МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА ТА ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ

Практикум
для студентів спеціальності 6.040301
«Прикладна математика»

Київ 2014

УДК 517.9(076)
ББК В 161.6я7
Д 50

Укладач: *П. Ф. Жук*

Рецензент: *О. Г. Піскунов* – канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол №   )

Математична логіка та теорія алгоритмів : практикум / уклад.:
Д 50 П. Ф. Жук – К. : НАУ, 2014. – 21 с.

Містить методичні рекомендації до практичних занять, що сприяють кращому засвоєнню студентами теоретичного курсу навчальної дисципліни «Математична логіка та теорія алгоритмів», формуванню в них відповідних вмінь і навичок розв’язання типових завдань з логіки та числення висловлювань і предикатів, формальних моделей алгоритмів та алгоритмічно обчислюваних функцій, застосування методів математичної логіки та теорії алгоритмів у галузі прикладної математики.

Для кожного практичного заняття викладено посилання на теоретичні відомості, наведено методи і приклади розв’язання типових завдань, сформульовано перелік завдань для самостійного виконання.

Для студентів спеціальності 6.040301 «Прикладна математика».

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Математична логіка та теорія алгоритмів» є обов'язковим компонентом загальної та професійної освіти фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "Бакалавр" за напрямом 6.040301 "Прикладна математика". Значення цього курсу визначається насамперед тим, що методи, засоби та алгоритми математичної логіки широко використовуються в інтелектуальних системах.

Метою викладання дисципліни є ознайомлення студентів з теоретичними основами комп’ютерної математики, вироблення навиків розв’язання типових задач математичної логіки, вміння складати та аналізувати типові алгоритми, використовувати методи математичної логіки та теорії алгоритмів для побудови формальних аксіоматичних теорій, постановки і розв’язання задач прикладної математики та програмування.

Важливою складовою курсу «Математична логіка та теорія алгоритмів» є практичні заняття. Їх метою є закріплення та поглиблення теоретичних знань і набуття практичних навичок застосування методів математичної логіки та теорії алгоритмів при моделюванні та дослідженні складних процесів та систем.

У результаті виконання практичних завдань студент повинен вміти виконувати операції алгебри висловлень, проводити формальне доведення теорем числення висловлень, використовувати формули алгебри предикатів для запису математичних тверджень, складати та перетворювати до стандартного вигляду формули числення предикатів, програмувати функції на машині з натуральнозначними регістрами та машині Тьюрінга, використовувати нормальні алгоритми Маркова для розв’язання алгоритмічних задач, використовувати системи Поста для обчислення функцій, будувати примітивно рекурсивні, рекурсивні і частково рекурсивні функції.

Практикум «Математична логіка та теорія алгоритмів» призначено для студентів спеціальності "Прикладна математика". Він цілком відповідає програмі навчальної дисципліни, містить методичні вказівки за всіма темами курсу та значну кількість прикладів розв’язання типових задач. Для ефективного використання практикуму в навчальному процесі студент повинен для кожного практичного заняття засвоїти вказаний там теоретичний матеріал, уважно розібрати типові приклади розв’язання задач, наведені в практикумі, та самостійно розв’язати контрольні завдання.

ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

Практичне заняття № 1. Алгебра висловлювань

План.

1. Висловлення.

2. Формули алгебри висловлень.

Теоретичні відомості: [1, с. 9-15], [2, с. 168-181].

Перше питання.

Приклад 1. Які з наведених виразів є висловленнями? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

1) Кожне дійсне число задовольняє нерівність $x^2 \geq 0$. 2) Число 168 кратне 9. 3) Хай живе математика! 4) 15 кратне 3, але не кратне 4. 5) Чи існує дійсне число, більше за 3 і менше від $\log_2 9$? 6) Ця задача легка. 7) Існує найбільше просте число. 8) Чи правильна велика теорема Ферма? 9) Рівняння $x^2 + 7x + 1 = 0$ має хоч один дійсний корінь. 10) Розв'язати рівняння $x^2 + 7x + 1 = 0$. 11) Розкрийте підручник на сторінці 23. 12) Вчитель сказав: «Розкрийте підручник на сторінці 23». 13) Якщо $3 < 2$, то $3^2 < 2^2$.

Розв'язання. Висловленнями є вирази 1, 4, 5, 8, 9, 13 (істинні), 2, 7 (хибні) та 6, 12 (можливі як істинні, так і хибні). Висловлювання 1, 2, 6, 7, 8, 9, 12 є простими, а 4, 5, 13 – складеними. Вирази 3, 10, 11 не є висловлюваннями.

Приклад 2. Яке заперечення висловлювання „Сьогодні середа"?

Розв'язання. Воно має вигляд „Це не так, що сьогодні середа". Це речення також можна сформулювати як „Сьогодні не середа" чи „Середа не сьогодні". Зазначимо, що речення, пов'язані з часовою змінною, – не висловлювання доти, доки не визначено момент часу. Це стосується й змінних у реченнях, які характеризують місце чи особу. Ці речення – не висловлювання, якщо не зазначено відповідного місця чи конкретної особи.

Приклад 3. Знайди кон'юнкцію висловлювань „Сьогодні п'ятниця" і „Сьогодні падає дощ".

Розв'язання. Кон'юнкція цих висловлювань – „Сьогодні п'ятниця, і сьогодні падає дощ". Воно істинне в дощову п'ятницю й хибне в інший день або в не дощову п'ятницю.

Друге питання.

Приклад 4. Знайти значення істинності формул алгебри висловлень $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow \overline{r})$, $((p \to q) \wedge p) \to q$, $(p \to q) \wedge (p \wedge \overline{q})$

у всіх їх інтерпретаціях.

