УДК 519.6:517.958

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ КАСКАДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ СОРБЦИОННЫХ АППАРАТОВ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ ПО ВЫХОДНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЕЩЕСТВА

Бондаренко Л.Н., к. ф. - м. н., доцент, Жук П.Ф., д. ф. – м. н., доцент

Херсонский факультет Запорожского юридического института

ВВЕДЕНИЕ

Каскады последовательно соединенных сорбционных аппаратов находят широкое практическое применение, например, при очистке сточных вод. Между тем их математические модели изучены значительно хуже, чем математические модели одиночных аппаратов. Математическому моделированию каскадов сорбционных аппаратов посвящено относительно небольшое число работ [1 - 7].

Каскад представляет собой последовательность аппаратов одинаковой длины. Его работа циклична и после окончания любого цикла аппарат на входе выводится на регенерацию, а в конец каскада подключается аппарат со свежим сорбентом. Переключение аппаратов осуществляется обычно либо при достижении выходной концентрации вещества предельно допустимого значения, либо периодически.

В статьях [6,7] доказано, что при периодическом переключении каскад в рамках используемой математической модели выходит на предельный режим работы. Этот режим является важнейшей характеристикой каскада и используется для оптимизации его параметров. Значительный практический интерес представляет доказательство существования предельного режима работы каскада с переключением по выходной концентрации вещества, поскольку такое переключение наиболее распространено на практике. Отметим, что анализ работы каскада с переключением по выходной концентрации вещества существенно сложнее и требует иных подходов, чем аналогичный анализ работы каскада с периодическим переключением.

В данной статье исследуется линейная математическая модель каскада сорбционных аппаратов с переключением по выходной концентрации вещества. Основным результатом является доказательство существования предельного режима работы этого каскада в рамках выбранной математической модели при некоторых ограничениях на длину каскада.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАСКАДА

Работа каскада, состоящего из n последовательно соединенных аппаратов длины l, описывается на k-ом цикле n задачами Гурса в прямоугольнике $\Pi_k = [0,l]\times[0,T_k]$

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} = c_{ik} - a_{ik},$$

$$\frac{\partial c_{ik}}{\partial x} = a_{ik} - c_{ik},$$

$$a_{ik}(x,0) = \varphi_{ik}(x),$$

$$c_{ik}(0,t) = \psi_{ik}(t), \tag{1.1}$$

где T_k - продолжительность цикла k-ого цикла ($k=1,2,\ldots$), i - номер аппарата, отсчитываемый от входа в каскад ($i=1,2,\ldots,n$), t - локальное время k-ого цикла, x - локальное расстояние i-ого аппарата, $a_{ik}(x,t)$, $c_{ik}(x,t)$ - концентрации вещества соответственно в сорбенте и потоке в точке

x i-ого аппарата в момент времени t k-ого цикла. Начальные и граничные условия определяются состояниями $(i-1)$-ого аппарата на k-ом цикле и $(i+1)$-ого аппарата на $(k-1)$-ом цикле:

$$\varphi_{ik}(x) = \begin{cases} 0, & k=1, \\ a_{i+1,k-1}(x, T_{k-1}), & k>1, \ i<n, \\ 0, & i=n, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\psi_{ik}(t) = \begin{cases} 1, & i=1, \\ c_{i-1,k}(l,t), & i=2,3,...,n. \end{cases} \tag{1.3}$$

Условие $\varphi_{i1}(x)=0$ означает, что в начале каскад свободен от вещества. Условия $\varphi_{ik}(x) = a_{i+1,k-1}(x, T_{k-1})$ и $\varphi_{nk}(x)=0$ отражают способ переключения аппаратов: $(i+1)$-й аппарат на $(k-1)$-ом цикле становится i-м на k-ом цикле; в конец каскада подключается аппарат, свободный от вещества. Условие (1.3) выражает тот факт, что на вход каскада подается поток с постоянной (равной 1) концентрацией вещества и что вещество непрерывно распределено в потоке (концентрация вещества на выходе $(i-1)$-ого аппарата совпадает с концентрацией вещества на входе i-ого аппарата).

Длительность k-ого цикла T_k определяется из условия достижения выходной концентрации вещества в потоке предельно допустимого значения α:

$$c_{nk}(l, T_k) = \alpha. \tag{1.4}$$

Отметим, что интерес представляет лишь случай $e^{-nl} < \alpha < 1$, что и будет предполагаться в дальнейшем.

Существование предельного режима работы каскада в рамках используемой математической модели означает существование в пространстве непрерывных функций $C[0,l]$ пределов $\varphi_{i\infty}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{ik}(x)$, $i=1,...,n$, задающих этот режим.

2. ПРЕДЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ КАСКАДА

Выразим решение математической модели (1.1) - (1.4) в операторном виде. Для этого используем n вспомогательных задач Гурса

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} = c_i - a_i,$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x} = a_i - c_i,$$

$$a_i(x,0) = \varphi_i(x), \tag{2.1}$$

$$c_i(0,t) = \psi_i(t),$$

где $\psi_i(t) = \begin{cases} 1, & i=1, \\ c_{i-1}(l,t), & i=2,3,...,n. \end{cases}$ Пусть $\vec{a} = (a_1,...,a_n)$, $\vec{c} = (c_1,...,c_n)$ - вектор-функции, составленные из решения системы (2.1), $\vec{\varphi} = (\varphi_1,...,\varphi_n)$ - вектор-функция, задающая начальные условия в (2.1), $C[0,l]^n$ - пространство вектор-функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0,l]$. Обозначим через $F(t)$, $t \ge 0$, - однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов, действующих из $C[0,l]^n$ в $C[0,l]^n$ по формуле $F(t)\vec{\varphi}=\vec{a}(\bullet,t)$ (вектор-функции $\vec{\varphi}(x)$ ставится в соответствие решение задачи (2.1) $\vec{a}(x,t)$ с фиксированным значением t), а через f - непрерывный функционал, определенный на пространстве $C[0,l]^n$ формулой $f(\vec{u})=e^{-nl}(1+\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^l e^{jl+\xi}u_{j+1}(\xi)d\xi)$ (отметим, что если $\vec{a}_k(x,t)$ - вектор-функция концентрации вещества в сорбенте на k -ом цикле, то $f(\vec{a}_k(x,t))=c_{nk}(l,t)$ - выходная концентрация вещества в потоке в момент времени t k -го цикла).

Из условий (1.2), (1.4) следует, что вектор-функции $\vec{\varphi}_k=(\varphi_{1k},...,\varphi_{nk})$, задающие начальные условия в математической модели (1.1), удовлетворяют следующим соотношениям

$$\vec{\varphi}_{k+1}=S\vec{\Phi}_k, \quad f(\vec{\Phi}_k)=\alpha, \tag{2.2}$$

где $\vec{\Phi}_k=F(T_k)\vec{\varphi}_k$, S - оператор сдвига: $S\vec{\varphi}=S(\varphi_1,\varphi_2...,\varphi_n)=(\varphi_2,\varphi_3...,\varphi_n,0)$.

Кроме $\vec{\varphi}_k$, нам потребуются вектор-функции $\vec{\varphi}^{(k)}(T)$, задающие начальные условия в каскаде с периодическим переключением (с периодом T). По определению $\vec{\varphi}^{(k+1)}(T)=S\vec{\Phi}^{(k)}(T)$, где $\vec{\Phi}^{(k)}(T)=F(T)\vec{\varphi}^{(k)}(T)$. В [6] доказано, что последовательность $\vec{\varphi}^{(k)}(T)$ сходится в пространстве $C[0,l]^n$ и ее предел $\vec{\varphi}^{(\infty)}(T)$ удовлетворяет соотношению $\vec{\varphi}^{(\infty)}(T)=S\vec{\Phi}^{(\infty)}(T)$, где $\vec{\Phi}^{(\infty)}(T)=F(T)\vec{\varphi}^{(\infty)}(T)$ - предел последовательности $\vec{\Phi}^{(k)}(T)$. Кроме того, из свойств монотонности, установленных в [6, теорема 1], следует, что вектор-функции $\vec{\varphi}^{(\infty)}(T)$, $\vec{\Phi}^{(\infty)}(T)$ монотонны по T: если $T_1\le T_2$, то $\vec{\varphi}^{(\infty)}(T_1)\le\vec{\varphi}^{(\infty)}(T_2)$, $\vec{\Phi}^{(\infty)}(T_1)\le\vec{\Phi}^{(\infty)}(T_2)$ (здесь и далее под неравенством $\vec{u}\le\vec{v}$ понимаем $u_i(x)\le v_i(x)$, $i=1,...,n$, $x\in[0,l]$).

Основным результатом данной работы является:

Теорема. *Если* $e^{-nl}<\alpha<1$, $nl\le 2$, *то последовательность вектор-функций* $\vec{\varphi}_k$, *задающих начальные условия задач Гурса (1.1), сходится в пространстве* $C[0,l]^n$.

