді [22]

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (K - W) dt, \quad (8.3)$$

в якому « $t$ » розглядається як не варійований параметр, а заданий, пізніше до цього дійшов і Остроградський. Під інтегралом маємо функцію Лагранжа.

Функція Лагранжа відновлюється за функціями кінетичної і потенціальної енергій. Якщо розглянути суцільне середовище, то в них діють функціонали від визначальних функцій. Функція визначає числову область на числовій області визначення. Функціонал має числове значення на числовій області функції.

Історично першим варіаційним рівнянням було «золоте правило» механіки – «принцип можливих переміщень», який сформулював Бернуллі. Для матеріальних точок суцільного середовища, які підпорядковані певним кінематичним зв'язкам маємо: «Можлива сумарна робота зовнішніх сил дорівнює сумі робіт цих сил на можливих переміщеннях»:

$$\delta A^e = \sum_{s=1}^n \vec{F}_{(s)} \cdot \delta \vec{u}_{(s)} \quad (8.4)$$

Згідно з принципом Гамільтона, якщо об'єм  $V$  – зайнятий суцільним середовищем, то на інтервалі часу  $t_0 - t_1$ , в межах якого задані значення визначальних функцій ( $t_0$  - початкова конфігурація суцільного середовища,  $t_1$  – деформована конфігурація суцільного середовища) і функціонал дії має стаціонарне значення, то маємо:

$$\delta I + \delta A = 0. \quad (8.5)$$

Вираз (8.5) – це відоме варіаційне рівняння Лагранжа.

Для статичної задачі маємо:

$$\delta\Pi = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{A} = 0, \quad (8.6)$$

де  $\delta\mathcal{U}$  - варіація внутрішньої енергії деформації;  $\delta\mathcal{A}$  - віртуальна робота зовнішніх сил.

Варіаційне рівняння (8.6) безпосередньо застосовується в МСЕ для розв'язання задач статки в механіці суцільного середовища. Для тривимірних тіл рівняння (8.6) має вигляд:

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv - \int_V p^i \delta u_i dv - \int_S q^i \delta u_i ds = 0, \quad (8.7)$$

де  $\sigma^{ij} = c^{ijkl} \varepsilon_{kl}$  – тензор напружень в елементарному околі;  $p^i, q^i$  – сили тяжіння і поверхневі сили в елементарному околі області механічної системи ( $D$ ), що розглядається.

Якщо поділити задану область суцільного середовища на окремі скінченні області  $e$ , то загальний інтеграл області  $D$  буде дорівнювати сумі інтегралів окремих підобластей [23, 24]:

$$\delta\Pi_{(D)} = \sum_{e=1}^M \delta\Pi_{(e)} = \sum_{e=1}^M (\delta\mathcal{U}_{(e)} - \delta\mathcal{A}_{(e)}) = 0, \quad (8.8)$$

де  $\delta\mathcal{U}_{(e)}$  - варіація енергії деформації в окремому скінченному елементі (СЕ);  $\delta\mathcal{A}_{(e)}$  – віртуальна робота зовнішніх сил в окремому СЕ.

Таким чином, для реалізації МСЕ треба здійснити певні операції, які можна розділити на етапи:

- розбиття вихідної механічної системи на окремі скінченні елементи, тобто «побудова дискретної моделі»;
- вибір схеми інтерполяції переміщень у середині кожного скінченного елемента (СЕ);
- визначення залежності між напруженнями і деформаціями у середині СЕ – вибір рівняння стану твердого тіла;
- визначення визначальних рівнянь для всієї дискретної моделі: *побудова системи рівнянь рівноваги СЕ-моделі*;
- розв'язок системи лінійних рівнянь рівноваги;
- обчислення значень величин НДС – переміщень, деформацій, напружень, внутрішніх зусиль і т.д.

Розглянемо плоску стрижневу механічну систему – раму, наведену на рис. 8.1, і виконаємо всі етапи операцій:

I. Будуємо дискретну модель, тобто вводимо рухомі затиснення за такими ж правилами, як і в методі переміщень, за винятком того, що всі навантаження зосереджених сил і моментів повинні бути вузлами, а в середині СЕ повинна бути стала жорсткість стрижня і рівномірно розподілене навантаження. Таким чином, для побудови СЕ-моделі визначаємо окремі ділянки, які будемо вважати стрижневими СЕ. Точки (рухомі затиснення) між СЕ називаються вузлами, їх послідовно пронумеровано (рис. 8.1).

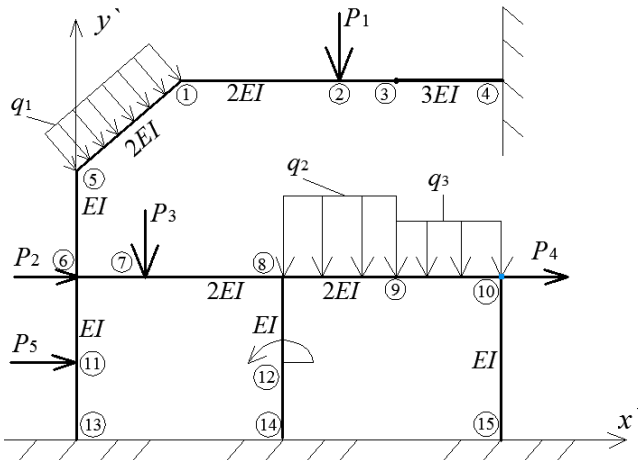


Рис. 8.1

При визначенні енергії деформації всієї дискретної моделі скористаємося співвідношеннями питомих енергій для стрижня з урахуванням поздовжніх сил і згинальних моментів:

$$\delta U = \sum_{s=1}^{12} \left[ \int_{l_s} N \delta_\epsilon dx + \int_{l_s} M \delta_k dx \right] \quad (8.9)$$

де  $N = EA \frac{du}{dx}$ ;  $\delta_\epsilon = \delta \frac{du}{dx}$ ;  $M = EI \frac{d^2 w}{dx^2}$ ;

$$\delta_k = \delta \frac{1}{pk} dx = \delta \frac{d^2 w}{dx^2} dx. \quad (8.10)$$

З урахуванням (8.10) варіація енергії деформації  $CE$  буде мати вигляд:

$$\delta U_{(e)} = \int_0^l EA \frac{du}{dx} \delta \frac{du}{dx} dx + \int_0^l EA \frac{d^2w}{dx^2} \delta \frac{d^2w}{dx^2} dx. \quad (8.11)$$

II. Для визначення роботи внутрішніх сил у межах одного  $CE$  треба ввести локальну систему координат, розглянути елементарну область стрижня, записати вираз внутрішніх зусиль як функцію локальних координат, проінтегрувати і отримати вираз енергії деформації в скінченному елементі.

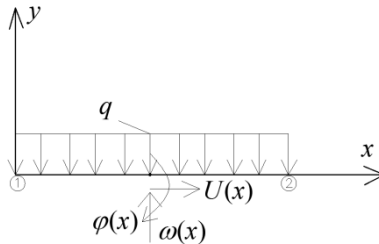


Рис. 8.2

## 8.2. Вузлові характеристики стержнів і функцій форми стрижневого скінченного елемента

Розв'язуємо задачу розрахунку рами за методом переміщень, маючи у якості невідомих узагальнені переміщення, виходячи з технічної теорії згину стрижня-балки, тобто у кожній елементарній точці на нейтральній осі стрижня маємо три невідомі функції:

$$u(x) = f_1(x); \quad w(x) = f_2(x); \quad \varphi(x) = f_3(x). \quad (8.12)$$

Враховуючи гіпотезу плоских перерізів – технічної теорії згину, можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{d\omega(x)}{dx}. \quad (8.13)$$

Функції переміщень у межах  $CE$  кожного стержня безперервні, що дає можливість зобразити їх наближено – у формі поліноміальних апроксимацій.

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots \quad (8.14)$$

$$\omega(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \dots$$

Постає питання: скільки необхідно утримувати членів поліномів (8.14) для забезпечення вимог достовірності отриманих розв'язків? Число утримуваних членів апроксимуючих поліномів визначається порядком похідних у (8.11) і має бути кратним числу вузлів СЕ. Виходячи з цього, маємо для  $u(x)$  похідну першого ступеня, а для  $\omega(x)$  другого, тоді для  $u(x)$  треба отримати в (8.14) два члени поліному, а для  $\omega(x)$  - чотири.

Розглянемо скінченний стержневий елемент. Враховуючи невідомі узагальнені переміщення у вузлах, визначимо коефіцієнти використаних поліномів через ці вузлові переміщення, тоді в якості невідомих розв'язувальних рівнянь СЕ-моделі будуть виступати тільки незалежні вузлові переміщення, а переміщення точок у межах між вузлами будуть залежні від цих вузлових переміщень, остаточно маємо:

- для поздовжніх переміщень  $u(x)$ :

$$u(x) = c_1 + c_2x. \quad (8.15)$$

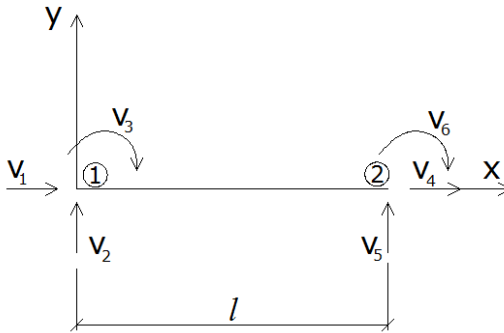


Рис. 8.3.

Виходячи з граничних умов і записуючи поліном (8.15) для вузлів 1 і 2, отримуємо два рівняння з невідомими  $c_1$  і  $c_2$ . Розв'язуючи їх, отримаємо:

$$\begin{cases} u(0) = c_1 = v_1; & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(l) = c_1 + c_2l = v_4; & (2) \end{cases}$$

Підставивши (1) в (2), дістанемо:

$$v_1 + c_2l = v_4; \quad c_2 = (v_4 - v_1) \frac{1}{l}.$$

Підставляємо значення коефіцієнтів  $c_1$  і  $c_2$  в (8.15). Маємо:

$$u(x) = v_1 + (v_4 - v_1) \frac{1}{l} x = \left(1 - \frac{x}{l}\right) v_1 + \frac{x}{l} v_4.$$

Коефіцієнти при вузлових переміщеннях  $v_1, v_4$  назвемо *функціями форми*:

$$\Phi_1(x) = 1 - \frac{x}{l}; \quad \Phi_4(x) = \frac{x}{l}. \quad (8.16)$$

З урахуванням (8.16) поліном (8.15) має вигляд:

$$u(x) = \Phi_1(x) \cdot v_1 + \Phi_4(x) \cdot v_4. \quad (8.17)$$

Для прогину  $\omega(x)$ , враховуючи вимоги із порядком похідної для цієї функції в (8.11) і кратність членів поліному числу вузлів в *CE*, отримаємо:

$$\omega(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3. \quad (8.18)$$

Для визначення коефіцієнтів поліному (8.18) виконаємо дії аналогічно поліному (8.15).