Розв'язання. 1). Позаяк кожному з атомів p, q й r формули $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow \overline{r})$ можна надати два значення (F або T), то вона має $2^3 = 8$ інтерпретацій. Обчислимо її значення істинності для значень істинності атомів p, q та r, що відповідно дорівнюють T, T й F (цим буде задано одну з інтерпретацій цієї формули). Тоді формула $(p \wedge q)$ має значення T; $\overline{r}$ має значення T, позаяк r хибне; формула $(p \leftrightarrow \overline{r})$ істинна, бо p та $\overline{r}$ істинні; нарешті, формула $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow \overline{r})$ істинна, оскільки $(p \wedge q)$ та $(p \leftrightarrow \overline{r})$ істинні. Отже, задана формула виконується в цій інтерпретації, позаяк вона набуває значення T.

Значення істинності формули $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow \overline{r})$ у всіх її інтерпретаціях наведено в табл. 1 (таблиця істинності формули).

Таблиця 1.

p	q	r	$\overline{r}$	$(p \wedge q)$	$(p \leftrightarrow \overline{r})$	$(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow \overline{r})$
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	F	T

2) Атомами формули $((p \to q) \wedge p) \to q$ є p та q. Вона істинна в усіх $2^2 = 4$ інтерпретаціях, тобто є тавтологією.

3) Формула $(p \to q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ хибна в усіх 4 інтерпретаціях, тобто вона є суперечністю.

Приклад 6. За допомогою таблиць істинності довести твердження: $p \to q = \overline{p} \vee q$, $p \to q \neq q \to p$.

Розв'язання. Після складання таблиць істинності для формул $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$ і $(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$ переконуємося, що перша формула є тавтологією, а друга – ні (вона приймає значення істинності F при значеннях істинності атомів p, q відповідно T і F). Тому формула $p \to q$ рівносильна $\overline{p} \vee q$, але не $q \to p$.

Завдання для самостійної роботи: [1, с. 40, задачі 1-24].

Практичне заняття № 2. Логіка висловлювань

План.

1.Закони логіки висловлень.

2. Логічне слідування висловлень.

3. Несуперечність множини висловлень. Логічні задачі.

Теоретичні відомості: [1, с. 15-19], [2, с. 170-181].

Перше питання.

Приклад 1. Застосувавши закони логіки висловлювань, доведемо еквівалентність формул 1) $p \to (q \wedge r)$ і $(p \to q) \wedge (p \to r)$, 2) $p \to q$ і $p \to q$ (це – правило контрапозиції).

Розв'язання. 1). Запишемо послідовність перетворень і назви використаних законів і правил: $p \to (q \wedge r) = \overline{p} \vee (q \wedge r)$ (правило усунення імплікації), $\overline{p} \vee (q \wedge r) = (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r)$ (закон дистрибутивності), $(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r) = (p \to q) \wedge (p \to r)$ (правило уведення імплікації). 2). Маємо $p \to q = \overline{p} \vee q$ (правило усунення імплікації), $\overline{p} \vee q = q \vee \overline{p}$ (закон комутативності), $q \vee \overline{p} = \overline{\overline{q}} \vee \overline{p}$ (закон подвійного заперечення), $\overline{\overline{q}} \vee \overline{p} = \overline{q} \to \overline{p}$ (правило уведення імплікації).

Друге питання.

Приклад 2. Довести логічне слідування таких висловлень.

Якщо ціни зростають, то рівень життя спадає. Якщо рівень життя спадає, то люди незадоволені. Ціни зростають. Отже, люди незадоволені.

Розв'язання. Позначимо пропозиційними буквами прості висловлювання: P – «ціни зростають», S – «рівень життя спадає», R – «люди незадоволені». Необхідно довести логічне слідування:

$$P \to S,\ S \to R,\ P \models R.$$

<u>1 спосіб</u>. Перевірити, що формула $(P \to S) \vee (S \to R) \vee P \to R$ є тавтологією. Для цього достатньо побудувати таблицю істинності.

<u>2 спосіб</u>. Доведення від супротивного (метод редукції). Припускаємо, що існує така інтерпретація, на якій всі посилки приймають істинне значення, а висновок є хибним, тобто $|P \to S| = \mathrm{T}$, $|S \to R| = \mathrm{T}$, $|P| = \mathrm{T}$, а $|R| = \mathrm{F}$. Але з $|S \to R| = |S \to \mathrm{F}| = \mathrm{T}$ випливає, що $|S| = \mathrm{F}$; з $|P \to S| = |P \to \mathrm{F}| = \mathrm{T}$ слідує, що $|P| = \mathrm{F}$ – протиріччя з припущенням $|P| = \mathrm{T}$. Це протиріччя доводе логічне слідування.

Третє питання.

Приклад 3. Перевірити, чи є несуперечною множина висловлень.

1) Ліда складе на «добре» екзамен з алгебри тоді і тільки тоді, коли вона не пропустить останньої лекції.

2) Ліда або пропустить останню лекцію, або не поїде на екскурсію до Києва.

3) Якщо Ліда не складе на «добре» екзамен з алгебри, вона не поїде на екскурсію до Києва.

4) Ліда складе на «добре» екзамен з алгебри або поїде на екскурсію до Києва.

