2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Моделирование как метод научного познания. Понятия модели и моделирования. Элементы и этапы процесса моделирования. Виды моделирования. Особенности математического моделирования экономических объектов. Производственно-технологический и социально-экономический уровни экономико-математического моделирования.

Проверка адекватности моделей.

Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX в. Однако методология моделирования долгое время развивалась независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального метода научного познания.

Термин "модель" широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Рассмотрим только такие "модели", которые являются инструментами получения знаний.

Модель - это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале

Под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

Главная особенность моделирования в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность метода моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

Процесс моделирования включает три элемента:

- субъект (исследователь),
- объект исследования,
- модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Пусть имеется или необходимо создать некоторый объект А. Мы конструируем (материально или мысленно) или находим в реальном мире другой объект В - модель объекта А. Этап построения модели предполагает наличие некоторых знаний об объекте-оригинале. Познавательные возможности модели обуславливаются тем, что модель отражает какие-либо существенные черты объекта-оригинала. Вопрос о необходимости и достаточной мере сходства оригинала и модели требует конкретного анализа. Очевидно, модель утрачивает свой смысл как в случае тождества с оригиналом (тогда она перестает быть оригиналом), так и в случае чрезмерного во всех существенных отношениях отличия от оригинала.

Таким образом, изучение одних сторон моделируемого объекта осуществляется ценой отказа от отражения других сторон. Поэтому любая модель замещает оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько "специализированных" моделей, концентрирующих внимание на определенных сторонах исследуемого объекта или же характеризующих объект с разной степенью детализации.

На втором этапе процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования. Одной из форм такого исследования является проведение "модельных" экспериментов, при которых сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о ее "поведении". Конечным результатом этого этапа является множество знаний о модели.

На третьем этапе осуществляется перенос знаний с модели на оригинал - формирование множества знаний об объекте. Этот процесс переноса знаний проводится по определенным правилам. Знания о модели должны быть скорректированы с учетом тех свойств объекта-оригинала, которые не нашли отражения или были изменены при построении модели. Мы можем с достаточным основанием переносить какой-либо результат с модели на оригинал, если этот результат необходимо связан с признаками сходства оригинала и модели. Если же определенный результат модельного исследования связан с отличием модели от оригинала, то этот результат переносить неправомерно.

Четвертый этап - практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний и их использование для построения обобщающей теории объекта, его преобразования или управления им.

Для понимания сущности моделирования важно не упускать из виду, что моделирование - не единственный источник знаний об объекте. Процесс моделирования "погружен" в более общий процесс познания. Это обстоятельство учитывается не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания.

Моделирование - циклический процесс. Это означает, что за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах. В методологии моделирования, таким образом, заложены большие возможности саморазвития.

Большинство объектов, изучаемых экономической наукой, может быть охарактеризовано кибернетическим понятием сложная система.

Наиболее распространено понимание системы как совокупности элементов, находящихся во взаимодействии и образующих некоторую целостность, единство. Важным качеством любой системы является эмерджентность - наличие таких свойств, которые не присущи ни одному из элементов, входящих в систему. Поэтому при изучении систем недостаточно пользоваться методом их расчленения на элементы с последующим изучением этих элементов в отдельности. Одна из трудностей экономических исследований – в том, что почти не существует экономических объектов, которые можно было бы рассматривать как отдельные (внесистемные) элементы.

Сложность системы определяется количеством входящих в нее элементов, связями между этими элементами, а также взаимоотношениями между системой и средой. Экономика страны обладает всеми признаками очень сложной системы. Она объединяет огромное число элементов, отличается многообразием внутренних связей и связей с другими системами (природная среда, экономика других стран и т.д.). В народном хозяйстве взаимодействуют природные, технологические, социальные процессы, объективные и субъективные факторы.

Сложность экономики иногда рассматривалась как обоснование невозможности ее моделирования, изучения средствами математики. Но такая точка зрения в принципе неверна. Моделировать можно объект любой природы и любой сложности. И как раз сложные объекты представляют наибольший интерес для моделирования; именно здесь моделирование может дать результаты, которые нельзя получить другими способами исследования.

Потенциальная возможность математического моделирования любых экономических объектов и процессов не означает, разумеется, ее успешной осуществимости при данном уровне экономических и математических знаний, имеющейся конкретной информации и вычислительной технике. И хотя нельзя указать абсолютные границы математической формализуемости экономических проблем, всегда будут существовать еще неформализованные проблемы, а также ситуации, где математическое моделирование недостаточно эффективно.

Уже длительное время главным тормозом практического применения математического моделирования в экономике является наполнение разработанных моделей конкретной и качественной информацией. Точность и полнота первичной информации, реальные возможности ее сбора и обработки во многом определяют выбор типов прикладных моделей. С другой стороны, исследования по моделированию экономики выдвигают новые требования к системе информации.

В зависимости от моделируемых объектов и назначения моделей используемая в них исходная информация имеет существенно различный характер и происхождение. Она может быть разделена на две категории: о прошлом развитии и современном состоянии объектов (экономические наблюдения и их обработка) и о будущем развитии объектов, включающую данные об ожидаемых изменениях их внутренних параметров и внешних условий (прогнозы). Вторая категория информации является результатом самостоятельных исследований, которые также могут выполняться посредством моделирования.

Методы экономических наблюдений и использования результатов этих наблюдений разрабатываются экономической статистикой. Поэтому стоит отметить только специфические проблемы экономических наблюдений, связанные с моделированием экономических процессов.

В экономике многие процессы являются массовыми; они характеризуются закономерностями, которые не обнаруживаются на основании лишь одного или нескольких наблюдений. Поэтому моделирование в экономике должно опираться на массовые наблюдения.

Другая проблема порождается динамичностью экономических процессов, изменчивостью их параметров и структурных отношений. Вследствие этого экономические процессы приходится постоянно держать под наблюдением, необходимо иметь устойчивый поток новых данных. Поскольку наблюдения за экономическими процессами и обработка эмпирических данных обычно занимают довольно много времени, то при построении математических моделей экономики требуется корректировать исходную информацию с учетом ее запаздывания.

Познание количественных отношений экономических процессов и явлений опирается на экономические измерения. Точность измерений в значительной степени предопределяет и точность конечных результатов количественного анализа посредством моделирования. Поэтому необходимым условием эффектного использования математического моделирования является совершенствование экономических измерителей. Применение математического моделирования заострило проблему измерений и количественных сопоставлений различных аспектов и явлений социально-экономического развития, достоверности и полноты получаемых данных, их защиты от намеренных и технических искажений.

В процессе моделирования возникает взаимодействие "первичных" и "вторичных" экономических измерителей. Любая модель народного хозяйства опирается на определенную систему экономических измерителей (продукции, ресурсов, элементов и т.д.). В то же время одним из важных результатов народнохозяйственного моделирования является получение новых (вторичных) экономических измерителей - экономически обоснованных цен на продукцию различных отраслей, оценок эффективности разнокачественных природных ресурсов, измерителей общественной полезности продукции. Однако эти измерители могут испытывать влияние недостаточно обоснованных первичных измерителей, что вынуждает разрабатывать особую методику корректировки первичных измерителей для хозяйственных моделей.

С точки зрения "интересов" моделирования экономики в настоящее время наиболее актуальными проблемами совершенствования экономических измерителей являются: оценка результатов интеллектуальной деятельности (особенно в сфере научно-технических разработок, индустрии информатики), построение обобщающих показателей социально-экономического развития, измерение эффектов обратных связей (влияние хозяйственных и социальных механизмов на эффективность производства).

Для методологии планирования экономики важное значение имеет понятие неопределенности экономического развития. В исследованиях по экономическому прогнозированию и планированию различают два типа неопределенности: "истинную", обусловленную свойствами экономических процессов, и "информационную", связанную с неполнотой и неточностью имеющейся информации об этих процессах. Истинную неопределенность нельзя смешивать с объективным существованием различных вариантов экономического развития и возможностью сознательного выбора среди них эффективных вариантов. Речь идет о принципиальной невозможности точного выбора единственного (оптимального) варианта.

В развитии экономики неопределенность вызывается двумя основными причинами. Во-первых, ход планируемых и управляемых процессов, а также внешние воздействия на эти процессы не могут быть точно предсказуемы из-за действия случайных факторов и ограниченности человеческого познания в каждый момент. Особенно характерно это для прогнозирования научно-технического прогресса, потребностей общества, экономического поведения. Во-вторых, общего сударственное планирование и управление не только не всеобъемлющи, но и не всесильны, а наличие множества самостоятельных экономических субъектов с особыми интересами не позволяет точно предвидеть результаты их взаимодействий. Неполнота и неточность информации об объективных процессах и экономическом поведении усиливают истинную неопределенность.

На первых этапах исследований по моделированию экономики применялись в основном модели детерминистского типа. В этих моделях все параметры предполагаются точно известными. Однако детерминистские модели неправильно понимать в механическом духе и отождествлять их с моделями, которые лишены всех "степеней выбора" (возможностей выбора) и имеют единственное допустимое решение. Классическим представителем жестко детерминистских моделей является оптимизационная модель народного хозяйства, применяемая для определения наилучшего варианта экономического развития среди множества допустимых вариантов.

