

НАЦІОНАЛЬНИЙ АІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Інститут аеронавігації, електроніки та телекомунікації
Кафедра радіоелектронних пристроїв та систем

Є.І. Габрусенко

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АВТОМАТИЗОВАНЕ ПРОЕКТУВАННЯ
ЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЇВ ТА СИСТЕМ

Лабораторний практикум
з розв'язку задач оптимізації
у програмному забезпеченні
MATHEMATICA 5.1

1. Загальні відомості про рішення задач оптимізації в пакеті Mathematica.

Рішення оптимізаційних задач

Рішення оптимізаційних завдань - одне з найбільш практичних додатків математичних розрахунків. Значимість завдань оптимізації породила велику кількість різних математичних методів. Можливості системи Mathematica тут досить обмежені: відсутні вбудовані функції реалізації багатьох з цих методів. Проте слід мати на увазі, що система Mathematica має великі можливості реалізації будь-яких методів шляхом програмування на її мові. Більш того, є можливість вирішувати завдання оптимізації в аналітичному вигляді.

Можливості системи Mathematica вирішувати завдання оптимізації за допомогою її вбудованих функцій обмежуються в основному наступними випадками:

- пошук максимального і мінімального числа з безлічі чисел, представлених у вигляді векторів або матриць;
- визначення локального мінімуму або максимуму аналітичної функції;
- визначення глобального мінімуму або максимуму аналітичної функції, зокрема, рішення оптимізаційних завдань лінійного програмування.

Викладемо ці методи і наведемо приклади.

Пошук мінімального і максимального числа в переліку чисел

Завдання пошуку мінімального чи максимального числа формулюється наступним чином: дано числа, представлені у вигляді вектора або матриці; знайти мінімальне і максимальне числа.

На перший погляд здається, що це завдання занадто просте і великого сенсу не має. Але це тільки здається. Звичайно, шукати мінімальне або максимальне числа з сімейства чисел 1, 2, 3, 5, 7, 20, 8 сенсу немає, тому що рішення очевидне: максимальним є число 20, а мінімальним - 1. А якщо задані раціональні числа, наприклад, виду $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{17}{21}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{121}{164}$, $\frac{12}{21}$ або виду невизначених функцій: $\sin 1.5$, $\cos 2.5$, $e^{0.25}$, 0.96^6 , $\ln 3.2$. Яке тут число є мінімальним, а яке максимальним?

Система Mathematica має такі функції визначення максимального і мінімального числа списку:

- $\text{Max}[x_1, x_2, \dots]$ – повертає максимальне з чисел;
- $\text{Max}[\{x_1, x_2, \dots\}, \{y_1, y_2, \dots\}]$ – повертає максимальне з матриці чисел;
- $\text{Min}[x_1, x_2, \dots]$ – повертає мінімальне з чисел
- $\text{Min}[\{x_1, x_2, \dots\}, \{y_1, y_2, \dots\}]$ – повертає мінімальне з матриці чисел.

Числа при цьому можуть бути цілими, раціональними, дійсними. Більше того, елементами списку можуть бути функції з чисельними значеннями аргументів. При цьому відгуком у багатьох випадках може бути число того ж типу, що й вихідні дані. Це ще раз підтверджує високу інтелектуальність системи.

Технологія пошуку чисел, що потрібно знайти, елементарна і полягає в наступному:

1. Введення списку чисел або функцій з присвоєнням йому унікального імені.
2. Введення функції пошуку максимального або мінімального числа.
3. Отримання рішення натисканням комбінації клавіш $\langle \text{Shift} \rangle + \langle \text{Enter} \rangle$.

Покажемо цю технологію на прикладах.

Приклад 1

Нехай необхідно визначити максимальні і мінімальні значення чисел вектора $[1, 2.3, -1.7, 3, 4.2, 6.3, 0.25, -1.70001]$ і матриці $\{\{1, 2, 3\}, \{0.5, 2.8, 7\}, \{4, -1, 3.2\}\}$.

Наведемо приклад, коли числа задані в раціональній формі та у вигляді функцій.