З граничних умов отримаємо:

- для переміщень  $\omega(x)$

$$\begin{cases} \omega(0) = \alpha_1 = v_2; & (1) \\ \omega(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 = v_5; & (2) \end{cases} \quad (8.19)$$

- для кутів повороту  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{d\omega(x)}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 \cdot x + 3\alpha_4 \cdot x^2;$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = \alpha_2 = v_3; & (3) \\ \varphi(l) = \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 = v_6; & (4) \end{cases} \quad (8.20)$$

Остаточно маємо систему, яка складається із чотирьох рівнянь (8.19), (8.20) і чотирьох невідомих  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 = v_2; & (1) \\ \alpha_2 = v_3; & (2) \\ \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 = v_5; & (3) \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 = v_6. & (4) \end{cases}$$

Підставляючи (1) і (2) в (3) і (4), отримаємо:



$$\begin{cases} v_2 + v_3 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 = v_5; \\ v_3 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 = v_6. \end{cases} \quad (8.21)$$

Після деяких перетворень в (8.21) отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 = v_5 - v_2 - v_3 l; \\ \alpha_3 2l + \alpha_4 3l^2 = v_6 - v_3; \end{cases} \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} & - \begin{cases} \alpha_3 2l^2 + \alpha_4 2l^3 = 2v_5 - 2v_2 - 2v_3 l; \\ \alpha_3 2l^2 + \alpha_4 3l^3 = lv_6 - lv_3; \end{cases} \\ & - \alpha_4 l^3 = 2v_5 - 2v_2 - 2lv_3 - lv_6 + lv_3; \\ & - \alpha_4 l^3 = -2v_2 - lv_3 + 2v_5 - lv_6; \\ & \alpha_4 = \frac{2v_2 + lv_3 - 2v_5 + lv_6}{l^3}; \end{aligned} \quad (8.23)$$

Підставимо (8.23) в (1) - (8.21):

$$\begin{aligned} \alpha_3 l^2 &= v_5 - v_2 - lv_3 - 2v_2 - lv_3 + 2v_5 - lv_6; \\ \alpha_3 &= \frac{-3v_2 - 2lv_3 + 3v_5 - lv_6}{l^2} \end{aligned} \quad (8.24)$$

Підставимо значення  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  в (8.18):

$$\begin{aligned} \omega(x) &= v_2 + v_3 x + \frac{1}{l^2} (-3v_2 - 2lv_3 + 3v_5 - lv_6) x^2 + \\ &+ \frac{1}{l^3} (2v_2 + lv_3 - 2v_5 + lv_6) x^3. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Згрупуємо всі члени (8.25) відповідно до  $v_2, v_3, v_5, v_6$ :

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right) v_2 + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) v_3 + \\ &+ \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right) v_5 + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) v_6 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \omega(x) = & \frac{1}{l^3} (2x^3 - 3lx^2 + l^3) \nu_2 + \frac{1}{l^2} (x^3 - 2lx^2 + l^2x) \nu_3 + \\ & + \frac{1}{l^3} (-2x^3 + 3lx^2) \nu_5 + \frac{1}{l^2} (x^3 - lx^2) \nu_6. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Множники з  $\nu_2, \nu_3, \nu_5, \nu_6$  позначимо як функції форми відповідно  $\Phi_2(x), \Phi_3(x), \Phi_5(x), \Phi_6(x)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= \frac{1}{l^3} (2x^3 - 3lx^2 + l^3); \\ \Phi_3(x) &= \frac{1}{l^2} (x^3 - 2lx^2 + l^2x); \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$\Phi_5(x) = \frac{1}{l^3} (-2x^3 + 3lx^2);$$

$$\Phi_6(x) = \frac{1}{l^2} (x^3 - lx^2).$$

Функції форми переміщень (8.16), (8.27) відносно перемінної координати осі стрижня  $x$  змінюються у межах  $l \div 0$ , а функції  $\varphi(x)$  у межах  $\pm \frac{1}{8} \div 0$ . Функції (8.16) лінійні, а функції (8.27) – кубічні.

Сума функцій форми  $u(x)$  і  $\omega(x)$  у будь-якому перерізі дорівнюють 1 - це умова повноти апроксимуючих поліномів.

З використанням наведених поліноміальних апроксимацій узагальнених переміщень  $u(x)$  і  $\omega(x)$  отримуємо:

$$\omega(x) = \Phi_2(x)\nu_2 + \Phi_3(x)\nu_3 + \Phi_5(x)\nu_5 + \Phi_6(x)\nu_6; \quad (8.28)$$

Представлення у формі (8.17) і (8.28) дозволяє подати узагальнений вектор переміщень, а також тензори деформацій і напружень у матрично-векторній формі:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [\Phi] \{v\} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & \Phi_3 & 0 & \Phi_5 & \Phi_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \\ \nu_5 \\ \nu_6 \end{Bmatrix}, \quad (8.29)$$


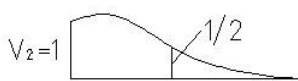

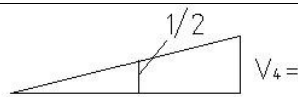
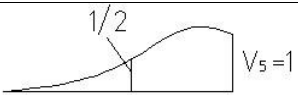

$\Phi_1(x)$	$V_1=1$ 	$\Phi_1 _x = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}$
$\Phi_2(x)$	$V_2=1$ 	$\Phi_2 _x = \frac{l}{2} = \frac{1}{l^3} \left( 2 \frac{l^3}{8} - \right.$ $\left. - 3 \frac{l^2}{4} + l^3 \right) = \frac{1}{2}$
$\Phi_3(x)$	$\varphi_3=1$ 	$\Phi_3 _x = \frac{l}{2} = \frac{1}{l^2} \left( \frac{l^3}{8} - 2l \frac{l^2}{4} + \right.$ $\left. + \frac{l^3}{2} \right) = \frac{1}{8}l$
$\Phi_4(x)$	 $V_4=1$	$\Phi_4 _x = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}$
$\Phi_5(x)$	 $V_5=1$	$\Phi_5 _x = \frac{l}{2} = \frac{1}{l^3} \left( -2 \frac{l^3}{8} + \right.$ $\left. + 3l \frac{l^2}{4} \right) = \frac{1}{2}$
$\Phi_6(x)$	 $\varphi_6=1$	$\Phi_6 _x = \frac{l}{2} = \frac{1}{l^2} \left( \frac{l^3}{8} - \right.$ $\left. - l \frac{l^2}{4} \right) = -\frac{1}{8}l$

Рис. 8.4

$$\{\varepsilon\} = [d]\{u\} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} [\Phi]\{v\} = [B]\{v\}; \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned}
 [B] = [d][\Phi] &= \begin{bmatrix} \frac{d\Phi_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{d^2\Phi_4}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} & \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} & 0 & \frac{d^2\Phi_5}{dx^2} & \frac{d^2\Phi_6}{dx^2} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & B_{14} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} & 0 & B_{25} & B_{26} \end{bmatrix} \quad (8.31)
 \end{aligned}$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{v\}^T [B]^T; \quad (8.32)$$

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} [B]^T \{v\} = [E][B]\{v\}. \quad (8.33)$$

### 8.3. Побудова матриці жорсткості стрижневого скінченного елемента у локальній та глобальній системах координат

Розглянемо варіацію енергії деформації СЕ у загальному вигляді (8.7) з використанням співвідношень (8.32), (8.33) і отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \delta U_{(e)} &= \int_e \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx = \int_e \delta\{v\}^T [B]^T [E][B]\{v\} dx = \\
 &= \delta\{v\}^T [K]_{(e)} \{v\} = \delta\{v\}^T = \{R\}_{(e)}; \quad (8.34)
 \end{aligned}$$

$$\text{де } [K]_{(e)} = \int_0^l [B]^T [E][B] dx; \quad (8.35)$$

$$\{R\}_{(e)} = [K]\{v\}; \quad (8.36)$$

$$[K]_{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & & \dots & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & \dots \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

$K_{ij}$ ,  $i$  - напрямлення, в якому виникає реакція;  $j$  - напрямлення в'язі у вузлах, від одиничного зміщення, в якій виникає реакція.

Якщо  $\delta v_2 = 1$ , то маємо

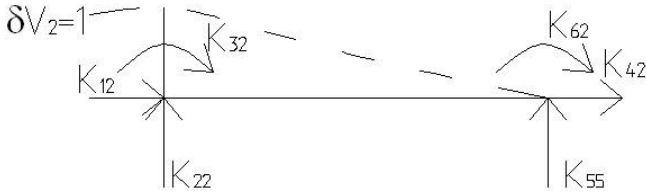


Рис. 8.5

$$[K]_{(e)} = \int_0^l \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \\ 0 & B_{23} \\ B_{14} & 0 \\ 0 & B_{25} \\ 0 & B_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & B_{14} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} & 0 & B_{25} & B_{26} \end{bmatrix} dx =$$

$$= \int_0^l \begin{bmatrix} B_{11}B_{11}EA & 0 & 0 & B_{11}B_{14}EI & 0 & 0 \\ 0 & B_{22}B_{22}EI & B_{22}B_{23}EI & 0 & B_{22}B_{25}EI & B_{22}B_{26}EI \\ 0 & B_{23}B_{22}EI & B_{23}B_{23}EI & 0 & B_{23}B_{25}EI & B_{23}B_{26}EI \\ B_{14}B_{11}EA & 0 & 0 & B_{14}B_{14}EI & 0 & 0 \\ 0 & B_{25}B_{22}EI & B_{25}B_{23}EI & 0 & B_{25}B_{25}EI & B_{25}B_{26}EI \\ 0 & B_{26}B_{22}EI & B_{26}B_{23}EI & 0 & B_{26}B_{25}EI & B_{26}B_{26}EI \end{bmatrix} \times dx, \quad (8.38)$$

Матриця (8.38) симетрична

$$[K]_{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & 0 & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\ 0 & K_{52} & K_{53} & 0 & K_{55} & K_{56} \\ 0 & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}. \quad (8.39)$$

Обчислимо деякі коефіцієнти матриці жорсткості СЕ в локальній системі координат (див. 8.38):

$$K_{11} = \int_0^l B_{11}^2 E A dx = \int_0^l \left( \frac{d\Phi_1}{dx} \right)^2 E A dx = \int_0^l \left( \frac{1}{l} \right)^2 E A dx =$$

$$= \frac{EA}{l^2} x \Big|_0^l = \frac{EA}{l^2} l = \frac{EA}{l} = f, \text{ кН/м};$$

$$K_{22} = \int_0^l B_{22}^2 E I dx = \int_0^l \left( \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} \right)^2 E I dx = \int_0^l \frac{EI}{l^6} (12x - 6l)^2 dx =$$

$$= \frac{EI}{l^6} \left( 144 \frac{x^3}{3} - 144l \frac{x^2}{2} + 36l^2 x \right) \Big|_0^l = \frac{EI}{l^3} (48 - 72 + 36) =$$

$$= \frac{12EI}{l^3} = \frac{12i}{l^2}, \quad i = \frac{EI}{l};$$

$$K_{23} = \int_0^l B_{11} B_{23} E I dx = \int_0^l \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \cdot \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} E I dx =$$

$$= \int_0^l \frac{EI}{l^5} (12x - 6l)(6x - 4l) dx = \frac{EI}{l^5} \int_0^l (72x^2 - 48lx - 36lx + 24l^2) dx =$$

$$= \frac{EI}{l^5} \left( 72 \frac{x^3}{3} - 84l \frac{x^2}{2} + 24l^2 x \right) \Big|_0^l = \frac{EI}{l^2} (24 - 42 + 24) = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6i}{l};$$

$$K_{26} = \int_0^l B_{22} B_{26} E I dx = \int_0^l \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \cdot \frac{d^2\Phi_6}{dx^2} E I dx =$$

$$= \int_0^l \frac{EI}{l^5} (12x - 6l)(6x - 2l) dx = \frac{EI}{l^5} \int_0^l (72x^2 - 24lx - 36lx + 12l^2) dx =$$

$$= \frac{EI}{l^5} \left( 72 \cdot \frac{x^3}{3} - 60l \frac{x^2}{2} + 12l^2 x \right) \Big|_0^l = \frac{EI}{l^2} (24 - 30 + 12) = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6i}{l}.$$

Обчислюючи всі інтеграли в (8.38) з урахуванням симетрії, отримаємо вираз для визначення компонентів матриці жорсткості СЕ в локальній системі координат:

$$[K]_{(e)}^{z.c.} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & 0 & -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & \frac{6i}{l} & 4i & 0 & \frac{6i}{l} & 2i \\ -f & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & 0 & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & \frac{6i}{l} & 2i & 0 & \frac{6i}{l} & 4i \end{bmatrix}. \quad (8.40)$$

#### 8.4. Визначення внутрішніх зусиль у стрижневих скінченних елементах

Для обчислення узагальнених (приведених) вузлових сил МСЕ треба використати визначення віртуальної роботи зовнішніх сил, які діють у скінченному елементі, наведеному на рис. 8.6, в додатньому напрямку:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [\Phi]\{v\}; \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}.$$

$$\delta A_{(e)} = \int_0^l \delta\{u\}\{P\}dx = \int_0^l \delta\{v\}^T [\Phi]^T \{P\}dx =$$

$$= \int_0^l \delta\{v\}^T \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \\ 0 & \Phi_3 \\ \Phi_4 & 0 \\ 0 & \Phi_5 \\ 0 & \Phi_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q \end{Bmatrix} dx = \delta\{v\}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \Phi_2 q \\ \Phi_3 q \\ 0 \\ \Phi_5 q \\ \Phi_6 q \end{Bmatrix} dx = \delta\{v\}^T \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix}, \quad (8.41)$$

де  $\{Q\}$  – вектор приведених вузлових сил.

