

Заняття 3.

Умовний екстремум

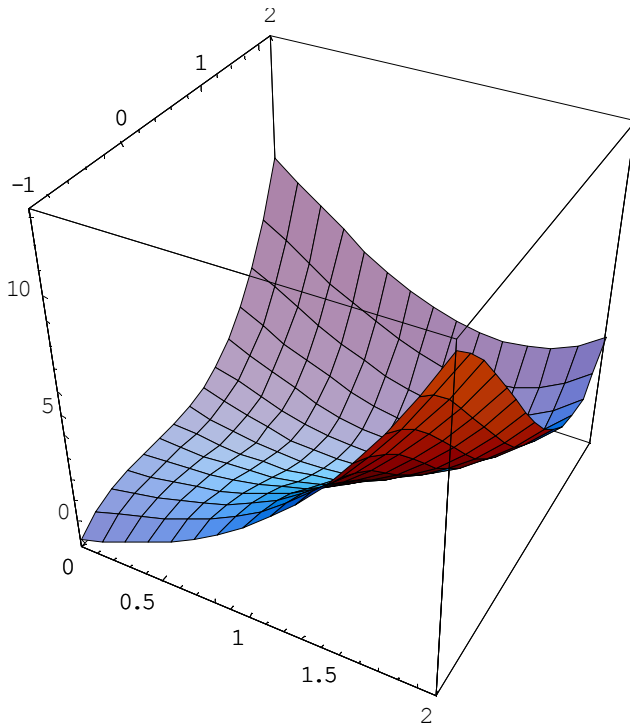
Знайти найбільше і найменше значення функції в області $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$

Введемо функцію f

$$f[x,y] := x^3 + y^3 - 3xy$$

Нарисуємо графік функції

```
Plot3D[f[x,y],{x,0,2},{y,-1,2},BoxRatios->{1,1,1}]
```



-SurfaceGraphics-

Дослідимо функцію всередині розглянутої області. Знайдемо точки, де часткові похідні переходять у нуль.

```
Solve[{ $\delta_x f[x,y] == 0$ ,  $\delta_y f[x,y] == 0$ }, {x,y}]
```

```
{{x->0,y->0}, {x->1,y->1}, {x->-(-11/3),y->-(-12/3)}, {x->-(-12/3),y->-(-11/3)}}
```

Дійсних рішень два: (0,0) і (1,1). Обчислимо значення функції в цих точках.

```
f[1,1]
```

```
-1
```

```
f[0,0]
```

0

Досліджуємо функцію на кордоні прямокутника.

Розглянемо поведінку функції f при $x = 0$.

$f[0,y]$

$$y^3$$

Ця функція приймає найбільше й найменше значення на кінцях відрізка $[-1,2]$

$f[0,-1]$

-1

$f[0,2]$

8

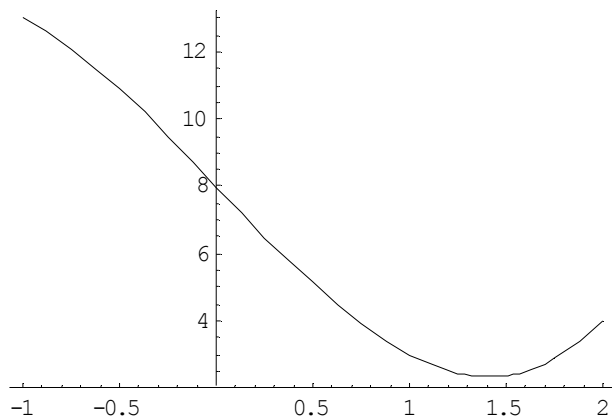
Розглянемо поведінку функції f при $x=2$

$f[2,y]$

$$8 - 6y + y^3$$

Нарисуємо графік цієї функції

`Plot[f[2,y], {y,-1,2}]`



-Graphics-

Максимальне значення ця функція приймає в точці -1. Обчислимо точку мінімуму.

Точка мінімуму на відрізку $[-1,2]$ - точка

Обчислимо значення функції $f[2, y]$ в точках максимуму і мінімуму.