Приклад 2

Нехай необхідно визначити максимальні і мінімальні числа, представлені у вигляді наступних векторів:

$[2/3, 3/4, 4/5, 4/3, 3/2, 5/4]$

$[\text{Sin } 1, \text{sin } 2, \text{sin } 0.5, \text{sin } 3.14, \text{sin } 8]$

$[e^{-0.1}, e^{-0.6}, 1/2.5, \text{sin } 1, \text{cos } 1, 0.6^5]$

f1= {1, 2.3,-1. 7, 3, 4.2, 6.3, 0.25, -1.70001}

Max[f1]

{1,2 .3,-1. 7, 3,4.2, 6.3,0.2 5,-1.70001}

6.3

Min[f1]

-1.70001

f2={ {1,2,3}, {0.5,2. 8, 7} ,{4,-1,3.2}}

Max [f2]

{{1, 2,3},{0.5, 2.8,7},{4,-1,3.2}}

7

Min[f2]

-1

Рис. 1. Визначення максимальних і мінімальних чисел вектора і матриці

f3= {2/3,3/4,4/5,4/3,3/2,5/4}

Max[f3]

{ $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$ }

Min[f3]

f4={sin[1] ,sin[2] ,sin[0. 5] ,sin[3.14] ,sin[8] } Max [f4]

{sin [1] ,sin[2] ,0.47942 6,0 .00159265, sin[8] }

sin[8]

Min[f4]

0. 001592 65

f5={E[^](-0.1) ,E[^](-0. 6) ,1/2 .5 ,sin[1],cos[1],0.6[^]5}

Max [f5]

0.904837

Min[f5]

0.077776

N[f5]

{0.90483 7, 0.548812, 0.4, 0.841471, 0.5403 02, 0.077776}

Видно, що система видала шукані числа в раціональній формі, в якій вони і були задані у вигляді вектора.

У разі другого вектора система видала максимальне число у вигляді \sin [8]. Вона не визначила значення синуса, так як аргумент заданий у вигляді цілого числа, при якому точне значення синуса не існує.

При визначенні шуканих чисел третього вектора система видала рішення в числовому вигляді, так як аргументи функцій представлені у дійсній формі. Однак при цьому елементи вектора, що відповідають отриманими значеннями шуканих чисел, нам невідомі. Довелося представити елементи вектора у вигляді чисел за допомогою функції $N[f5]$. Тепер видно, що максимальним являється елемент $e^{-0.1}$, а мінімальним 0.65.

2. Класичний метод визначення екстремуму аналітичної функції

У точці екстремуму (максимуму або мінімуму) похідна функції $y(x)$ дорівнює нулю. Тоді координату x можна знайти, якщо вирішити рівняння $y'(x)$. Підставивши це значення у вихідну функцію, отримаємо координати точки максимуму (мінімуму).

Комп'ютерна технологія розв'язання задачі відшукування екстремуму функції, цим традиційним методом за допомогою системи Mathematica, полягає в виконанні наступних процедур:

- побудова графіка функції $y(x)$ з метою встановлення наявності екстремумів функції $y(x)$ і встановлення наближеного значення координат точок екстремуму;
- визначення похідної $y'(x)$ за допомогою вбудованої функції $D[f, x]$;
- визначення дійсних коренів рівняння $y'(x)=0$ за допомогою однієї з функцій системи;
- обчислення значень функції $y(x)$ при значенні аргументів, що дорівнюють кореням рівняння.

Ця методика досить проста і очевидна. Однак при її практичній реалізації можуть виникнути труднощі з визначенням коренів рівняння $y'(x) = 0$. Тут можливі випадки, коли система Mathematica вирішує рівняння і видає всі корені, видає

тільки один з декількох коренів або зовсім не вирішає рівняння. Складнощі виникають у тих випадках, коли рівняння $y'(x) = 0$ є трансцендентним.

Розглянемо технологію визначення екстремумів аналітичної функції на прикладах.

Приклад 3

Визначити координати екстремальних точок функції

$$f = \ln(4-2x) + x^2 - 2.$$

Кількість екстремальних точок визначити по виду графіка функції (рис.1), а корені похідної $f'(x)$ обчислити за допомогою функції NSolve [f == 0, x].

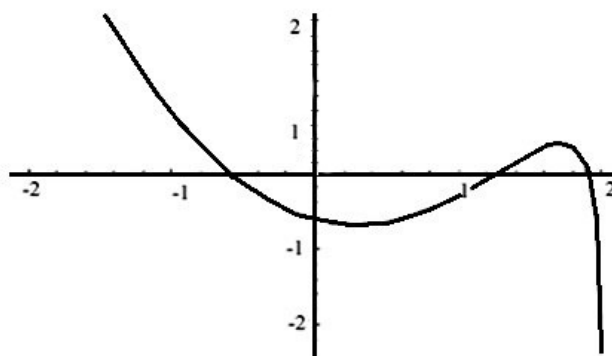


Рис.1.

```
f=Log[4-2 x]+x^2-2
Plot[f,{x,-2,2}]
-2+x^2+Log[4-2x]
z=D[f,x]
NSolve[z=0,x]
{{x->1.70711}, {x->0.292893}}
f/.x->1.10711
0.379414
f/.x->0.292893
-0.686266
```

Видно, що функція має максимум і мінімум. При цьому система за допомогою функції NSolve [f == 0, x] знайшла абсциси точок екстремуму, визначивши два корені рівняння $f'(x) = 0$ за одну команду.