В результате накопления опыта использования жестко детерминистских моделей были созданы реальные возможности успешного применения более совершенной методологии моделирования экономических процессов, учитывающих стохастичность и неопределенность. Здесь можно выделить два основных направления исследований. Во-первых, усовершенствуется методика использования моделей жестко детерминистского типа: проведение многовариантных расчетов и модельных экспериментов с вариацией конструкции модели и ее исходных данных; изучение устойчивости и надежности получаемых решений, выделение зоны неопределенности; включение в модель резервов, применение приемов, повышающих приспособляемость экономических решений к вероятным и непредвидимым ситуациям. Во-вторых, получают распространение модели, непосредственно отражающие стохастичность и неопределенность экономических процессов и использующие соответствующий математический аппарат: теорию вероятностей и математическую статистику, теорию игр и статистических решений, теорию массового обслуживания, стохастическое программирование, теорию случайных процессов.

Сложность экономических процессов и явлений и другие отмеченные выше особенности экономических систем затрудняют не только построение математических моделей, но и проверку их адекватности, истинности получаемых результатов.

В естественных науках достаточным условием истинности результатов моделирования и любых других форм познания является совпадение результатов исследования с наблюдаемыми фактами. Категория "практика" совпадает здесь с категорией "действительность". В экономике и других общественных науках понимаемые таким образом принцип "практика - критерий истины" в большей степени применим к простым дескриптивным моделям, используемым для пассивного описания и объяснения действительности (анализа прошлого развития, краткосрочного прогнозирования неуправляемых экономических процессов и т.п.).

Однако главная задача экономической науки конструктивна: разработка научных методов планирования и управления экономикой. Поэтому распространенный тип математических моделей экономики - это модели управляемых и регулируемых экономических процессов, используемые для преобразования экономической действительности. Такие модели называются нормативными. Если ориентировать нормативные модели только на подтверждение действительности, то они не смогут служить инструментом решения качественно новых социально-экономических задач.

Специфика верификации нормативных моделей экономики состоит в том, что они, как правило, "конкурируют" с другими, уже нашедшими практическое применение методами планирования и управления. При этом далеко не всегда можно поставить чистый эксперимент по верификации модели, устранив влияние других управляющих воздействий на моделируемый объект.

Ситуация еще более усложняется, когда ставится вопрос о верификации моделей долгосрочного прогнозирования и планирования (как дескриптивных, так и нормативных). Ведь нельзя же 10-15 лет и более пассивно ожидать наступления событий, чтобы проверить правильность предпосылок модели.

Несмотря на отмеченные усложняющие обстоятельства, соответствие модели фактам и тенденциям реальной экономической жизни остается важнейшим критерием, определяющим направления совершенствования моделей. Всесторонний анализ выявляемых расхождений между действительностью и моделью, сопоставление результатов по модели с результатами, полученными иными методами, помогают выработать пути коррекции моделей.

Значительная роль в проверке моделей принадлежит логическому анализу, в том числе средствами самого математического моделирования. Такие формализованные приемы верификации моделей, как доказательство существования решения в модели, проверка истинности статистических гипотез о связях между параметрами и переменными модели, сопоставления размерности величин и т.д., позволяют сузить класс потенциально "правильных" моделей.

Внутренняя непротиворечивость предпосылок модели проверяется также путем сравнения друг с другом получаемых с ее помощью следствий, а также со следствиями "конкурирующих" моделей.

Оценивая современное состояние проблемы адекватности математических моделей экономике, следует признать, что создание конструктивной комплексной методики верификации моделей, учитывающей как объективные особенности моделируемых объектов, так и особенности их познания, по-прежнему является одной из наиболее актуальных задач экономико-математических исследований.

Основы оптимального управления. Экономические процессы и их формализованное представление. Управление и управляющие воздействия. Общая постановка задачи оптимального управления.

Рассмотрим общую постановку задачи оптимизации экономических систем. Пусть имеется система, состояние которой может измениться в результате некоторого количества управляющих воздействий. Задавая эти воздействия, можно получить определенный процесс изменения состояния системы. При этом возникают две задачи: первая предполагает выбор таких воздействий на систему, чтобы происходящий процесс удовлетворял заданным условиям, такие процессы принято называть допустимыми), вторая задача - выбор из этого множества допустимых процессов наилучшего (оптимального) процесса.

Чтобы решать оптимизационные задачи с помощью математических методов, нужно сформулировать на математическом языке рассматриваемые процессы, ограничения, накладываемые на состояние системы и управляющие воздействия, а так же записать математические модели, описывающие эти процессы.

Введем некоторые понятия и обозначения. Рассмотрим множество M с элементами v$(\nu \in M)$, где ν - пары вида $\nu=(x, y)$, $(x \in X)$, $(y \in Y)$, X,Y - некоторые заданные множества. Проекцией множества M на множество X назовем подмножество M_x, обладающее тем свойством, что для каждого $(x \in M_x)$ существует такой элемент $y \in Y$, что пара $\nu = (x, y)$ содержится в множестве M.

Введем понятие сечения M^x множества M при данном x. Сечением M^x будем называть множество всех y, при которых пара $\nu = (x, y)$ принадлежит множеству M.

Введем понятие функционала, являющегося одним из главных в задачах оптимального управления. Будем говорить, что на множестве M задан функционал F, если известно правило, которое каждому элементу $(\nu \in M)$ ставит в соответствие определенное действительное число $F(\nu)$.

В общем виде задача оптимизации формулируется как задача отыскания минимального (или максимального) значения функционала $F(\nu)$ на множестве M.

Предположим, что требуется минимизировать функционал $F(\nu)$ на множестве M. Если решение этой задачи существует (обозначим его через $\bar{\nu}$), то $\bar{\nu}$ называется оптимальным элементом множества M, а величина $\bar{F} = F(\bar{\nu})$ - оптимальным значением функционала. Решения поставленной задачи F и $\bar{\nu}$ будем записывать следующим образом:

$$\bar{F} = F(\bar{\nu}) \to \min_{\nu \in M} F(\nu).$$

Аналогично формулируется задача о нахождении максимального значения функционала.

Введем понятия точной нижней и верхней границы функционала. Точной нижней границей функционала $F(\nu)$ на множестве M назовем такое число m, если:

1) $F(\nu) \geq m$ для любого $\nu \in M$;

2) существует последовательность $\{\bar{\nu}_s\} \in M$, на которой $F(\bar{\nu}_s) \to \mathrm{m}$.

Точная нижняя граница функционала обозначается

$$m = \inf_{\nu \in M} F(\nu).$$

Последовательность $\{\nu_s\}$ называется минимизирующей.

Точно так же определяется точная верхняя граница n функционала $F(\nu)$:

$$n = \sup_{\nu \in M} F(\nu)$$

Назовем функционал $F(\nu)$ ограниченным снизу (сверху) на множестве М, если существует такое число A, что при всех $\nu \in M$ $F(\nu) \geq A$ $(F(\nu) \leq A)$. Если функционал является ограниченным снизу (сверху), то решение задачи о нахождении его точной нижней (верхней) границы существует, т. е. имеет место следующая теорема (приведем без доказательства): Пусть на множестве М задан ограниченный снизу функционал $F(\nu)$. Тогда реализуется одна из двух возможностей:

1) Существуют элемент $\bar{\nu} \in M$ и число $\bar{F}$, при которых $F(\bar{\nu}) = F$ и $F(\nu) \geq \bar{F}$ при всех $\nu \in M$.

2) Существуют последовательность $\{\nu_s\}$ элементов множества М и число $\bar{F}$, удовлетворяющее условиям $F(\bar{\nu}_s) \geq \bar{F}$, $s \to \infty$ и $F(\nu) \geq \bar{F}$ при всех $\nu \in M$.

Данная теорема имеет важное значение для понимания сущности задачи оптимизации по двум причинам. Во-первых, она говорит о том, что постановка задачи об отыскании наименьшего (наибольшего) значения ограниченного снизу (сверху) функционала имеет смысл. Во-вторых, она объясняет природу решения такой задачи. А именно: решением будет либо определенный элемент $\bar{\nu}$ множества М, минимизирующий (максимизирующий) функционал $F(\nu)$, либо последовательность $\{\bar{\nu}_s\}$ элементов множества *M,* являющаяся минимизирующей (максимизирующей) последовательностью. В первом случае можно говорить о точном решении задачи, а во втором - о приближенном.

Задачи оптимизации управляемых процессов (оптимального управления) являются частными по отношению к сформулированной выше общей задаче оптимизации. Рассмотрим постанову задач оптимального управления.

Введем некоторые понятия.

Важнейшими из них являются понятия состояния системы и управления. Будем рассматривать системы, состояние которых может быть в любой момент времени определено вектором х *n*-мерного пространства с координатами $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ $x \in X$. Пространство *X* будем называть пространством состояний системы.

Так как система изменяется во времени, то ее поведение можно описать последовательностью состояний. Такую последовательность системы $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ называют ее траекторией.

Переменная *t* (называется аргументом процесса) может быть некоторым отрезком числовой прямой $(t \in [t_0, t_1])$ или отрезком натурального ряда $(t = t_0, t_0 + 1, ..., T)$. В первом случае процесс, происходящий в системе, называется непрерывным, во втором случае - многошаговым, а системы - соответственно непрерывными и дискретными.

