УДК 517.541.183

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАСКАДА СОРБЦИОННЫХ АППАРАТОВ ПРИ ПОГЛОЩЕНИИ СМЕСИ ВЕЩЕСТВ

Бондаренко Л.Н., к.ф.-м.н., доцент, Жук П.Ф., д.ф.–м.н., доцент

Херсонский юридический институт

Предложена математическая модель, базирующаяся на уравнениях неравновесной динамики сорбции и описывающая процесс поглощения смеси веществ из потока в каскаде последовательно соединенных сорбционных аппаратов. Доказано существование и единственность ее решения, найдено необходимое условие существования установившегося режима работы каскада и дана его характеристика в рамках предложенной математической модели. Результаты работы могут быть использованы при расчете и оптимизации каскадов. Библ. 6 назв.

Ключевые слова: математическая модель, пространство, оператор, неподвижная точка, сорбция, каскад аппаратов, установившийся режим.

Бондаренко Л.М., Жук П.Ф. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КАСКАДУ СОРБЦІЙНИХ АПАРАТІВ ПРИ ПОГЛИНАННІ СУМІШІ РЕЧОВИН / Херсонський юридичний інститут, Україна

Запропоновано математичну модель, що базується на рівняннях нерівновісної динаміки сорбції й описує процес поглинання суміші речовин із потоку в каскаді послідовно сполучених сорбційних апаратів. Доведено існування й єдиність її розв'язку, знайдена необхідна умова існування сталого режиму роботи каскаду і дана його характеристика в рамках запропонованої математичної моделі. Результати роботи можуть бути використані для розрахунку й оптимізації каскадів. Бібл. 6 назв.

Ключові слова: математична модель, простір, оператор, нерухома точка, сорбція, каскад апаратів, сталий режим.

Bondarenko L.N., Zhuk P.F. MATHEMATICAL MODEL OF CASCADES OF SORPTION APPARATUS UNDER MIXTURE ABSORPTION / Kherson law Institute, Ukraine

Mathematical model based on the equations of disbalanced dynamics of sorption and described the process mixture absorption from fluid in cascades of consecutive-joint apparatus in presented. The existence and the uniqueness of this model's solution are proved. The necessary condition for existence of limit operating conditions of the cascades has been found. The characteristic of the cascades is given within the framework of a mathematical model. The results of this work are applicable for computation and optimisation.

Key words: mathematical model, space, operator, fixed point, sorption, apparatus cascades, limit operating conditions.

ВВЕДЕНИЕ

Каскад последовательно соединенных сорбционных аппаратов находит весьма эффективное применение при поглощении из потока смеси веществ (см., например, [1, 2]). Его расчет и оптимизация сводится в основном к определению установившегося режима работы. Поэтому теоретический и практический интерес представляют лишь те математические модели каскада, которые позволяют описывать указанный режим.

В случае одного вещества в статьях [3, 4] доказано существование и дана характеристика установившегося режима работы каскада в рамках математической модели неравновесной динамики сорбции. При поглощении смеси веществ подобные исследования не проводились, а в качестве установившегося режима рассматривалось состояние каскада после нескольких циклов (см. [5, 7]).

Цель данной работы состоит в распространении результатов, полученных в статьях [3, 4], на процесс сорбции смеси веществ в каскаде аппаратов.

1. ФОРМУЛИРОВКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим каскад, состоящий из n последовательно соединенных аппаратов с неподвижным слоем сорбента длины l, на вход которого поступает поток смеси m сорбируемых веществ с постоянными (равными c_{0j}, $j=1,...,m$) концентрациями и постоянной (равной 1) линейной скоростью. Продолжительность каждого цикла работы каскада также предполагается постоянной и равной T.