Наводимо обчислення компонент вектора  $\{Q\}$ , здійснюючи інтегрування по  $x$  відповідних компонент матриці-стовпчика  $\{\Phi_n q\}$ :

$$Q_1 = 0; \quad Q_4 = 0;$$

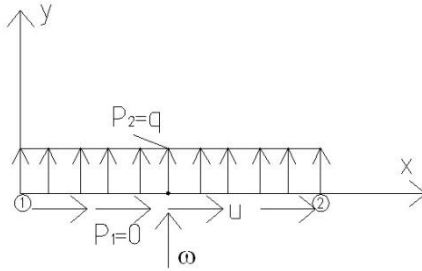


Рис. 8.6

$$Q_2 = \int_0^l \Phi_2(x) q dx = \int_0^l \frac{1}{l^3} (2x^3 - 3lx^2 + l^3) q dx =$$

$$= \frac{q}{l^3} \left( 2 \frac{x^4}{4} - 3l \frac{x^3}{3} + l^3 x \right) \Big|_0^l = ql \left( \frac{1}{2} - 1 + 1 \right) = \frac{ql}{2};$$

$$Q_3 = \int_0^l \Phi_3(x) q dx = \int_0^l \frac{1}{l^2} (x^3 - 2lx^2 + l^3 x) q dx =$$

$$= \frac{q}{l^2} \left( \frac{x^4}{4} - 2l \frac{x^3}{3} + l^2 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^l = \frac{ql^4}{l^2} \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{ql^2}{12};$$

$$Q_5 = \int_0^l \Phi_5(x) q dx = \int_0^l \frac{1}{l^3} (-2x^3 + 3lx^2) q dx =$$

$$= \frac{q}{l^3} \left( -2 \frac{x^4}{4} + 3l \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^l = ql \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{ql}{2};$$

$$Q_6 = \int_0^l \Phi_6(x) q dx = \int_0^l \frac{1}{l^2} (x^3 - lx^2) q dx =$$

$$= \frac{q}{l^2} \left( \frac{x^4}{4} - l \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^l = ql^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{ql^2}{12}.$$

В результаті обчислення (8.41) одержимо вектор приведених вузлових навантажень при дії зовнішнього вектора  $\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q \end{Bmatrix}$  при додатному напрямі  $q$  (див. рис. 8.5):



$$\{Q\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ 0 \\ \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{array} \right\}. \quad (8.42)$$

При дії рівномірно розподіленого навантаження за схемою, що наведена на рис. 8.7, отримаємо значення компонент вектора  $\{Q\}$  з

протилежними знаками, тобто якщо маємо  $\{P\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -q \end{array} \right\}$ , то:

$$\{Q\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{array} \right\}. \quad (8.43)$$

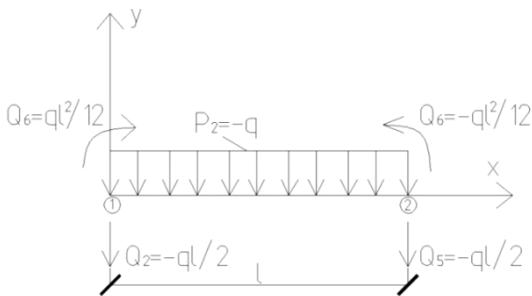


Рис. 8.7

### Запитання для самоперевірки

1. Які аналітичні співвідношення є математичною основою методу скінченних елементів ?
2. Що означає розв'язати задачу математичної фізики за допомогою варіаційного підходу?
3. Наведіть „принцип можливих переміщень” за формулюванням Бернуллі.
4. Наведіть і поясніть варіаційне рівняння Лагранжа.
5. Наведіть етапи розрахунку механічних систем за методом скінченних елементів.
6. Наведіть варіаційне рівняння питомої енергії деформації для стрижневого скінченного елемента.
7. Що таке локальна і глобальна системи координат, які використовуються при побудові основних співвідношень МСЕ?
8. Що ми називаємо функціями форми скінченного елемента?
9. Які існують критерії вибору поліноміальних апроксимуючих функцій для відповідного типу скінченного елемента?
10. Яку функцію при побудові основних співвідношень методу скінченних елементів вони виконують?
11. Які апроксимуючі функції використовуються при виведенні основних співвідношень МСЕ для плоских згинальних рам?
12. Скільки ступенів свободи має основний тип стрижневого СЕ плоскої рами (з двома защемленнями). Наведіть співвідношення для узагальненого вектора переміщень у матрично-векторній формі.
13. Наведіть рівняння варіації енергії деформації стрижневого СЕ у загальному вигляді у матрично-векторній формі.
14. Наведіть співвідношення для матриці (стовпчика) реакцій у матрично-векторній формі у локальній системі координат.
15. Наведіть співвідношення для матриці жорсткості стрижневого СЕ у локальній системі координат.

## РОЗДІЛ 9

### РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

#### 9.1. Вузлові характеристики дискретної моделі

Обчислення внутрішніх зусиль суцільного середовища безпосередньо пов'язано з місцевою (лагранжевою) системою координат [15, 23, 24]. Відповідно до дискретної стрижневої моделі цій місцевій системі відповідає система координат локальної під-області, тобто обчислення внутрішніх зусиль пов'язано з скінченними елементами і описується локальною системою координат, яка наведена на рис. 8.2 і рис. 8.3 і пов'язана з вузловими узагальненими переміщеннями  $v_i$   $i = 1, 6$ . Але систему рівнянь рівноваги скінченно-елементарної моделі (СЕ-моделі) доцільно сформуувати у єдиній глобальній системі координат  $Ox'y'$  відносно узагальнених вузлових переміщень усієї дискретної моделі плоскої стрижневої системи:

$$\left\{ \begin{matrix} \overline{\overline{\Delta}} \\ \overline{\overline{\Delta}} \end{matrix} \right\} = \left[ \begin{matrix} \overline{\overline{k}} \\ \overline{\overline{k}} \end{matrix} \right]^{-1} \left\{ \begin{matrix} \overline{\overline{F}} \\ \overline{\overline{F}} \end{matrix} \right\}, \quad (9.1)$$

де  $\left\{ \begin{matrix} \overline{\overline{\Delta}} \\ \overline{\overline{\Delta}} \end{matrix} \right\}$  - загальний вектор переміщень для всієї СЕ-моделі з регулярною топологією в глобальній системі координат (нумерація вузлів пропонується зліва направо і зверху вниз);  $\left[ \begin{matrix} \overline{\overline{k}} \\ \overline{\overline{k}} \end{matrix} \right]^{-1}$  - зворотна матриця жорсткості всієї СЕ-моделі в глобальній системі координат;  $\left\{ \begin{matrix} \overline{\overline{F}} \\ \overline{\overline{F}} \end{matrix} \right\}$  - вектор вузлового навантаження всієї СЕ-моделі

в глобальній системі координат.

Для розрахункової механічної плоскої стрижневої системи, яка наведена на рис. 9.1, отримаємо відповідну СЕ-моделю, якій відповідають наступні схеми зазначених векторів узагальнених вузлових

переміщень і навантажень, а також коефіцієнти матриці жорсткості (див. рис. 9.1).

Використовуючи матрицю інцидентії, побудова якої залежить від типу топологічної схеми конкретної СЕ- моделі, і внаслідок умови нерозривності деформацій у вузлах дискретної

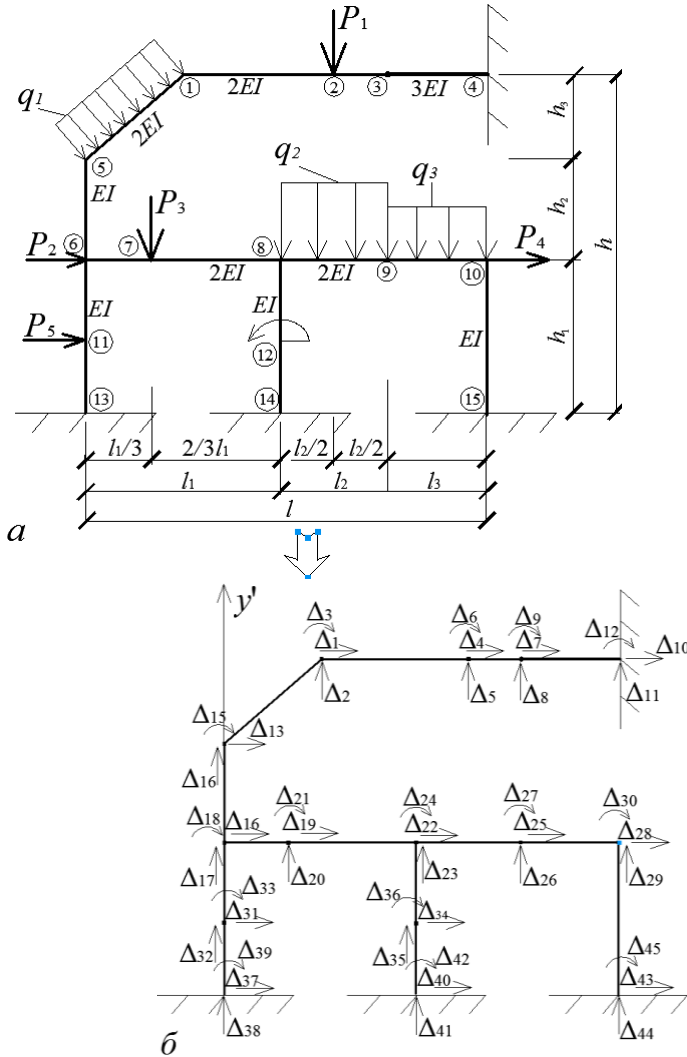
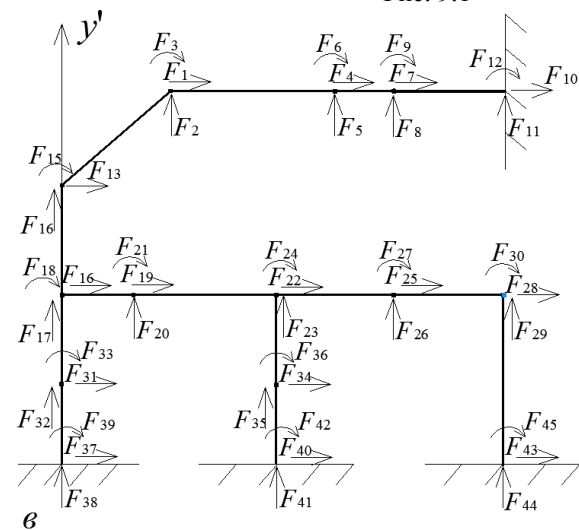
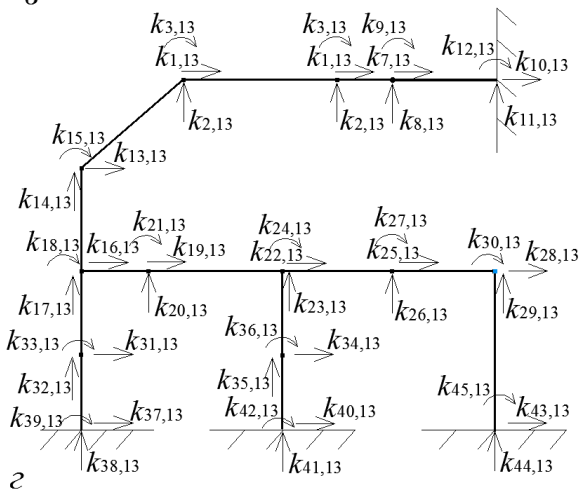


Рис. 9.1



6



2

Рис. 9.2

моделі досліджуваної механічної системи можна обчислити після розв'язання рівнянь рівноваги (9.1), вузлові переміщення конкретного скінченного елемента

$$\left\{ \overbrace{\Delta_{(e)}}^{\text{з.с.к}} \right\} = [I]_{(CE)} \left\{ \overbrace{\Delta_{(CE)}}^{\text{з.с.к}} \right\}, \quad (9.2)$$

Усі векторно-матричні (тензорні) величини при переході від старої системи координат до нової підпорядковані перетворенню як тензорні величини за певним законом (як коваріантні або контраваріантні компоненти). При цьому тензори перетворень визначаються диференціюванням радіуса-вектора матеріальних точок суцільного середовища, які описані місцевою (лагранжевою) системою координат і пов'язані з твердим тілом. У нашому випадку місцева система координат  $Ox$  і глобальна система координат  $O'x'y'$  є декартовими системами координат, тому перехід від старої системи  $Ox'y'$  до нової системи координат  $Ox$  здійснюється за законом ортогонального перетворення з використанням ортогонального прямого тензора перетворення  $\hat{T}$  (перехід у зворотному напрямі – від  $Ox$  до

$O'x'y'$  здійснюється за зворотнім тензором перетворення  $\hat{T}^{-1} \equiv \hat{T}^*$ ). Ураховуючи, що вибраний стрижневий СЕ має шість ступенів свободи, то з використанням відомого ортогонального тензора перетворень (прямого) [15] маємо:

$$\hat{T} = T_{j'}^{i'} \bar{e}_i \bar{e}^{j'}; \quad (9.3)$$

$$T_{1'}^{1'} = \cos \alpha; \quad T_{2'}^{1'} = \sin \alpha; \quad T_{1'}^{2'} = -\sin \alpha;$$

$$T_{2'}^{2'} = \cos \alpha; \quad T_{3'}^{1'} = T_{3'}^{2'} = T_{1'}^{3'} = T_{2'}^{3'} = 0; \quad T_{3'}^{3'} = 1,$$

Побудуємо пряму і обернену матриці ортогонального перетворення матрично-векторних величин у шестивимірному просторі локального скінченно елементного півпростору (див. рис. 8.3):

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (9.4)$$

$$[T]^{-1} \equiv [T]^* \quad (9.5)$$

На рис. 9.3 наведена схема переходу від системи координат  $O'x'y'$  до системи  $Oxy$  (через поворот проти годинникової стрілки осі  $O'x'$  до зміщення з віссю  $Ox$ ). При перетворенні у кожному СЕ початок глобальної системи координат умовно зміщується з початком відповідної локальної системи координат.