Изменение состояния системы, т. е. процесс в ней, может происходить в результате управляющих воздействий. Будем рассматривать системы, управляющие воздействия в которых моделируются с помощью элементов *r*-мерного пространства *U:*

$$u = (u^1, u^2, ..., u^r),\ u \in U \subset R^r.$$

Управляющие воздействия могут задаваться в виде функций от *t,* т.е. $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^r(t))$.

На допустимые состояния системы x(t) и управления u(t) могут быть наложены ограничения. Рассмотрим множество троек (t,x,u) - совокупность (n+r+1) - мерных векторов в пространстве R^{n+r+1}. Тогда ограничения на состояние системы и управление в самом общем случае могут быть записаны в виде

$(t,x,u) \in V$,

где $V \in R^{n+r+1}$ - некоторая область (подмножество) рассматриваемого (n+r+1) - мерного пространства. Ограничения на величины x(t), u(t) в каждый фиксированный момент времени *t* могут быть заданы и в виде

$(x(t),u(t)) \in V^t$,

где V^t - сечение множества *V* при заданном значении *t*.

Пару функций $v = (x(t),u(t))$ назовем процессом. Между функциями x(t), u(t) имеется связь: как только задано управление u(t) системой, последовательность ее состояний (траектория системы) x(t) определяется однозначно. Связь между x(t) и u(t) моделируется по-разному в зависимости от того, является система непрерывной или дискретной.

Для непрерывных систем модели процессов задаются системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}^i = f^i(i,x^1,...,x^n,u^1,...,u^r), i = 1,2,...,n,$$

или в векторной форме

$$\dot{x}^i = f(i,x,u). \tag{2.1}$$

Пусть задано состояние, в котором система находилась в начальный момент t_0. Для простоты этот момент примем равным нулю, а момент окончания процесса t_1- равным *T*. Тогда аргумент процесса *t* изменяется в пределах $0 \le t \le T$, а начальным состоянием системы будет вектор

$$x(0) = (x_0^1, x_0^2,...,x_0^n), \tag{2.2}$$

где $x_0^1 = x^i(0)$ - начальное значение *i*-й координаты вектора состояния системы.

Проанализируем, каким образом модель отражает связь между управлениями и состоянием системы, изменяющимся под их воздействием. Пусть на промежутке $0 \le t \le T$ задано управление u(t). Подставляя его в правую часть системы (2.3), получим

$$\dot{x} = f(i,x,u(t)) \tag{2.3}$$

Имеем систему дифференциальных уравнений относительно неизвестной функции $x = (x^1, x^2,..., x^n)$. Решая ее с учетом начальных условий (2.2), получим x(t). Это решение и есть траектория, отвечающая заданному управлению u(t).

Модель дискретной управляемой системы имеет вид системы рекуррентных уравнений:

$$x^i(t+1) = f^i(t,x^1(t),...,x^n(t),u^1(t),...,u^r(t)),\ i = 1,2,...,n.$$

В векторной форме эту модель можно записать в виде

$$x^i(t+1) = f^i(t,x(t),u(t)),\ i = 1,2,...,n \tag{2.4}$$

Здесь *t* принимает значение t=0,1,…,T-1. Начальное значение $x(0)=x_0$ будем считать известным.

В дискретной системе, как и в непрерывной, задание управляющих воздействий u(t) при t=0,1,…,T-1 позволяет однозначно определить отвечающую им траекторию системы. При подстановке значения *u(t)* в правую часть (4.2.4) получаем систему уравнений, которая позволяет при известном значении состояния u(t) в момент времени *t* определить состояние x(t+1) в следующий момент времени. Так как в начальный момент t=0 состояние $x(0)=x_0$ известно, то, подставив его в правую часть (4.2.4), получим

$$x(1) = f(0,x_0,u(0)).$$

Подставляя затем найденное значение x(1) и t=1 в (2.4), так же найдем значение x(2). Продолжая этот процесс, через *T* шагов получим последнее искомое значение x(T).

Таким образом, и в дискретном случае уравнения модели (2.4) позволяют однозначно определить траекторию системы x(t), если задано управление u(t).

Следовательно, процесс $v = (x(t), u(t))$ должен удовлетворять следующим ограничениям:

1) $(x(t), u(t)) \in V^t$ при всех $0 \le t \le T$;

2) Пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет системе уравнений процесса:

а) системе (2.1) в непрерывном случае при $t \in [0, T]$;

б) системе (2.4) в дискретном случае при t=0,1,…,T-1;

3) Заданы начальные условия (2.2);

4) В непрерывном случае на функции x(t), u(t) накладываются некоторые дополнительные ограничения, связанные с применимостью употребляемых здесь математических записей. Функцию u(t) будем считать кусочно-непрерывной, а вектор-функцию x(t) - непрерывной и кусочно-дифференцируемой.

Процессы $v = (x(t), u(t))$, удовлетворяющие условиям 1) – 4), будем называть допустимыми. Таким образом, допустимый процесс - это управляющие воздействия u(t) и соответствующая им траектория системы x(t), удовлетворяющие перечисленным ограничениям.

Для постановки оптимизационной задачи необходимо ввести в рассмотрение функционал *F,* заданный на множестве *M.* Задача оптимального управления будет состоять в выборе элемента $\bar{v} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ множества *M*, на котором функционал *F* достигает минимального значения. Такой процесс называют оптимальным процессом, управление $\bar{u}(t)$ - оптимальным управлением, а траекторию $\bar{x}(t)$ оптимальной траекторией.

Функционал *F*, заданный на множестве допустимых процессов, описывает цель, согласно которой оптимизируется процесс.

В задачах оптимального управления для непрерывных систем будем рассматривать функционалы следующего вида:

$$F(\bar{v}) = \int_0^T f^0(t, x, u)dt + F(x(T)), \tag{2.5}$$

где $f^0(t, x, u) = f^0(t, x^1, ..., x^n, u^1, ..., u^r)$; $F(x) = F(x^1, ..., x^n)$ - заданные функции. Выражение (2.5) позволяет вычислить для каждого допустимого процесса $(x(t), u(t))$ определенное значение и тем самым задать функционал на множестве допустимых процессов. Для этого необходимо подставить *x(t),* u(t) вместо аргументов функции $f^0(t, x, u)$, которая становится функцией времени, после чего вычислить ее интеграл. Затем к значению интеграла прибавляем значение функции $F(x)$ при $x = x(T)$.

Функционал $F(v)$ состоит из двух частей: $\int_0^T f^0(t, x, u)dt$ и $F(x(T))$. Первое из этих слагаемых оценивает качество процесса на $(x(t), u(t))$ на всем промежутке $[0, T]$, второе слагаемое - качество конечного состояния системы. Иногда в задачах оптимального управления конечное состояние системы $x(T) = x_1$ задается. В этом случае второе слагаемое функционала (4.2.5) есть величина постоянная и, следовательно, не влияет на его минимизацию. Такие задачи называются задачами с фиксированным правым концом траектории.

Для задач оптимизации в дискретных системах функционал имеет вид

$$F(v) = \sum_{t=0}^{T-1} f^0(t, x(t), u(t)) + F(x(T)). \tag{2.6}$$

К функционалу (2.6) относятся все замечания и комментарии, сделанные к функционалу (2.5).

Таким образом задача оптимизации управляемых процессов сводится к постановке задачи о минимуме функционала (2.5) в непрерывном и (2.6) в дискретном случае на множестве *M* допустимых процессов $(x(t), u(t))$, удовлетворяющих ограничениям 1)-4).

Эта задача может решаться в двух вариантах:

1. Определить оптимальный процесс $\overline{v} = (\overline{x}(t), \overline{u}(t))$, чтобы

$F(v) =\rightarrow \min_{v \in M} f(v)$;

2. Определить минимизирующую последовательность $\{v\} = \{\overline{x}_s(t), \overline{u}_s(t)\} \in M$, чтобы

$F(\overline{v}_s) =\rightarrow \inf_{v \in M} F(v)$.

В теории оптимального управления термины «состояние» и «управление» имеют содержательный смысл. Он заключается в том, что, задавая управление u(t) , мы задаем и траекторию процесса x(t) , а изменяя управляющие воздействия u(t) - «управляем» процессом.

Из условия $v \in V^t$ можно выделить ограничения на состояние и управление:

$x(t) \in V_x^t$, $u(t) \in V^{tx}$,

Где V_x^t - проекция множества V^t на пространство *X;* V^{tx} - сечение множества V^t при данном x

В задачах оптимального управления область V_x^t возможных состояний часто является постоянной или совпадает со всем пространством, а область V^{tx} возможных управлений не зависит от *x.* Эти предположения выполняются в большом числе практических случаев, что упрощает решение задачи.

Выше предполагалось, что промежуток времени $0 \le t \le T$ фиксирован, т. е. задан момент *T* окончания процесса. Однако возможны постановки задач, где этот момент не задан, а определяется решением задачи. Это относится, в частности, к так называемым задачам о быстродействии, когда требуется перевести систему (2.4) из заданного начального состояния $x(0)=x_0$ в заданное конечное состояние $x(T) = x_1$, минимизируя при этом время T протекания процесса.

Классификация экономико-математических моделей. Примеры.

Математические модели экономических процессов и явлений более кратко можно назвать экономико-математическими моделями. Для классификации этих моделей используются разные основания.

По целевому назначению экономико-математические модели делятся на теоретико-аналитические, используемые в исследованиях общих свойств и закономерностей экономических процессов, и прикладные, применяемые в решении конкретных экономических задач (модели экономического анализа, прогнозирования, управления).