Обчисливши значення функції методом підстановки, одержимо наступні координати екстремальних точок: максимуму - [1.70711,0.379414], мінімуму – [0.292893, -0.686266].

Приклад 4

Необхідно визначити координати екстремальних точок функції (рис.2):

$$f=x^5-5x^4-3x^3+29x^2+2x-24.$$

$$f=x^5-5x^4-3x^3+29x^2+2x-24$$

Plot[f,{x,-2,4}]

$$-24+2x+29x^2-3x^3-5x^4+x^5$$

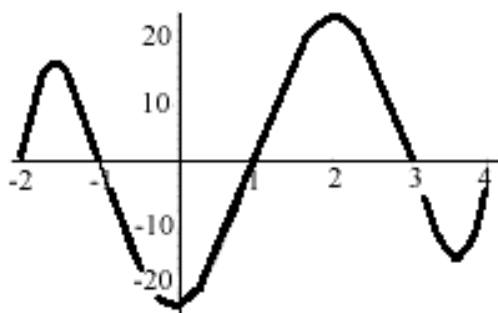


Рис.2.

y=D[f,x]

$$2+58x-9x^2-20x^3+5x^4$$

NSolve[y,x]

$$\{\{x \rightarrow -1.59426\}, \{x \rightarrow -0.0343141\}, \{x \rightarrow 2.03431\}, \{x \rightarrow 3.59426\}\}$$

f/.x->-1.59426

$$16.0767$$

f/.x->-0.0343241

$$-24.0344$$

f/.x->2.03431

$$24.0344$$

f/.x->3.59426

$$-16.0767$$

Видно, що, як і в попередньому прикладі, функція NSolve [f == 0, x] визначила всі корені рівняння $f'(x) = 0$ однією командою, суттєво полегшивши

обчислення координат екстремальних точок. У таких випадках немає необхідності будувати графік даної функції $f(x)$. Хіба тільки для контролю правильності визначення координат екстремальних точок.

У більшості випадків рівняння $f'(x) = 0$ є трансцендентним. У таких випадках функція `NSolve[f'(x), x]` не може відразу знайти всі корені рівняння. Доводиться застосовувати інші функції рішення рівнянь, що вимагають завдання найближчого значення x або навіть області ізоляції кореня.

Розглянемо такі приклади.

Приклад 5

Необхідно визначити координати екстремумів функції:

$$f(x) = (2^x - 4x) \cdot (3^x - 9).$$

Рішення наведено на рис. 7.5. У даному випадку визначити корені рівняння $(3^x - 9x)(-4 + 2^x \log[2]) + (2^x - 4x)(-9 + 3^x \log[3]) = 0$

за допомогою функції `Solve[f, x]` неможливо. Корені визначені за допомогою триразового застосування функції `FindRoot[z, {x, x0}]`, де x_0 - числове значення x поблизу екстремуму.

7.2.1. Визначення координат точок перегину

До особливих точках аналітичної функції відносяться також точки перегину. У цих точках друга похідна дорівнює нулю. Класичний метод визначення екстремальних точок (максимуму і мінімуму) дозволяє також визначити координати точок перегину. Відмінність полягає лише в тому, що доводиться шукати корені не першої, а другої похідної функції $y(x)$. В іншому технологія визначення координат точок перегину не відрізняється від технології визначення координат точок максимуму і мінімуму.

Покажемо технологію на прикладі.

Приклад 6

Визначимо координати точок перегину функції, наведеної на рис. 3.

$$f = (2^x - 4x)(3^x - 9x)$$

`Plot[f, {x, -1, 5}]`

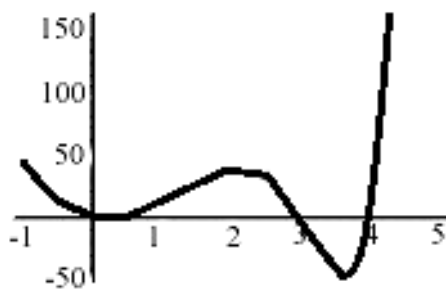


Рис. 3.