Розв'язання. Позначимо пропозиційними буквами прості висловлювання: A – «Ліда складе на «добре» екзамен з алгебри», B – «Ліда не пропустить останньої лекції», C – «Ліда поїде на екскурсію до Києва». Необхідно перевірити чи є несуперечною множина висловлень: $A \leftrightarrow B$, $\overline{B} \vee \overline{C}$, $\overline{A} \to \overline{C}$, $A \vee C$. Тобто, чи має розвязок система логічних рівнянь: $|A \leftrightarrow B| = \mathrm{T}$, $|\overline{B} \vee \overline{C}| = \mathrm{T}$, $|\overline{A} \to \overline{C}| = \mathrm{T}$, $|A \vee C| = \mathrm{T}$, або чи є виконуваною формула $(A \leftrightarrow B) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C}) \wedge$ $\wedge (\overline{A} \to \overline{C}) \wedge (A \vee C)$. Для останьої формули складаємо таблиця істинності і переконуємося, що при $|A| = \mathrm{T}$, $|B| = \mathrm{T}$, $|C| = \mathrm{F}$ вона виконується. Отже, множина висловлень є несуперечною.

Приклад 4. Леся запросила до себе подруг: Ганну, Віру і Олю. Відомо:

1) якщо прийде Ганна, то буде і Віра;

2) Ганна не буде тільки тоді, коли будуть Віра і Оля разом;

3) якщо не буде Олі, то не прийде і Ганна.

Хто з Лесиних подруг прийде до неї на запрошення?

Розв'язання. Позначимо пропозиційними буквами прості висловлювання: A – «прийде Ганна», B – «прийде Віра», C – «прийде Олю». Умовами задачі є висловлення: $A \to B$, $\overline{A} \leftrightarrow B \wedge C$, $\overline{C} \to \overline{A}$. Тому необхідно розвязати систему логічних рівнянь: $|A \to B| = \mathrm{T}$, $|\overline{A} \leftrightarrow B \wedge C| = \mathrm{T}$, $|\overline{C} \to \overline{A}| = \mathrm{T}$. Складаємо таблиця істинності для формули $(A \to B) \wedge (\overline{A} \leftrightarrow B \wedge C) \wedge (\overline{C} \to \overline{A})$ і переконуємося, що при $|A| = \mathrm{F}$, $|B| = \mathrm{T}$, $|C| = \mathrm{T}$ вона виконується. Отже, на запрошення до Лесі прийдуть Віра і Оля, але Ганна не прийде.

Завдання для самостійної роботи: [1, с. 44, задачі 34-36].

Практичне заняття № 3. Числення висловлювань

План.

1. Формули і підстановки.
2. Формальні доведення та вивідність формул.

Теоретичні відомості: [1, с. 26-28], [2, с. 181-198].

Перше питання.

Приклад 1. Нехай A, B, C – формули числення висловлювань. Тоді $(C \to (A \vee B))$, $(((\overline{A}) \wedge B) \to (\overline{C}))$ також формули.

Приклад 2. Провести розбиття дужок на пари і вказати область дії кожного оператора у формулі $((A\to B)\to((A\to C)\to(A\to(B\wedge C))))$.

Розв'язання. Розбиття дужок на пари здійснюється індексами дужок: $(_1(_2A\to B_2)\to(_3(_4A\to C_4)\to(_5A\to(_6B\wedge C_6)_5)_3)_1)$. Область дії оператора вказано парою дужок: область дії першого оператора – це дужки 2-2, другого – дужки 1-1, третього – 4-4, четвертого – 3-3, пятого – 5-5, шестого – 6-6.

Приклад 3. Чи є формулами числення висловлень такі вирази:

1) $((A\vee((\neg B)\to C))\to(\neg A))$; 2) $((A\wedge B)\vee(C\wedge D)\to(A\wedge C))$;

3) $(A\to C)\leftrightarrow((\neg C)\to(\neg A)))$; 4) $(((A\wedge B)\wedge C)\to((B\vee C)\vee(\neg D)))$.

Розв'язання. Формулами числення висловлень є вирази 1, 2, 4. Вираз 3 не є формулою, оскільки не має відповідності дужок.

Приклад 4. Виконати підстановки:

1) $S^{A}_{B\to A}A\to(B\to A)$; 2) $S^{\neg A}_{B\to A}(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$;

3) $S_C^{B\to C}(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$.

Розв'язання. За означенням підстановки, маємо:

1) $S^{A}_{B\to A}A\to(B\to A) = (B\to A)\to(B\to(B\to A))$;

2) $S^{\neg A}_{B\to A}(A\to B)\to(\neg B\to\neg A) = (A\to B)\to(\neg B\to(B\to A))$;

3) $S_C^{B\to C}(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)) =$

$$= (A\to(B\to(B\to C)))\to((A\to B)\to(A\to(B\to C)))$$

Друге питання.

У якості аксіом числення висловлень візьмемо такі формули:

$A1$. $a\to(b\to a)$

$A2$. $(a\to b)\to((a\to(b\to c))\to(a\to c))$

$A3$. $(a\wedge b)\to a$

$A4$. $(a\wedge b)\to b$

$A5$. $(a\to b)\to((a\to c)\to(a\to(b\wedge c)))$

$A6.\ a\to(a\vee b)$

$A7.\ b\to(a\vee b)$

$A8.\ (a\to c)\to((b\to c)\to((a\vee b)\to c))$

$A9.\ (a\to\neg b)\to(b\to\neg a)$

$A10.\ \neg\neg a\to a$

У якості правил виведення беремо правило підстановки і правило висновку (modus ponens, скорочено – MP).

Приклад 5. Довести, що $\vdash (a\to a)$.

Розв'язання. Формальне доведення таке:

$F1$: $S^{b,c}_{b\to a,a}A2 = (a\to(b\to a))\to((a\to((b\to a)\to a))\to(a\to a))$

$F2$: $\mathrm{MP}(A1, F1) = ((a\to((b\to a)\to a))\to(a\to a))$

$F3$: $S^{b}_{b\to a}A1 = (a\to((b\to a)\to a))$

$F4$: $\mathrm{MP}(F3, F2) = (a\to a)$

Приклад 6. Довести, що $a \vdash (b\to a)$.