Экономико-математические модели могут предназначаться для исследования разных сторон народного хозяйства (в частности, его производственно-технологической, социальной, территориальной структур) и его отдельных частей. При классификации моделей по исследуемым экономическим процессам и содержательной проблематике можно выделить модели народного хозяйства в целом и его подсистем - отраслей, регионов и т.д., комплексы моделей производства, потребления, формирования и распределения доходов, трудовых ресурсов, ценообразования, финансовых связей и т.д.

Остановимся более подробно на характеристике таких классов экономико-математических моделей, с которыми связаны наибольшие особенности методологии и техники моделирования.

В соответствии с общей классификацией математических моделей они подразделяются на функциональные и структурные, а также включают промежуточные формы (структурно-функциональные). В исследованиях на народнохозяйственном уровне чаще применяются структурные модели, поскольку для планирования и управления большое значение имеют взаимосвязи подсистем. Типичными структурными моделями являются модели межотраслевых связей. Функциональные модели широко применяются в экономическом регулировании, когда на поведение объекта ("выход") воздействуют путем изменения "входа". Примером может служить модель поведения потребителей в условиях товарно-денежных отношений. Один и тот же объект может описываться одновременно и структурой, и функциональной моделью. Так, например, для планирования отдельной отраслевой системы используется структурная модель, а на народнохозяйственном уровне каждая отрасль может быть представлена функциональной моделью.

Выше уже показывались различия между моделями дескриптивными и нормативными. Дескриптивные модели отвечают на вопрос: как это происходит? или как это вероятнее всего может дальше развиваться?, т.е. они только объясняют наблюдаемые факты или дают вероятный прогноз. Нормативные модели отвечают на вопрос: как это должно быть?, т.е. предполагают целенаправленную деятельность. Типичным примером нормативных моделей являются модели оптимального планирования, формализующие тем или иным способом цели экономического развития, возможности и средства их достижения.

Применение дескриптивного подхода в моделировании экономики объясняется необходимостью эмпирического выявления различных зависимостей в экономике, установления статистических закономерностей экономического поведения социальных групп, изучения вероятных путей развития каких-либо процессов при неизменяющихся условиях или протекающих без внешних воздействий. Примерами дескриптивных моделей являются производственные функции и функции покупательского спроса, построенные на основе обработки статистических данных.

Является ли экономико-математическая модель дескриптивной или нормативной, зависит не только от ее математической структуры, но от характера использования этой модели. Например, модель межотраслевого баланса дескриптивна, если она используется для анализа пропорций прошлого периода. Но эта же математическая модель становится нормативной, когда она применяется для расчетов сбалансированных вариантов развития народного хозяйства, удовлетворяющих конечные потребности общества при плановых нормативах производственных затрат.

Многие экономико-математические модели сочетают признаки дескриптивных и нормативных моделей. Типична ситуация, когда нормативная модель сложной структуры объединяет отдельные блоки, которые являются частными дескриптивными моделями. Например, межотраслевая модель может включать функции покупательского спроса, описывающие поведение потребителей при изменении доходов. Подобные примеры характеризуют тенденцию эффективного сочетания дескриптивного и нормативного подходов к моделированию экономических процессов. Дескриптивный подход широко применяется в имитационном моделировании.

По характеру отражения причинно-следственных связей различают модели жестко детерминистские и модели, учитывающие случайность и неопределенность. Необходимо различать неопределенность, описываемую вероятностными законами, и неопределенность, для описания которой законы теории вероятностей неприменимы. Второй тип неопределенности гораздо более сложен для моделирования.

По способам отражения фактора времени экономико-математические модели делятся на статические и динамические. В статических моделях все зависимости относятся к одному моменту или периоду времени. Динамические модели характеризуют изменения экономических процессов во времени. По длительности рассматриваемого периода времени различаются модели краткосрочного (до года), среднесрочного (до 5 лет), долгосрочного (10-15 и более лет) прогнозирования и планирования. Само время в экономико-математических моделях может изменяться либо непрерывно, либо дискретно.

Модели экономических процессов чрезвычайно разнообразны по форме математических зависимостей. Особенно важно выделить класс линейных моделей, наиболее удобных для анализа и вычислений и получивших вследствие этого большое распространение. Различия между линейными и нелинейными моделями существенны не только с математической точки зрения, но и в теоретико-экономическом отношении, поскольку многие зависимости в экономике носят принципиально нелинейный характер: эффективность использования ресурсов при увеличении производства, изменение спроса и потребления населения при увеличении производства, изменение спроса и потребления населения при росте доходов и т.п. Теория "линейной экономики" существенно отличается от теории "нелинейной экономики". От того, предполагаются ли множества производственных возможностей подсистем (отраслей, предприятий) выпуклыми или же невыпуклыми, существенно зависят выводы о возможности сочетания централизованного планирования и хозяйственной самостоятельности экономических подсистем.

По соотношению экзогенных и эндогенных переменных, включаемых в модель, они могут разделяться на открытые и закрытые. Полностью открытых моделей не существует; модель должна содержать хотя бы одну эндогенную переменную. Полностью закрытые экономико-математические модели, т.е. не включающие экзогенных переменных, исключительно редки; их построение требует полного абстрагирования от "среды", т.е. серьезного огрубления реальных экономических систем, всегда имеющих внешние связи. Подавляющее большинство экономико-математических моделей занимает промежуточное положение и различаются по степени открытости (закрытости).

Для моделей народнохозяйственного уровня важно деление на агрегированные и детализированные.

В зависимости от того, включают ли народнохозяйственные модели пространственные факторы и условия или не включают, различают модели пространственные и точечные.

Таким образом, общая классификация экономико-математических моделей включает более десяти основных признаков. С развитием экономико-математических исследований проблема классификации применяемых моделей усложняется. Наряду с появлением новых типов моделей (особенно смешанных типов) и новых признаков их классификации осуществляется процесс интеграции моделей разных типов в более сложные модельные конструкции.

В виде примеров можно привести простейшие модели – транспортная задача, задача распределения ресурсов, и прочее.

Дескриптивные модели представляют собой в основном статистические модели (кривые роста, регрессионные линии), предназначенные для исследования объектов путем установления количественных соотношений между их характеристиками или параметрами.

Примеры:

1. Требуется определить зависимость потребления бытовых услуг от уровня дохода населения, обеспеченности бытовыми предметами на душу населения и других факторов потребления. Для этого составляют регрессионное уравнение

$$Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

где Y – потребление бытовых услуг на душу населения; $x_1, x_2, ..., x_n$ - факторы потребления; $a_1, a_2, ..., a_n$- коэффициенты уравнения. Если известны коэффициенты, то зависимость потребления бытовых услуг от принятых факторов считается определенной. Она отражает реальную ситуацию только в среднем, или в статистическом смысле.

2. Требуется определить количество заместителей директора для типовых структур управления предприятием. В этом случае проводят статистическое исследование численности указанной категории работников на существующих предприятиях и выводят степенное уравнение. При определенной специализации количество заместителей директора определяют по формуле

$$N_{зам} = 0,0871 * N_{пп}^{0,3} * \Phi_{о}^{0,1},$$

где $N_{пп}$ - численность промышленного персонала; $\Phi_{о}$ - основные и оборотные фонды.

Модели без управления применяются для изучения фактически существующих процессов, без вмешательства в их течение. К моделям без управления принадлежат модели экономики страны, расширенного воспроизводства, прогнозирования рождаемости, численности населения и т.д. Как правило, они дают общее представление об объекте. Процессы в моделируемом объекте отображаются в агрегированном виде и максимально обобщены. Поэтому модели без управления не дают полного представления об объекте моделирования и пригодны для изучения только самых общих изменений и тенденций. Модели без управления позволяют изучать явления в целом, комплексно и устанавливают общие фундаментальные свойства объектов и процессов.

Оптимизационные модели. Их появление и применение вызвано необходимостью решения практических задач экономики и техники. Особенностью оптимизационных моделей является целенаправленность решения и явная оценка эффективности (качества) различных вариантов решения. В отличие от моделей без управления оптимизационные модели предполагают выявление цели управления и построение целевой функции.

Суть получения оптимального решения на модели заключается в выборе из множества возможных решений одного, обеспечивающего максимальную эффективность.

Задача о пользе услуг. Построим оптимизационную модель, у которой некоторые переменные могут принимать только целые значения. Она называется целочисленной задачей линейного программирования. Допустим, перед человеком стоит вопрос, какими видами бытовых услуг - $y_1, y_2, ..., y_n$ - ему следует воспользоваться, чтобы максимально облегчить свой быт (сэкономить время). Предполагается, что сумма денег, которой он располагает равна *d*. Можно составить такой список:

$$\begin{array}{llllll} услуга & y_1 & стоит & d_1 & рублей\, и\, экономит & t_1 & часов \\ \cdots & y_2 & \cdots & d_2 & \cdots & t_2 & \cdots \\ \cdots & y_i & \cdots & d_i & \cdots & t_i & \cdots \\ \cdots & y_n & \cdots & d_n & \cdots & t_n & \cdots \end{array}$$

Класс оптимизационных моделей очень широк. Приведенные выше задачи относятся к линейному программированию. Существуют также модели динамического программирования, в которых требуется отыскать не одно, а несколько решений, например, решения принимаемые в различные моменты времени; экстремальные модели, позволяющие найти экстремальное значение одного или нескольких параметров объекта; гомеостатические модели, предназначенные для удержания параметров объекта в определенных пределах при наличии каких-либо возмущающих воздействий, и т.д.