$$z=D[f,x]$$

$$(3^x - 9x) (-4 + 2^x \text{Log}[2]) + (2^x - 4x) (-9 + 3^x \text{Log}[3]) = 0$$

$$\text{FindRoot}[z, \{x, 0.1\}]$$

$$\{x \rightarrow 0.218114\}$$

$$\text{FindRoot}[z, \{x, 2\}]$$

$$\{x \rightarrow 2.11009\}$$

$$\text{FindRoot}[z, \{x, 3.2\}]$$

$$\{x \rightarrow 3.65157\}$$

$$f/.x \rightarrow 0.218114$$

$$-0,201278$$

$$f/.x \rightarrow 2.11009$$

$$-36,423$$

$$f/.x \rightarrow 3.65157$$

$$-45,6272$$

Визначення координат екстремальних точок функції прикладу 5.

$$f=\text{Log}[4-2 x]+x^2-2$$

$$z=D [f,\{x, 2\}]$$

$$-2 + x^2 + \text{Log}[4 - 2 x]$$

$$2-4/(4-2x)^2$$

$$\text{NSolve}[z, x]$$

$$\{\{x \rightarrow 2.70711\}, \{x \rightarrow 1.29289\}\}$$

$$f/.x \rightarrow 2.70711$$

$$5.67502 + 3.14159 i$$

$$f/.x \rightarrow 1.29269$$

0.0181427

7.3. Пошук локального мінімуму аналітичної функції за допомогою вбудованих функцій системи Mathematica

Система Mathematica надає вбудовану функцію пошуку локального мінімуму аналітичної функції. Вона має вигляд:

`FindMinimum [f (x), {x, x0}]`

де:

$f(x)$ - аналітична функція аргументу x ;

x_0 - значення аргументу поблизу локального мінімуму.

Функція `FindMinimum [f (x), {x, x0}]` знаходить координати всіх мінімумів функції $f(x)$ шляхом її повторень стільки разів, скільки є локальних мінімумів. При цьому щоразу змінюється значення x_0 .

Технологія відшукування мінімуму функції проста і полягає у виконанні наступних дій:

1. Побудова графіка аналітичної функції $f(x)$ з метою визначення кількості екстремальних точок і вибору значень x_0 .
2. Введення вбудованою функції `FindMinimum [f (x), {x, x0}]`
3. Отримання рішення шляхом натискання комбінації клавіш `<Shift> + <Enter>`.

Якщо аналітична функція має максимум, то технологія залишається колишньою. Необхідно лише змінити знак функції $f(x)$ на зворотний, помноживши її на -1 .

Розглянемо технологію визначення координат мінімуму аналітичної функції на прикладах.

Приклад 7

Необхідно визначити координати екстремумів наступної аналітичної функції:

$$x^4 - 13x^3 + 35x^2 + 13x - 36.$$

Процедури вирішення задачі наведено на рис. 4.

З рис. 7.7 видно, що координатами точок мінімуму і максимуму є: $[-0,17, -37]$, $[2.63, 51.64]$, $[7.29, -293.36]$. Слід мати на увазі, що ординату максимуму необхідно помножити на -1 .

Цей метод порівняно з класичним має ту перевагу, що відгуком тут є координата мінімуму (x і y) і обчислення значень y не вимагається. Його недолік в тому, що він не дозволяє обчислити одночасно координати всіх екстремальних точок.

$$f = x^4 - 13x^3 + 35x^2 + 13x - 36$$

Plot[f, {x, -2, 10}]

$$-36 + 13x + 35x^2 - 13x^3 + x^4$$

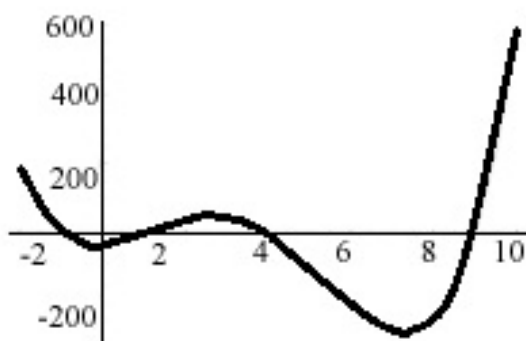


Рис.4.

FindMinimum[f, {x, -0.5}]

{-37.1338, {x->-0.169441}}

FindMinimum[-f, {x, 2}]

{-51.6363, {x->2.63205}}

FindMinimum[f, {x, 7}]

{-293.358, {x->7.28739}}

Крім функції FindMinimum [f(x), {x, x0}] система Mathematica має наступні чотири функції, що дозволяють відшукати локальний мінімум аналітичної функції:

- NMaximize [f, x] - шукає єдиний локальний максимум функції f(x);

□ NMinimize [f, x] - шукає єдиний локальний мінімум функції f(x);

□ NMaximize [{f, zxy}, {x, y, ...}] - шукає локальний максимум функції f(x),

визначений умовою z_{xy};

□ NMinimize [{f, zxy}, {x, y, ...}] - шукає локальний мінімум функції f(x),

визначений умовою z_{xy}.

