REGARDING THE TRANSITION OPERATOR OF THE STEEPEST DESCENT

П. Ф. Жук
National Aviation University

П. Ф. Жук, А. А. Мусина, Об операторе перехода метода наискорейшего спуска, *Матем. моделирование*, 2014, том 26, номер 8, 65–80

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2014 год, том 26, номер 8, стр. 65-80

УДК 519.61

ОБ ОПЕРАТОРЕ ПЕРЕХОДА МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

П.Ф. Жук, А.А. Мусина

Национальный авиационный университет (г.Киев, пр-т Комарова, 1)
anyamusina@mail.ru

Дано определение и найдена структура обратного оператора перехода метода наискорейшего спуска. Построено множество особых точек прямого оператора перехода. Показано, что оно представляет собой объединение счетного числа непустых попарно непересекающихся поверхностей класса гладкости C^∞, получаемых из некоторых многогранников при помощи обратного оператора перехода.

Ключевые слова: метод наискорейшего спуска, оператор перехода, асимптотическая скорость сходимости, возвратные операторы, множество вырождающихся точек.

REGARDING THE TRANSITION OPERATOR OF THE STEEPEST DESCENT

P.F. Zhuk, A.A. Musina

National Aviation University

The definition and found of the reverse transition operator of steepest descent are presented. Singular set of the direct transition operator method is constructed. It's demonstrated that it is the union of countable number of non-empty disjoint surface by the C^∞ smoothness class, which are derived from some of the polyhedra by means of the revers transition operator.

Key words: method of steepest descent, the transition operator, rate of convergence, recurrent operators, set of degenerating points.

1. Введение

Метод наискорейшего спуска является одним из наиболее известных методов оптимизации и решения операторных уравнений. Он является также основой для многих итерационных методов вариационного типа. Такие методы имеют нелинейные операторы переходов, а их скорость сходимости существенно зависит от начального приближения.

Несмотря на многочисленные публикации, посвященные этим методам (см., напр., [1-4]), зависимость их скорости сходимости от начального приближения математически изучена лишь в простейших случаях (так, например, скорость сходимости известного метода Barzilai-Borwein [5] удалось математически обосновать только в двумерном случае). Более того, трудности возникают уже при постановке задачи, поскольку под скоростью сходимости итерационного процесса обычно понимают оценки нормы оператора перехода.

В [6-8] было показано, что метод наискорейшего спуска для линейных задач обладает специфическим асимптотическим поведением, на основе которого может быть естественным образом определено понятие асимптотической скорости сходимости метода как функции от начального приближения. Изучение этой функции представляется, на наш взгляд, весьма актуальным; например, интересны вопросы:

a) каковы области непрерывности и дифференцируемости асимптотической скорости сходимости?

b) какова структура множества начальных приближений с заданным значением асимптотической скорости сходимости?

c) существуют ли значения асимптотической скорости сходимости, для которых мера Лебега указанного в b) множества отлична от 0?

При решении указанных вопросов возникает необходимость в исследовании дифференциальных свойств и особенностей прямых и обратных операторов перехода метода наискорейшего спуска, чему и посвящена данная работа.

Для удобства изложения вводится понятие оператора перехода метода наискорейшего спуска в симплексной форме. Дано определение и найдена структура обратного оператора перехода метода. С помощью этого обратного оператора построено множество особых точек прямого оператора перехода метода. Показано, что оно представляет собой объединение счетного числа непустых попарно непересекающихся поверхностей класса гладкости C^{∞}, получаемых из некоторых многогранников при помощи обратного оператора перехода.

Отметим, что рассмотренные в данной статье вопросы ранее, по-видимому, не изучались.

2. Постановка задачи

Пусть H – конечномерное действительно гильбертовое пространство со скалярным произведением (u,v) и нормой $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$, а $A: H \to H$ – линейный самосопряженный и положительно определенный оператор, спектр которого состоит только из простых собственных значений (последнее предположение не принципиально, но упрощает формулировку результатов).

Метод наискорейшего спуска решения операторного уравнения $Au = f$, или, что тоже самое, минимизации квадратичного функционала $F(u) = 0,5(Au,u) - (f,u)$ в пространстве H, задается рекуррентным соотношением

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \tau_k w^{(k)}, \qquad k=0,1,..., \tag{1.1}$$

где $u^{(0)} \in H$ – произвольное начальное приближение, $w^k = Au^k - f$ – невязка на k-й итерации, а итерационный параметр τ_k выбирается из условия минимума величины функционала $F(u^{(k+1)}) = 0.5(Au^{(k+1)}, u^{(k+1)}) - (f, u^{(k+1)})$ и равен

$$\tau_k = \frac{\left\|w^{(k)}\right\|^2}{(Aw^{(k)}, w^{(k)})}. \tag{1.2}$$

Метод наискорейшего спуска обладает асимптотическим свойством (см. [8]): если первое приближение $u^{(1)}$ не является точным решением u^* уравнения (1.1), то существует последовательность

$$\rho_k(u^{(0)}) = \sqrt{\left(F(u^{(k+1)}) - F(u^*)\right) / \left(F(u^{(k)}) - F(u^*)\right)}, \qquad k = 0,1,\ldots,$$

которая монотонно не убывает и сходится. Обозначим через $\rho_\infty(u^{(0)})$ ее предел и определим на H функцию

$$V(u^{(0)}) = \begin{cases} \infty, & u^{(1)} = u^*, \\ -\ln \rho_\infty(u^{(0)}), & u^{(1)} \neq u^*, \end{cases}$$

которую будем называть асимптотической скоростью сходимости метода наискорейшего спуска.

Основной задачей нашего исследования является изучение функции V, в частности, структуры ее множества уровня (т.е. множества начальных приближений с заданным значением асимптотической скорости сходимости). Оно опирается на инвариантность функции V относительно оператора перехода метода: $V(u^{(k)}) = V(u^{(0)})$, $k = 1,2,\ldots$. При этом возникает необходимость в изучении свойств оператора перехода метода наискорейшего спуска, что и является основной задачей данной работы.

Используя формулы (1.1), (1.2), преобразуем оператор перехода к более удобному для исследования виду. Заметим, что $w^{(k+1)} = w^{(k)} - \tau_k A w^{(k)}$, $u^{(0)} = A^{-1}(w^{(0)} + f)$, следовательно, достаточно рассмотреть оператор перехода $E - \tau_k A$, относительно которого инвариантна функция $\tilde{V}(w^{(0)}) = V(A^{-1}(w^{(0)} + f))$. Но функция $\tilde{V}$ однородна: $\tilde{V}(\alpha w^{(0)}) = \tilde{V}(w^{(0)})$ при $\alpha \neq 0$; поэтому достаточно рассмотреть оператор перехода для нормированных невязок $w^k / \|w^k\|$. Этот оператор отображает единичную сферу пространства H в себя и может быть представлен в специальной симплексной форме.