Игровые модели. В некоторых ситуациях оптимизационные модели не могут быть применены непосредственно. В основном в тех ситуациях, когда система содержит подсистемы с разными и отчасти противоречивыми целями. Например, при описании целенаправленной деятельности коллективов людей, принятии политических и экономических решений в условиях неопределенности необходимо анализировать интересы и цели объектов, вступающих в контакт.

Случаи, когда для объекта моделирования характерно наличие противодействующих сил или неопределенности параметров, свойств или поведения, рассматриваются теорией игр. Это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта или неопределенности. Под конфликтом следует понимать любое разногласие, возникающее вследствие несовпадения интересов.

Большое значение имеет понятие неопределенности. Рассмотрим на примерах. При моделировании спроса на какой-либо товар могут быть известны только либо верхний и нижний пределы колебания спроса, либо статистическое распределение возможных значений спроса. Тогда в первом случае имеет место статистическая неопределенность, когда неизвестен даже закон распределения событий (значений спроса), а во втором – статистическая неопределенность, соответствующая случаю, при котором нельзя точно назвать значение спроса, хотя закон распределения известен. Неопределенности такого рода могут возникнуть в результате действий конкурента, удовлетворяющих какую-то часть спроса, или вследствие «игры природы» (изменения климатических, социальных и других условий). В любой игре имеются следующие элементы: множество всех игроков $I = \{1, 2, ..., n\}$, где i – произвольный игрок. Всякий игрок имеет в своем распоряжении множество стратегий поведения, или возможных действий, S_i.

Процесс игры заключается в выборе каждым игроком одной определенной стратегии $S_i \in S_i$, обеспечивающей игроку, например, максимальный выигрыш $H_i(\overline{S}_i)$. Здесь функция H_i называется *функцией выигрыша* игрока. Таким образом, налицо множество стратегий игроков называемое *ситуацией*, в которой каждый игрок или их группа (коалиция) имеет какой-либо выигрыш (проигрыш).

Игры бывают *бескоалиционными*, когда целью каждого участника является получение максимального индивидуального выигрыша, и *коалиционные*, связанные с обеспечением максимального выигрыша для всей коалиции игроков. Если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого при любой стратегии, то игра называется *антагонистической*. Если число стратегий одного игрока конечно, то такая игра носит название *матричной*.

Основные принципы определения оптимального поведения игроков сводятся к *принципам устойчивости*, которые состоят в том, чтобы отклонение от выбранной оптимальной стратегии уменьшает выигрыш игрока. Например, для бескоалиционной игры наилучшая стратегия поведения соответствует *принципу равновесия*, при котором ни одному игроку не выгодно менять стратегию, если у остальных игроков остаются неизменными.

Имитационные системы. Применение оптимизационных и игровых моделей в практических задачах встречает затруднение, когда заходит речь о моделировании «больших систем». К ним относятся социально-экономические системы, характеризуемые большим числом параметров, сложным переплетением интересов, неопределенной структурой и многочисленными целями. Объекты такого типа плохо поддаются формализации и математическому описанию на основе аппарата оптимизационных и игровых моделей. Сложность построения моделей «больших систем» заключается прежде всего в трудности постановки или формулирования задачи моделирования, которая требует комплексного системного описания наиболее важных сторон объекта.

Имитационное моделирование представляет собой систему, состоящую из совокупностей следующих элементов:

- **имитационных моделей**, отображающих определенные черты, свойства или части «большой системы» и позволяющих отвечать на вопрос: что будет при данных условиях и принятом решении (прямя задача моделирования)?
- **экспертов и экспертных процедур**, необходимых для анализа и оценки различных решений, исключения заведомо слабых решений, построения «сценариев» развития событий, выработки целей и критериев;
- **«языков ЭВМ»**, на основе которых осуществляется двусторонний контакт экспертов с ЭВМ. Эксперт задает исходные данные, меняет структуру моделей, формулирует вопросы ЭВМ при помощи специальных языков моделирования.

Имитационные модели представляют собой программы для компьютера, описывающие поведение компонентов системы и взаимодействие между ними. Расчеты при различных исходных данных позволяют имитировать динамические процессы, происходящие в реальной систем.

Математический аппарат, используемый для построения имитационных моделей, может быть самым разнообразным, например, теория массового обслуживания, теория агрегативных систем, теория автоматов, теория дифференциальных уравнений и т.д. Имитационные модели обычно требуют статистической обработки результатов моделирования, поэтому в основу всякой имитации входят методы теории вероятностей и математической статистики.

Экспертные процедуры используют коллективный опыт людей и предназначены для усреднения мнений и получения объективной оценки какого-либо события или явления. Например, для определения пропорций развития отраслевых групп обслуживания экспертам раздают анкеты определенного образца и прелагают ознакомиться со «сценарием» развития сферы обслуживания населения. «Сценарий» представляет собой прогноз определенного рода состояния развития общественных потребностей на длительную перспективу, включая численность населения, его доходы и расходы по статьям затрат, жилищные условия, внедрение в практику новой техники и технологий, совершенствование видов и форм обслуживания и т.п.

После ознакомления со «сценарием» эксперты выражают свое мнение в виде баллов. Затем анкеты собирают, и результаты экспертного анализа усредняют по каждой отраслевой группе и нормируют, т.е. баллы по каждой отраслевой группе делят на их общую сумму. Полученные нормированные баллы отражают желаемые пропорции развития отраслевых групп обслуживания. Можно осуществить учет компетентности эксперта, проставив ему соответствующий «вес», аналогичный баллам.

При оценке качества функционирования какой-либо имитационной модели эксперты определяют, какие параметры модели главные, а какие – второстепенные; устанавливают желаемые пределы изменения параметров; осуществляют выбор лучшего варианта модели. В задачи эксперта входит также изменение условий моделирования в тех случаях, когда после проведения модельных экспериментов выявляются новые неучтенные факторы.

Основы системного анализа. Формулировка проблемы. Определение целей. Формирование критериев. Генерирование альтернатив. Выбор. Интерпретации и анализ ожидаемых результатов.

Системный анализ – методология исследования сложных объектов как систем. Эта методология есть эффективным способом решения сложных, не совсем четко сформулированных проблем. В задачах системного анализа любой объект рассматривается не как единое целое, а как система взаимосвязанных частей (объектов), их взаимосвязей и характеристик. Системный анализ можно свести к уточнению сложной проблемы, её структурированности относительно совокупности задач, которые решаются путем детализации целей, построение методов достижения этих целей с помощью экономико-математических и других методов..

Системный анализ, зародившись в недрах общественных и биологических наук, перешел к "освоению" технических наук. Однако системы общественные и социальные, биологические и экологические, технические системы, информационные системы и системы научных знаний - это все же системы с совершенно различными характеристиками и даже с различной терминологией. Вследствие этого формулировки основных положений системного анализа применительно к конкретным классам систем иногда воспринимаются как слишком общие и даже иносказательные; с другой стороны, слишком специальная терминология конкретизирует, но одновременно и сильно сужает область применения выработанных формулировок. По-видимому, все же единственно разумным путем представляется "перевод" основных положений системного анализа с "общего" языка на язык конкретной области знаний, к которой относится исследуемый объект.

Первый шаг системного анализа - представление объекта в виде системы. Следующий шаг - системное исследование объекта в трех аспектах. В табл.2 отражены направления системного исследования и последовательность осуществления его этапов.

Наиболее успешно ***системный анализ*** применяют при изучении комплексных систем сложной структуры. Интуиции, квалификации одного человека, независимо от способностей и опыта, теперь уже недостаточно для управления сложными производственными системами. В дальнейшем руководителю придется решать проблемы не только в масштабе предприятия, но и в масштабе отрасли. Для принятия решений руководителю необходимо опираться на эмпирическую и фактическую информацию. Вместо экстраполяции прошлого опыта, как главного пути для принятия решений, теперь рекомендуется применять математические модели, информационные системы, составляющие основу системного анализа.

Системный анализ имеет сугубо практическую ориентацию. Однако, несмотря на множество различных примеров его удачного применения, пока не полностью разработана его методология. При решении каждой задачи выбирается своя методика, которая базируется на основах наук, законах логики и некоторых специфических процедурах. При этом можно выделить следующие основные особенности системного анализа:

- необходимость составления моделей исследуемой задачи (необязательно математической, можно физической или графической);
- успешное применение его для изучения многофакторных, комплексных систем, когда решения трудно достичь с помощью одного какого-либо раздела науки или простого соединения методов разных дисциплин;
- необходимость точной формулировки задачи: следует точно описать, какого результата, какой цели и при каких ограничениях стремятся достичь при решении задачи;
- постановка и решение проблемы для достижения желаемых результатов должны подчиняться целостному подходу: при решении частей проблемы все время необходимо иметь в виду цель решения всей системы.

Обоснование процесса решения проводится с помощью общей цели системы. Только при этом будет учтено явление синергизма- достижение более высокого результата действия системы по сравнению с аддитивным эффектом, т.е. по сравнению с суммой результатов действия отдельных элементов системы.