Таким чином, якщо ми обчислили за допомогою матриці інциденції вектор вузлових переміщень СЕ  $\tilde{\Delta}_i$ ,  $i=1,6$  відповідно з (9.2), то за законом перетворення коваріантного тензора (див. рис. 9.3) ми можемо визначити вектор вузлових узагальнених переміщень  $\{u\}_{(e)}$  у локальній системі координат за формулою:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{л.с.} \\ u \\ \end{matrix} \right\}_{(e)} = [T]_{(e)} \{\tilde{\Delta}\}_{(e)}. \quad (9.6)$$

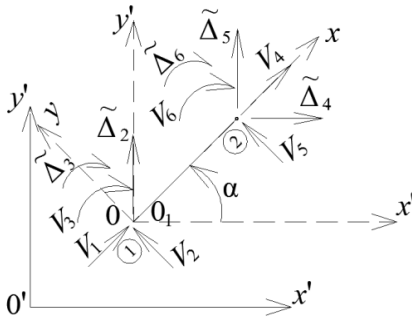


Рис. 9.3

## 9.2. Визначення векторів реакцій і матриці жорсткості дискретної моделі рами

З урахуванням вище зазначеного згідно з виразом варіації енергії деформації і віртуальної роботи для скінченного елемента (8.11), (8.41), можна отримати наступні основні матрично-векторні співвідношення для стрижневого СЕ:

$$\delta U_{(e)} = \delta \{u\}_{(e)}^T \overbrace{\overline{K}}^{л.с.} \{u\}_{(e)}; \quad (9.7)$$

$$\delta U_{(e)} = \delta \{u\}_{(e)}^T \{R\}_{(e)}, \quad (9.8)$$

де  $\{R\}_{(e)}$  – матриця-стовпчик реакцій внутрішніх сил у СЕ.

Підставимо послідовно (9.6) у (9.7) і (9.8) і отримаємо:

- матрицю жорсткості СЕ у глобальній системі координат для обчислення переміщень

$$\delta U_{(e)} = \delta \{\Gamma\}_{(e)}^T \left\{ \overbrace{\overline{\Delta}}^{з.с.к} \right\}_{(e)} \left[ \overbrace{\overline{K}}^{л.с.} \right]_{(e)} [\Gamma]_{(e)} \{\tilde{\Delta}\}_{(e)} = \delta \{\tilde{\Delta}\}_{(e)}^T \left[ \overbrace{\overline{K}}^{з.с.к} \right]_{(e)} \{\tilde{\Delta}\}_{(e)}, \quad (9.9)$$

$$\text{де } \left[ \overbrace{\overline{K}}^{з.с.к} \right]_{(e)} = [\Gamma]_{(e)}^T \left[ \overbrace{\overline{K}}^{л.с.} \right]_{(e)} [\Gamma]_{(e)}, \quad (9.10)$$

$\left[ \overbrace{\overline{K}}^{з.с.к} \right]_{(e)}$  - матрицю жорсткості СЕ у глобальній системі координат

для обчислення реакцій у локальній системі координат скінченного елемента

$$\{R\}_{(e)} = \left[ \overbrace{\overline{K}}^{л.с.} \right]_{(e)} [\Gamma]_{(e)} \{\tilde{\Delta}\}_{(e)} = [h]_{(e)} \{\tilde{\Delta}\}_{(e)}, \quad (9.11)$$

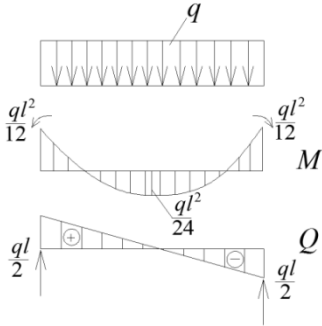
$$\text{де } [h]_{(e)} = \left[ \overbrace{\overline{K}}^{л.с.} \right]_{(e)} [\Gamma]_{(e)}. \quad (9.12)$$

Вектор вузлових реакцій  $\{R\}_{(e)}$  у локальній системі координат СЕ зумовлений тільки отриманими після розв'язання системи рівнянь (9.1) узагальненими переміщеннями вузлів дискретної моделі, а для визначення внутрішніх зусиль у міжвузловому просторі кожного окремого скінченного елемента СЕ-моделі і побудови відповідних епюр треба ще враховувати у вузлах скінченного елемента вектор від міжвузлового навантаження (згідно з основною системою МСЕ у формі переміщень). Остаточоно можна отримати для окремого СЕ сумарний вектор вузлових реакцій у скінченному елементі:



$$\{S\}_{(e)} = \{R\}_{(e)}^{\Delta} + \{P\}_{(e)}^q, \quad (9.13)$$

де  $\{R\}_{(e)}^{\Delta}$  - вектор реакцій від отриманих значень вузлових переміщень СЕ-моделі як для основної системи методу скінченних елементів – аналога основної системи методу переміщень;  $\{P\}_{(e)}^q$  – вектор реакцій від вузлового навантаження.



Для рівномірно розподіленого навантаження маємо наступні реакції (зумовлені внутрішніми силами): згинальні моменти і поперечні сили на рухомих защемленнях – кінців стрижневого СЕ (рис. 9.4):

Рис.9.4

$$\{P\}_{(e)}^q = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{24} \\ -\frac{12}{0} \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{24} \\ 12 \end{Bmatrix}. \quad (9.14)$$

Додатні знаки векторів реакцій  $\{R\}_{(e)}^{\Delta}$  і  $\{P\}_{(e)}^q$  (на математичному рівні) співпадають з додатними напрямленнями вектора вузлових узагальнених переміщень стрижневого СЕ (див. рис. 9.4). Тому на фізичному рівні маємо:

Якщо  $R_i^{(n-k)} < 0$  після виконання операцій за формулами (9.11), (9.12), то при додаванні реакцій на фізичному рівні напрямлення реакцій  $R_i^{(n-k)}$ , яке зображене на рис. 9.4, треба замінити на протилежне.

Після отримання значень компонент сумарного вектора вузлових реакцій  $\{S\}_{(e)}$  треба розробити фізичну схему з урахуванням сумар-

ного математичного знака, а затим на цій же схемі розставити знаки відповідні прийнятим знакам внутрішніх зусиль  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  на кожному кінці  $CE$ -стрижня.

Наприклад, якщо сумарні компоненти вектора  $\{S\}_{(e)}$  будуть мати додатній знак, то маємо таку схему, на якій покажемо  $S_i^{(n-k)}$  і відповідні знаки  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ :

Якщо  $S_i^{(n-k)} < 0$ , то знаки відповідних  $M^{(n-k)}$ ,  $Q^{(n-k)}$ ,  $N^{(n-k)}$  будуть протилежні. Згинальний момент у середньому перерізі  $CE$ -стрижня визначається за формулою:

$$M_{сер.}^{праворуч} = -M^k + Q^k \frac{l}{2} - \left(\frac{ql}{2}\right) \frac{l}{4}. \quad (9.15)$$

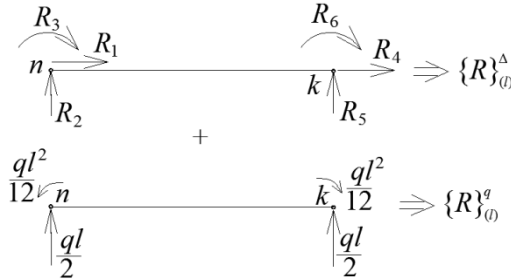


Рис. 9.5

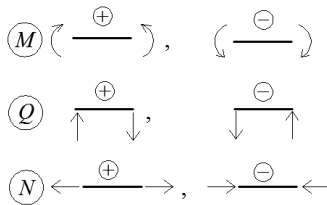


Рис. 9.6

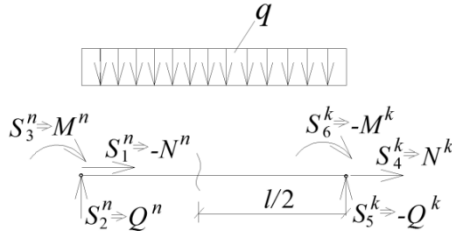


Рис. 9.7

Приклад обчислення внутрішніх зусиль із міжвузловим рівномірно розподіленим навантаженням: після обчислення системи рівнянь і врахування матриці інцидентії маємо, наприклад, для стрижня 2-3, наступні значення компонент вектора узагальнених переміщень:

$$\{\tilde{\Delta}\}_{2-3} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ -0,2 \\ -0,7 \\ 0,55 \\ -0,22 \\ 0,6 \end{Bmatrix}. \quad (9.16)$$

Обчислюємо з урахуванням (9.12) за формулою (9.11) значення компонент вектора реакцій для стрижня 2-3:

$$R_1^{2-3} = f \cdot 0,5 - f \cdot 0,55 = -f \cdot 0,05 = -50 \cdot 0,05 = -2,5 \text{ кН};$$

$$R_2^{2-3} = -\frac{12i}{l^2} \cdot 0,2 + \frac{6i}{l} \cdot 0,7 + \frac{12i}{l^2} \cdot 0,22 - \frac{6i}{l} \cdot 0,6 = -0,97 \text{ кНм};$$

$$R_3^{2-3} = \frac{6i}{l} \cdot 0,2 + 4i \cdot 0,7 - \frac{6i}{l} \cdot 0,22 + 2i \cdot 0,6 = 1,985 \text{ кНм};$$

$$R_4^{2-3} = -f \cdot 0,5 + f \cdot 0,55 = 50 \cdot 0,05 = 2,5 \text{ кН};$$

$$R_5^{2-3} = -\frac{12i}{l^2} \cdot 0,2 + \frac{6i}{l} \cdot 0,7 - \frac{12i}{l^2} \cdot 0,22 + \frac{6i}{l} \cdot 0,6 = 0,97 \text{ кНм};$$

$$R_6^{2-3} = -\frac{6i}{l} \cdot 0,2 + 2i \cdot 0,7 - \frac{6i}{l} \cdot 0,22 + 4i \cdot 0,6 = 1,885 \text{ кНм}.$$

Остаточно отримуємо вектор  $\{R\}_{2-3}^{\Delta}$  :

$$\{R\}_{2-3}^{\Delta} = \begin{Bmatrix} -2,5 \\ -0,97 \\ 1,985 \\ 2,5 \\ 0,97 \\ 1,885 \end{Bmatrix}. \quad (9.17)$$

При інтенсивності міжвузлового навантаження  $q = 3$  кН/м і довжині стрижня 2-3  $l = 4,0$  м згідно з (9.14) маємо:

$$\{P\}_{2-3}^q = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6,0 \\ -4,0 \\ 0 \\ 6,0 \\ 4,0 \end{Bmatrix}. \quad (9.18)$$

Сумарний вектор вузлових реакцій відповідно до (9.12) буде мати вигляд:

$$\{S\}_{2-3} = \begin{Bmatrix} -2,5 \\ 5,03 \\ -2,015 \\ 2,5 \\ 6,97 \\ 5,885 \end{Bmatrix}. \quad (9.19)$$

### 9.3. Побудова епюр внутрішніх зусиль для стрижневих скінченних елементів

Відтворюємо фізичну схему дії внутрішніх сил стрижня 2-3 з урахуванням (9.19) і схеми, що наведена на рис. 9.6 та рис. 9.7.