Пусть λ_i, e_i, $i = 1,2,\ldots,n+1$ – собственные значения в порядке возрастания и соответствующая им ортонормированная система собственных векторов оператора A. Выбирая e_i, $i = 1,2,\ldots,n+1$, в качестве базиса, отождествим пространство H с арифметическим пространством R^{n+1}.

Обозначим через $\overline{S} = \left\{ x = (x_1,\ldots,x_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,n \right\}$ стандартный симплекс пространства R^n, через $S_1 = (1,0,\ldots,0)$, $S_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,$ $S_n = (0,\ldots,0,1)$, $S_{n+1} = (0,\ldots,0)$ – его вершины, а через $S_\omega = \overline{S} \setminus \{S_1,\ldots,S_{n+1}\}$ – симплекс $\overline{S}$ без вершин.

Определим отображение $T : S_\omega \to S_\omega$ по формуле

$$\hat{x} = Tx, \tag{1.3}$$

где $\hat{x} = (\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n)$, $\hat{x}_i = (\mu(x) - \lambda_i)^2 x_i / \beta(x)$, $i = 1,\ldots,n$, $\mu(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, $\beta(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (\mu(x) - \lambda_i)^2 x_i$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $x_{n+1} = 1 - x_1 - \ldots - x_n$. Отображение T, заданное формулой (1.3), расширим на весь симплекс $\overline{S}$, полагая $TS_i = S_i$, $i = 1,2,\ldots,n+1$.

Определенное таким образом отображение $T:\overline{S}\to\overline{S}$ будем называть оператором перехода метода наискорейшего спуска в симплексной форме.

Укажем связь этого оператора с итерационным процессом (1.1), (1.2). Пусть w^k, $k=0,1,\ldots,$ – последовательность невязок метода (1.1), (1.2), $x^{(k+1)}=Tx^{(k)}$, $k=0,1,\ldots,$ – итерационная последовательность, порожденная оператором T, а $\chi:R^{n+1}\setminus\{0\}\to\overline{S}$ – отображение, заданное формулой $x_i=w_i^2/\sum\limits_{j=1}^{n+1}w_j^2$, $i=1,\ldots,n$. Тогда, если $x^{(0)}=\chi(w^{(0)})$, то

$$x^{(k)}=\chi(w^{(k)}),\quad k=1,2,\ldots. \tag{1.4}$$

Соотношение (1.4) индуцирует функцию V на симплекс $\overline{S}$; при этом размерность пространства уменьшается на 1. Множество уровня асимптотической скорости на симплексе $\overline{S}$ инвариантно относительно оператора T; при его построении возникает необходимость в обращении оператора T. Определение и свойства обратного оператора T^{-1} рассмотрены в п.2 данной работы. Оказывается, что на внутренности S симплекса $\overline{S}$ многозначное отображение T^{-1} распадается на n однозначных, бесконечно дифференцируемых ветвей T_j^{-1} без особых точек. Но оператор T, в отличие от операторов T_j^{-1}, имеет в S особые точки. Такими точками являются внутренние точки симплекса, которые оператор T преобразовывает в граничные точки симплекса (вырождающиеся точки). Они важны, поскольку являются также особыми точками асимптотической скорости метода (в них она может быть разрывной или недифференцируемой). Построению множества вырождающихся точек и изучению его свойств посвящен п.3 данной работы. Показано, что при $n\geq 2$ множество вырождающихся точек есть объединение счетного числа непустых попарно непересекающихся $(n–1)$-мерных поверхностей класса гладкости C^∞, получаемых из некоторых многогранников при помощи обратного оператора T^{-1}.

3. Возвратные операторы

В данном пункте рассматривается многозначный оператор T^{-1}, обратный к оператору T. Пусть $y=(y_1,\ldots,y_n)$ – произвольная точка симплекса $\overline{S}$, $y_{n+1}=1-y_1-\ldots-y_n$. По определению $T^{-1}y$ есть множество решений уравнения

$$Tx=y. \tag{2.1}$$

При $y\in\{S_1,\ldots,S_{n+1}\}$ решение (2.1), очевидно, единственно: $x=y$ и $T^{-1}y=\{y\}$.

Пусть $1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n+1$. Обозначим через $\overline{S}_{i_1\ldots i_m}$ грань симплекса $\overline{S}$ с вершинами $S_{i_1},\ldots,S_{i_m}$, через $S_{i_1\ldots i_m}=\left\{x\,\middle|\,x=\alpha_1S_{i_1}+\ldots+\alpha_mS_{i_m},\ \alpha_p>0,\ p=1,\ldots,m,\ \sum\limits_{p=1}^{m}\alpha_p=1\right\}$ – внутренность этой грани, а через S – внутренность симплекса $\overline{S}$.

Предположим теперь, что $y\in S_{i_1\ldots i_m}\subseteq S_\omega$. Пусть x – произвольное решение уравнения (2.1). Исходя из определения оператора T, получаем систему равенств

$$y_i = (\mu(x)-\lambda_i)^2 x_i / \beta(x), \quad i=1,...,n+1. \tag{2.2}$$

Поскольку $y \in S_{i_1 \ldots i_m}$, то из (2.2) вытекает, что:

1) при $i \in I_y \equiv \{i_1,...,i_m\}$ справедливы соотношения

$$x_i \neq 0, \quad \mu(x) \neq \lambda_i, \quad x_i = y_i \beta(x) / (\mu(x)-\lambda_i)^2, \tag{2.3}$$

2) при $i \notin I_y$ имеем

$$(\mu(x)-\lambda_i)\, x_i = 0. \tag{2.4}$$

По определению $\mu(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\mu(x)-\lambda_i)\, x_i = 0, \tag{2.5}$$

поэтому, полагая в (2.5) вместо x_i правую часть (2.3) и учитывая равенство (2.4), получаем

$$\sum_{i \in I_y} \frac{y_i}{\mu(x)-\lambda_i} = 0.$$

Следовательно, если $x \in T^{-1}y$, то $\mu(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i \in I_y} \frac{y_i}{t-\lambda_i} = 0, \tag{2.6}$$

которое назовем характеристическим. Это уравнение имеет, как нетрудно видеть, в точности $(m-1)$ простых вещественных корней

$$t_j \in]\lambda_{i_j}, \lambda_{i_{j+1}}[, \qquad j=1,...,m-1. \tag{2.7}$$

Таким образом, множество $T^{-1}y$ можно представить в виде

$$T^{-1}y = \bigcup_{j=1}^{m-1} T_j^{-1} y, \tag{2.8}$$

где $T_j^{-1}y = T^{-1}y \cap \left\{x \mid \mu(x) = t_j\right\}$, $j=1,...,m-1$.