Для описания процесса сорбции в каскаде используем m-мерное обобщение математической модели [4]:

$$\frac{\partial \vec{a}_{ik}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{c}_{ik}}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial \vec{a}_{ik}}{\partial t}=\vec{F}(\vec{c}_{ik},\vec{a}_{ik}),$$

$$\vec{c}_{ik}(0,t)=\vec{\psi}_{ik}(t), \qquad \vec{a}_{ik}(x,0)=\vec{\varphi}_{ik}(x), \tag{1.1}$$

где $(x,t) \in \Pi = [0,l] \times [0,T]$, $i = 1,2,...,n$ – номер аппарата, отсчитываемый от входа в каскад, $k = 1,2,...$ – номер цикла, t – локальное время k –го цикла, отличающееся от глобального времени на константу $(k-1)T$ (в начале k –го цикла $t = 0$), x – локальное расстояние i –го аппарата (т.е. расстояние от начала i –го аппарата), $\vec{c}_{ik}(x,t) = (c_{i1k}(x,t),..., c_{imk}(x,t))$, $\vec{a}_{ik}(x,t) = (a_{i1k}(x,t), \ldots, a_{imk}(x,t))$ – векторы, составленные из концентраций веществ смеси соответственно в потоке и сорбенте в точке x i –го аппарата в момент времени t k –го цикла.

Вектор-функции $\vec{\psi}_{ik}(t)$, $\vec{\varphi}_{ik}(x)$, задающие соответственно граничное и начальное условия задачи Гурса (1.1), удовлетворяют следующим условиям согласования

$$\vec{\psi}_{ik}(t) = \begin{cases} \vec{c}_0, & k \ge 1, \quad i = 1; \\ \vec{c}_{i-1,k}(l,t), & k \ge 1, \quad i = 2,3,...,n; \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\vec{\varphi}_{ik}(x) = \begin{cases} 0, & k = 1, \quad i = 1,2,...,n; \\ \vec{a}_{i+1,k-1}(x,T), & k > 1, \quad i = 1,2,...,n-1; \\ 0, & k \ge 1, \quad i = n; \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\vec{c}_0 = (c_{01}, ..., c_{0m})$ – вектор, составленный из концентраций веществ на входе каскада. Условие (1.2) выражает тот факт, что на вход каскада подается поток сорбируемых веществ с постоянными концентрациями c_{0j}, $j = 1, ..., m$, и что вещества непрерывно распределены в потоке. Условие $\vec{\varphi}_{i1}(x) = 0$ означает, что в начале первого цикла каскад свободен от сорбируемых веществ. Условия $\vec{\varphi}_{ik}(x) = \vec{a}_{i+1,k-1}(x,T)$ и $\vec{\varphi}_{nk}(x) = 0$ отражают способ перестройки каскада в момент переключения: $(i+1)$ – й аппарат на $(k-1)$ –м цикле становится i –м на k –м цикле, а в конец каскада подсоединяется аппарат со свежим сорбентом.

Таким образом, математическая модель каскада n последовательно соединенных аппаратов с неподвижным слоем сорбента, на вход которого поступает поток смеси m сорбируемых веществ с постоянными концентрациями, представляет собой бесконечное множество задач Гурса (1.1) с условиями согласования (1.2), (1.3). Под ее решением будем понимать вектор-функции $\vec{c}_{ik}(x,t)$, $\vec{a}_{ik}(x,t)$, с неотрицательными компонентами, непрерывные вместе со своими частными производными $(\vec{c}_{ik})'_x$, $(\vec{a}_{ik})'_t$ в прямоугольнике Π, удовлетворяющие соотношениям (1.1), а также условиям согласования (1.2), (1.3).

2. РАЗРЕШИМОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Пусть R^m - вещественное m-мерное пространство векторов со стандартной $\max$ нормою, R^m_+ - его конус, состоящий из векторов с неотрицательными компонентами, $C[0,l]^m$, $C[0,T]^m$, $C(\Pi)^m$ – вещественные банаховы пространства со стандартными $\max$ нормами, состоящие из непрерывных m-мерных вектор-функций, определенных соответственно на множествах $[0,l]$, $[0,T]$, Π, а $C_+[0,l]^m$, $C_+[0,T]^m$, $C_+(\Pi)^m$ – их конусы, состоящие из вектор-функций с неотрицательными компонентами.

Рассмотрим вспомогательную задачу Гурса в прямоугольнике Π:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{c}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \vec{F}(\vec{c}, \vec{a}), \\ \vec{c}(0,t) = \vec{\psi}(t), \qquad \vec{a}(x,0) = \vec{\varphi}(x), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\vec{\varphi} \in C_+[0,l]^m$, $\vec{\psi} \in C_+[0,T]^m$, а вектор-функция $\vec{F} : R^m_+ \times R^m_+ \to R^m$ удовлетворяет в области определения условию Липшица и неравенствам

$$F_i(\vec{c}, \vec{a})\big|_{c_i=0} \le 0, \qquad F_i(\vec{c}, \vec{a})\big|_{a_i=0} \ge 0 \qquad \forall i = 1,...,m \tag{2.2}$$

(множество таких вектор-функций $\vec{F}$ обозначим через $\Im$).