Розв'язання. Формальна вивідність таке:

$F1$: a; $F2$: $\mathrm{MP}(F1, A1) = (b\to a)$

Приклад 7. Довести, що $a, b, a \to (b\to c) \vdash c$.

Розв'язання. Формальна вивідність така:

$F1$: a

$F2$: b

$F3$: $a\to(b\to c)$

$F4$: $\mathrm{MP}(F1, F3) = b\to c$

$F5$: $\mathrm{MP}(F2, F4) = c$

Приклад 8. Довести, що $a, b \vdash (a\wedge b)$.

Розв'язання. Формальна вивідність така:

$F1$: $S^{b,c}_{a,b}A5 = ((a\to a)\to((a\to b)\to(a\to(a\wedge b))))$

$F2$: $(a\to a)$ (див. приклад 5)

$F3$: $\mathrm{MP}(F2, F1) = ((a\to b)\to(a\to(a\wedge b)))$

$F4$: b

$F5$: $S^{a,b}_{b,a}A1 = (b\to(a\to b))$

$F6$: $\mathrm{MP}(F4, F5) = (a\to b)$

$F7$: $\mathrm{MP}(F6, F3) = (a\to(a\wedge b))$

$F8$: a

$F9$: $\mathrm{MP}(F8, F7) = (a\wedge b)$

Завдання для самостійної роботи: [1, с. 42, задачі 22, 23, 39].

Практичне заняття № 4. Правила виведення

План.

1. Правила виведення в численні висловлювань.

2. Застосування правил виведення в численні висловлювань.

Теоретичні відомості**:** [1, с. 26-30], [2, с. 190-196].

Перше питання. Правила виведення обґрунтовують кроки доведення логічних теорем, яке полягає в перевірці того, що висновок являє собою логічний наслідок множини гіпотез. Найважливіші правила виведення та відповідні їм тавтології наведено в табл. 1.

Таблиця 1.

Правило виведення	Тавтологія	Назва правила
$p \vdash p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	Уведення диз'юнкції
$p \wedge q \vdash p$	$(p \wedge q) \to p$	Виключення кон'юнкції
$p, q \vdash p \wedge q$	$((p) \wedge (q)) \to (p \wedge q)$	Уведення кон'юнкції
$p, p \to q \vdash q$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	Modus ponens
$\overline{q}, p \to q \vdash \overline{p}$	$(\overline{q} \wedge (p \to q)) \to \overline{p}$	Modus tollens
$p \to q, q \to r \vdash p \to r$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to$ $\to (p \to r)$	Гіпотетичний силогізм
$p \vee q, \overline{p} \vdash q$	$((p \vee q) \wedge \overline{p}) \to q$	Диз'юнктивний силогізм
$p \vee q, \overline{p} \vee r \vdash q \vee r$	$((p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r)) \to$ $\to (q \vee r)$	Резолюція

Друге питання.

Приклад 1. Які правила виведення використані в міркуваннях:

1) Похолоднішало. Отже, похолоднішало чи почав падати дощ.

2) Похолоднішало та почав падати дощ. Отже, похолоднішало.

3) Якщо сьогодні буде дощ, то сьогодні ми не поїдемо на пікнік. Якщо ми не поїдемо на пікнік сьогодні, то поїдемо на пікнік завтра. Отже, якщо сьогодні буде дощ, то ми поїдемо на пікнік завтра.

Розв'язання. Нехай p – це висловлювання „Похолоднішало", а q – висловлювання „Почав падати дощ". Тоді твердження 1) можна записати у вигляді правила введення диз'юнкції $p \vdash p \vee q$, а

твердження 2) у вигляді правила виключення кон'юнкції $p \wedge q \vdash p$.
3) Нехай p : „Сьогодні буде дощ", q : „Сьогодні ми не поїдемо на пікнік", а r : „Ми поїдемо на пікнік завтра". Тоді твердження можна записати у вигляді правила $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ гіпотетичного силогізму.

Приклад 2. Довести, що з гіпотез „Сьогодні не сонячний день і холодніше, ніж учора", „Ми підемо купатися лише якщо сьогодні сонячний день", „Якщо ми не підемо купатись, то поїдемо плавати на човні" та „Якщо ми поїдемо плавати на човні, то повернемося пізно ввечері" випливає висновок „Ми повернемося пізно ввечері".

Розв'язання. Нехай p : „Сьогодні сонячний день", q : „Сьогодні холодніше, ніж учора", r : „Ми підемо купатися", s : „Ми поїдемо плавати на човні", t : „Ми повернемося пізно ввечері". Тут гіпотези – $\overline{p} \wedge q$, $r \to p$, $\overline{r} \to s$ і $s \to t$, а висновок – t. Наведемо послідовність з 8 кроків отримання висновку із заданої множини гіпотез і зазначимо застосовані правила виведення: 1) $\overline{p} \wedge q$ – гіпотеза; 2) $\overline{p}$ – правило виключення кон'юнкції до 1; 3) $r \to p$ – гіпотеза; 4) $\overline{r}$ – modus tollens до 2 та 3; 5) $\overline{r} \to s$ – гіпотеза; 6) s – modus ponens до 4 та 5; 7) $s \to t$ – гіпотеза; 8) t – modus ponens до 6 та 7.

Приклад 3. Довести, що з гіпотез „Якщо ти надішлеш мені повідомлення електронною поштою, то я закінчу писати програму", „Якщо ти не надішлеш мені повідомлення електронною поштою, то я рано піду спати" та „Якщо я рано піду спати, то прокинуся бадьорим" випливає висновок „Якщо я не закінчу писати програму, то я прокинуся бадьорим".