Зафиксируем j и определим строение множества $T_j^{-1}y$. Возможны такие два случая:

1) $t_j \notin \Lambda \equiv \{\lambda_i,\ i=1,...,n+1\}$, 2) $t_j = \lambda_p$, где $i_j < p < i_{j+1}$.

Рассмотрим первый случай. Обозначим

$$\overline{x}_i^{(j)}(y) = y_i / (t_j - \lambda_i)^2, \quad i = 1,...,n+1, \quad \theta^{(j)}(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{x}_i^{(j)}(y),$$

$$\overline{x}^{(j)}(y) = (\overline{x}_i^{(j)}(y))_{i=\overline{1,n}}, \quad x^{(j)}(y) = \overline{x}^{(j)}(y) / \theta^{(j)}(y). \tag{2.9}$$

Непосредственно проверяется, что

$$x^{(j)}(y) \in S_{i_1...i_m}, \quad \mu(x^{(j)}(y)) = t_j, \quad Tx^{(j)}(y) = y. \tag{2.10}$$

Следовательно, при $t_j \notin \Lambda$ уравнение (2.1) имеет решение, соответствующее j-му корню характеристического уравнения (2.6). Покажем, что оно единственно.

Предположим противное: существуют две различные точки $x, z \in T_j^{-1}y$. Так как они удовлетворяют соотношениям (2.3), (2.4), то $x_i = z_i = 0$ для $\forall i \notin I_y$ и

$$\beta(x) = \beta(z) = 1 / \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{(t_j - \lambda_i)^2}.$$

Но тогда из (2.3) следует $x_i = z_i$ для $\forall i \in I_y$, т.е. $x = z$ – противоречие. Таким образом, при $t_j \notin \Lambda$ получаем равенство $T_j^{-1}y = \left\{x^{(j)}(y)\right\}$, где точка $x^{(j)}(y)$ определена по формуле (2.9).

Во втором случае корню $t_j = \lambda_p$ характеристического уравнения (2.6) соответствует бесконечно много решений уравнения (2.1):

$$x_\alpha^{(j)}(y) = \overline{x}_\alpha^{(j)}(y) / \theta_\alpha^{(j)}(y), \quad \alpha \in [0, \infty[, \tag{2.11}$$

где $\overline{x}_\alpha^{(j)}(y) = \left(\overline{x}_{i\alpha}^{(j)}(y)\right)_{i=\overline{1,n}}$, $\theta_\alpha^{(j)}(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{x}_{i\alpha}^{(j)}(y)$, $\overline{x}_{i\alpha}^{(j)}(y) = y_i / (t_j - \lambda_i)^2$, $i \in \overline{1, n+1} \setminus \{p\}$, $\overline{x}_{p\alpha}^{(j)}(y) = \alpha$.

Непосредственно проверяется, что $x = x(\alpha) \equiv x_\alpha^{(j)}(y) \in S_{i_1...i_j p i_{j+1}...i_m}$, $\alpha \in]0, \infty[$, есть интервал с началом $x(0) \equiv x_0^{(j)}(y) \in S_{i_1...i_m}$ и $\mu(x_\alpha^{(j)}(y)) = t_j$, $Tx_\alpha^{(j)}(y) = y$ для $\forall \alpha \in [0, \infty[$.

Так же, как и в первом случае доказывается, что других решений, соответствующих корню $t_j = \lambda_p$, уравнение (2.1) не имеет; следовательно, при $t_j \in \Lambda$ множество $T_j^{-1}y$ совпадает с бесконечным множеством точек $\left\{x_\alpha^{(j)}(y),\ \alpha \in [0, \infty[\right\}$, заданных формулой (2.11).

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 1$, а y – произвольная точка симплекса $\overline{S}$. Тогда, если $y = S_i$ – одна из вершин симплекса $\overline{S}$, то множество $T^{-1}y = \{S_i\}$. В противном случае точка*

y является внутренней точкой некоторой грани $\overline{S}_{i_1 \dots i_m}$ симплекса $\overline{S}$, множество $I_y=\{i_1,\dots,i_m\}$ содержит не менее 2 чисел, характеристическое уравнение (2.6) *имеет в точности $(m-1)$ простых вещественных корней $t_j \in]\lambda_{i_j}, \lambda_{i_{j+1}}[$, $j=1,\dots,m-1$, и множество $T^{-1}y = \bigcup_{j=1}^{m-1} T_j^{-1}y$, где $T_j^{-1}y = \left\{x^{(j)}(y)\right\}$, если корень t_j не является собственным значением оператора A ($t_j \notin \Lambda \equiv \left\{\lambda_i,\, i=1,\dots,n+1\right\}$), и $T_j^{-1}y = \left\{x_\alpha^{(j)}(y),\ \alpha \in [0,\infty[\right\}$, если $t_j = \lambda_p$ – собственное значение оператора A, а точки $x^{(j)}(y)$, $x_\alpha^{(j)}(y)$ вычисляются по формулам* (2.9), (2.11) *соответственно.*

Структура множества $T^{-1}y$ существенно зависит от выбора точки y. Однако если y принадлежит внутренности S симплекса $\overline{S}$, то множество $I_y = \{1,\dots,n+1\}$ и характеристическое уравнение (2.6) имеет в точности n простых вещественных корней

$$t_j \in]\lambda_j, \lambda_{j+1}[, \qquad j=1,\dots,n. \tag{2.12}$$

Тогда, в силу теоремы 1, имеем, что $T_j^{-1}y = \left\{x^{(j)}(y)\right\} \subseteq S,\ \ j=1,\dots,n$, и

$$T^{-1}y = \left\{x^{(1)}(y),\dots,x^{(n)}(y)\right\}. \tag{2.13}$$

Таким образом, на множестве S многозначное отображение T^{-1} распадается на n однозначных ветвей, которые задаются операторами $T_j^{-1} : S \to S$, $j=1,\dots,n$.