Обчислюємо згинальний момент у середньому перерізі стрижня 2-3:

$$M_{сер.}^{праворуч} = -5,885 + 6,97 \cdot 2,0 - \frac{3,4}{2} \cdot \frac{4}{4} = 2,055 \text{ кНм}. \quad (9.20)$$

$$Q_{cp}^{2-3} = (Q_2^{cep.} + Q_3^{cep.}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5,03 - 6,97}{2} = -0,97 \text{ кН};$$

$$N_{cp}^{2-3} = (2,5 + 2,5) \frac{1}{2} = 2,5 \text{ кН}.$$

З використанням отриманих значень внутрішніх зусиль у стрижні 2-3 (рис. 9.8) побудуємо епюри  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (рис. 9.9).

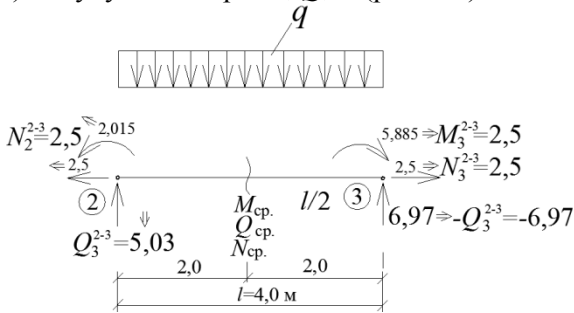


Рис. 9.8

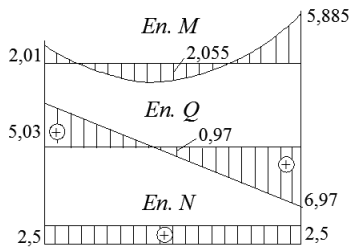
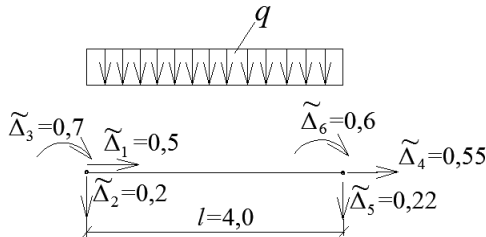


Рис 9.9

#### 9.4. Приклад розрахунку плоскої рами за методом скінченних елементів

Вихідні дані наступні: погонна жорсткість стрижня при згині; розтягу - стиску:

- стаяк –  $EI = 1$ ;  $EA = 100$ ;  $f = \frac{EA}{l}$ ;
- ригель –  $EI = 2$ ;  $EA = 200$ ;  $i = \frac{EA}{l}$ .

Геометричні розміри та схема навантаження позначені на рис. 9.10.

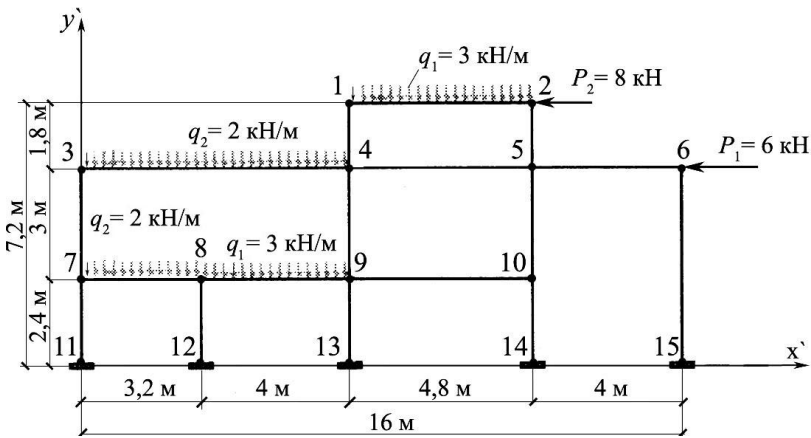


Рис. 9.10

Схема узагальнених переміщень у глобальній системі координат наведена на рис. 9.11.

Схема узагальненого вектора вузлових навантажень дискретної моделі рами наведена на рис. 9.12.

Побудова вектора вузлових навантажень, тобто обчислення компонент вектора  $\{F\}$ , здійснюється з урахуванням сполучення суміжних стрижневих елементів. Розглянемо кожен елемент окремо.

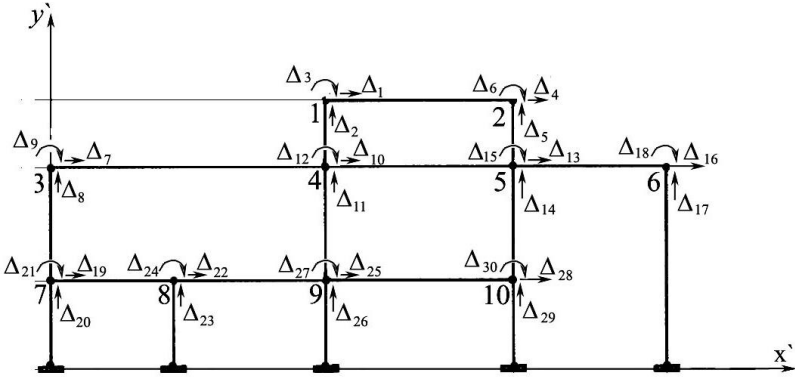


Рис. 9.11

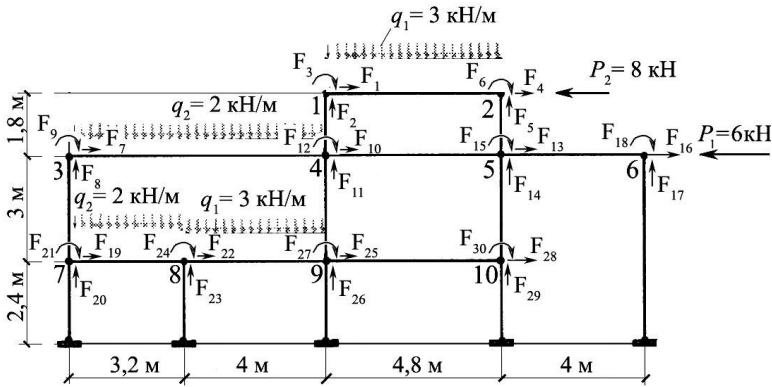
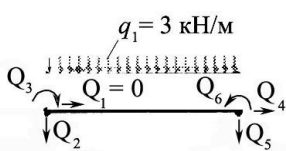


Рис. 9.12

1. Стрижень 1 – 2



$$F_1 = Q_1 = 0;$$

$$F_2 = -Q_2 = -\frac{ql}{2} = -\frac{3 \cdot 4,8}{2} = -7,2 \text{ кН};$$

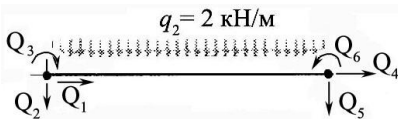
$$F_3 = Q_3 = \frac{ql^2}{12} = \frac{3 \cdot 4,8^2}{12} = 5,76 \text{ кНм};$$

$$F_4 = Q_4 = -P_2 = -8 \text{ кН};$$

$$F_5 = -Q_5 = -\frac{ql}{2} = -\frac{3 \cdot 4,8}{2} = -7,2 \text{ кН};$$

$$F_6 = -Q_6 = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{3 \cdot 4,8^2}{12} = -5,76 \text{ кНм.}$$

2. Стрижень 3 – 4



$$F_7 = Q_1 = 0; \quad F_8 = -Q_2 = -\frac{ql}{2} = -\frac{2 \cdot 7,2}{2} = -7,2 \text{ кН;}$$

$$F_9 = Q_3 = \frac{ql^2}{12} = \frac{2 \cdot 7,2^2}{12} = 8,64 \text{ кНм;}$$

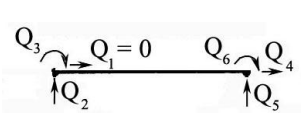
$$F_{10} = Q_4 = 0 \text{ кН;}$$

$$F_{11} = -Q_5 = -\frac{ql}{2} = -\frac{2 \cdot 7,2}{2} = -7,2 \text{ кН;}$$

$$F_{12} = -Q_6 = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{2 \cdot 7,2^2}{12} = -8,64 \text{ кНм;}$$

3. Стрижень 5 – 6

$$F_{13} = Q_1 = 0;$$



$$F_{14} = Q_2 = 0;$$

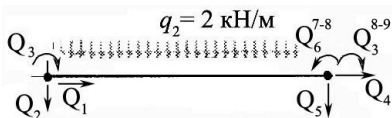
$$F_{15} = Q_3 = 0;$$

$$F_{16} = Q_4 = -P = -6 \text{ кН;}$$

$$F_{17} = Q_5 = 0; \quad F_{18} = Q_6 = 0;$$

$$F_{19} = Q_1 = 0;$$

4. Стрижень 7 – 8



$$F_{20} = -Q_2 = -\frac{ql}{2} = -\frac{2 \cdot 3,2}{2} = -3,2 \text{ кН;}$$

$$F_{21} = Q_3 = \frac{ql^2}{12} = \frac{2 \cdot 3,2^2}{12} = 1,71$$

кНм;

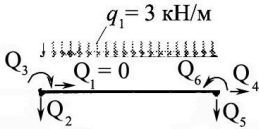
$$F_{22} = Q_4 = 0;$$



$$F_{23} = -Q_5^{7-8} - Q_2^{8-9} = -\frac{q_2 l}{2} - \frac{q_1 l}{2} = -\frac{2 \cdot 3,2}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} = -3,2 - 6 = 9,2 \text{ кН};$$

$$F_{24} = -Q_6^{7-8} + Q_3^{8-9} = -\frac{q_2 l^2}{12} - \frac{q_1 l^2}{12} = -\frac{2 \cdot 3,2^2}{12} - \frac{3 \cdot 4^2}{12} = 2,29 \text{ кН}.$$

### 5. Стрижень 8 – 9



$$F_{25} = Q_4 = 0; \text{ кН};$$

$$F_{26} = -Q_5 = -\frac{ql}{2} = -\frac{3 \cdot 4}{2} = -6 \text{ кНм};$$

$$F_{27} = -Q_6 = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{3 \cdot 4^2}{12} = -4 \text{ кН};$$

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = -\frac{ql}{2} = -\frac{3 \cdot 4}{2} = -6 \text{ кНм};$$

$$Q_3 = \frac{ql^2}{12} = \frac{3 \cdot 4^2}{12} = 4 \text{ кНм}.$$

Позначимо коефіцієнти зазначеного стовпчика відповідно до схеми на рис. 9.13  $k_{i,13}$ ,  $i=1,30$ .

Коефіцієнти матриці жорсткості при варіюванні переміщень у кожному рухомому затисненні дискретної моделі визначаємо за загальним шаблоном, який наведено на рис. 9.14.

Значення вкладів у коефіцієнти матриці жорсткості в глобальній системі координат обчислюємо за формулою (9.10) з використанням (8.40).

$$k_{1,13} = 0; \quad k_{2,13} = 0; \quad k_{3,13} = 0;$$

$$k_{4,13} = k_{1,4}^{(2-5)} = -\left( f_c^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right) = -\left( 55,55 \cdot 0 + \frac{12 \cdot 0,55}{1,8^2} \cdot 1 \right) = -2,0576 ;$$

$$k_{5,13} = k_{2,4}^{(2-5)} = -sc \left( f - \frac{12i}{l^2} \right) = -1 \cdot 0 = 0 ;$$

$$k_{6,13} = k_{3,4}^{(2-5)} = -\frac{6i}{l} s = -\frac{6 \cdot 0,555}{1,8} (-1) = 1,8518 ;$$

$$k_{7,13} = 0; \quad k_{8,13} = 0; \quad k_{9,13} = 0;$$

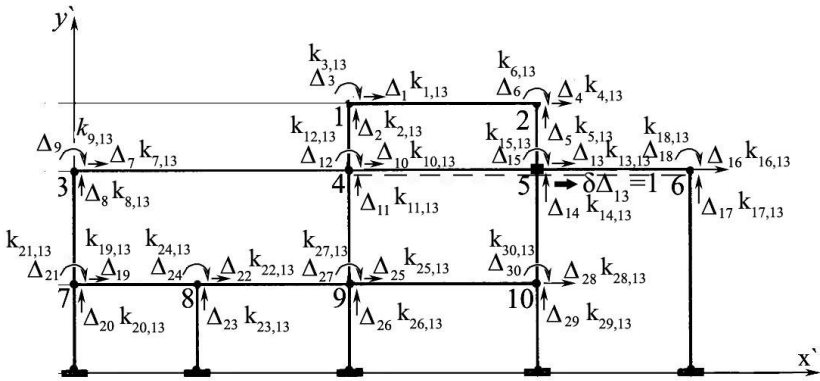


Рис. 9.13.