Технологія визначення локального максимуму (мінімуму) за допомогою приведених функцій практично не відрізняється від технології визначення локального мінімуму функцією FindMinimum [f(x), {x, x0}].

Наведемо приклади визначення екстремальних точок за допомогою цих функцій.

Приклад 8

Необхідно знайти координати максимуму (мінімуму) аналітичних функцій:
 $x^2 - x + 1$, $3x - 9x + 3$.

Спочатку побудуємо графік функції і визначимо, чи має функція екстремальні точки і яка вона (максимум або мінімум). По виду графіка виберемо вбудовану функцію. Рішення виконаємо в послідовності наведених функцій.

Видно, що в результаті рішення отримані координати екстремальних точок, відповідні графіками. При цьому функції NMaximize [f, x] і NMinimize [f, x] не вимагають завдання аргументу поблизу локального максимуму (мінімуму), як це було у випадку використання функції FindMinimum [f(x), {x, x0}].

Розглянемо тепер випадок, коли аналітична функція має кілька екстремумів.

Приклад 9

Необхідно визначити координати екстремальних точок наступних аналітичних функцій:

$$\ln(5-3x) + x^2 - 3,$$

$$x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 31x^2 + 2x - 30.$$

Рішення наведено на рис 5. Обговоримо результати вирішення завдань.

При визначенні за допомогою функцій NMaximize [f, x], і NMinimize [f, x] координат екстремальних точок аналітичної функції, що має багато максимумів і мінімумів, виникає ряд проблем.

У нашому прикладі функції мають кілька екстремальних точок: перша функція містить один максимум і один мінімум, друга - два максимуми і два мінімуми. Вирішуючи перше завдання, система визначила координати мінімуму і не знайшла координат максимуму (рішення абсурдно). У другій функції система знайшла тільки один максимум і один мінімум, що знаходяться зліва у графіка. Визначити координати інших екстремумів не вдається. У цьому істотний недолік функцій `NMaximize [f, x]` і `NMinimize [f, x]`.

Існують функції `NMinimize [{f, zxy ...}, {x, y, ...}]`, `NMinimize [{f, zxy ...}, {x, y, ...}]`. Ці функції знаходять координати екстремальних точок аналітичних функцій багатьох аргументів при обмеженнях $z_{xy} \dots$

$$f = x \text{Exp}[-x] + 1$$

$$\text{Plot}[f, \{x, 0, 5\}]$$

$$1 + e^{-x} x$$

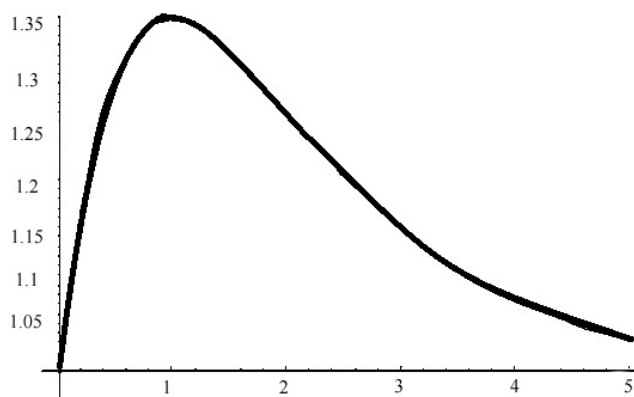


Рис.5.