Под возвратными операторами будем понимать операторы T_j^{-1}, $j=1,\dots,n$, и единичный оператор I, действующие на множестве S. Отметим, что множество $T_j^{-1}(S) \neq S$, т.е. $T_j^{-1}(S) \subset S$ – собственное подмножество множества S, поскольку существуют точки $x \in S$ такие, что $Tx \notin S$ (точка x удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда число $\mu(x)$ является собственным значением оператора A, т.е. $\mu(x) \in \Lambda \equiv \left\{\lambda_i,\, i=1,\dots,n+1\right\}$). Более того, образы $T_j^{-1}(S)$, $j=1,\dots,n$, множества S попарно не пересекаются. Имеет место

Теорема 2. *Пусть $n \geq 1$, $\mu(T_j^{-1}(S)) = \left\{\mu(x) \mid x \in T_j^{-1}(S)\right\}$. Тогда $\mu(T_j^{-1}(S)) \subseteq]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$, $j=1,\dots,n$, а множества $T_j^{-1}(S)$, $j=1,\dots,n$, попарно не пересекаются.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\mu(T_j^{-1}(S)) \subseteq]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$, $j=1,\dots,n$. Пусть $x \in T_j^{-1}(S)$. Из формул (2.9), (2.10), (2.12) вытекает, что $\mu(x) = \mu(x^{(j)}(y)) = t_j \in]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$, поэтому $\mu(T_j^{-1}(S)) = \bigcup_{x \in T_j^{-1}(S)} \left\{\mu(x)\right\} \subseteq]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$, что и требовалось показать.

Предположим теперь, что множества $T_j^{-1}(S)$, $j=1,\dots,n$, могут попарно пересекаться, например, $T_i^{-1}(S) \cap T_j^{-1}(S) \neq \varnothing$ для некоторых $i \neq j$. Тогда, очевидно,

$\mu(T_i^{-1}(S)) \cap \mu(T_j^{-1}(S)) \neq \emptyset$ и, в силу доказанного выше, $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[\cap]\lambda_j, \lambda_{j+1}[\neq \emptyset$ – противоречие. ■

Рассмотрим далее дифференциальные свойства и особенности возвратных операторов. Для этого исследуем матрицы Якоби $J(y, T_j^{-1})$, $j = 1,...,n$, этих операторов в произвольной точке $y \in S$ (по определению $J(y, F) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(y)\right]_{i,j=\overline{1,n}}$ для произвольной дифференцируемой вектор-функции $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$).

Теорема 3. *Пусть* $n \geq 1$, T_j^{-1} – j*-й возвратный оператор, а* $J(y, T_j^{-1})$ – *его матрица Якоби в точке* $y \in S$. *Тогда для любого* $j = 1,...,n$ *и* $y \in S$ *справедливы утверждения:*

1. *Оператор* T_j^{-1} *бесконечно дифференцируем на* S, *т.е.* $T_j^{-1} \in C^{\infty}(S, S)$.

2. *Ранг матрицы* $J(y, T_j^{-1})$ *равен* n, *т.е. оператор* T_j^{-1} *не имеет особых точек.*

Доказательство. Покажем, что $T_j^{-1} \in C^1(S, S)$ (существование высших производных доказывается аналогично). Пусть $x = T_j^{-1}y$. Исходя из аналитического задания T_j^{-1} (2.9), достаточно показать, что существуют и непрерывны на S производные $\partial t_j / \partial y_i$, $i = 1,...,n$. Обозначим

$$y_{n+1} = 1 - y_1 - ... - y_n, \quad \psi(y_1,...,y_n,t) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i / (t - \lambda_i).$$

Так как $|\psi_t'| = \sum_{i=1}^{n+1} y_i / (t - \lambda_i)^2 > 0$, то уравнение $\psi(y_1,...,y_n,t) = 0$, в силу теоремы о неявной функции, разрешимо относительно t, т.е. $t_j = t_j(y_1,...,y_n)$, причем $\partial t_j / \partial y_i = = -\psi_{y_i}' / \psi_t' \in C(S)$, $i = 1,...,n$, что и требовалось доказать.

По определению T_j^{-1} – правый обратный оператор к оператору T, т.е. $TT_j^{-1} = I$ – единичный оператор. Из аналитического определения оператора T следует, что он бесконечно дифференцируем на S. Поэтому, применяя теорему о сложной функции к произведению TT_j^{-1}, имеем $J(x,T)J(y,T_j^{-1}) = J(y, I)$, где $y \in S$, $x = T_j^{-1}y$. Но $J(y, I)$ – единичная матрица, следовательно, матрица $J(y, T_j^{-1})$ невырожденная. ■

4. Множество вырождающихся точек

Оператор T, в отличие от операторов T_j^{-1}, имеет в S особые точки. Такими точками являются те и только те внутренние точки симплекса, которые оператор T преобразовывает в граничные точки симплекса. В общем случае обозначим через $r(x,k)$ ранг матрицы Якоби $J(x, T^k)$ оператора T^k, $k \geq 1$, в точке x. Положим $\Lambda(x,k) =$

$=\left\{\mu(T^i x),\ i=0,1,...,k-1\right\}\cap\Lambda$, где, по определению, $T^0 x\equiv x$. Тогда, очевидно, либо $\Lambda(x,k)=\varnothing$, либо $\Lambda(x,k)=\left\{\lambda_{i_1},...,\lambda_{i_m}\right\}$.

Теорема 4. *Пусть* $n\ge 1$, $k\ge 1$, *а точка* $x\in S_\omega$ *– произвольная точка симплекса* $\overline{S}$, *кроме вершин. Тогда* $r(x,k)=n$, *если* $\Lambda(x,k)=\varnothing$, *и* $r(x,k)\le n-m$, *если* $\Lambda(x,k)=$ $=\left\{\lambda_{i_1},...,\lambda_{i_m}\right\}$, *причем в этом случае строки* $i_1,...,i_m$ *матрицы* $J(x,T^k)$ *– нулевые.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $x\in S$, $\mu(x)\notin\Lambda$. Тогда $y=Tx\in S$ и для некоторого номера $j\in\overline{1,n}$ имеем $x=T_j^{-1}y$. В силу теоремы 3, матрица $J(y,T_j^{-1})$ неособая, следовательно, неособой является и матрица $J(x,T)=(J(y,T_j^{-1}))^{-1}$, т.е. $r(x,1)=n$.

Предположим теперь, что $x\in S_\omega$, $\mu(x)\notin\Lambda$. Без ограничения общности можно считать, что $x\in S_{12...p,n+1}$. Обозначим $y=Tx$, $\gamma_{ij}=\partial y_i/\partial x_j$.