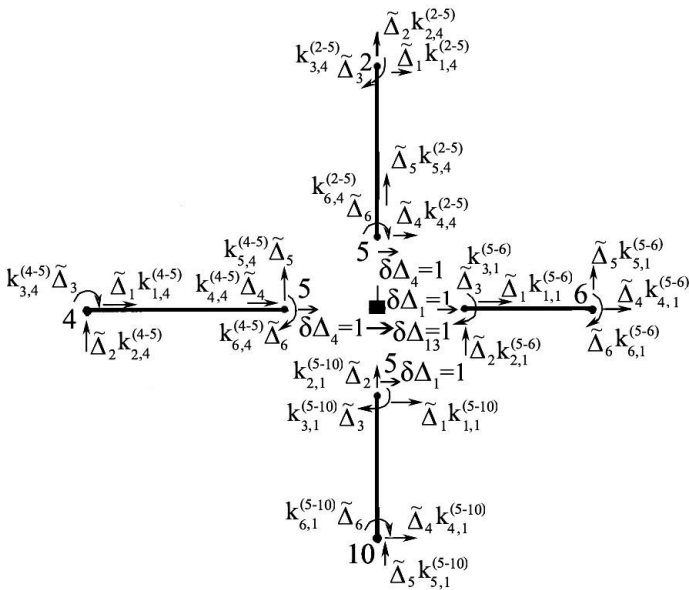


Рис. 9.14. Шаблон

$$k_{10,13} = k_{1,4}^{(4-5)} = -\left( fc^2 + \frac{12i}{l^2} \right) = 0;$$

$$k_{12,13} = k_{3,4}^{(4-5)} = -\frac{6i}{l} s = -\frac{6i}{l} \cdot 0 = 0;$$

$$k_{13,13} = k_{1,4}^{(5-6)} + k_{4,4}^{(2-5)} + k_{4,4}^{(4-5)} + k_{1,1}^{(5-10)} = \left( f_c^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right)^{5-6} + \left( f_c^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right)^{2-5} + \left( f_c^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right)^{4-5} + \left( f_c^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right)^{5-10} = 94,1687;$$

$$k_{14,13} = k_{2,1}^{(5-6)} + k_{5,4}^{(2-5)} + k_{5,4}^{(4-5)} + k_{2,1}^{(5-10)} = sc \left( f - \frac{12i}{l^2} \right)^{5-6} + sc \left( f - \frac{12i}{l^2} \right)^{2-5} + sc \left( f - \frac{12i}{l^2} \right)^{4-5} + sc \left( f - \frac{12i}{l^2} \right)^{5-10} = 0;$$

$$k_{15,13} = k_{3,1}^{(5-6)} + k_{6,4}^{(2-5)} + k_{6,4}^{(4-5)} + k_{3,1}^{(5-10)} = \left( \frac{6i}{l} s \right)^{5-6} + \left( -\frac{6i}{l} s \right)^{2-5} + \left( -\frac{6i}{l} s \right)^{4-5} + \left( \frac{6i}{l} s \right)^{5-10} = 1,1852;$$

$$k_{16,13} = k_{4,1}^{(5-6)} = -\left( fc^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right)^{5-6} = -50;$$

$$k_{17,13} = k_{5,1}^{(5-6)} = -sc \left( f - \frac{12i}{l^2} \right)^{5-6} = 0;$$

$$k_{18,13} = k_{6,1}^{(5-6)} = \left( \frac{6i}{l} \right)^{5-6} = 0;$$

$$k_{19,13} = 0; \quad k_{20,13} = 0; \quad k_{21,13} = 0; \quad k_{22,13} = 0; \quad k_{23,13} = 0;$$

$$k_{24,13} = 0; \quad k_{25,13} = 0; \quad k_{26,13} = 0; \quad k_{27,13} = 0;$$

$$k_{28,13} = k_{4,1}^{(5-10)} = -\left( fc^2 + \frac{12i}{l^2} s^2 \right) = -\frac{12 \cdot 0,333}{3^2} (-1)^2 = -0,4444;$$

$$k_{29,13} = k_{5,1}^{(5-10)} = -sc \left( f - \frac{12i}{l^2} \right) = 0;$$

$$k_{30,13} = k_{6,1}^{(5-10)} = \left( \frac{6i}{l} s \right)^{5-10} = -0,6666.$$

Обчислені коефіцієнти матриці жорсткості SE-моделі у заданому (тринадцятому) стовпчику зводимо до табл. 9.1.

Вузлові переміщення заданого скінченного елемента обчислюються за допомогою матриці інциденції і тензора ортогонального перетворення.

Таблиця 9.1

Коефіцієнт 13 ст.	Значення	Коефіцієнт 13 ст.	Значення
$k_{1,13}$	0	$K_{16,13}$	-50
$k_{2,13}$	0	$K_{17,13}$	0
$K_{3,13}$	0	$K_{18,13}$	0
$K_{4,13}$	-2,0576	$K_{19,13}$	0
$K_{5,13}$	0	$K_{20,13}$	0
$K_{6,13}$	1,8518	$K_{21,13}$	0
$K_{7,13}$	0	$K_{22,13}$	0
$K_{8,13}$	0	$K_{23,13}$	0
$K_{9,13}$	0	$K_{24,13}$	0
$K_{10,13}$	-41,6666	$K_{25,13}$	0
$K_{11,13}$	0	$K_{26,13}$	0
$K_{12,13}$	0	$K_{27,13}$	0
$K_{13,13}$	94,1687	$K_{28,13}$	-0,44444
$K_{14,13}$	0	$K_{29,13}$	0
$K_{15,13}$	1,1852	$K_{30,13}$	-0,66666

$$\begin{aligned} \bar{l}_i &= c_i^{k'} \bar{e}_{k'}; \\ \{v\} &= [T] \{\tilde{\Delta}_e\}; \quad \{\tilde{\Delta}_e\} = [I]^* \{v\}; \quad ; \\ [h]_{(e)} &= [k]_{(e)}^{z.c} [T]; \quad \{R\}_{(e)}^{z.c} = [h] \{\tilde{\Delta}\}_{(e)} \end{aligned}$$

$$\{\tilde{\Delta}\}_{1-2} = \left. \begin{array}{l} \tilde{\Delta}_1 \\ \tilde{\Delta}_2 \\ \tilde{\Delta}_3 \\ \tilde{\Delta}_4 \\ \tilde{\Delta}_5 \\ \tilde{\Delta}_6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -28,97499 \\ -1,32699 \\ 0,53785 \\ -29,10925 \\ -0,26295 \\ -4,4241875 \end{array};$$

$$\{\tilde{\Delta}\}_{3-4} = \left. \begin{array}{l} \tilde{\Delta}_1 \\ \tilde{\Delta}_2 \\ \tilde{\Delta}_3 \\ \tilde{\Delta}_4 \\ \tilde{\Delta}_5 \\ \tilde{\Delta}_6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -22,2151 \\ -0,586001 \\ 1,105959 \\ -22,42686 \\ -1,16511 \\ -4,79266 \end{array}.$$

Таблиця 9.2

$N$	$dx$	$dy$	$dF$
1	-2,897499 +01	-1,326989	5,378529
2	-2,910925 +01	-2,629493	-4,424175
3	-2,22151 +1	-5,860012	1,105959
4	-2,242686 +1	-1,165111	-4,792665
5	-2,249395 +1	-1,656272	-1,627030
6	-2,258437 +1	1,08012	-1,1767590
7	-6,065397 +0	-3,432820	-3,049940
8	-6,004699 +0	-1,8807240	3,820350
9	-6,041035 +0	-6,122337	-2,368784

Визначасмо вектор реакцій у стрижні 1 – 2

$$\{R\}_{(1-2)} = [h]_{1-2} \{\tilde{\Delta}\}_{(1-2)};$$

$$\{R\}_2^{1-2} = f_{1-2}(-28,97499) - f_{1-2}(-29,10925) = 5,5942 \text{ кН};$$

$$\{R\}_2^{1-2} = \frac{12i}{l^2}(-1,326989) - \frac{6i}{l}0,53785 - \frac{12i}{l^2}(-0,26295) -$$

$$- \frac{6i}{l}(-4,424175) = 1,793 \text{ кН};$$

$$\{R\}_{3}^{1-2} = -\frac{6i}{l}(-1,326989) + 4i \cdot 0,53785 + \frac{6i}{l}(-0,26295) +$$

$$2i(-4,42418) = -2,23625 \text{ Кнм};$$

$$R \frac{1}{4}^{-2} \{R\}_{4}^{1-2} = -f(-28,97499) + f(-29,10925) = -5,5942 \text{ кН};$$

$$R \frac{1}{5}^{-2} \{R\}_{5}^{1-2} = -\frac{12i}{l^2}(-1,326989) + \frac{6i}{l}0,53785 + \frac{12i}{l^2}(-0,26295) +$$

$$+ \frac{6i}{l}(-4,424175) = -1,7932 \text{ кН};$$

$$\{R\}_{6}^{1-2} = -\frac{6i}{l}(-1,326989) + 2i \cdot 0,53785 + \frac{6i}{l}(-0,26295) +$$

$$+ 4i(-4,42418) = -6,373 \text{ Кнм};$$

$$\text{Отримаємо: } \{R\}_{1-2}^{\Delta} = \begin{Bmatrix} 5,594 \\ 1,793 \\ -2,23625 \\ -5,59417 \\ -1,7932 \\ -6,373 \end{Bmatrix}.$$

### Запитання для самоперевірки

1. Наведіть приклад побудови дискретної моделі МСЕ (СЕ-моделі) для плоскої рами при різних видах навантажень і при різних жорсткостях окремих стрижневих елементів.
2. Наведіть і поясніть спосіб обчислення узагальнених (приведених) вузлових сил від дії між вузлового рівномірно розподіленого навантаження.
3. Наведіть систему розв'язувальних рівнянь СЕ-моделі у матрично-векторній формі у глобальній системі координат.
4. Що таке матриця інциденції і для чого вона використовується? Наведіть рівняння з використанням цієї матриці.

5. Що таке тензор перетворення глобальної системи координат у локальну і навпаки? Поясніть процедуру перенесення і повороту.
6. Що позначає обертальне перетворення матрично-векторних величин? Наведіть і поясніть матрицю ортогонального перетворення у шестивимірному просторі.
7. Поясніть перетворення від глобальної системи координат у локальну для похилого (під кутом „ $\alpha$ ”) стрижневого елемента на прикладі вектора переміщень.
8. Наведіть вираз варіації СЕ з використанням вектора переміщень у глобальній системі координат.
9. Наведіть і поясніть вираз обчислення матриці жорсткості СЕ у глобальній системі координат.
10. Наведіть і поясніть вираз обчислення матриці реакції у глобальній системі координат.
11. Наведіть і поясніть вираз для обчислення сумарного вектора вузлових реакцій у скінченному елементі.
12. Наведіть процедуру обчислення сумарного вектора вузлових реакцій і приведення його до фізичного стану з використанням внутрішніх зусиль  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

## РОЗДІЛ 10

### РОЗРАХУНОК ПЛОСКО НАПРУЖЕНИХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

#### 10.1. Вихідні співвідношення плоскої задачі теорії пружності у матрично-векторній формі

Розглянемо приклад плоско напруженої конструкції у вигляді плоско напруженої пластинки (балки-стінки). На рис. 10.1 зображена балка-стінка при навантаженні на дві грані у вигляді функцій  $q_1(x_2)$ ,  $q_2(x_1)$ . Для визначення напружено-деформованого стану наведеної балки-стінки треба розв'язати плоску задачу теорії пружності – плоский напружений стан, при цьому маємо [25]:

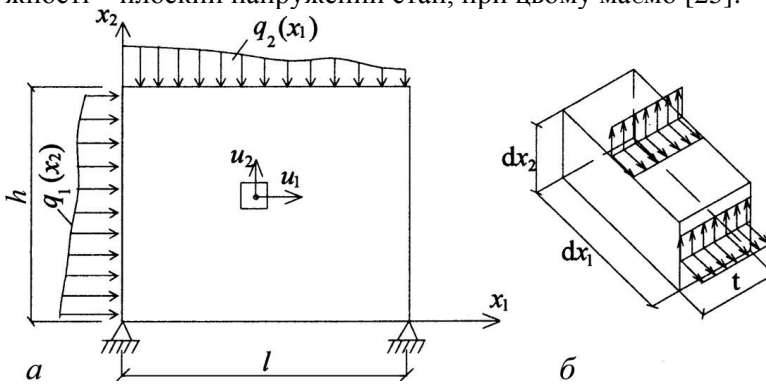


Рис. 10.1 Схема навантаження балки-стінки: а) зовнішніми силами; б) плоский напружений стан в елементарному околі

- диференціальні рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + R_1 = 0; \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + R_2 = 0, \end{cases} \quad (10.1)$$