Розв'язання. Уведемо такі позначення: p : „Ти надішлеш мені повідомлення електронною поштою"; q : „Я закінчу писати програму"; r : „Я рано піду спати"; s : „Я прокинуся бадьорим". Гіпотези можна записати у вигляді $p \to q$, $\overline{p} \to r$, $r \to s$. Потрібно обґрунтувати висновок $\overline{q} \to s$. Наведемо послідовність кроків для отримання висновку із заданої множини гіпотез: 1) $p \to q$ – гіпотеза; 2) $\overline{q} \to \overline{p}$ – контрапозиція; 3) $\overline{p} \to r$ – гіпотеза; 4) $\overline{q} \to r$ – гіпотетичний силогізм до 2 та 3; 5) $r \to s$ – гіпотеза; 6) $\overline{q} \to s$ – гіпотетичний силогізм до 4 та 5. Висновок доведено.

Завдання для самостійної роботи: [1, с. 46, задачі 40, 41].

Практичне заняття № 5. Алгебра предикатів

План.

1. Інтерпретація формул алгебри предикатів.
2. Значення істинності формул алгебри предикатів.

Теоретичні відомості: [1, с. 19-23], [4, с. 198-205].

Перше питання.

Приклад 1. Навести приклади інтерпретацій формули алгебри предикатів $\forall x(P(x) \to Q(x))$.

Розв'язання. 1) Область інтерпретації – множина живих істот, $P(x): x -$ риба, $Q(x): x$ живе у воді. Інтерпретація формули: «Всі риби живуть у воді». 2) Область інтерпретації – множина живих істот, $P(x): x -$ людина, $Q(x): x$ смертний. Інтерпретація формули: «Всі люди смертні». 3) Область інтерпретації – множина цілих чисел, $P(x): x$ ділиться на 6, $Q(x): x$ ділиться на 3. Інтерпретація формули: «Всі числа, які діляться на 6, діляться на 3».

Приклад 2. Проінтерпретувати формулу $\exists x \exists y P(f(x,y),t)$.

Розв'язання. Предикат $P(u,v)$ є двомісним, змінні x,y зв'язані, t – вільна змінна. Нехай область інтерпретації – це множина дійсних чисел, $t=1$, $f(x,y)=x^2+y^2$, предикат $P(u,v)$: $u=v$. Тоді формула набуває вигляду: $\exists x \exists y(x^2+y^2=1)$. Вона істинна, оскільки існують числа x,y, що задовольняють рівняння кола $x^2+y^2=1$.

Якщо покласти $t=r^2$, то формула перетворюється на одномісний предикат $\exists x \exists y(x^2+y^2=r^2)$, область істинності якого $r \ge 0$.

Друге питання.

Приклад 3. Побудувати таблиці істинності на області інтерпретації із двох елементів $D=\{a,b\}$ для таких трьох формул:

$$\forall y P(y) \to \exists x Q(x),\ \ \forall y(P(y) \to \exists x Q(x)),\ \ \forall y \exists x(P(y) \to Q(x)).$$

Розв'язання. Для цих формул існує 16 інтерпретацій, оскільки кожний із одномісних предикатів P і Q приймає по 4 значення у відповідності до табл. 1. Розглянемо, наприклад, процес обчислення значень цих формул на інтерпретації P_2, Q_1:

$E_1 = \forall y P_2(y) \to \exists x Q_1(x) = F \to F = T$;

$$E_2 = \forall y(P_2(y) \to \exists x Q_1(x)) = \forall y \begin{pmatrix} \dfrac{P_2(1) \to \exists x Q_1(x)}{P_2(2) \to \exists x Q_1(x)} \end{pmatrix} =$$

$$= \forall y \begin{pmatrix} \dfrac{F \to F = T}{T \to F = F} \end{pmatrix} = F \,;$$

$$E_3 = \forall y \exists x(P_2(y) \to Q_1(x)) = \forall y \begin{pmatrix} \dfrac{\exists x(P_2(1) \to Q_1(x))}{\exists x(P_2(2) \to Q_1(x))} \end{pmatrix} =$$

$$= \forall y \begin{pmatrix} \dfrac{\exists x \begin{pmatrix} \dfrac{P_2(1) \to Q_1(1)}{P_2(1) \to Q_1(2)} \end{pmatrix}}{\exists x \begin{pmatrix} \dfrac{P_2(2) \to Q_1(1)}{P_2(2) \to Q_1(2)} \end{pmatrix}} \end{pmatrix} = \forall y \begin{pmatrix} \dfrac{\exists x \begin{pmatrix} \dfrac{F \to F = T}{F \to F = T} \end{pmatrix} = T}{\exists x \begin{pmatrix} \dfrac{T \to F = F}{T \to F = F} \end{pmatrix} = F} \end{pmatrix} = F \,.$$

В табл. 2 наведено значення формул E_1, E_2, E_3 для 8 інтерпретацій. З цієї таблиці випливає, що формула E_1 не еквівалентна формулам E_2 і E_3, але формули E_2 і E_3, можливо, еквівалентні. Для остаточного висновку необхідно розглянути інші 8 інтерпретацій.

Таблиця 1.

x	$P_1(\cdot)$	$P_2(\cdot)$	$P_3(\cdot)$	$P_4(\cdot)$
a	F	F	T	T
b	F	T	F	T

Таблиця 2.

$P(\cdot)$	$Q(\cdot)$	E_1	E_2	E_3
P_1	Q_1	T	T	T
P_1	Q_2	T	T	T
P_1	Q_3	T	T	T
P_1	Q_4	T	T	T
P_2	Q_1	T	F	F
P_2	Q_2	T	T	T
P_2	Q_3	T	T	T
P_2	Q_4	T	T	T

Завдання для самостійної роботи: [3, с. 198, задачі 4.1.1].