Под решением задачи (2.1) будем понимать пару вектор-функций $(\vec{a}, \vec{c})$, непрерывных вместе со своими частными производными $(\vec{c})'_x$, $(\vec{a})'_t$ в прямоугольнике Π и удовлетворяющих соотношениям (2.1).

Лемма 1. *Если* $\vec{F} \in \Im$, $(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) \in C_+[0,l]^m \times C_+[0,T]^m$, *то задача (2.1) имеет единственное, непрерывно зависящее от* $(\vec{\varphi}, \vec{\psi})$, *решение* $(\vec{a}, \vec{c}) \in C_+(\Pi)^m \times C_+(\Pi)^m$.

Доказательство. Обозначим через $\vec{G}$ расширение вектор-функции $\vec{F}$ на пространство $R^m \times R^m$, заданное формулой $\vec{G}(\vec{c},\vec{a}) = \vec{F}(|c_1|,...,|c_m|, |a_1|,...,|a_m|)$. Так как $\vec{G}$ удовлетворяет условию Липшица (с той же константой, что и $\vec{F}$), то, используя метод последовательных приближений, нетрудно доказать, что задача (2.1) с вектор-функцией $\vec{G}$ имеет единственное, непрерывно зависящее от $(\vec{\varphi}, \vec{\psi})$, решение $(\vec{a}, \vec{c}) \in C(\Pi)^m \times C(\Pi)^m$. Остается показать, что компоненты вектор-функций $\vec{a}, \vec{c}$ неотрицательны.

Предположим противное: существует точка $(x^*, t^*) \in \Pi$ и индекс $i \in \{1,...,m\}$ такие, что $a_i(x^*, t^*) < 0$ (случай $c_i(x^*, t^*) < 0$ исследуется аналогично). Последовательно уменьшая координату t, найдем точку $(x^*, t_{min}) \in \Pi$ такую, что $a_i(x^*, t_{min}) = 0$, $a_i(x^*, t_{min} + \tau) < 0$ для любого положительного числа τ из достаточно малого интервала $(0, \varepsilon)$. Представим i-ю компоненту вектор-функции $\vec{G}$ в виде

$$G_i(\vec{c},\vec{a}) = P(t)\, a_i + Q(t), \tag{2.3}$$

где $P(t) = (G_i(\vec{c},\vec{a}) - G_i(\vec{c},\vec{a})\big|_{a_i=0}) / a_i$, $Q(t) = G_i(\vec{c},\vec{a})\big|_{a_i=0}$. На интервале $(t_{min}, t_{min} + \varepsilon)$ функция $P(t)$ ограничена, а $Q(t) \ge 0$ (в силу условия (2.2)). Поэтому из (2.1), (2.3) вытекает, что

$$a_i(x^*, t_{min} + \tau) = \int_0^\tau Q(\xi)\, e^{\int_\xi^\tau P(\eta)d\eta} d\xi \ge 0$$

для любого $\tau \in (0, \varepsilon)$ – противоречие с определением точки (x^*, t_{min}). **Лемма доказана**.

Из леммы 1 вытекает существование непрерывного разрешающего оператора R задачи (2.1), задаваемого формулой $(\vec{a},\vec{c}) = \mathrm{R}(\vec{\varphi}, \vec{\psi})$. С помощью этого оператора построим разрешающие операторы каскада.