$f[2,-1]$

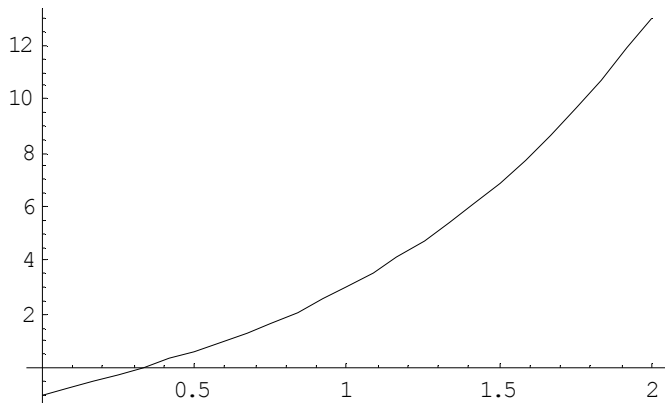
2.34315

Розглянемо поведінку функції f при $y = -1$.

$$f[x,-1]$$

$$-1+3x+x^2$$

Plot[f[x,-1],{x,0,2}]



-Graphics-

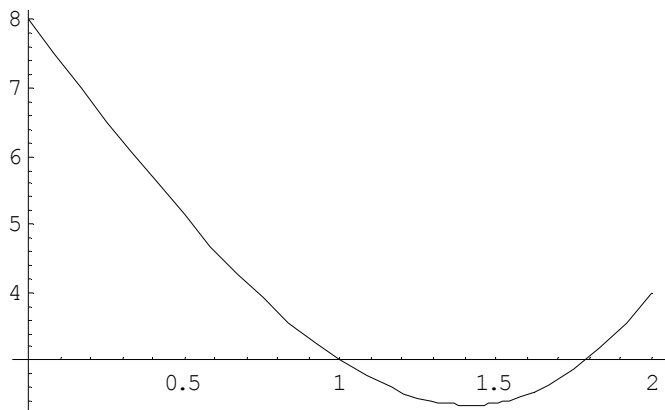
Функція $f[x, -1]$ приймає максимальну і мінімальне значення на кінцях відрізка $[0, 2]$. Ці значення ми вже обчислювали.

Розглянемо поведінку функції f при $y = 2$.

$$f[x,2]$$

$$8-6x+x^2$$

Plot[f[x,2],{x,0,2}]



-Graphics-

Максимальне значення ця функція приймає в точці 0. Обчислимо точку мінімуму.

2.34315

Тепер треба подивитися все те, що ми нарахували, і вибрати найбільше і найменше значення функції. Найбільше значення в точці (2, -1) дорівнює 13.

Найменше значення приймається у двох точках (1,1) і (0, -1) і дорівнює -1.

Clear[f]

Mathematica 5.1 - [EX3.NB]

File Edit Cell Format Input Kernel Find Window Help

EX3.NB

Условный экстремум

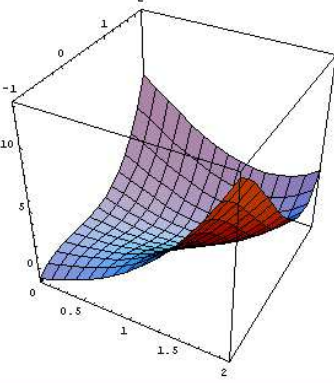
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$

Введем функцию f

```
In[21]:= f[x_, y_] := x^3 + y^3 - 3 x y
```

Нарисуем график функции

```
In[22]:= Plot3D[f[x, y], {x, 0, 2}, {y, -1, 2}, BoxRatios -> {1, 1, 1}]
```



Out[22] - SurfaceGraphics - 100%

start USB Disk Security ex3 Mathematica 5.1 - [E... New Документ Micro... EN 9:51 AM

Mathematica 5.1 - [EX3.NB]

File Edit Cell Format Input Kernel Find Window Help

EX3.NB

1.5
2

Out[22]= - SurfaceGraphics -

Исследуем функцию внутри рассматриваемой области. Найдем точки, где частные производные обращаются в ноль.

In[23]:= `Solve[{D[f[x, y], x] == 0, D[f[x, y], y] == 0}, {x, y}]`

Out[23]= `{{x -> 0, y -> 0}, {x -> 1, y -> 1}, {x -> -(-1)^(1/3), y -> (-1)^(2/3)}, {x -> (-1)^(2/3), y -> -(-1)^(1/3)}}`

Действительных решений два: (0, 0) и (1, 1) Вычислим значение функции в этих точках.

In[24]:= `f[1, 1]`

Out[24]= -1

In[25]:= `f[0, 0]`

Out[25]= 0

Исследуем функцию на границе прямоугольника.