або у векторній формі

$$[\partial]^T \{\sigma\} + \{R\} = 0, \quad (10.2)$$

де



$$[\partial]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\ )}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\ )}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\ )}{\partial x_2} & \frac{\partial(\ )}{\partial x_1} \end{bmatrix} \text{ - матриця диференціювання;} \quad (10.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \text{ - вектор напружень } (\tau_{12} = \tau_{21}); \quad (10.4)$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \text{ - вектор об'ємних сил.} \quad (10.5)$$

При розв'язанні задачі у переміщеннях, що описуються вектором  $\{u\} = \{u_1, u_2\}$  (див. рис. 10.1), залучаємо крім рівнянь рівноваги (10.1) геометричні рівняння Коші та фізичні рівняння на основі узагальненого закону Гука:

- геометричні рівняння

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}; \quad (10.6)$$

- фізичні рівняння у першій формі

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22}; \quad \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{11}; \quad \gamma_{21} = \gamma_{12}; \end{aligned} \quad (10.7)$$

- фізичні рівняння у другій формі

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22}; \\ \sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22}; \quad \tau_{12} = \gamma_{12}G; \end{aligned} \quad (10.8)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{1-\nu^2}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \mu \equiv G. \quad (10.9)$$

Співвідношення (10.6) - (10.9) зручно записати у матрично-векторній формі

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}, \quad (10.10)$$

де

$$[E] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} - \text{матриця пружностей}; \quad (10.11)$$

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array} \right\} \text{ вектор деформацій.} \quad (10.12)$$

## 10.2. Варіаційне рівняння Лагранжа для розв'язку задачі плоско напруженої пластинки

З використанням вищенаведених співвідношень для розв'язання плоскої задачі теорії пружності можна скористатися варіаційним рівнянням Лагранжа [26]

$$\delta U - \delta A = 0, \quad (10.13)$$

де  $\delta U$  - варіація енергії деформації;  $\delta A$  - віртуальна робота зовнішніх сил.

Варіаційна енергія деформації, або віртуальна робота внутрішніх сил для плоского напруженого стану, може бути представлена наступним виразом [26]:

$$\delta U = \int_v \sigma^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dV. \quad (10.14)$$

Для плосконапруженого стану плити при постійній товщині вираз (10.14) набуває вигляду

$$\delta V = t \int_S (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + 2\tau_{12} \delta \gamma_{12}) dS,$$

або у матрично-векторній формі з урахуванням (10.10) - (10.12) маємо:

$$\delta V = t \int_S \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dS. \quad (10.15)$$

Віртуальна робота зовнішніх сил у матрично-векторній формі має вигляд:

$$\delta A = t \int_S \delta \{u\}^T \{P\} dS, \quad (10.16)$$

$$\text{де } \{P\} = \begin{Bmatrix} q_1 & (x_2) \\ q_2 & (x_1) \end{Bmatrix}. \quad (10.17)$$

### 10.3. Побудова скінченноелементної моделі та типи скінченних елементів

Для розрахунку плосконапруженої плити, наведеної на рис. 10.1, за допомогою метода скінченних елементів окрім варіаційних рівнянь (10.13) - (10.17), треба побудувати дискретну СЕ-модель за певною прийнятою схемою МСЕ [25]. Побудуємо дискретну модель за допомогою трикутних СЕ з урахуванням навантаження тільки на верхній кромці балки-стілки, тоді СЕ-модель буде мати вигляд, який наведений на рис. 10.2.

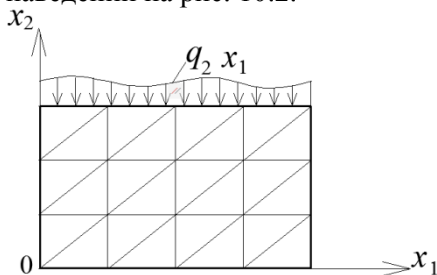


Рис. 10.2. Дискретна модель балки-стілки

Наведена дискретна модель включає два типи скінченних елементів, що пов'язано з орієнтацією місцевої декартової системи координат  $0x_1x_2$ : 1) початок місцевої системи координат розміщений у вузлі з прямим кутом СЕ; 2) початок місцевої системи координат розміщений у правому непряму (гострому) куті (рис. 10.3).

Функції переміщень у межах СЕ доцільно навести у вигляді степеневого поліному [26].

У кожній точці простору у плоскому трикутнику маємо два ступеня свободи, тобто два переміщення  $u_1, u_2$ , вузлові переміщення позначимо  $v_1, v_2, v_3, v_5, v_6$  за годинниковою стрілкою відповідно у кутах 1, 2, 3 (рис. 10.4). Відповідно до орієнтації  $0x_1x_2$  в СЕ 1-го типу ма-

емо координати вузлів:  $x_1^1 = 0; x_1^2 = -h; x_1^3 = l;$   
 $x_2^2 = 0; x_3^1 = 0; x_3^2 = 0$  (див. рис. 10.4).

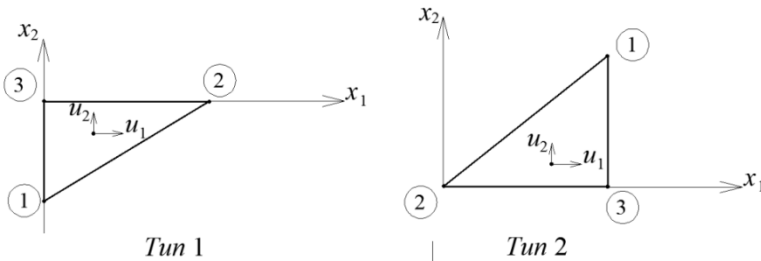


Рис. 10.3. Тип скінченних елементів СЕ-моделі балки-стінки

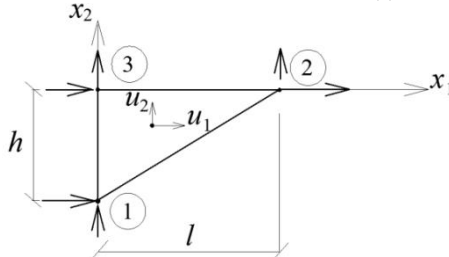


Рис. 10.4. Вузлові координати і переміщення СЕ-1

#### 10.4. Апроксимація переміщень у просторі скінченного елемента та виведення функцій форми

Порядок степеневого поліному повинен бути не менше порядку похідної невідомої функції функціонала потенціальної енергії, у той же час кількість членів поліному повинно бути кратним кількості вузлів. Таким чином, апроксимуюча поліноміальна функція може бути лінійною (три члена поліномів функцій переміщень)  $u_1(x_1x_2), u_2(x_1x_2)$ , або квадратичною (шість членів поліному). У зв'язку з тим, що похідна від функцій переміщень варіації функціонала першого ступеня, то зупиняємося на лінійному поліномі, тоді маємо:

$$u_1(x_1x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2. \quad (10.18)$$

Невідомі коефіцієнти полінома (10.18) визначаємо з граничних умов – тобто функції (10.18) дорівнюють вузловим переміщенням

$u_{\alpha}^{(n)}(x_1, x_2)$ . Маємо для функції (10.18) три рівняння з граничних умов:

$$\begin{cases} u_1^{(1)}(0, -h) = \alpha_1 - \alpha_3 h = v_1; \\ u_1^{(2)}(l, 0) = \alpha_1 - \alpha_2 l = v_3; \\ u_1^{(3)}(0, 0) = \alpha_1 = v_5. \end{cases} \quad (10.19)$$

Розв'язуючи систему (10.19), отримаємо:

$$\alpha_1 = v_5; \quad \alpha_2 = \frac{1}{l}(v_5 - v_3); \quad \alpha_3 = \frac{1}{h}(v_5 - v_1); \quad (10.20)$$

Підставляючи (10.20) у рівняння (10.18), після деяких перетворень маємо:

$$u_1(x_1 x_2) = \frac{x_2}{h} v_1 + \frac{x_1}{l} v_3 + \left(1 + \frac{x_2}{h} + \frac{x_1}{l}\right) v_5. \quad (10.21)$$

Коефіцієнти при вузлових переміщеннях позначаємо відповідно до номерів вузлових переміщень функціями  $N_i, i = 1, 6$ . Остаточно для функцій переміщень отримаємо наступні апроксимуючі функції, функції  $N_i$  прийнято називати функціями форми відповідного СЕ [25]:

$$u_1(x_1 x_2) = N_1 v_1 + N_3 v_3 + N_5 v_5; \quad (10.22)$$

$$u_2(x_1 x_2) = N_2 v_2 + N_4 v_4 + N_6 v_6; \quad (10.23)$$

$$\begin{aligned} N_1 = -\frac{x_2}{h}; \quad N_3 = \frac{x_1}{l}; \quad N_5 = 1 + \frac{x_2}{h} + \frac{x_1}{l}; \\ N_2 = N_1; \quad N_4 = N_3; \quad N_6 = N_5. \end{aligned} \quad (10.24)$$

У матрично-векторній формі для вектора апроксимуючої функції запропонованих трикутних СЕ маємо:

$$\{u\} = [N]\{v\}, \quad (10.25)$$

або

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_3 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_4 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 v_1 + N_3 v_3 + N_5 v_5 \\ N_2 v_2 + N_4 v_4 + N_6 v_6 \end{Bmatrix}. \quad (10.26)$$

### 10.5. Виведення співвідношень для отримання матриці жорсткості та узагальненого вектора навантажень для трикутного скінченного елемента

Враховуючи співвідношення (10.10) - (10.12) і (10.25), (10.26), можна записати:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{v\}. \quad (10.27)$$

Якщо позначити

$$[B] = [\partial][N], \quad (10.28)$$

то маємо:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\ )}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\ )}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\ )}{\partial x_2} & \frac{\partial(\ )}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_3 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_4 & 0 & N_6 \end{bmatrix}, \quad (10.29)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & \frac{\partial N_5}{\partial x_2} & \frac{\partial N_6}{\partial x_1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{\partial x_2} & -\frac{1}{l} \end{bmatrix}. \quad (10.30)$$

Відповідно до формули (10.10) для вектора напружень маємо:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][B]\{v\}. \quad (10.31)$$

Остаточно отримаємо вираз для варіації енергії деформації для трикутного СЕ:

$$\begin{aligned} \delta U_{(e)} &= \int_S \delta \{\varepsilon\}_{(e)}^T \{\sigma\}_{(e)} dS = \\ &= \int_S \delta \{v\}_{(e)}^T [B]_{(e)}^T [E]_{(e)} \{v\}_{(e)} dS = \delta \{v\}_{(e)}^T [K]_{(e)} \{v\}_{(e)}, \end{aligned} \quad (10.32)$$

де  $[K]_{(e)}$  – матриця жорсткості трикутного СЕ,

$$[K]_{(e)} = \int_S [B]^T [E]_{(e)} [B]_{(e)} dS. \quad (10.33)$$

Для отримання узагальненого вектора вузлових навантажень треба всі зовнішні сили, діючі у межах СЕ, звести до вузлів за схемою на рис. 10.5, розглядаючи віртуальну роботу зовнішніх сил для відповідного скінченного елемента:

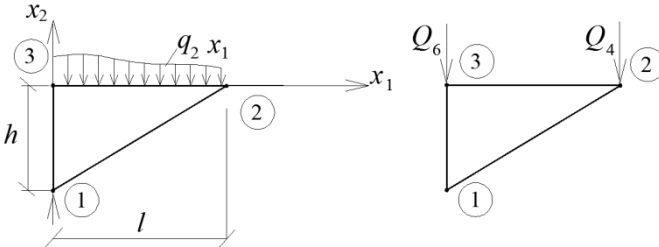


Рис. 10.5. Схема зведення розподіленого навантаження у межах СЕ до компонент вектора  $\{Q\}_{(e)}$

$$\delta A_{(e)} = \int_l \delta \{u\}^T \{q\} dx_1 = \int_l \delta \{v\}_{(e)}^T \{q\}_{(e)} dx_1 = \delta \{v\}_{(e)}^T \{Q\}_{(e)}, \quad (10.34)$$

де

$$\{Q\}_{(e)} = \int_l [N]_{(e)}^T \{q\}_{(e)} dx_1 \quad (10.35)$$

$\{Q\}_{(e)}$  - вектор узагальнених вузлових навантажень від розподіленого навантаження у межах скінченного елемента.