$$\text{NMaximize}[f, x]$$

$$\{1.36788, \{x \rightarrow 1.\}\}$$

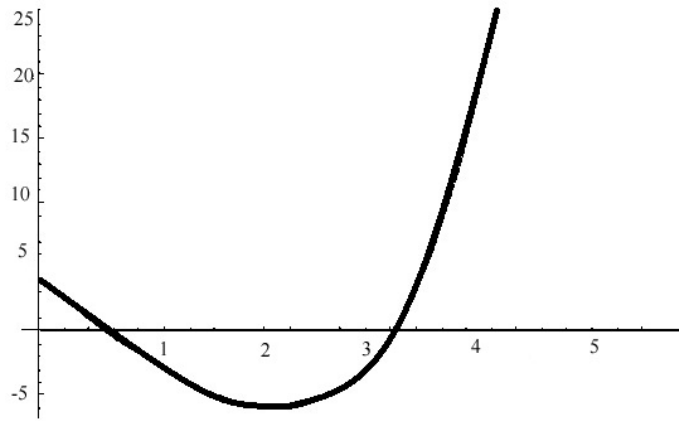
$$f1 = 3^x - 9x + 3$$

$$\text{Plot}[f1, \{x, 0, 5\}]$$

$$3 + 3^x - 9x$$

$$\text{NMinimize}[f1, x]$$

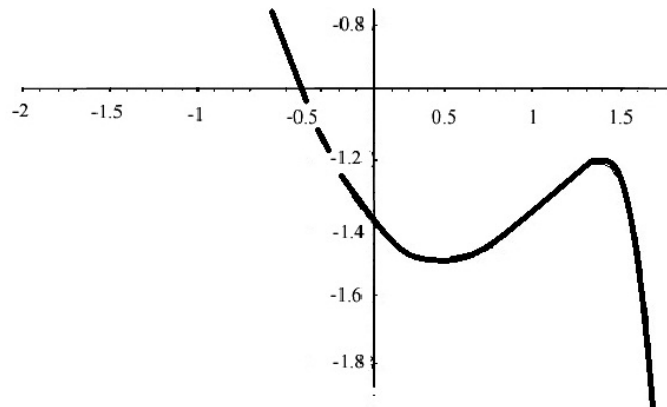
$$\{-6.03739, \{x \rightarrow 1.91439\}\}$$



f2=Log[5-3x]+x^2-3

Plot[f2,{x,-2,3}]

-3+x²+Log[5-3x]



NMaximize[f2,x]

{9.65572578174896 × 10⁹¹⁹, {x -> -9.82635526619558 × 10⁴⁵⁹}

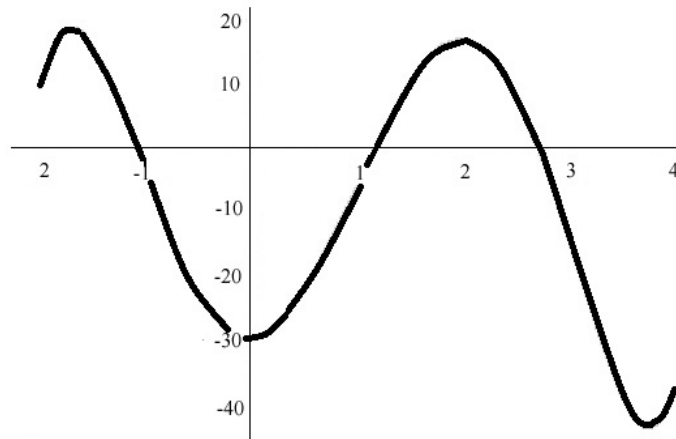
NMinimize [f2, x]

{-1.50504, {x->0.392375}}

f3=x⁵-5 x⁴-4 x³+31 x²+2 x-30

Plot[f3,{x,-2,4}]

-30 + 2 x + 31 x² - 4 x³ - 5 x⁴ + x⁵



NMaximize[f3,x]

{19.8942, {x->-1.68837}}

NMinimize[f3 ,x]

{-30.0321, {x->-0.0320697}}

Наведемо приклади визначення координат функцій багатьох змінних, при обмеженнях на їх аргументи.

Приклад 10.

Необхідно визначити координати точок максимуму і мінімуму наступних функцій:

$$\sin x - e^{x+y}, x+y < 1;$$

$$2^x - 4(x+y), x+y < 5;$$

$$4(x+y+z) - 2^{x+y}, x+y+z < 7.$$

У першій та другій функції визначимо координати мінімуму, у третьій - максимуму.

NMinimize[{Sin[x]-Exp[x+y] ,x+y<1},{x,y}]

{-3.71828, {x→-1.5708,y→2.5708}}

NMinimize[{2^x-4 (x+y) ,x+y<5} ,{x,y}]

{-20., {x→-50.3938,y→55.3938}}

NMaximize [(4 (x+y+z)-2^ (x+y, x+y+z<7} , {x, y ,z}]

{28.,{x→1.13 548,y→-49.229, z→57.3645}}

7.4. Відшукання глобального максимуму (мінімуму) аналітичної функції

Завдання пошуку глобального максимуму (мінімуму) є завданням математичного програмування. Серед цих завдань найбільш часто доводиться вирішувати завдання лінійного програмування.

Завдання лінійного програмування формулюється таким чином. Задана наступна лінійна функція незалежних змінних x_1, x_2, \dots, x_n :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

де a_i - числа, звані коефіцієнтами лінійної функції, $i = 1, 2, \dots, n$.