Задачи системного анализа можно разделить на две группы: *математику и логику.*

Математику системного анализа применяют при решении оптимизационных задач уже четко сформулированных, для чего составляются уравнения, описывающие связи множества переменных ограничений системы. При этом определяются количественные результаты функционирования системы с точки зрения выбранного критерия оптимальности.

Логика имеет компоненты, связанные с процессом принятия решений, выявлением таких проблем, как определение целей системы, путей их достижения, анализ внешних условий и ограничений.

Цель в системном анализе понимается как антипод проблемы: это то, что надо сделать для снятия проблемы (а решение - то, как это сделать).

Под критерием в системном анализе подразумевается способ сравнения альтернатив, т.е. любой их признак, значение которого можно зафиксировать количественно или качественно. В идеале построение критериев требует создания четкой иерархии целей с определением всех соотношений между ними; реально же может использоваться несколько критериев, описывающих одну цель по-разному и дополняющих друг друга.

При интеграции знаний наиболее существенны, на наш взгляд, 2 критерия "хорошей" ("правильной") интеграции:

- интегрировать любую информацию;
- исключать внутренние противоречия.

При моделировании помимо этих критериев следует использовать специфические критерии "хорошей" модели:

- универсальность - возможность описывать любое знание от отдельного факта до философского обобщения;
- связность - наличие закономерных причинных связей между событиями, процессами, явлениями;
- активность - возможность порождения нового знания, например, по схеме: факт - обобщенный факт - эмпирический закон - теоретический закон - новые факты.

Общий алгоритм:

- Определение конфигуратора.
- Постановка проблемы – отправной момент исследования. В исследовании сложной системы ему предшествует работа по структурированию проблемы.
- Расширение проблемы до проблематики, т.е. нахождение системы проблем, существенно связанных с исследуемой проблемой, без учета которых она не может быть решена.
- Выявление целей: цели указывают направление, в котором надо двигаться, чтобы поэтапно решить проблему.
- Формирование критериев. Критерий – это количественное отражение степени достижения системой поставленных перед ней целей. Критерий –это правило выбора предпочтительного варианта решения из ряда альтернативных. Критериев может быть несколько. Многокритериальность является способом повышения адекватности описания цели. Критерии должны описать по возможности все важные аспекты цели, но при этом необходимо минимизировать число необходимых критериев.
- Агрегирование критериев. Выявленные критерии могут быть объединены либо в группы, либо заменены обобщающим критерием.
- Генерирование альтернатив и выбор с использованием критериев наилучшей из них. Формирование множества альтернатив является творческим этапом системного анализа.
- Исследование ресурсных возможностей, включая информационные потоки и ресурсы.
- Выбор формализации (построение и использование моделей и ограничений) для решения проблемы.
- Оптимизация (для простых систем).
- Декомпозиция.
- Наблюдение и эксперименты над исследуемой системой.
- Построение системы.
- Использование результатов проведенного системного исследования.

Методы решения оптимизационных задач. Классическая постановка задачи оптимизации. Оптимизация функций. Оптимизация функционалов.

Общая постановка задачи.

К экономическим задачам оптимизационного типа относятся задачи, в которых требуется найти наилучшее или оптимальное решение при заданных условиях производства. Такие задачи называются задачами на максимум или минимум. Особенностью задач оптимизационного типа является многовариантность их решений, обусловленная следующими причинами: взаимозаменяемостью ресурсов; взаимозаменяемостью готовых видов продукции; существованием альтернативных технологий производства; неодинаковостью технико-экономических показателей даже однотипных хозяйственных субъектов.

Возможны два подхода к постановке оптимизационных задач: при первом подходе требуется получить максимальные конечные результаты при заданных условиях производства; при втором подходе требуется получить заданные конечные результаты при минимальных затратах ресурсов.

Математический инструментарий, позволяющий решать экономические задачи оптимального типа, называется программированием. Различают линейное и нелинейное программирование.

На практике наибольшее распространение получило линейное программирование.

Методы линейного программирования в математике известны под названием общей задачи линейного программирования.

Аналитическая формулировка общей задачи линейного программирования

Общая задача линейного программирования формулируется следующим образом:

Найти решение $\left\{\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \ldots \tilde{O}_{\mathrm{n}}\right\}$, позволяющее максимизировать или минимизировать целевую функцию $\mathrm{F} = \mathrm{C_1X_1} + \mathrm{C_2X_2} + \ldots + \mathrm{C_nX_n}$ при условиях

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \le b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n \le b_n \end{cases}$$

$$\tilde{O}_1 \ge 0;\ \tilde{O}_2 \ge 0;\ \ldots;\ \tilde{O}_{\mathrm{n}} \ge 0.$$

Это развернутая запись общей задачи линейного программирования.

Сокращенная запись этой модели имеет вид:

Найти решение $\left\{\mathrm{X_j}\right\}$, позволяющее максимизировать (минимизировать) функцию

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$X_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Вышеприведенные записи общей задачи линейного программирования называют аналитической формой записи.

Любое решение, удовлетворяющее условиям, называется допустимым решением. Допустимое решение систем неравенств, удовлетворяющее целевой функции, называется оптимальным решением. Такое решение единственно при заданных условиях.

Матричная форма записи общей задачи линейного программирования

$$F = CX \to \max(\min)$$

при ограничениях $AX \le B, \quad X \ge 0,$

где $\tilde{N} = \left(\tilde{n}_1,\, \tilde{n}_2, \ldots,\, \tilde{n}_{\text{n}}\right)$;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}..a_{1n} \\ a_{21}a_{22}..a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}..a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

где С – матрица-строка

А – матрица системы

Х – матрица-столбец переменных

В – матрица-столбец свободных членов

Векторная форма записи общей задачи линейного программирования

$$\text{F} = \text{CX} \rightarrow \max\left(\min\right)$$

при ограничениях

$$P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots + P_nX_n \le P,$$

$$X \ge 0,$$

где СХ – скалярное произведение векторов

$\tilde{N} = \left(\tilde{n}_1,\, \tilde{n}_2, \ldots,\, \tilde{n}_{\text{n}}\right)$ и $\tilde{O} = \left(\tilde{o}_1,\, \tilde{o}_2,\, \ldots,\, \tilde{o}_{\text{n}}\right)$,

векторы

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

состоят соответственно из коэффициентов при переменных и свободных членов (про функционал).

В общем случае задача оптимизации формулируется как задача отыскания *max* или *min* значения $I(v)$ для $v \in M$.

Под решением такой задачи понимается такое $\tilde{v} \in M$, что для остальных элементов $v \in M$ выполняется неравенство $I(v) \ge I(\tilde{v})$ или $I(v) \le I(\tilde{v})$ в зависимости от требований задачи. При этом:

v – некоторая функция

$I(v)$ – функционал вида $I(v) = \int\limits_a^b f(x)dx$

Многокритериальная оптимизация. Методы сведения многокритериальной задачи к однокритериальной. Метод уступок. Методы определения уровня предпочтений. Способы поиска паретовского множества альтернатив.

Многокритериальная оптимизация представляет собой минимизацию некого вектора целей F(x), на которой могут быть наложены дополнительные ограничения или предельные значения:

$$\begin{aligned} &minimize\ \ F(x) \\ &\quad x \in \Re^n \\ &\qquad G_i(x) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m_e \\ &\qquad G_i(x) \le 0 \qquad i = m_e + 1, \ldots, m \\ &\qquad x_l \le x \le x_u \end{aligned}$$

Отметим, что поскольку F(x) является неким вектором, то любые компоненты F(x) являюся конкурирующими и отсутствует некое единое решение поставленной задачи. Взамен этого, для описания характеристик целей вводится концепция множества точек неулучшаемых решений (так называемая оптимальность по Паретто). Неухудшаемое решение есть такое решение, в котором улучшение в одной из целей приводит к некому ослаблению другой. Для более точной формулировки данной концепции рассмотрим некую область допустимых решений Ω в параметрическом пространстве $x \in \Re^n$, которое удовлетворяет всем принятым ограничениям, т.е.

$$\Omega = \{x \in \Re^n\}$$

при ограничениях

$$g_i(x) = 0 \qquad i = 1,...,m_e$$

$$g_i(x) \le 0 \qquad i = m_e + 1,...,m$$

$$x_l \le x \le x_u$$

Отсюда возможно определить соответствующую область допустимых решений для пространства целевых функций Λ.

$\Lambda = \{y \in \Re^n\}$, где $y = F(x)$ при условии $x \in \Omega$

Точка неулучшаемого решения может быть определена как:

Определение. Точка $x^* \in \Omega$ является неулучшаемым решением, если для некоторой окрестности x^* нет некого Δx такого, что $(x^* + \Delta x) \in \Omega$ и

$$F_i(x^* + \Delta x) \le F_i(x^*), \quad i = 1,...,m$$

$$F_j(x^* + \Delta x) \le F_j(x^*) \quad \ddot{a}\ddot{e}\ddot{y}\ \acute{\imath}\ \mathring{a}\hat{e}\hat{\imath}\ \tilde{a}\hat{\imath}\ \ j$$

Стратегия взвешенных сумм

Данная стратегия взвешенных сумм преобразует многокритериальную задачу минимизации вектора F(x) в некую скалярную задачу путем построения неких взвешенных сумм для всех выбранных объектов.

$$\underset{x \in \Omega}{minimize} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i F_i(x)^2$$

Далее уже к данной задаче оптимизации уже может быть применен стандартный алгоритм оптимизации без наличия ограничений. В этом случае рассматриваются взвешенные коэффициенты для каждой из выбранных целей. Взвешенные коэффициенты необязательно должны напрямую соответствовать относительной значимости соответствующей цели или принимать во внимание взаимовлияние между конкретно выбранными целями. Более того, границы неулучшаемых решений могут быть и не достигнуты, так что определенные решения являются по существу недостижимыми.