Доказательство. Так как $\vec{\varphi}_{k+1}=S\vec{\Phi}_k$, то достаточно установить сходимость последовательности $\vec{\Phi}_k$. Пусть $\vec{\Phi}$ - произвольная ее предельная точка. Покажем, что

$$\vec{\Phi}=\vec{\Phi}^{(\infty)}(T_{min}), \tag{2.3}$$

где $T_{min}=min\{T\,|\,\vec{\Phi}\le\vec{\Phi}^{(\infty)}(T)\}$. Действительно, в противном случае $\vec{\Phi}\le\vec{\Phi}^{(\infty)}(T_{min})$, причем для некоторого номера i и точки $x^*\in[0,l]$

$$\Phi_i(x^*)=\Phi_i^{(\infty)}(x^*,T_{min}), \tag{2.4}$$

но $\beta=f(\vec{\Phi}^{(\infty)}(T_{min}))>f(\vec{\Phi})=\alpha$. Обозначим $\vec{\varphi}=S\vec{\Phi}$, $\vec{\varphi}^{(\infty)}(T_{min})=S\vec{\Phi}^{(\infty)}(T_{min})$, T_* - решение уравнения $f(F(T_*)\vec{\varphi})=\alpha$, $\vec{\Phi}_*=F(T_*)\vec{\varphi}$, T^*- решение уравнения $f(F(T^*)\vec{\varphi}^{(\infty)}(T_{min}))=$ $=\alpha+e^{-l}(\beta-\alpha)$, $\vec{\Phi}^*=F(T^*)\vec{\varphi}^{(\infty)}(T_{min})$. При $nl\le 2$ имеет место $\forall t\ge 0$ неравенство $f(F(t)\vec{\varphi}^{(\infty)}(T_{min}))-f(F(t)\vec{\varphi})\le e^{-l}(\beta-\alpha)$, следовательно, $T_*\le T^*<T_{min}$ и $\vec{\Phi}_*\le\vec{\Phi}^*<$ $<\vec{\Phi}^{(\infty)}(T_{min})$. Заметим, что $\vec{\Phi}_*$ - также предельная точка последовательности $\vec{\Phi}_k$, поэтому существует вектор-функция $\vec{\Phi}_{k_0}\le\vec{\Phi}^{(\infty)}(T_{min})$. Последовательно применяя предыдущие рассуждения к

$\vec{\Phi}_{k_0}, \vec{\Phi}_{k_0+1}, \ldots,$ находим, что $\vec{\Phi}_{k_0+j} \le \vec{\Phi}^*$, $j = 1,2,\ldots$. Но полученное неравенство противоречит соотношению (2.4), следовательно, утверждение (2.3) верно.

Далее, вектор-функция $\vec{\Phi}^{(\infty)}(T_{min})$ однозначно определяется значением α из равенства $f(\vec{\Phi}^{(\infty)}(T_{min})) = \alpha$, поэтому последовательность $\vec{\Phi}_k$ имеет не более одной предельной точки. Остается заметить, что, аналогично [7, лемма 2], последовательность $\vec{\Phi}_k$ компактна в пространстве $C[0,l]^n$. **Теорема доказана**.

Предельная вектор-функция $\vec{\varphi}_\infty = (\varphi_{1\infty}, \ldots, \varphi_{n\infty})$ последовательности $\vec{\varphi}_k$ задает начальные условия задачи Гурса (1.1), описывающей (при $k = \infty$) предельный режим работы каскада в прямоугольнике $\Pi_\infty = [0,l] \times [0,T_\infty]$, где $T_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} T_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen J.W., Cunningham R.L., Buege J.A. Computer simulation of plantscale multicolumn adsorption processes under periodic counter-current operation // Ind. Eng. Chem. Proc. Design Develop. – 1972. – V.11, № 3. – P. 430 - 436.
2. Svedberg G. Numerical solution of multicomponent adsorption process under periodic countercurrent operation // Chem. Eng. Sci. – 1976. – V.31, № 5. – P. 345 - 354.
3. Sung E., Han C.D., Rhee H. Optimal design of multistage adsorption-bed systems // AIChE Journal. – 1979. – V.25, № 1. – P. 87 - 100.
4. Рода И.Г., Жук П.Ф. Модель работы каскада аппаратов с неподвижным слоем адсорбента в случае выпуклых изотерм сорбции // Химия и технология воды. – 1986. – Т.8, № 2. – С.7 – 10.
5. Рода И.Г., Жук П.Ф., Марутовский Р.М. Теоретические аспекты сорбционного разделения смеси органических веществ из водных растворов в каскаде аппаратов с плотным слоем // Химия и технология воды. – 1990. – Т. 12, № 7. – С.579 – 582.
6. Бондаренко Л.Н. Математическая модель каскада сорбционных аппаратов // Математическое моделирование. – 1997. - Т.9, №11. - С. 23-32.
7. Бондаренко Л.Н. Каскад последовательно соединенных сорбционных аппаратов (нелинейный случай) // Математическое моделирование. – 1998. – Т.10, № 4. – С.41–50.