Пусть $\vec{\Phi}$ - вектор-функция $(\vec{\varphi}_1,\ldots,\vec{\varphi}_n)$ размерности nm, принадлежащая конусу $C_+[0,l]^{nm} \equiv C_+[0,l]^m \times \ldots \times C_+[0,l]^m$, а $(\vec{a}_1,\vec{c}_1) = \mathrm{R}(\vec{\varphi}_1, \vec{c}_0)$, $(\vec{a}_2,\vec{c}_2) = \mathrm{R}(\vec{\varphi}_2, \vec{c}_1(l,t))$, $\ldots$, $(\vec{a}_n,\vec{c}_n) = \mathrm{R}(\vec{\varphi}_n, \vec{c}_{n-1}(l,t))$ - решения задачи (2.1). Определим непрерывные операторы $\mathrm{A}, \mathrm{C} : C_+[0,l]^{nm} \to C_+(\Pi)^{nm}$ формулами: $\mathrm{A}\vec{\Phi} = \vec{\mathbf{A}} \equiv (\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$, $\mathrm{C}\vec{\Phi} = \vec{\mathbf{C}} \equiv (\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n)$, оператор сечения $\mathrm{D}: C_+(\Pi)^{nm} \to C_+[0,l]^{nm}$, полагая $\mathrm{D}\vec{\mathbf{A}} = (\vec{a}_1(x,T),\ldots,\vec{a}_n(x,T))$, и оператор сдвига $\mathrm{S}: C_+[0,l]^{nm} \to C_+[0,l]^{nm}$, полагая $\mathrm{S}\vec{\Phi} = (\vec{\varphi}_2,\vec{\varphi}_3,\ldots,\vec{\varphi}_n,0)$. Обозначим $\mathrm{P} = \mathrm{SDA}$.

Решение математической модели (1.1) – (1.3) в операторном виде задается формулами

$$\vec{\Phi}_1 = 0, \quad \vec{\mathbf{A}}_k = \mathrm{A}\vec{\Phi}_k, \quad \vec{\mathbf{C}}_k = \mathrm{C}\vec{\Phi}_k, \quad \vec{\Phi}_{k+1} = \mathrm{P}\vec{\Phi}_k, \quad k = 1,2,..., \tag{2.4}$$

где $\vec{\Phi}_k = (\vec{\varphi}_{1k},\ldots,\vec{\varphi}_{nk})$ - вектор-функция, задающая начальное состояние каскада, а $\vec{\mathbf{A}}_k = (\vec{a}_{1k},\ldots,\vec{a}_{nk})$, $\vec{\mathbf{C}}_k = (\vec{c}_{1k},\ldots,\vec{c}_{nk})$ – вектор-функции, описывающие процесс сорбции в каскаде на k-ом цикле. Из определения операторов $\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{P}$, очевидно, следует, что для любого $k = 1,2,...$, вектор-функции $\vec{\Phi}_k$, $\vec{\mathbf{A}}_k$, $\vec{\mathbf{C}}_k$, корректно определены. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если* $\vec{c}_0 \in R_+^m$, $\vec{F} \in \Im$, *то решение математической модели* (1.1) – (1.3) *существует и единственно.*

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА РАБОТЫ КАСКАДА

Пусть $q > 0$, $L = nl$. Обозначим через $\Im_{M,q}$ множество вектор-функций $\vec{F} \in \Im$, удовлетворяющих условию Липшица с константою M и неравенству

$$\left\| \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \tau[\vec{F}(\vec{c},\vec{a}_1) - \vec{F}(\vec{c},\vec{a}_2)] \right\| \le (1 - \tau q) \left\| \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \right\| \tag{3.1}$$

для произвольных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{c} \in R_+^m$ и для всех достаточно малых $\tau > 0$.

Лемма 2. *Если* $\vec{c}_0 \in R_+^m$, $\vec{F} \in \Im_{M,q}$, $L < M^{-1} ln(1+M^{-1}q)$, *то* P *есть сжимающий оператор.*

Доказательство. Исходя из определения оператора P, достаточно показать, что для любой пары вектор-функций $\vec{\Phi}_j = (\vec{\varphi}_1^{(j)},\ldots,\vec{\varphi}_n^{(j)}) \in C_+[0,l]^{nm}$, $j=1,2$, и достаточно малого $\tau > 0$ существует $q_1 > 0$ такое, что

$$\left\| \mathrm{D}_\tau \mathrm{A}\vec{\Phi}_1 - \mathrm{D}_\tau \mathrm{A}\vec{\Phi}_2 \right\| \le (1-\tau q_1)\left\| \vec{\Phi}_1 - \vec{\Phi}_2 \right\|, \tag{3.2}$$

где $\mathrm{A}\vec{\Phi}_j = \mathbf{A}_j = (\vec{a}_1^{(j)},\ldots,\vec{a}_n^{(j)})$, D_τ– оператор сечения по времени:
$\mathrm{D}_\tau \vec{\mathbf{A}}_j = (\vec{a}_1^{(j)}(x,\tau),\ldots,\vec{a}_n^{(j)}(x,\tau))$, $j=1,2$.