Метод ε-ограничений

Некий определенный способ, который отчасти позволяет преодолеть проблему выпуклости метода взвешенных сумм, есть метод ε-ограничений. В этом случае осуществляется минимизация основной цели F_P и при представлении остальных целей в форме ограничений типа неравенств.

$$\underset{x \in \Omega}{minimize} \quad F_P(x)$$

при выполнении условия

$$F_i(x) \le \varepsilon_i, \quad i = 1,...,m, \quad i \ne p$$

Подобный подход позволяет определить некое количество неулучшаемых решений для случая вогнутой границы, что, по существу, является недоступным в методе взвешенных сумм, например, в точке искомого решения $F_1 = F_{1S}$ и $F_2 = \varepsilon_2$. Однако проблемой данного метода является подходящий выбор ε, который мог бы гарантировать допустимость некого решения.

Метод достижения цели.

Описанный далее метод представляет собой метод достижения цели Гембики. Данный метод включает в себя выражение для множества намерений разработчика $F^* = \{F_1^*, F_2^*, ...F_m^*\}$, которое связано с множеством целей $F(x) = \{F_1(x), F_2(x), ..., F_2(x)\}$. Такая формулировка задачи допускает, что цели могут быть или недо- или передостижимыми, и что дает разработчику возможность относительно точно выразить исходные намерения. Относительная степень недо- или передостижимости поставленных намерений контролируется посредством вектора взвешенных коэффициентов $\omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$ и может быть представлена как стандартная задача оптимизации с помощью следующей формулировки

$$\underset{\gamma\in\Re,\ x\in\Omega}{minimize}\quad \gamma$$

При условии, что

$$F_i(x) - \omega_i\gamma \le F_i^*, \quad i = 1, ..., m$$

Член $\omega_i\gamma$ вносит в данную задачу элемент *ослабления*, что, иначе говоря, обозначает жесткость заданного намерения. Весовой вектор w дает исследователю возможность достаточно точно выразить меру взаимосвязи между двумя целями. Например, установка весового вектора w как равного исходному намерению указывает на то, что достигнут тот же самый процент недо- или передостижимости цели F^*. Посредством установки в ноль отдельного весового коэффициента (т.е. $\omega_i = 0$) можно внести жесткие ограничения в поставленную задачу. Метод достижения цели обеспечивает подходящую интуитивную интерпретацию поставленной исследовательской задачи и которая, в свою очередь, является вполне разрешимой с помощью стандартных процедур оптимизации.

Гладкая оптимизация. Седловая точка. Условие Куна-Таккера. Двойственные задачи оптимизации.

Метод множителей Лагранжа позволяет отыскивать максимум или минимум функции при ограничениях-равенствах. Основная идея метода состоит в переходе от задачи на условный экстремум к задаче отыскания безусловного экстремума некоторой построенной функции Лагранжа. Пусть задана задача нелинейного программирования (НП) при ограничениях-равенствах вида

минимизировать $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (2.7)

при ограничениях

$$\begin{aligned} &h_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\\ &h_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &h_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Предположим, что все функции $f, h_1, h_2, ..., h_m$ – дифференцируемы. Введем набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ (число которых равняется числу ограничений), которые называются *множителями Лагранжа*, и составим функцию Лагранжа такого вида:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l h_l(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2.9)$$

Справедливо такое утверждение: для того чтобы вектор $x^2 = \{x_1^¤, x_2^¤, ..., x_n^¤\}$ являлся решением задачи (2.7) при ограничениях (2.8), необходимо, чтобы существовал такой вектор $\Lambda^¤ = \{\lambda_1^¤, \lambda_2^¤, ..., \lambda_m^¤\}$, что пара векторов удовлетворяла бы системе уравнений

$$\frac{\partial L(x^¤, \Lambda^¤)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

(5.2.10)

$$\frac{\partial L(x^¤, \Lambda^¤)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}; \qquad (2.10)$$

множителей Лагранжа, который состоит из следующих шагов.

Составляют функцию Лагранжа $L(x, \Lambda)$

Находят частные производные $\frac{\partial L(x, \Lambda)}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, n}$; $\frac{\partial L(x, \Lambda)}{\partial \lambda_i}$, $i = \overline{1, m}$;

Решают систему уравнений

$$\frac{\partial L(x, \Lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial L(x, \Lambda)}{\partial \lambda_i} = h_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \qquad (2.11)$$

и отыскивают точки $x^¤ = [x_f^¤]$, удовлетворяющие системе (2.11).

Найденные точки $x^¤$ дальше исследуют на максимум (или минимум).

Седловая точка и задача нелинейного программирования

Рассмотрим функцию Лагранжа $L(x, \Lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$.

Определение Пара векторов $x^\bullet \Lambda^\Diamond$ называется седловой точкой функции Лагранжа $L(x, \Lambda)$, если при всех $\Lambda \geq 0, \quad x \in R^{(n)}$ выполняется условие

$$L(x^\bullet, \Lambda) \leq L(x^\bullet, \Lambda^\Diamond) \leq L(x, \Lambda^\Diamond).$$

Данное выражение называют неравенством для седловой точки. Очевидно, что в седловой точке выполняется условие

$$L(x^\bullet, \Lambda^\Diamond) = \max_{\Lambda \geq 0} \min_{x \in R^n} L(x, \Lambda) = \min_{x \in R^n} \max_{\Lambda \geq 0} L(x, \Lambda).$$

Между понятием седловой точки функции Лагранжа $L(x, \Lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ и решением задачи НП существует взаимосвязь, которая устанавливается в следующей теореме.

Теорема 5.9. Пусть $f(x)$ и все $g_i(x)$ выпуклы и функции $g_i(x)$ удовлетворяют условию регулярности Слейтера. Вектор $x^\bullet$ является решением задачи НП тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\Lambda^\bullet \geq 0$, что

$$L(x^\bullet, \Lambda) \leq L(x^\bullet, \Lambda^\bullet) \leq L(x, \Lambda^\bullet)$$

и

$$\Lambda^{\bullet T} g(x^\bullet) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^\bullet g_i(x^\bullet) = 0.$$

Теорема Куна-Таккера. Пусть функции $g_i(x), i = \overline{1, m}$, имеют непрерывные частные производные на некотором открытом множестве R^n, содержащем точку $x^\bullet$. Если $x^\bullet$ является точкой минимума функции $f(x)$ при ограничениях $g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}$, удовлетворяющих условию регулярности в виде линейной независимости векторов $\nabla g_i(x^\bullet)$, то существуют такие неотрицательные множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, что

$$\nabla f(x^\bullet) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^\bullet) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^\bullet) = 0, \ \ \lambda_i \ge 0, \ \ i = \overline{1, m}.$$

Определим функцию Лагранжа следующим образом:

$$L(x, \Lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

Тогда теорему Куна-Таккера можно записать в виде

$$\nabla_x L(x, \Lambda) = 0,$$

$$\nabla_x L(x, \Lambda) = g(x) \le 0,$$

$$\Lambda^T \nabla_\lambda L(x, \Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) = 0.$$

Заметим, что множители Лагранжа λ_i в задаче НП с ограничениями-равенствами являются знаконеопределенными, тогда как в теореме Куна-Таккера они должны быть положительными.

Каждой задаче линейного программирования соответствует двойственная задача. Двойственная задача по отношению к исходной задаче строится по следующим правилам:

- Если исходная задача ставится на максимум, то двойственная ставится на минимум и наоборот.
- Коэффициенты целевой функции исходной задачи становятся правыми частями ограничений двойственной задачи. Правые части ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.
- Если А-матрица коэффициентов исходной задачи, то транспонированная матрица Т А будет матрицей коэффициентов двойственной задачи.
- В задаче на максимум все ограничения имеют знак $\le$ (=), а в задаче на минимум все ограничения имеют знак $\ge$.
- Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной задаче. Каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи. Если ограничение исходной задач имеет знак ($\ge$), то соответствующая переменная двойственной задачи неотрицательна. Если ограничение имеет знак (=), то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать положительные и отрицательные значения и наоборот.

Градиентные методы гладкой оптимизации. Общая идея градиентного спуска (подъема). Пропорциональный градиентный метод. Полношаговый градиентный метод. Метод сопряженных градиентов.

Методы отыскания экстремума, использующие производные, имеют строгое математическое обоснование. Известно, что при отыскании экстремума не существует лучшего направления, чем движение по градиенту.

Градиентом дифференцируемой функции f(x) в точке $x[0]$ называется n-мерный вектор $f(x[0])$, компоненты которого являются частными производными функции $f(x)$, вычисленными в точке $x[0]$, т. е.

$f'(x[0]) = (\partial f(x[0])/\partial x_1, \ldots, \partial f(x[0])/\partial x_n)^T$.