Практичне заняття № 6. Логіка предикатів

План.

1. Подання речень у вигляді формул логіки предикатів.
2. Логічно загальнозначущі формули.
2. Правила виведення. Розв'язання логічних задач.

Теоретичні відомості: [1, с. 23-25], [2, с. 206-214].

Перше питання.

Приклад 1. Подати речення „Кожна людна має одного найкращого друга" у вигляді формули логіки предикатів.

Розв'язання. Задане речення переформулюємо так: «Для кожної особи x правильно, що особа x має точно одного найкращого друга». Якщо особа x має точно одного найкращого друга, то це означає, що існує єдина особа y, яка є найкращим другом x. Крім того, кожна особа z, відмінна від y, – не найкращий друг особи x. Уведемо предикат $B(x,y)$: « y – найкращий друг x». Тоді формулу, зміст якої полягає в тому, що людина x має точно одного найкращого друга, можна записати як $\exists y(B(x,y) \wedge \forall z((z \neq y) \to \overline{B}(x,z)))$, а задане речення – як $\forall x \exists y(B(x,y) \wedge \forall z((z \neq y) \to \overline{B}(x,z)))$. Предметна область кожної змінної – усі люди.

Друге питання.

Приклад 2. Довести, що формула $\forall x(A(x) \vee B) = \forall x A(x) \vee B$ алгебри предикатів, де предикат B не залежить від x, є логічно загальнозначущою.

Розв'язання. Припустимо протилежне: існує інтерпретація, що $\forall x(A^*(x) \vee B^*) \neq \forall x A^*(x) \vee B^*$. Тоді $|B^*| = F$. Але $X \vee F = X$, тому $\forall x(A^*(x) \vee F) = \forall x A^*(x)$, $\forall x A^*(x) \vee F = \forall x A^*(x)$, що суперечить припущенню. Таким чином, формула логічно загальнозначуща.

Приклад 3. Довести, що $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$ не є логічно загальнозначущою формулою алгебри предикатів.

Розв'язання. Візьмемо область інтерпретації із двох елементів $D = \{a,b\}$ і покладемо $|P(a)| = T$, $|Q(a)| = F$, $|P(b)| = F$. Тоді маємо $\forall x P(x) \to \forall x Q(x) = T$, $\forall x(P(x) \to Q(x)) = F$, $T \to F = F$.

Третє питання. Правила виведення в численні предикатів:

1. $\forall x P(x) | - P(c)$ – універсальна конкретизація;

2. $P(c) \vdash \forall x P(x)$ – універсальне узагальнення;

3. $\exists x P(x) \vdash P(c)$ – екзистенційна конкретизація;

4. $P(c) \vdash \exists x P(x)$ – екзистенціине узагальнення.

Приклад 4. Довести, що гіпотези «Кожний, хто вивчає комп'ютерні науки, слухає курс дискретної математики» та «Марія вивчає комп'ютерні науки» дають змогу сформулювати висновок «Марія слухає курс дискретної математики».

Розв'язання. Нехай $D(x)$: « x вивчає комп'ютерні науки», $C(x)$: « x слухає курс дискретної математики». Тоді гіпотези – це формули $\forall x(D(x) \to C(x))$ і $D(\text{Марія})$, а висновок – $C(\text{Марія})$. Доведення висновку для введеної множини гіпотез таке:

1. $\forall x(D(x) \to C(x))$ – гіпотеза.
2. $D(\text{Марія}) \to C(\text{Марія})$ – універсальна конкретизація до 1.
3. $D(\text{Марія})$ – гіпотеза.
4. $C(\text{Марія})$ – modus ponens до 2 та 3.

Приклад 5. Довести, що з гіпотез «У групі є студент, який не читав підручника» та «Всі студенти групи склали іспит» випливає висновок «Дехто з тих, хто склав іспит, не читав підручника».

Розв'язання. Нехай $C(x)$: « x учиться в групі», $B(x)$: « x читав підручник» і $P(x)$: « x склав іспит». Гіпотези – це $\exists x(C(x) \wedge \overline{B}(x))$ і $\forall x(C(x) \to P(x))$, а висновок – $\exists x(P(x) \wedge \overline{B}(x))$. Доведення утворює така послідовність кроків:

1. $\exists x(C(x) \wedge \overline{B}(x))$ –гіпотеза.
2. $C(a) \wedge \overline{B}(a)$ – екзистенційна конкретизація до 1.
3. $C(a)$ – виключення кон'юнкції до 2.
4. $\forall x(C(x) \to P(x))$ – гіпотеза.
5. $C(a) \to P(a)$ – універсальна конкретизація до 4.
6. $P(a)$ – modus ponens до 3 та 5.
7. $\overline{B}(a)$ – виключення кон'юнкції до 2.
8. $P(a) \wedge \overline{B}(a)$ – уведення кон'юнкції до 6 і 7.
9. $\exists x(P(x) \wedge \overline{B}(x))$ – екзистенційне узагальнення до 8.

Завдання для самостійної роботи: [1, с. 45, задачі 37, 38].

Практичне заняття № 7. Числення предикатів

План.

1. Випереджена нормальна форма предиката.
2. Сколемівська нормальна форма предиката.
3. Кон'юнктивна нормальна форма предиката.

Теоретичні відомості: [1, с. 32-34], [2, с. 215-223].

Перше питання.

Приклад 1. Звести предикат $\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$ до випередженої нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних.