Рассмотрим поведение функции f при x = 0

In[26]:= `f[0, y]`

Out[26]= y^2

Эта функция принимает наибольшее и наименьшее значение на концах отрезка [-1, 2]

100%

start USB Disk Security ex3 Mathematica 5.1 - [E... New Документ Micro... EN 9:51 AM

Mathematica 5.1 - [EX3.NB]

File Edit Cell Format Input Kernel Find Window Help

EX3.NB

Эта функция принимает наибольшее и наименьшее значение на концах отрезка $[-1, 2]$

In[27]:= `f[0, -1]`

Out[27]= `-1`

In[28]:= `f[0, 2]`

Out[28]= `8`

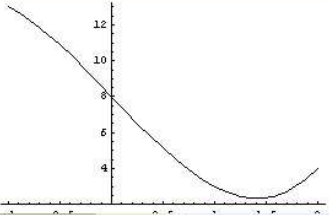
Рассмотрим поведение функции f при $x = 2$

In[29]:= `f[2, y]`

Out[29]= `8 - 6 y + y2`

Нарисуем график этой функции

In[30]:= `Plot[f[2, y], {y, -1, 2}]`




100%

start USB Disk Security ex3 Mathematica 5.1 - [E... New Документ Micro... EN 9:51 AM

Mathematica 5.1 - [EX3.NB]

File Edit Cell Format Input Kernel Find Window Help

EX3.NB



Out[30]= - Graphics -

Максимальное значение эта функция принимает в точке -1 . Вычислим точку минимума

In[31]:= `Solve[D_y f[2, y] == 0, y]`

Out[31]= $\{\{y \rightarrow -\sqrt{2}\}, \{y \rightarrow \sqrt{2}\}\}$

Точка минимума на отрезке $[-1, 2]$ – точка $\sqrt{2}$

Вычислим значения функции $f[2, y]$ в точках максимума и минимума.

In[32]:= `f[2, -1]`

Out[32]= 13

In[33]:= `f[2, $\sqrt{2}$]`

Out[33]= 2.34315

Рассмотрим поведение функции f при $y = -1$

In[34]:= `f[x, -1]`

Out[34]= $-1 + 3x + x^3$

100%

start USB Disk Security ex3 Mathematica 5.1 - [E... New Документ Micro... EN 9:51 AM

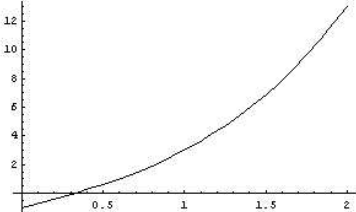
Mathematica 5.1 - [EX3.NB]

File Edit Cell Format Input Kernel Find Window Help

EX3.NB

Out[34]= $-1 + 3x + x^3$

In[35]:= `Plot[f[x, -1], {x, 0, 2}]`



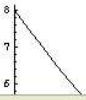
Out[35]= - Graphics -

Функция $f[x, -1]$ принимает максимальной и минимальное значение на концах отрезка $[0, 2]$. Эти значения мы уже вычислили.
Рассмотрим поведение функции f при $y = 2$

In[36]:= `f[x, 2]`

Out[36]= $8 - 6x + x^2$

In[37]:= `Plot[f[x, 2], {x, 0, 2}]`



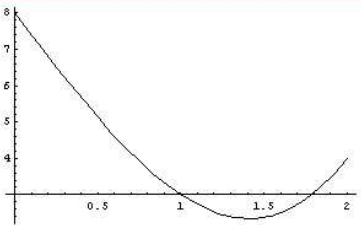
100%

start USB Disk Security ex3 Mathematica 5.1 - [E... New Документ Micro... EN 9:52 AM

Mathematica 5.1 - [EX3.NB]

File Edit Cell Format Input Kernel Find Window Help

EX3.NB



Out[37]= - Graphics -

Максимальное значение эта функция принимает в точке 0. Вычислим точку минимума

In[38]:= `Solve[0, f[x, 2] == 0, x]`

Out[38]= `{{x -> -sqrt[2]}, {x -> sqrt[2]}}`

In[39]:= `f[sqrt[2.], 2]`

Out[39]= 2.34315

Теперь надо посмотреть все то, что мы насчитали, и выбрать наибольшее и наименьшее значения функции. Наибольшее значение в точке (2, -1) равно 13. Наименьшее значение принимается в двух точках (1, 1) и (0, -1) и равно -1

In[40]:= `Clear[f]`

100%

start USB Disk Security ex3 Mathematica 5.1 - [E... New Документ Micro... EN 9:52 AM