Відомо також кілька рівнянь і нерівностей з незалежними змінними які є x_1, x_2, \dots, x_n .

Такими рівняннями (нерівностями) можуть бути:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ ($a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq b$), $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$
і ряд інших.

Серед безлічі варіантів, що задовольняють умовам обмеження, необхідно знайти сукупність змінних x_1, x_2, \dots, x_n , при яких лінійна функція отримує максимальне (мінімальне) значення. Функція $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ в теорії математичного програмування називається цільовою функцією, а сукупність рівностей і нерівностей - обмеженнями.

Сформульована задача лінійного програмування зустрічається на практиці дуже часто при вирішенні оптимізаційних завдань в техніці, управлінні, економіці.

Система Mathematica має вбудовані функції вирішення завдань математичного програмування. Ці функції мають вигляд:

ConstrainedMax [f, {0}, {x1, x2, ..., xn}]

ConstrainedMin [f, {0}, {x1, x2, ..., xn}]

LinearProgramming [c, m, b]

У цих функціях прийняті наступні позначення:

- f - цільова функція;
- Q-вектор обмежень;
- X_i -шукані незалежні змінні;
- z - мінімізована величина;

□ m - обмеження;

□ b - величина обмежень.

Функція `ConstrainedMax` [f , $\{0\}$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$] шукає глобальний максимум, тобто такі значення x_i , при яких виконуються всі обмеження Q , а цільова функція має максимальне значення.

Функція `ConstrainedMin` [f , $\{0\}$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$] шукає глобальний мінімум, тобто такі значення x_i , при яких виконуються всі обмеження Q , а цільова функція має мінімальне значення.

Функція `LinearProgramming` [c , m , b] шукає вектор x . c при умовах $m \cdot x \geq b$, $x \geq 0$.

Рішення такого складного завдання, як відшукування глобального максимуму (мінімуму), в системі Mathematica гранично просто:

1. Введення функції `ConstrainedMax` [f , $\{0\}$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$].
2. Отримання рішення шляхом натискання комбінації клавіш `<Shift> + <Enter>`.

Покажемо технологію відшукування глобального максимуму і мінімуму на конкретних прикладах.

Приклад 11.

Існує три технології випуску деякої продукції. Для її виготовлення необхідно мати три види сировини. Кожна з технологій вимагає певної кількості сировини даного виду, яке мається в обмеженій кількості. Обсяг виробленого продукту залежить від технології виготовлення і відомий для кожної з технологій.

Необхідно знайти таку технологію, при якій обсяг випущеної продукції максимальний.

Вихідні дані виробництва наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Вихідні дані виробництва

Спосіб виробництва	Потрібність в сировині (ум. од.)			Випуск продукції
	Першого виду	Другого виду	Третього виду	
1	2	3	2	30
2	1	2	3	22
3	2	1	1	24

Технологія виробництва допускає зміну способу виробництва протягом робочого дня.

7.4.1. Математичне формулювання задачі

Позначимо x_1 , x_2 , x_3 - частки робочого часу, що витрачається на виробництво заданого об'єму готового продукту за умови забезпечення сировиною, відповідно, за першої, другої і третьої технологіях.

Обмеженнями при вирішенні цього завдання є:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1;$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2;$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2;$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2.$$

Обговоримо прийняті обмеження.

Перше обмеження очевидне: долі робочого часу не можуть бути негативними.

Друге припущення означає, що сумарний робочий час не повинен перевищувати повного робочого дня.

Третє, четверте і п'яте допущення означають, що витрата сировини не повинна перевищувати ліміту (двійка для кожної сировини і технології).

При будь-якій технології буде випущено продукту

$$30x_1 + 22x_2 + 24x_3.$$

Ця функція і є цільовою.

У результаті рішення задачі потрібно визначити значення x_1 , x_2 , x_3 і максимальне значення випущеного продукту, тобто визначити оптимальну технологію виробництва.

У нашому випадку функція глобального максимуму буде мати вигляд:

$$\text{ConstrainedMax}[30x_1 + 22x_2 + 24x_3, \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2, 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2, 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2\}, \{x_1, x_2, x_3\}]$$

$$\text{ConstrainedMax}[30*x_1+22*x_2+24*x_3,$$

$$\{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$x_1+x_2+x_3 \leq 1,$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2\},$$

$$\{x_1, x_2, x_3\}]$$

$$\{27, \{x_1 \rightarrow \frac{1}{2}, x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow \frac{1}{2}\}\}$$

Видно, що підприємством за зміну буде випущено 27 одиниць продукції по першій і третій технологіям. Випуску продукції по другій технології не повинно бути.