В силу предыдущего случая, матрица Якоби $J_{12...p,n+1}(x,T)=[\gamma_{ij}]_{i,j=1,...,p}$ сужения оператора T на симплекс $\overline{S}_{12...p,n+1}$ в точке x – неособая. Из аналитического определения оператора T следует, что при $i>p$ имеет место равенство

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если } i\ne j,\\ (\mu(x)-\lambda_i)^2/\beta(x), & \text{если } i=j,\end{cases}$$

поэтому матрица Якоби оператора T на симплексе $\overline{S}$ в точке x равна

$$J(x,T)=\left[\begin{array}{c|ccc} J_{12...p,n+1}(x,T) & \begin{matrix}\gamma_{1,p+1} & \cdots & \gamma_{1,n}\\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \gamma_{p,p+1} & \cdots & \gamma_{p,n}\end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix}\gamma_{p+1,p+1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{n,n}\end{matrix}\end{array}\right]$$

и также является неособой матрицей, т.е. $r(x,1)=n$. Утверждение теоремы вытекает из рассмотренных выше случаев и непосредственных вычислений $J(x,T)$. ■

Обозначим через ∂S границу симплекса $\overline{S}$. Очевидно, что $\overline{S}=\partial S\cup S$, $\partial S\cap S=\varnothing$. Точку x будем называть вырождающейся, если существует такое натуральное число $k(x)$, что $T^{k(x)-1}x\in S$, а $T^{k(x)}x\in\partial S$; если же для любого $k=0,1,2,\dots$ имеет место $T^k x\in S$, то такую точку x будем называть невырождающейся.

Обозначим через V и U множества всех вырождающихся и невырождающихся точек соответственно. Очевидно, $S=V\cup U$, $V\cap U=\varnothing$. Если $x\in V$, то $\mu(T^{k(x)-1}x)=$

$=\lambda_{i(x)}\in\Lambda$ – собственное значение оператора A; числа $k(x)$ и $i(x)$ будем называть соответственно номером и индексом вырождения точки x. В этом случае множество $\Lambda(x,k(x))=\{\lambda_{i(x)}\}$ непустое и, в силу теоремы 4, точка x является особой точкой оператора $T^{k(x)}$. При $x\in U$ множество $\Lambda(x,k)=\varnothing$ для любого натурального k, следовательно, в силу теоремы 4, точка x не является особой точкой ни для одного из операторов T^k, $k=1,2,\ldots$. Таким образом, множество V состоит из особых точек операторов T^k, $k=1,2,\ldots$, т.е. $V=\bigcup_{k=1}^{\infty}V_k$, где V_k – множество особых точек оператора T^k, принадлежащих внутренности S симплекса $\overline{S}$.

Основной задачей данного пункта является построение множества V при помощи обратного оператора T^{-1}.

Лемма 1. *Пусть $n\geq 1$, а ∂S и S – граница и внутренность симплекса $\overline{S}$ соответственно. Тогда $T(\partial S)=\partial S$, $T\overline{S}=\overline{S}$, $TS\supseteq S$.*

Доказательство. Докажем сначала равенство $T(\partial S)=\partial S$. Пусть $y\in T(\partial S)$. Тогда существует точка $x\in\partial S$ такая, что $y=Tx$. Из определения оператора T следует $y\in\partial S$, т.е. $T(\partial S)\subseteq\partial S$. Предположим теперь, что некоторая точка $y\in\partial S$. В силу теоремы 1, $T^{-1}y\cap\partial S\neq\varnothing$, поэтому существует точка $x\in\partial S$ такая, что $y=Tx$. Но тогда $y\in T(\partial S)$, т.е. $\partial S\subseteq T(\partial S)$, что и требовалось доказать.

Далее, поскольку $T:\overline{S}\to\overline{S}$, то $T\overline{S}\subseteq\overline{S}$. Пусть $y\in\overline{S}$. В силу теоремы 1, $T^{-1}y\neq\varnothing$, поэтому существует точка $x\in\overline{S}$ такая, что $y=Tx$, следовательно, $\overline{S}\subseteq T\overline{S}$, т.е. $T\overline{S}=\overline{S}$. Докажем, наконец, включение $S\subseteq TS$. Пусть точка $y\in S$. Подействуем на нее возвратным оператором T_1^{-1}: $T_1^{-1}y=x^{(1)}(y)\in S$. Так как $Tx^{(1)}(y)=y$, то $y\in TS$, что и требовалось доказать. ■

Обозначим через $\overline{V}$ множество $\overline{V}=\partial S\cup V$.

Лемма 2. *Пусть $n\geq 1$, а V и U – множества всех вырождающихся и невырождающихся точек соответственно. Тогда матрица Якоби $J(x,T^k)$ вырождена для любой точки $x\in V$ при $k\geq k(x)$ и невырождена для любой точки $x\in U$ и любого натурального числа k. Кроме того, имеют место соотношения $V\subseteq TV$, $U=TU$, $\overline{V}=T\overline{V}$.*

Доказательство. Если точка $x\in V$, то $\mu(T^{k(x)-1}x)=\lambda_{i(x)}\in\Lambda$. Поэтому при $k\geq k(x)$ имеем $\Lambda(x,k)\neq\varnothing$ и, в силу теоремы 4, матрица Якоби $J(x,T^k)$ вырождена.

Предположим теперь, что $x\in U$. Тогда итерационная последовательность x, Tx, $\ldots,T^kx,\ldots$ находится во множестве S. Следовательно, числовое множество $\{\mu(x), \mu(Tx),\ldots, \mu(T^kx),\ldots\}$ не содержит собственных значений оператора A. Но тогда $\Lambda(x,k)=\varnothing$ $\forall k=1,2,\ldots$ и, в силу теоремы 4, матрица Якоби $J(x,T^k)$ невырождена для любого натурального числа k.

Докажем включение $V\subseteq TV$. Пусть точка $y\in V$. Подействуем на нее возвратным оператором T_1^{-1}: $T_1^{-1}y = x^{(1)}(y) \in V$. Так как $Tx^{(1)}(y) = y$, то $y \in TV$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь равенство $U = TU$. Предположим сначала, что точка $y \in U$. Тогда существует точка $x^{(1)}(y) = T_1^{-1}y$, которая также принадлежит множеству U. Следовательно, $y = Tx^{(1)}(y) \in TU$, т.е. $U \subseteq TU$. Предположим теперь, что точка $y \in TU$. Тогда $y = Tx$ для некоторого $x \in U$, следовательно, $y \in U$, т.е. $TU \subseteq U$.