Розв'язання. Наведемо послідовність формул, отриманих у процесі побудови випередженої нормальної форми:

1. $\forall x P(x) \to \exists y Q(y) = \overline{\forall x P(x)} \vee \exists y Q(y)$ (вилучення імплікації);
2. $\overline{\forall x P(x)} \vee \exists y Q(y) = \exists x \overline{P}(x) \vee \exists y Q(y)$ (заперечення квантора);
3. $\exists x \overline{P}(x) \vee \exists y Q(y) = \exists x \exists y (\overline{P}(x) \vee Q(y))$ (винесення кванторів).

Приклад 2. Побудуємо випереджену нормальну форму для предиката $\forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \to \exists u Q(x,y,u))$.

Розв'язання. Нижче подано процес побудови формули:

$\forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \to \exists u Q(x,y,u)) =$

$= \forall x \forall y (\overline{\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z))} \vee \exists u Q(x,y,u))$ (вилучення імплікації);

$= \forall x \forall y (\forall z \overline{(P(x,z) \wedge P(y,z))} \vee \exists u Q(x,y,u))$ (заперечення квантора);

$= \forall x \forall y (\forall z (\overline{P}(x,z) \vee \overline{P}(y,z)) \vee \exists u Q(x,y,u))$ (закон де Моргана);

$= \forall x \forall y \forall z \exists u (\overline{P}(x,z) \vee \overline{P}(y,z) \vee Q(x,y,u))$ (винесення кванторів).

Приклад 3. Зобразити у випереджувальній нормальній формі предикат $\overline{\exists x P(x,y,z) \to \forall x \exists y R(x,y,z)} \downarrow T(x,z)$.

Розв'язання. Використаємо такі формули $a \downarrow b = \overline{a} \wedge \overline{b}$, $\overline{\overline{a}} = a$ і $a \to b = \overline{a} \vee b$. Перетворюємо предикат:

$\overline{\exists x P(x,y,z) \to \forall x \exists y R(x,y,z)} \downarrow T(x,z) =$

$= \overline{\overline{\exists x P(x,y,z) \to \forall x \exists y R(x,y,z)}} \wedge \overline{T(x,z)} =$

$= (\exists x P(x,y,z) \to \forall x \exists y R(x,y,z)) \wedge \overline{T(x,z)} =$

$= (\overline{\exists x P(x,y,z)} \vee \forall x \exists y R(x,y,z)) \wedge \overline{T(x,z)}$.

Перейменуємо змінні:

$(\overline{\exists x P(x,y,z)} \vee \forall x \exists y R(x,y,z)) \wedge \overline{T}(x,z) =$

$= (\forall x_1 \overline{P(x_1,y,z)} \vee \forall x_2 \exists y_1 R(x_2,y_1,z)) \wedge \overline{T(x,z)}$.

Тепер можна винести усі квантори на початок формули:

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 ((\overline{P(x_1,y,z)} \vee R(x_2,y_1,z)) \wedge \overline{T(x,z)}).$$

Друге питання.

Приклад 4. Звести предикат $A = \exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w P(x,y,z,u,v,w)$ до сколемівській нормальній форми.

Розв'язання. В цій формулі лівіше $\exists x$ не має ніяких кванторів загальності, лівіше $\exists u$ знаходяться $\forall y$ і $\forall z$, а лівіше $\exists w$ є $\forall y$, $\forall z$ і $\forall v$. Тому замінимо змінну x на константу a, змінну u – на двомісну функцію $f(y,z)$, змінну w – на трьохмісну функцію $g(y,z,v)$. Таким чином, отримуємо наступну сколемівську нормальну форму формули A: $S = \forall y \forall z \forall v P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))$.

Приклад 5. Знайти сколемівську форму і сколемівські функції для предиката $A = \forall x \forall y \exists z \exists w \forall t(\overline{S(x,y,y)} \to (S(z,w,x) \wedge P(w,t,t)))$, де $S(x,y,z) = (x+y=z)$, $P(x,y,z) = (xy=z)$ – це предикати суми і добутку відповідно.

Розв'язання. 1) Вилучаємо імплікацію:

$$A = \forall x \forall y \exists z \exists w \forall t(S(x,y,y) \vee (S(z,w,x) \wedge P(w,t,t))).$$

2) Сколемівська форма. Маємо $z = f(x,y)$, $w = g(x,y)$,

$$S = \forall x \forall y \forall t(S(x,y,y) \vee (S(f(x,y),g(x,y),x) \wedge P(g(x,y),t,t))).$$

3) Знаходимо сколемівські функції: оскільки $f(x,y) + g(x,y) = x$ і $g(x,y)t = t$, то $g(x,y) = 1$, $f(x,y) = x - 1$.

Трете питання.

Приклад 6. Записати предикат $\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \vee \overline{Q(x,y)}))$ у кон'юнктивній нормальній формі.

Розв'язання. Приводимо початкову формулу до попередній нормальній форми: $\forall x \exists y(\overline{P(x)} \vee P(y) \vee \overline{Q(x,y)})$. Проведемо сколемізацию отриманої формули: $\forall x(\overline{P(x)} \vee P(f(x)) \vee \overline{Q(x,f(x))})$. Елімініруємо квантор загальності і отримуємо кон'юктивну нормальну форму предиката: $\overline{P(x)} \vee P(f(x)) \vee \overline{Q(x,f(x))}$.

Завдання для самостійної роботи: [1, с. 43, задачі 29-31].

Практичне заняття № 8. Метод резолюцій

План.

1. Метод резолюцій в численні висловлень.
2. Метод резолюцій в численні предикатів.

Теоретичні відомості: [1, с. 30-32], [2, с. 223-241].

Перше питання.

Приклад 1. Задана така множина диз'юнктів S: 1) $P \vee \overline{Q}_1 \vee \overline{Q}_2$, 2) $P \vee \overline{Q}_3$, 3) $U \vee \overline{Q}_3$, 4) $U \vee \overline{P} \vee \overline{R}$, 5) R, 6) Q_1, 7) Q_3. Довести методом резолюції, що диз'юнкт U є логічним наслідком з S.