Класичною задачею лінійного програмування є транспортна задача. Наведемо і ми такий приклад.

Приклад 12.

Є чотири складу товарів і три їх споживача. Відома також кількість товарів на кожному складі, потреби кожного споживача, а також вартість доставки товару до кожного споживача.

Необхідно скласти оптимальний план перевезень, при якому сумарна вартість перевезень буде мінімальною.

Вихідні дані задачі наведені в табл. 2.

Таблиця 2. Дані про перевезення товарів зі складів до споживачів

	Π_1	Π_2	Π_3	Z_c
1 C	2	4	1	9
2 C	4	1	2	7
3 C	2	3	2	7
4 C	1	2	3	7
Z_n	12	10	8	

У таблиці позначено:

- C1, C2, C3, C4 - склади;
- П1, П2, П3 - споживачі;
- Zc - кількість товарів на складі;
- Zn-кількість товарів, необхідних споживачу.

Цифри в таблиці означають вартість перевезень в умовних одиницях зі складу C_i , до споживача Π_j , $i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3$.

У даному випадку цільовою буде наступна функція:

$$2n_{11} + 4n_{12} + n_{13} + 4n_{21} + n_{22} + 2n_{23} + 2n_{31} + 3n_{32} + 2n_{33} + n_{41} + 2n_{42} + 3n_{43},$$

де n_{ij} - кількість товару, планованого для перевезення зі складу C_i , споживачеві Π_j . Сформулюємо обмеження Q.

Оскільки числа не можуть бути негативними, то

$$n_{11} \geq 0, n_{21} \geq 0, \dots, n_{42} \geq 0, n_{43} \geq 0.$$

Сумарна кількість продуктів на складах і потреби споживачів можна представити наступними рівняннями:

$$n_{11} + n_{12} + n_{13} = 9;$$

$$n_{21} + n_{22} + n_{23} = 7;$$

$$n_{31} + n_{32} + n_{33} = 7;$$

$$n_{41} + n_{42} + n_{43} = 7;$$

$$n_{11} + n_{21} + n_{31} + n_{41} = 12;$$

$$n_{12} + n_{22} + n_{32} + n_{42} = 10;$$

$$n_{13} + n_{23} + n_{33} + n_{43} = 8.$$

Сукупність нерівностей та цих рівнянь утворюють обмеження Q.

Завдання полягає в тому, щоб знайти такі значення n_{ij} цільової функції, при яких сумарні витрати на перевезення були б мінімальними. Скористаємося функцією $\text{ConstrainedMin}[f, \{0\}, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}]$.

ConstrainedMin [
 $2*n_{11}+4*n_{12}+1*n_{13}+4*n_{21}+1*n_{22}+2*n_{23}+$
 $2*n_{31}+3*n_{32}+2*n_{33}+1*n_{41}+2*n_{42}+3*n_{43},$
 $\{n_{11} \geq 0, n_{12} \geq 0, n_{13} \geq 0, n_{21} \geq 0, n_{22} \geq 0, n_{23} \geq 0,$
 $n_{31} \geq 0, n_{32} \geq 0, n_{33} \geq 0, n_{41} \geq 0, n_{42} \geq 0, n_{43} \geq 0,$
 $n_{11}+n_{12}+n_{13}==9, n_{21}+n_{22}+n_{23}==7, n_{31}+n_{32}+n_{33}==7,$
 $n_{41}+n_{42}+n_{43}==7, n_{11}+n_{21}+n_{31}+n_{41}==12,$
 $n_{12}+n_{22}+n_{32}+n_{42}==10, n_{13}+n_{23}+n_{33}+n_{43}==8\},$
 $\{n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{21}, n_{22}, n_{23}, n_{31}, n_{32}, n_{33},$
 $n_{41}, n_{42}, n_{43}\}]$
 $\{41, \{n_{11} \rightarrow 1, n_{12} \rightarrow 0, n_{13} \rightarrow 8, n_{21} \rightarrow 0,$
 $n_{22} \rightarrow 7, n_{23} \rightarrow 0,$
 $n_{31} \rightarrow 4, n_{32} \rightarrow 3, n_{33} \rightarrow 0, n_{41} \rightarrow 7, n_{42} \rightarrow 0, n_{43} \rightarrow 0\}\}$

Видно, що всі товари зі складів доставлені споживачам. Однак далеко не всі споживачі отримали товари з причини високої вартості перевезень.