Доказательство равенства $\overline{V} = T\overline{V}$ аналогично. ■

В следующей теореме указан способ построения множества вырождающихся точек при помощи многозначного оператора T^{-1}. Для произвольного множества $X \subseteq \overline{S}$ обозначим через $T^{-k}X$ множество $\left\{x \mid T^k x \in X\right\}$.

Теорема 5. *Пусть* $n \geq 1$, ∂S *– граница симплекса* $\overline{S}$, V *– множество вырождающихся точек,* $\overline{V} = \partial S \cup V$. *Тогда имеют место соотношения*

$$\overline{V} = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\partial S), \quad V = \overline{V} \setminus \partial S. \tag{3.1}$$

Доказательство. Предположим, что точка $x \in \overline{V}$. Тогда для некоторого $k \in \{0,1,...\}$ точка $T^k x$ принадлежит ∂S; следовательно, $x \in T^{-k}(\partial S)$, т.е. $\overline{V} \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\partial S)$. Пусть теперь $x \in T^{-k}(\partial S)$ некоторого $k \in \{0,1,...\}$. Тогда $T^k x \in \partial S$, следовательно, $x \in \overline{V}$, т.е. $\overline{V} \supseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\partial S)$. ■

Так как $\partial S \subseteq T^{-1}(\partial S) \subseteq T^{-2}(\partial S) \subseteq ...$ (лемма 1), то разложение (3.1) позволяет последовательно уточнять множество V с помощью формул (2.9), (2.11). Однако это разложение не показывает структуру множества V. Ниже будет получено дизъюнктное разложение множества V, лишенное указанного недостатка.

Обозначим через $V_i = \left\{x \in V \mid i(x) = i\right\}$, $i = 2,3,\ldots,n$, множества вырождающихся точек с заданными индексами вырождения. Эти множества непустые, попарно не пересекаются и содержат все вырождающиеся точки, т.е.

$$V = \bigcup_{i=2}^{n} V_i, \quad V_i \cap V_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad V_i \neq \varnothing, \quad i = 2,3,\ldots,n. \tag{3.2}$$

Зафиксируем i и опишем структуру множества V_i. Обозначим через $V_i^k = \left\{x \in V_i \mid k(x) = k\right\}$ множество вырождающихся точек с заданным индексом вырождения i и номером вырождения k. Очевидно,

$$V_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_i^k, \quad V_i^{k_1} \cap V_i^{k_2} = \varnothing \qquad \text{при} \quad k_1 \neq k_2. \tag{3.3}$$

Лемма 3. *Пусть* $n \geq 2$, $i \in \{2,3,\ldots,n\}$ *– индекс вырождения. Тогда имеют место равенства*

$$V_i^k = TV_i^{k+1}, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{3.4}$$

Доказательство. Действительно, пусть точка $y \in V_i^k$. Тогда $y \in S$ и существует точка $x^{(1)}(y) = T_1^{-1}y$. По определению y имеем $T^{k-1}y \in S$, $\mu(T^{k-1}y) = \lambda_i$. Следовательно, $T^k x^{(1)}(y) = T^{k-1}y \in S$, $\mu(T^k x^{(1)}(y)) = \mu(T^{k-1}y) = \lambda_i$, т.е. точка $x^{(1)}(y) \in V_i^{k+1}$. Но тогда точка $y \in TV_i^{k+1}$, т.е. $V_i^k \subseteq TV_i^{k+1}$.

Пусть теперь точка $y \in TV_i^{k+1}$. Тогда существует такая точка $x \in V_i^{k+1}$, что $y = Tx$. Так как $T^k x \in S$, $\mu(T^k x) = \lambda_i$, то $T^{k-1}y \in S$, $\mu(T^{k-1}y) = \lambda_i$, следовательно, $y \in V_i^k$, т.е. $V_i^k \supseteq TV_i^{k+1}$. ■

Обозначим $\omega = \{1,2,...,n\}$, $\omega^k = \prod_1^k \omega$, $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega^k$. Для произвольного упорядоченного набора индексов $J = (j_1,...,j_k) \in \Omega$ положим $T_J^{-1} = T_{j_1}^{-1}...T_{j_k}^{-1}$, где $T_j^{-1} : S \to S$, $j = 1,...,n$ – возвратные операторы. Очевидно, что T_J^{-1} есть отображение S в S и $T^k T_J^{-1} = I$ – единичный оператор.

Обозначим для краткости V_i^1 через σ_i. Так как $\sigma_i \subseteq S$, то для любого набора индексов $J \in \Omega$ существует множество $\sigma_i^J = T_J^{-1}\sigma_i \subseteq S$.

Лемма 4. *Пусть* $n \geq 2$, $i \in \{2,3,...,n\}$ *– индекс вырождения. Тогда имеют место равенства*

$$V_i^{k+1} = T^{-k}\sigma_i = \bigcup_{J \in \omega^k} \sigma_i^J, \qquad k = 1,2,\ldots. \tag{3.5}$$

Доказательство. Равенство $V_i^{k+1} = T^{-k}\sigma_i$ вытекает непосредственно из соотношения (3.4). Покажем, что $T^{-k}\sigma_i = \bigcup_{J \in \omega^k} \sigma_i^J$.

Предположим сначала, что точка $x \in T^{-k}\sigma_i$. Рассмотрим последовательность точек

$$x^{(1)} = Tx, \quad x^{(2)} = Tx^{(1)}, \quad \ldots, \quad x^{(k)} = Tx^{(k-1)}. \tag{3.6}$$

Обозначим $y = T^k x$. Так как $x^{(k)} = y$, то $x^{(k-1)}$ удовлетворяет уравнению $Tx^{(k-1)} = y$, следовательно, $x^{(k-1)} \in T^{-1}y$. Поскольку $y \in \sigma_i \subseteq S$, то, в силу соотношения (2.13), точка $x^{(k-1)}$ может быть получена с помощью некоторого возвратного оператора $T_{j_k}^{-1}$: $x^{(k-1)} = T_{j_k}^{-1}y \in S$. Применяя предыдущие рассуждения к остальным равенствам в (3.6), имеем $x^{(k-2)} = T_{j_{k-1}}^{-1} x^{(k-1)}$, …, $x = T_{j_1}^{-1} x^{(1)}$, т.е. $x = T_J^{-1} y \in \sigma_i^J$ при некотором наборе индексов $J = (j_1, ..., j_k) \in \omega^k$.