Враховуючи (10.35) для вектора  $\{Q\}_{(e)}$ , можна записати:

$$\{Q\}_{(e)} = \int_l \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_4 \\ N_5 & 0 \\ 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2(x_1) \end{Bmatrix} dx_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 q_2(x_1) \\ 0 \\ N_4 q_2(x_1) \\ 0 \\ N_6 q_2(x_1) \end{bmatrix} dx_1 = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix}. \quad (10.36)$$

Враховуючи (10.36), тому що функція першої компоненти вектора розподіленого навантаження дорівнює нулю, маємо

$$Q_1 = Q_3 = Q_5 = 0.$$

Випишемо ненульові компоненти  $\{Q\}_{(e)}$  у вигляді інтегралів по координаті  $x_1$  у межах  $0 - l$ :

$$Q_2 = \int_l N_2 q_2(x_1) dx_1 = \int_l -\frac{x_2^{(1)}}{h} q_2(x_1) dx_1 = 0, \quad (10.37)$$

Координата  $x_2$  у вузлі 1 дорівнює нулю, тому

$$Q_4 = \int_l N_4 q_2(x_1) dx_1; \quad (10.38)$$

$$Q_6 = \int_l N_6 q_2(x_1) dx_1. \quad (10.39)$$

Визначувані інтеграли (10.38), (10.39), в яких у якості підінтегральної функції виступає добуток функції форми  $\left(N_4 = N_6 = \frac{x_1}{l}\right)$  і

функції навантаження  $q_{(2)}(x_2)$  яку апроксимуємо лінійною функцією (див. рис. 10.5), можна обчислити за формулою Сімпсона. Таким чином, маємо дві лінійні функції

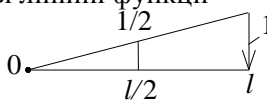




Рис. 10.6. Епюра функції  $N_4(x_1)$

1)  $N_4 = \frac{x_1}{l}$ , для якої епюра має вигляд

2)  $q_2(x_1) = -\frac{q_3 - q_2}{l} x_1 + q_3$ ,

де  $q_2, q_3$  - значення функції  $q_2(x_1)$  у вузлах 2, 3, для якої епюра має вигляд (з урахуванням  $- (q_2(x_1))$ )

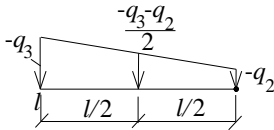


Рис. 10.7. Епюра функції  $q_2(x_1)$

Перемножуючи епюри  $N_4(x_1)$   $q_2(x_1)$  (див. рис. 10.6, 10.7) обчислюємо інтеграл (10.38) [15]

$$Q_4 = \frac{l}{6} \left( -q_3 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{q_2 + q_3}{2} \right) - 1 \cdot q_2 \right) = \frac{l}{6} (-q_3 - 2q_2); \quad (10.40)$$

$$Q_4 = -\frac{l}{6} (q_3 + 2q_2); \quad (10.41)$$

За аналогією для інтеграла (10.39) маємо дві функції:

1)  $N_6 = N_5 = 1 + \frac{x_2}{h} - \frac{x_1}{l}$ ;

2)  $-q_2(x_1) = -\frac{q_3 - q_2}{l} x_1 + q_3$

і відповідні епюри

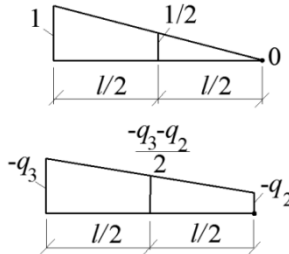


Рис. 10.8. Епюри підінтегральних функцій (10.39)

Перемножуючи епюри функцій, наведених на рис. 10.8, за правилом Сімпсона отримаємо визначуваний інтеграл (10.39):

$$\begin{aligned}
 Q_6 &= \frac{l}{6} \left( 1 \cdot (-q_3) - 4 \cdot \frac{1}{2} \frac{q_2 + q_3}{2} - 0 \cdot q_2 \right) = \frac{l}{6} (-q_3 - q_2 - q_3) = \\
 &= -\frac{l}{6} (q_2 + 2q_3); \\
 Q_6 &= -\frac{l}{6} (2q_3 + q_2). \tag{10.42}
 \end{aligned}$$

### 10.6. Виведення рівнянь рівноваги дискретної моделі плоско-напруженої пластинки з використанням трикутного скінченного елемента

Розглянемо приклад для конкретної дискретної моделі балки-стінки і побудуємо для цього прикладу матрицю жорсткості SE-моделі плоско напруженої пластинки. Для дискретної моделі на рис. 10.9 позначимо номери вузлів SE і вузлові невідомі переміщення у глобальній системі координат  $OX_1Y_1$ . Нумерацію вузлів виконуємо зліва направо, починаючи знизу [25].

Вводимо узагальнений вектор вузлових переміщень SE-моделі пластинки у глобальній системі координат (див. рис. 10.9):

$$\{V\}^T = \{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \dots \Delta_{2n-1} \Delta_{2n}\}, \tag{10.43}$$

де  $n$  – загальна кількість вузлів SE-моделі.

Встановлюємо відповідність векторів переміщень вузлів одного окремо взятого SE від узагальненого вектора  $\{V\}$  всієї дискретної моделі:

$$\{\Delta\}_{(e)} = [I]_{(e)} \{V\}, \tag{10.44}$$

де  $[I]_{(e)}$  – матриця відповідності, або інциденції SE-моделі для відповідного скінченного елемента “e”. Наведемо як приклад матрицю  $[I]_{(e)=3}$ :

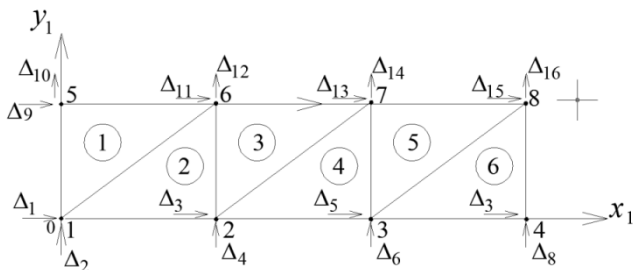


Рис. 10.9. Топологія СЕ-моделі плоско напруженої пластинки

$$\begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_{13} \\ \Delta_{14} \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & - & - & - & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & - & - & - & - & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_{16} \end{Bmatrix}. \quad (10.45)$$

Запишемо умови рівноваги плоско напруженої пластинки з використанням варіаційного рівняння Лагранжа та формул (10.43) - (10.45):

$$\begin{aligned} \delta U - \delta A &= \sum_e (\delta U_e - \delta A_e) = \sum_e \left( \delta \{\Delta\}_e^T [K]_e \cdot \{\Delta\}_e - \delta \{\Delta\}_e^T \{Q\}_e \right) \\ \sum_e \left( \delta \{\Delta\}_e^T [I]_e^T [K]_e [I]_e \{\Delta\}_e - \delta \{\Delta\}_e^T [I]_e^T \{Q\}_e \right) &= \\ &= \delta \{V\}^T \left( [K^*] \{V\} - \{Q^*\} \right) = 0, \end{aligned} \quad (10.46)$$

де

$$[K^*] = \sum_e [I]_e^T [K]_e [I]_e. \quad (10.47)$$

З рівняння (10.46) враховуючи, що віртуальні переміщення вектора  $\{V\}$  не можуть дорівнювати нулю, маємо рівняння рівноваги дискретної моделі

$$[K^*] \{V\} - \{Q^*\} = 0. \quad (10.48)$$

Вираз (10.48) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь рівноваги дискретної скінченно елементної моделі плоско-напруженої пластинки (балки-стілки).

Розв'язуючи систему рівнянь (10.48), помножимо ліву і праву частини рівняння на побудовану зворотню матрицю жорсткості СЕ-моделі і отримаємо:

$$\{V\} = [K^*]^{-1} \{Q^*\} \quad (10.49)$$

Маючи розв'язок у вигляді вектора переміщень у глобальній системі координат  $\{V\}$ , обчислюємо вектори окремих СЕ дискретної моделі і відповідні реакції в  $i$ -му вузлі СЕ-моделі, що сполучені з вузлами безпосередньо (за шаблоном) і обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \{\Delta\}_e &= [I]_e \{V\}; \\ \{R\}^i &= \sum_e [K]_e^i \{\Delta\}_e^i, \end{aligned} \quad (10.50)$$

де  $[K]_e^i$  - коефіцієнти матриць жорсткості СЕ, що сполучені з даними вузлами  $i$ .

### Запитання для самоперевірки

1. Поясніть суть понять: дійсна робота та можлива робота зовнішніх сил.
2. Дайте визначення поняттям: можливі переміщення, коефіцієнти піддатливості, коефіцієнт жорсткості. Фізична суть цих понять і одиниці їх виміру.
3. Дайте визначення потенціальної енергії деформації пружного тіла.
4. У чому полягають відмінності понять диференціал функції і варіація функції?
5. Запишіть у матричному вигляді статичні рівняння теорії пружності.
6. Запишіть у матричному вигляді геометричні рівняння теорії пружності у прямій і зворотній формах.
7. Запишіть формулу визначення внутрішніх сил континуальної плоско напруженої конструкції.
8. Сформулюйте варіаційний принцип Лагранжа.

9. Побудуйте дискретну модель плоско напруженої пластинки (балки-стілки). Поясніть типи скінченних елементів і функції переміщень від 2-х переміщень.
10. Запишіть у матрично-векторній формі функцію вектора переміщень плоско напруженої пластинки.
11. Наведіть вираз матриці піддатливості  $[B]$  трикутного скінченного елемента.
12. Наведіть процедуру отримання вектора вузлових навантажень при нерівномірно розподіленому між вузловому навантаженні плоско напруженої пластинки.
13. Наведіть конкретну модель плоско напруженої пластинки і приклад визначення відповідності вектора переміщень вузлів одного SE від вектора узагальненого вектора переміщень SE-моделі.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соколовский В.В.* Статика сыпучей среды. –М.: Физматгиз, 1960.
2. *Голушкевич С.С.* Статика предельных состояний грунтовых масс. –М.: Гостехиздат, 1957.
3. *Соколовский В.В.* Предельное напряженное состояние сыпучей и земляной слоистых сред /Доклады АН СССР, №8, т.24, 1939.
4. *Рабинович И.М.* Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Гослитса и СМ, 1960.
5. *Харр М.Е.* Основы теоретической механики грунтов. –М.: Изд-во по строительству, 1971. -320с.
6. *Цытович Н.А.* Механика грунтов. –М.: ГИЛСАиСИ, 1963. -635с.
7. *Лившиц Я.Д.* Упражнения по строительной механике. –К.:Гостехиздат, 1948. -218с.
8. *Лившиц Я.Д., Семенов П.И.* Сборник упражнений по строительной механике. –К.: ГИЛСА УССР.-336с.
9. *Жемочкин Б.Н.* Теория упругости. –М.: ГослитСА, 1957. -256с.
10. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности. –М.: «Высшая школа», 1970. -288с.
11. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. –М.: Наука, 1971. -552с.
12. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. –М.:Госиздат ФМ, 1963. -635с.
13. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. –М.: Изд-во Московского университета, 1969. -695с.
14. *Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. –М.: «Высшая школа», 1986. -607с.

15. *Баженов В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В.* Будівельна механіка. –К.: КНУБА, 2000. – 584 с.
16. *Снитко Н.К.* Строительная механика –М.: «Высшая школа», 1972. -488с.
17. *Жемочкин Б.Н.* Расчет рам. –М.: Изд-во по строительству, 1965. -406с.
18. *Корноухов Н.В.* Расчет сложных рам по методу перемещений с учетом деформаций сдвига и ширины стержней. Научные труды КИСИ, В.12. – К.: КИСИ, 1959.
19. *Семенов П.И.* О влиянии касательных напряжений на работу ортотропных тонкостенных призматических конструкций. Ученые записки Ереванского государственного университета, В.1. 1973. –С.22-33.
20. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. -416с.
21. *Семенов П.И.* Расчет прочности и деформативности анизотропных тонкостенных стержней открытого профиля. –К.: Вища школа, 1974, 184 с.
22. *Бердычевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. –М.: Наука, 1983. -448с.
23. *Немчинов Ю.И.* Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). –К.: Будівельник, 1980. -231с.
24. *Баженов В.А., Цыхановський В.К., Кислокий В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – К.: КНУБА, 2000. –386 с.
25. *Легостаєв А.Д.* Метод скінченних елементів. Конспект лекцій. –К.: КНУБА, 2004. -112с.
26. *Шимановский А.В., Цыхановский В.К.* Теория и расчет сильно-нелинейных конструкций. – К.: Изд-во „Сталь”, 2005. – 432 с.

27. *Мак-Конел А.Дж.* Введение в тензорный анализ (с приложениями к геометрии, механике и физике). –М.: Гос. Изд-во ФМЛ, 1963. -410с.