Пусть $i \in \{1,...,n\}$– произвольный индекс. Из (2.1) вытекает, что при достаточно малых $\tau > 0$

$$\left\| (\vec{a}_i^{(1)} - \vec{a}_i^{(2)})\Big|_{t=\tau} \right\| \le \left\| \vec{\varphi}_i^{(1)} - \vec{\varphi}_i^{(2)} + \tau[\vec{F}(\vec{c}_i^{(1)},\vec{\varphi}_i^{(1)}) - \vec{F}(\vec{c}_i^{(1)},\vec{\varphi}_i^{(2)})]\Big|_{t=0} \right\| + \tau \left\| [\vec{F}(\vec{c}_i^{(1)},\vec{\varphi}_i^{(2)}) - \vec{F}(\vec{c}_i^{(2)},\vec{\varphi}_i^{(2)})]\Big|_{t=0} \right\|. \tag{3.3}$$

Первого слагаемого в правой части (3.3) оцениваем сверху с помощью неравенства (3.1) величиной $(1-\tau q)\left\| \vec{\varphi}_i^{(1)} - \vec{\varphi}_i^{(2)} \right\|$. Для оценки второго слагаемого заметим, что $\left\| (\vec{c}_i^{(1)} - \vec{c}_i^{(2)})\Big|_{t=0} \right\| \le (e^{ML}-1)\left\| \vec{\Phi}_1 - \vec{\Phi}_2 \right\|$, поэтому, $\left\| [\vec{F}(\vec{c}_i^{(1)},\vec{\varphi}_i^{(2)}) - \vec{F}(\vec{c}_i^{(2)},\vec{\varphi}_i^{(2)})]\Big|_{t=0} \right\| \le M(e^{ML}-1)\left\| \vec{\Phi}_1 - \vec{\Phi}_2 \right\|$. Следовательно, в качестве q_1 в неравенстве (3.2) можно взять число $q - M(e^{ML}-1) > 0$. **Лемма доказана.**

В силу леммы 2, при выполнении условий $\vec{c}_0 \in R_+^m$, $\vec{F} \in \Im_{M,q}$, $L < M^{-1} ln(1+M^{-1}q)$ последовательность вектор-функций $\vec{\Phi}_k$, $k=1,2,...$, сходится в пространстве $C[0,l]^{nm}$ к единственной неподвижной точке $\vec{\Phi}_\infty = (\vec{\varphi}_{1\infty},\ldots,\vec{\varphi}_{n\infty}) \in C_+[0,l]^{nm}$ оператора P. Положим $\vec{\mathbf{A}}_\infty = (\vec{a}_{1\infty},\ldots,\vec{a}_{n\infty}) = \mathrm{A}\vec{\Phi}_\infty$, $\vec{\mathbf{C}}_\infty = (\vec{c}_{1\infty},\ldots,\vec{c}_{n\infty}) = \mathrm{C}\vec{\Phi}_\infty$. Из определения операторов A,C следует, что компоненты вектор-функций $\vec{\mathbf{A}}_\infty, \vec{\mathbf{C}}_\infty$ являются решениями следующих n задач Гурса в прямоугольнике Π:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{a}_{i\infty}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{c}_{i\infty}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \vec{a}_{i\infty}}{\partial t} = \vec{F}(\vec{c}_{i\infty}, \vec{a}_{i\infty}), \\ \vec{c}_{i\infty}(0,t) = \vec{\psi}_{i\infty}(t), \qquad \vec{a}_{i\infty}(x,0) = \vec{\varphi}_{i\infty}(x), \end{gathered} \tag{3.4}$$

где

$$\vec{\psi}_{i\infty}(t) = \begin{cases} \vec{c}_0, & i=1; \\ \vec{c}_{i-1,\infty}(l,t), & i=2,3,...,n. \end{cases} \tag{3.5}$$