Предположим теперь, что при некотором наборе индексов $J = (j_1, ..., j_k) \in \omega^k$ точка $x \in \sigma_i^J$. Но тогда существует точка $y \in \sigma_i$ такая, что $x = T_J^{-1} y$. Поскольку $T^k T_J^{-1} = I$, то $T^k x = T^k T_J^{-1} y = y$, следовательно, $x \in T^{-k} y \subseteq T^{-k} \sigma_i$. ■

Покажем, что разложение (3.5) дизъюнктное.

Лемма 5. *Пусть* $n \geq 2$, $i \in \{2, 3, ..., n\}$ *– индекс вырождения. Тогда множества* σ_i^J, $J \in \Omega$, *попарно не пересекаются.*

Доказательство. Пусть $J_1 \in \omega^{k_1}$, $J_2 \in \omega^{k_2}$ – два различных набора индексов. Покажем, что

$$\sigma_i^{J_1} \cap \sigma_i^{J_2} = \varnothing. \tag{3.7}$$

Если $k_1 \neq k_2$ – это равенство следует из соотношений (3.3), (3.5).

Случай $k_1 = k_2 = k$ докажем методом математической индукции по k. При $k = 1$ равенство (3.7) следует из теоремы 2. Предположим, что оно справедливо при $k = m$ и докажем его для $k = m + 1$. Пусть $J_p = (j_1^{(p)}, ..., j_{m+1}^{(p)})$, $\tilde{J}_p = (j_2^{(p)}, ..., j_{m+1}^{(p)})$, $p = 1, 2$.

Возможны такие два случая.

1) $\tilde{J}_1 = \tilde{J}_2$. Тогда $j_1^{(1)} \neq j_1^{(2)}$, $\sigma_i^{\tilde{J}_1} = \sigma_i^{\tilde{J}_2}$,

$$\sigma_i^{J_p} = T_{J_p}^{-1} \sigma_i = T_{j_1^{(p)}}^{-1} \sigma_i^{\tilde{J}_p}, \qquad p = 1, 2, \tag{3.8}$$

и равенство (3.7) следует из теоремы 2.

2) $\tilde{J}_1 \neq \tilde{J}_2$. Тогда по предположению индукции $\sigma_i^{\tilde{J}_1} \cap \sigma_i^{\tilde{J}_2} = \varnothing$. Поэтому $\sigma_i^{J_1} \cap \sigma_i^{J_2} = \varnothing$, т.к. в противном случае из (3.8) следовало бы $\sigma_i^{\tilde{J}_1} \cap \sigma_i^{\tilde{J}_2} = T\sigma_i^{J_1} \cap T\sigma_i^{J_2} \neq \varnothing$ – противоречие. Таким образом, равенство (3.7) доказано для $k = m + 1$. ■

Из соотношений (3.2), (3.3), (3.5) получаем дизъюнктное разложение множества вырождающихся точек:

$$V = \bigcup_{i=2}^{n} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{J \in \omega^{k-1}} \sigma_i^J, \tag{3.9}$$

где, по определению, $\sigma_i^J = \sigma_i$ при $J \in \omega^0$.

Дадим геометрическую характеристику множеству σ_i^J при фиксированном наборе индексов $J \in \Omega$. Заметим сначала, что $\sigma_i = V_i^1 = \{x \in V_i \mid k(x) = 1\} = \{x \in S \mid \mu(x) = \lambda_i\}$; следовательно, множество σ_i описывается системой ограничений

$$(\lambda_{n+1}-\lambda_1)x_1+...+(\lambda_{n+1}-\lambda_n)x_n=\lambda_{n+1}-\lambda_i\,,\quad x_1+...+x_n<1\,,\quad x_j>0\,,\ j=1,...,n\,, \tag{3.10}$$

и представляет собой внутренность непустого выпуклого (n–1)-мерного многогранника.

Рассмотрим подпространство $R^{n-1}=\left\{x\in R^n \mid x_n=0\right\}$ пространства R^n и обозначим через G_i проекцию области σ_i на R^{n-1}. Из соотношений (3.10) вытекает, что область G_i задается системой ограничений

$$(\lambda_{n+1}-\lambda_1)x_1+...+(\lambda_{n+1}-\lambda_{n-1})x_{n-1}<\lambda_{n+1}-\lambda_i\,,\quad x_1+...+x_{n-1}<1-t\,,$$

$$x_j>0\,,\ j=1,...,n-1,\qquad t=\left(\lambda_{n+1}-\lambda_i-\sum_{p=1}^{n-1}\left(\lambda_{n+1}-\lambda_p\right)x_p\right)/\left(\lambda_{n+1}-\lambda_n\right), \tag{3.11}$$

и представляет собой непустой выпуклый открытый в R^{n-1} многогранник. Определим отображение $P_i:G_i\to\sigma_i$ формулой $P_i(x_1,...,x_{n-1},0)=(x_1,...,x_{n-1},t)$, где t задается формулой (3.11). Очевидно, P_i – линейное биективное отображение.

Лемма 6. *Пусть* $n\geq 2$, $i\in\{2,3,\dots,n\}$ *– индекс вырождения,* $J\in\Omega$ *– набор индексов, а* $F_i^J=T_J^{-1}P_i$ *– суперпозиция отображений* T_J^{-1} *и* P_i. *Тогда справедливы утверждения:*

а) отображение F_i^J *осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами* G_i *и* σ_i^J;

б) $F_i^J\in C^\infty(G_i,\sigma_i^J)$;

в) для любой точки $x\in G_i$ *ранг матрицы Якоби* $J(x,F_i^J)$ *равен* $(n-1)$.

Доказательство. Так как $T^kT_J^{-1}=I$, то $T_J^{-1}:\sigma_i\to\sigma_i^J$ – биекция, следовательно, F_i^J также является биекцией как суперпозиции двух биективных отображений.

Утверждение б) следует из включений $P_i\in C^\infty(G_i,\sigma_i)$ (т.к. P_i – линейное отображение) и $T_J^{-1}\in C^\infty(S,S)$ (теорема 3).