Розв'язання. До множини S додамо диз'юнкт 8) $\overline{U}$. Тоді з (3) і (8) отримуємо резольвенту 9) $\overline{Q}_3$, а з (7) і (9) – резольвенту: 10) $\varnothing$ – порожній диз'юнкт, що і потрібно було довести.

Приклад 2. Методом резолюції перевірити множину S диз'юнктів 1) $p \vee q$, 2) $p \vee r$, 3) $\overline{q} \vee \overline{r}$, 4) $\overline{p}$ на суперечність.

Розв'язання. Обчислюємо і додаємо резольвенти (в дужках вказані № диз'юнктів): 5) q (1, 4); 6) r (2, 4); 7) $\overline{q}$ (3, 6); 8) $\varnothing$ (5, 7). Множина S диз'юнктів є суперечливою.

Приклад 3. Методом резолюції з'ясувати, чи є логічно правильним наступне просте міркування. Студент піде додому (p) або залишиться в університеті (q). Він не залишився в університеті. Отже, студент пішов додому.

Розв'язання. Запишемо це міркування символічно за допомогою вказаних в дужках букв: $p \vee q$, $\overline{q}$, p. Істинність наслідку визначатиметься істинністю наявних висловів: $p \vee q, \overline{q} \vdash p$. Застосуємо принцип дедукції: $p \vee q, \overline{q}, \overline{p} \vdash \varnothing$. Суперечність множини диз'юнктів доведемо за допомогою методу резолюції: 1) $p \vee q$; 2) $\overline{q}$; 3) $\overline{p}$; 4) p (1, 2); 5) $\varnothing$ (3, 4). Тобто дане міркування є логічно правильним.

Друге питання.

Приклад 4. Згідно принципу Пітера, «службовець підвищується по службі то тих пір, поки він не досягне свого рівня компетенції». Чи випливає з цього, що «не існує компетентних начальників»?

Розв'язання. Перевіримо цей висновок за допомогою методу резолюцій. Формалізуємо задачу. Введемо предикати: $C(x)$: «x –

службовець», $K(x)$: «x – компетентний», $N(x)$: «x – начальник», $P(x)$: «x підвищується по службі». У якості першої посилки беремо твердження про те, що компетентний службовець підвищується по службі: $\forall x(C(x) \wedge K(x) \to P(x))$. Друга посилка – це твердження про те, що начальник не підвищується по службі: $\forall x(N(x) \to \overline{P}(x))$. Врахуємо також той факт, що начальник є теж службовцем: $\forall x(N(x) \to C(x))$. Тоді висновок, який необхідно перевірити, можна сформулювати так: «всі начальники некомпетентні»: $\forall x(N(x) \to \overline{K}(x))$.

Запишемо посилки і заперечення висновку у сколемівській нормальній формі та побудуємо резолютивний вивід: 1) $N(a)$; 2) $K(a)$; 3) $\overline{C}(x) \vee \overline{K}(x) \vee P(x)$; 4) $\overline{N}(x) \vee \overline{P}(x)$; 5) $\overline{N}(x) \vee C(x)$; 6) $\overline{C}(a) \vee P(a)$ ($\{a/x\}$ в 3, резольвента 2, 3); 7) $\overline{N}(a) \vee P(a)$ ($\{a/x\}$ в 5, резольвента 5, 6); 8) $\overline{N}(a)$ ($\{a/x\}$ в 4, резольвента 4, 7); 9) $\varnothing$ (резольвента 1, 8). Таким чином, компетентних начальників не має.

Приклад 5. Довести, що з посилки «Студенти є громадянами» випливає висновок «Голоси студентів є голосами громадян».

Розв'язання. Нехай $S(x)$: «x – студент», $C(x)$: «x – громадянин» і $V(x,y)$: «x є голос y». Тоді $\forall y(S(y) \to C(y))$ – це посилка, $\forall x(\exists y(S(y) \wedge V(x,y)) \to \exists z(C(z) \wedge V(x,z))$ – висновок. Сколемівська нормальна форма посилки така: $\forall y(\overline{S}(y) \vee C(y))$. Знайдемо сколемівську нормальну форму (СНФ) заперечення висновку. Оскільки

$$\overline{\forall x(\exists y(S(y) \wedge V(x,y)) \to \exists z(C(z) \wedge V(x,z)))} =$$
$$= \overline{\forall x(\forall y(\overline{S}(y) \vee \overline{V}(x,y)) \vee \exists z(C(z) \wedge V(x,z)))} =$$
$$= \exists x \exists y \forall z((S(y) \wedge V(x,y)) \wedge (\overline{C}(z) \vee \overline{V}(x,z))),$$

то СНФ така: $\forall z((S(b) \wedge V(a,b)) \wedge (\overline{C}(z) \vee \overline{V}(a,z)))$. Запишемо множину диз'юнктів і побудуємо резолютивний вивід: 1) $S(b)$; 2) $\overline{S}(y) \vee C(y)$; 3) $V(a,b)$; 4) $\overline{C}(z) \vee \overline{V}(a,z)$; 5) $C(b)$ ($\{b/y\}$ в 2, резольвента 1, 2); 6) $\overline{V}(a,b)$ ($\{b/z\}$ в 4, резольвента 4, 5); 7) $\varnothing$ (резольвента 3, 6). Твердження доведено.

Завдання для самостійної роботи: [3, с. 206, задачі 4.1.5].

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.

2. Таран Т.А. Основи дискретной математики. – К.: Просвіта, 2003. – 288 с.

3. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.