Так как операторы A,C непрерывны в точке $\vec{\Phi}_\infty$, то $\vec{\mathbf{A}}_\infty = \lim_{k\to\infty} \vec{\mathbf{A}}_k$, $\vec{\mathbf{C}}_\infty = \lim_{k\to\infty} \vec{\mathbf{C}}_k$ в пространстве $C(\Pi)^{nm}$, поэтому при указанных выше предположениях установившийся режим работы каскада в рамках используемой математической модели (1.1) – (1.3) существует и описывается системой уравнений (3.4) – (3.5). Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Если* $\vec{c}_0 \in R_+^m$, $\vec{F} \in \Im_{M,q}$, $L < M^{-1} ln(1+M^{-1}q)$, *то последовательности вектор-функций* $\vec{\mathbf{A}}_k$, $\vec{\mathbf{C}}_k$, $k=1,2,...$, *сходятся в пространстве* $C(\Pi)^{nm}$. *Их пределы* $\vec{\mathbf{A}}_\infty$, $\vec{\mathbf{C}}_\infty$ *описывают установившийся режим работы каскада и являются решениями* n *задач Гурса (3.4) с условиями согласования (3.5), где* $\vec{\Phi}_\infty$ *- неподвижная точка оператора* P.

Так как установившийся режим работы каскада определяется неподвижной точкой оператора P, то определенный интерес представляют условия существования этих точек.

Теорема 3. *Если* $\vec{c}_0 \in R_+^m$, $\vec{F} \in \Im$ *и существует такое число* α, *что* $F_j(\vec{c},\vec{a}) \le 0$ *при* $a_j \ge \alpha$ *для произвольных векторов* $\vec{c},\vec{a}$ *из* R_+^m *и индекса* $j \in \{1,...,m\}$, *то оператор* P *имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Образуем в конусе $C_+[0,l]^{nm}$ последовательность вложенных выпуклых множеств $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq ...$ по правилу: $\Omega_1 = \{\vec{0}\}$, $\Omega_{k+1} = co(\Omega_k \cup \mathrm{P}\Omega_k)$, $k = 1,2,...,$ где co - операция образования выпуклой оболочки. Положим $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. Множество Ω обладает следующими свойствами:

$\mathrm{P}\Omega \subseteq \Omega$. Действительно, если $\vec{\Phi} \in \Omega$, то $\vec{\Phi} \in \Omega_k$ для некоторого номера k. Но тогда, очевидно, $\mathrm{P}\vec{\Phi} \in \Omega_{k+1} \subseteq \Omega$.

Множество вектор-функций Ω *равномерно ограничено числом* α. Действительно, в противном; случае для некоторой ограниченной числом α вектор-функция $\vec{\Phi} \in \Omega$ имеет место $\left\|\mathrm{P}\vec{\Phi}\right\| > \alpha$. Но тогда существуют точка $(x,t) \in \Pi$ и индексы i, j такие, что $a_{ij}(x,t) = \alpha$ и $a_{ij}(x,t+\tau) > \alpha$ для всех достаточно малых положительных τ (здесь $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n) = \mathrm{A}\vec{\Phi}$). Таким образом, имеем $F_j(\vec{c}_i(x,t+\tau),\vec{a}_i(x,t+\tau)) \le 0$, и $a_{ij}(x,t+\tau) = a_{ij}(x,t) + \int_0^{\tau} F_j(\vec{c}_i(x,t+\xi),\vec{a}_i(x,t+\xi))\,d\xi \le \alpha$ – противоречие.

Множество вектор-функций Ω *равностепенно непрерывно.* Для доказательства рассмотрим произвольную вектор-функцию $\vec{\Phi} = (\vec{\varphi}_1,\ldots,\vec{\varphi}_n)$ из Ω и приращения $\Delta\vec{\varphi}_i(x) = \vec{\varphi}_i(x+\Delta x) - \vec{\varphi}_i(x)$, где $x, x+\Delta x \in [0,l]$ - произвольные числа ($\Delta x > 0$). Покажем, что

$$\left\|\Delta\vec{\varphi}_i(x)\right\| \le Q_i\,\Delta x, \qquad i = 1,...,n, \tag{3.6}$$

где $\|\cdot\|$ – норма пространства R^m, а числа Q_i определены рекуррентным соотношением

$$Q_n = 0, \qquad Q_i = Q_{i+1}\,e^{MT} + MQT, \qquad i = n-1,...,1, \tag{3.7}$$

в котором $Q = \max\limits_{\|\vec{c}\| \le \beta,\, \|\vec{a}\| \le \alpha} \left\|\vec{F}(\vec{c},\vec{a})\right\|$, $\beta = \left\|\vec{c}_0\right\| e^{ML} + \alpha ML$, M – константа Липшица для вектор функции $\vec{F}$.