Докажем утверждение в). Пусть $x\in G_i$ и $y=P_ix$. Тогда $J(x,F_i^J)=$ $=J(y,T_J^{-1})J(x,P_i)$. Так как $y\in S$, то, в силу теоремы 3, ранг матрицы $J(y,T_J^{-1})$ равен n. Матрицу Якоби $J(x,P_i)$ вычисляем, исходя из определения отображения P_i:

$$J(x,P_i)=\begin{bmatrix}1&0&...&0\\0&1&...&0\\.&.&...&.\\0&0&...&1\\\alpha_1&\alpha_2&...&\alpha_{n-1}\end{bmatrix},\ \text{ где } \alpha_p=\frac{\lambda_p-\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n},\quad p=1,2,...,n-1.$$

Ранг матрицы $J(x,P_i)$, очевидно, равен $(n-1)$. Поскольку матрица $J(y,T_J^{-1})$ невырожденная, то ранг матрицы $J(x,F_i^J)$ равен рангу матрицы $J(x,P_i)$, т.е. $(n-1)$. ■

Из леммы 6 следует, что множество σ_i^J есть поверхность в пространстве R^n. Охарактеризуем ее размерность и гладкость.

Лемма 7. *Пусть $n \ge 2$, $i \in \{2,3,...,n\}$ – индекс вырождения, $J \in \Omega$ – набор индексов. Тогда множество $\sigma_i^J = T_J^{-1}\sigma_i$ представляет собой поверхность в пространстве R^n размерности $n-1$ и класса гладкости C^∞.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $y^{(0)} \in \sigma_i^J$. Обозначим через $O(\varepsilon, y^{(0)})$ окрестность точки $y^{(0)}$ радиуса $\varepsilon > 0$ в топологии симплекса $\overline{S}$:

$$O(\varepsilon, y^{(0)}) = \left\{ y \in \overline{S} \,\middle|\, \left\| y - y^{(0)} \right\| < \varepsilon \right\},$$

где $\|y\| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |y_i|$ – норма вектора y.

Докажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ множество $\sigma_i^J \cap O(\varepsilon, y^{(0)})$ взаимно однозначно проектируется на некоторую $(n-1)$-мерную область, лежащую в одной из $(n-1)$-мерных координатных плоскостей.

Действительно, поскольку отображение F_i^J биективное (лемма 6), то существует единственная точка $x^{(0)} \in G_i$ такая, что $y^{(0)} = F_i^J x^{(0)}$. Рассмотрим матрицу Якоби $J(x^{(0)}, F_i^J)$. Это прямоугольная матрица размера $n \times (n-1)$ и ее ранг, в силу леммы 6, равен $(n-1)$.

Предположим, для определенности, что матрица, образованная первыми $(n-1)$ строками матрицы $J(x^{(0)}, F_i^J)$, невырожденная. Тогда к отображению

$$y_p = F_{i,p}^J \, x, \quad p = 1,2,...,n-1, \tag{3.12}$$

где $F_{i,p}^J$ – p-я компонента отображения F_i^J, применима теорема об обратной функции. В силу этой теоремы на некоторой $(n-1)$-мерной окрестности $O \subseteq R^{n-1}$ определено обратное к (3.12) отображение $x = f(y)$. Уравнение $y_n = F_{i,n}^J f(y)$, где $y \in O$, описывает кусок поверхности σ_i^J, содержащий точку $y^{(0)}$. Таким образом, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ множество $\sigma_i^J \cap O(\varepsilon, y^{(0)})$ взаимно однозначно проектируется на $(n-1)$-мерную область $O \subseteq R^{n-1}$; следовательно, размерность поверхности σ_i^J равна $n-1$.

Кроме того, поскольку $F_i^J \in C^\infty(G_i, \sigma_i^J)$ (лемма 6), то отображение $f \in C^\infty(O)$, а следовательно, $F_{i,n}^J f \in C^\infty(O)$ и $\sigma_i^J \in C^\infty$. ■

Основным результатом данного пункта является

Теорема 6. *Если* $n \geq 2$ *, то множество вырождающихся точек* V *есть объединение счетного числа непустых попарно непересекающихся* $(n-1)$*-мерных поверхностей класса гладкости* C^{∞}*, получаемых из многогранников* V_i^1*,* $i = 2,3,...,n$ *, путем воздействия на них возвратными операторами.*

Доказательство теоремы вытекает непосредственно из дизъюнктного разложения (3.9) множества вырождающихся точек V и леммы 7.

Замечание. Множество вырождающихся точек V не является дифференцируемым многообразием.

Обозначим через ϑ меру Лебега на R^n . Теорема 6 дает основания предполагать, что лебегова мера множества вырождающихся точек V равна нулю. А именно, имеет место

Теорема 7. *Если* $n \geq 1$*, то* $\vartheta(V) = \vartheta(\overline{V}) = 0$.

Доказательство. Из определения множества V_i^k следует, что оно является подмножеством множества Φ_{ik} нулей некоторого, отличного от нуля, многочлена $P_{ik}(x_1,...,x_n)$ от n переменных. Так как $P_{ik}(x_1,...,x_n) \not\equiv 0$, то, используя теорему Фубини, можно показать, что $\vartheta(\Phi_{ik}) = 0$. Поэтому $\vartheta(V) \leq \vartheta\left(\bigcup_{i,k} \Phi_{ik}\right) = 0$. Но тогда $\vartheta(\overline{V}) = \vartheta(\partial S \cup V) = \vartheta(\partial S) + \vartheta(V) = 0$. ■

Следствие. Множество невырождающихся точек U всюду плотно в симплексе $\overline{S}$. Действительно, $U = \overline{S} \setminus \overline{V}$.

Замечание. Можно показать, что множества $\overline{V}$, V нигде не плотны в $\overline{S}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fletcher R.* A limited memory steepest descent method // Math. Programming, 2012, **135**, Ser. A, p.413-436.
2. *Kees van den Doel, Uri Ascher.* The chaotic nature of faster gradient descent methods // Department of Computer Science, University of British Columbia, Canada, 2011, p.1-27.
3. *Narushima Y., Wakamatsu T., Yabe H.* Extended Barzilai-Borwein method for unconstrained minimization problems // Pacific Journal of Optimization, 2010, v.6, №3, p.591-613.
4. *Andretta M., Birgin E.G., Martinez J.M.* Partial spectral projected gradient method with active-set strategy for linearly constrained optimization // Numer. Algorithms, 2010, v., 53, №1, p.23-52.
5. *Barzilai J., Borwein J.M.* Two-point step size gradient methods // IMA Journal of Numerical Analysis, 1988, v.8, p.141-148.
6. *Akaike H.* On a successive transformation of probability distribution and its application to the analysis of the optimum gradient method // Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1959, v.11, p.1-16.
7. *Forsythe G.E.* On the asymptotic directions of the s-dimensional optimum gradient method // Numerische Mathematik, 1968, v.11, p.57-76.
8. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

Поступила в редакцию 29.04.13