Действительно, если $\vec{\Phi} \in \Omega_1$, то неравенство (3.6) очевидно, поскольку $\vec{\Phi} = \vec{0}$. Предположим, что оно верно для всех вектор-функций из Ω_k и докажем его для Ω_{k+1}. Исходя из определения Ω_{k+1}, достаточно доказать это неравенство для любой вектор-функции вида $\vec{\Phi}^* = (\vec{\varphi}_1^*,\ldots,\vec{\varphi}_n^*) = \mathrm{P}\vec{\Phi}$, где $\vec{\Phi} \in \Omega_k$.

Пусть $(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n) = \mathrm{A}\vec{\Phi}$, $(\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n) = \mathrm{C}\vec{\Phi}$. Аналогично п. 2 устанавливаем, что $\left\|\vec{a}_i(x,t)\right\| \le \alpha$, $i = 1,...,n,$ в прямоугольнике Π. Поэтому, используя соотношение

$$\vec{c}_i(x,t) = \vec{c}_i(0,t) - \int_0^x \vec{F}(\vec{c}_i(\xi,t),\vec{a}_i(\xi,t))\,d\xi\,,$$

получаем оценки: $\left\|\vec{c}_i(x,t)\right\| \le \beta$, $\left\|\Delta\vec{c}_i(x,t)\right\| \le Q\Delta x$, $i = 1,...,n$. Из полученных оценок и соотношения

$$\vec{a}_i(x,t) = \vec{\varphi}_i(x) + \int_0^t \vec{F}(\vec{c}_i(x,\xi),\vec{a}_i(x,\xi))\,d\xi$$

следует, что $\left\|\Delta\vec{a}_i(x,T)\right\| \le \left\|\Delta\vec{\varphi}_i(x)\right\| e^{MT} + MQT\Delta x$, $i = 1,...,n.$ Так как, по предположению индукции, $\left\|\Delta\vec{\varphi}_i(x)\right\| \le Q_i\,\Delta x$, то $\left\|\Delta\vec{a}_i(x,T)\right\| \le (Q_i e^{MT} + MQT)\Delta x.$ Остается заметить, что $\Delta\vec{a}_i(x,T) = \Delta\vec{\varphi}_{i-1}^*(x),$ $i = 2,3,...,n,$ $\Delta\vec{\varphi}_n^*(x) = 0$, а, в силу соотношения (3.7), $Q_i e^{MT} + MQT = Q_{i-1}$.

Из равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности множества вектор-функций Ω следует, что его замыкание $\overline{\Omega}$, в силу теоремы Арцела, компактно в пространстве $C[0,l]^{nm}$. Таким образом, оператор P непрерывно отображает компактное и выпуклое множество $\overline{\Omega}$ в себя, а поэтому, в силу теоремы Шаудера, имеет по крайней мере одну неподвижную точку. **Теорема доказана**.

Замечание. Теорема 3 устанавливает условия существования неподвижной точки оператора P, но вопрос о сходимости при этих условиях последовательности $\vec{\Phi}_k$ остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорбционные методы разделения многокомпонентных смесей органических веществ / И.Г. Рода, Р.М. Марутовский, В.Я. Каганов, Н.Г. Антонюк // Химия и технология воды. – 1989. – Т. 11, № 12. – С. 1059 – 1067.

2. Рода И.Г., Жук П.Ф., Марутовский Р.М. Теоретические аспекты сорбционного разделения смеси органических веществ из водных растворов в каскаде аппаратов с плотным слоем // Химия и технология воды. – 1990. – Т. 12, № 7. – С. 579 – 582.

3. Бондаренко Л.Н. Математическая модель каскада сорбционных аппаратов // Математическое моделирование. – 1997. – Т. 9, № 11. – С. 23 – 32.

4. Бондаренко Л.Н. Каскад последовательно соединенных сорбционных аппаратов (нелинейный случай) // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10, № 4. – С. 41 – 50.

5. Svedberg G. Numerical solution of multicomponent adsorption process under periodic countercurrent operation // Chem. Eng. Sci. – 1976. – V. 31, № 5. – P. 345 – 354.

6. Sung E., Han C.D., Rhee H. Optimal design of multistage adsorption-bed systems // AIChE Journal. – 1979. – V. 25, № 1. – P. 87 – 100.