Этот вектор перпендикулярен к плоскости, проведенной через точку $x[0]$, и касательной к поверхности уровня функции $f(x)$, проходящей через точку $x[0]$.В каждой точке такой поверхности функция $f(x)$ принимает одинаковое значение. Приравнивая функцию различным постоянным величинам C_0, C_1, ... , получим серию поверхностей, характеризующих ее топологию

Вектор-градиент направлен в сторону наискорейшего возрастания функции в данной точке. Вектор, противоположный градиенту $(-f'(x[0]))$, называется *антиградиентом* и направлен в сторону наискорейшего убывания функции. В точке минимума градиент функции равен нулю. На свойствах градиента основаны методы первого порядка, называемые также градиентным и методами минимизации. Использование этих методов в общем случае позволяет определить точку локального минимума функции.

Очевидно, что если нет дополнительной информации, то из начальной точки $x[0]$ разумно перейти в точку x [1], лежащую в направлении антиградиента - наискорейшего убывания функции. Выбирая в качестве направления спуска $p[k]$ антиградиент $-f'(x[k])$ в точке $x[k]$, получаем итерационный процесс вида

$x[k+1] = x[k]-a_k f'(x[k])$, $a_k > 0$; k=0, 1, 2, ...

В координатной форме этот процесс записывается следующим образом:

$x_i[k+1]=x_i[k] - a_k \partial f(x[k])/\partial x_i$

$i = 1, ..., n$; k= 0, 1, 2,...

В качестве критерия останова итерационного процесса используют либо выполнение условия малости приращения аргумента $\| x[k+l] - x[k] \| <= e$, либо выполнение условия малости градиента

$\| f'(x[k+l]) \| <= g$,

Здесь e и g - заданные малые величины.

Возможен и комбинированный критерий, состоящий в одновременном выполнении указанных условий. Градиентные методы отличаются друг от друга способами выбора величины шага a_k.

При методе с постоянным шагом для всех итераций выбирается некоторая постоянная величина шага. Достаточно малый шаг a_k обеспечит убывание функции, т. е. выполнение неравенства

$f(x[k+1]) = f(x[k] - a_k f'(x[k])) < f(x[k])$.

Однако это может привести к необходимости проводить неприемлемо большое количество итераций для достижения точки минимума. С другой стороны, слишком большой шаг может вызвать неожиданный рост функции либо привести к колебаниям около точки минимума (зацикливанию). Из-за сложности получения необходимой информации для выбора величины шага методы с постоянным шагом применяются на практике редко.

Более экономичны в смысле количества итераций и надежности градиентные *методы с переменным шагом,* когда в зависимости от результатов вычислений величина шага некоторым образом меняется. Рассмотрим применяемые на практике варианты таких методов.

Метод наискорейшего спуска

При использовании метода наискорейшего спуска на каждой итерации величина шага a_k выбирается из условия минимума функции $f(x)$ в направлении спуска, т. е. $f(x[k]-a_k f'(x[k])) = \min_{a>0} f(x[k]-af'(x[k]))$.

Это условие означает, что движение вдоль антиградиента происходит до тех пор, пока значение функции $f(x)$ убывает. С математической точки зрения на каждой итерации необходимо решать задачу одномерной минимизации по a функции $j(a) = f(x[k]-af'(x[k]))$.

Алгоритм метода наискорейшего спуска состоит в следующем.

1. Задаются координаты начальной точки $x[0]$.

2. В точке $x[k]$, k = 0, 1, 2, ... вычисляется значение градиента $f'(x[k])$.

3. Определяется величина шага a_k, путем одномерной минимизации по a функции j$(a) = f(x[k] - af'(x[k]))$.

4. Определяются координаты точки $x[k+1]$:

$x_i[k+1] = x_i[k] – a_k f'_i(x[k]), i = 1 ,..., n.$

5. Проверяются условия останова стерационного процесса. Если они выполняются, то вычисления прекращаются. В противном случае осуществляется переход к п. 1.

В рассматриваемом методе направление движения из точки $x[k]$ касается линии уровня в точке $x[k+1]$ (Рис. 2.9). Траектория спуска зигзагообразная, причем соседние звенья зигзага ортогональны друг другу. Действительно, шаг a_k выбирается путем минимизации по a функции $\varphi(a) = f(x[k] - af'(x[k]))$. Необходимое условие минимума функции dj$(a)/da = 0$. Вычислив производную сложной функции, получим условие ортогональности векторов направлений спуска в соседних точках:

dj$(a)/da = -f'(x[k+1]f'(x[k]) = 0.$

Градиентные методы сходятся к минимуму с высокой скоростью (со скоростью геометрической прогрессии) для гладких выпуклых функций. У таких функций наибольшее M и наименьшее m собственные значения матрицы вторых производных (матрицы Гессе)

$$H(x)=\left|\begin{matrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{matrix}\right|$$

мало отличаются друг от друга, т. е. матрица $H(x)$ хорошо обусловлена. Напомним, что собственными значениями l$_i$, i =1, …, n, матрицы являются корни характеристического уравнения

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{matrix}\right\| = 0$$

Однако на практике, как правило, минимизируемые функции имеют плохо обусловленные матрицы вторых производных $(m/M \ll 1)$. Значения таких функций вдоль некоторых направлений изменяются гораздо быстрее (иногда на несколько порядков), чем в других направлениях. Их поверхности уровня в простейшем случае сильно вытягиваются, а в более сложных случаях изгибаются и представляют собой овраги. Функции, обладающие такими свойствами, называют *овражными.* Направление антиградиента этих функций (см. Рис. 2.10) существенно отклоняется от направления в точку минимума, что приводит к замедлению скорости сходимости.

Метод сопряженных градиентов

Рассмотренные выше градиентные методы отыскивают точку минимума функции в общем случае лишь за бесконечное число итераций. Метод сопряженных градиентов формирует направления поиска, в большей мере соответствующие геометрии минимизируемой функции. Это существенно увеличивает скорость их сходимости и позволяет, например, минимизировать квадратичную функцию

$f(x) = (x, Hx) + (b, x) + a$

с симметрической положительно определенной матрицей H за конечное число шагов n, равное числу переменных функции. Любая гладкая функция в окрестности точки минимума хорошо аппроксимируется квадратичной, поэтому методы сопряженных градиентов успешно применяют для минимизации и неквадратичных функций. В таком случае они перестают быть конечными и становятся итеративными.

По определению, два n-мерных вектора x и y называют *сопряженными* по отношению к матрице H (или H-сопряженными), если скалярное произведение $(x, Hy) = 0$. Здесь H - симметрическая положительно определенная матрица размером nxn.

Одной из наиболее существенных проблем в методах сопряженных градиентов является проблема эффективного построения направлений. Метод Флетчера-Ривса решает эту проблему путем преобразования на каждом шаге антиградиента $-f(x[k])$ в направление $p[k]$, H-сопряженное с ранее найденными направлениями $p[0], p[1], ..., p[k-1]$. Рассмотрим сначала этот метод применительно к задаче минимизации квадратичной функции.

Направления $p[k]$ вычисляют по формулам:

$p[k] = -f'(x[k])+b_{k-1}p[k-1], k >= 1;$

$p[0] = -f'(x[0]).$

Величины b_{k-1} выбираются так, чтобы направления $p[k]$, $p[k-1]$ были H-сопряженными:

$(p[k], Hp[k-1])= 0.$

В результате для квадратичной функции

$$\beta_{k-1} = \frac{(f'(x[k]), f'(x[k]))}{(f'(x[k-1]), f'(x[k-1]))},$$

итерационный процесс минимизации имеет вид

$x[k+1] =x[k] +a_k p[k],$

где $p[k]$ - направление спуска на k-м шаге; a_k - величина шага. Последняя выбирается из условия минимума функции $f(x)$ по a в направлении движения, т. е. в результате решения задачи одномерной минимизации:

$$f(x[k] - a_k p[k]) = \min_{a \geq 0} f(x[k] - ap[k]).$$

Для квадратичной функции

$$a_k = -\frac{(f'(x[k]), p[k])}{(p[k], Hp[k])}$$

Алгоритм метода сопряженных градиентов Флетчера-Ривса состоит в следующем.

1. В точке $x[0]$ вычисляется $p[0] = -f'(x[0])$.
2. На k-м шаге по приведенным выше формулам определяются шаг a_k. и точка $x[k+1]$.
3. Вычисляются величины $f(x[k+1])$ и $f'(x[k+1])$.
4. Если $f'(x[k+1]) = 0$, то точка $x[k+1]$ является точкой минимума функции $f(x)$. В противном случае определяется новое направление $p[k+1]$ из соотношения

$$p[k+1] = -f'(x[k+1]) + \frac{(f'(x[k+1]), f'(x[k+1]))}{(f'(x[k]), f'(x[k]))} p[k]$$

и осуществляется переход к следующей итерации. Эта процедура найдет минимум квадратичной функции не более чем за n шагов. При минимизации неквадратичных функций метод Флетчера-Ривса из конечного становится итеративным. В таком случае после $(n+1)$-й итерации процедуры 1-4 циклически повторяются с заменой $x[0]$ на $x[n+1]$, а вычисления заканчиваются при $\| f'(x[k]) \| < \varepsilon$, где ε - заданное число. При этом применяют следующую модификацию метода:

$$x[k+1] = x[k] + a_k p[k],$$
$$p[k] = -f'(x[k]) + b_{k-1} p[k-1],$$
$$k >= 1; p[0] = -f'(x[0]);$$
$$f(x[k] + a_k p[k]) = \min_{a \geq 0} f(x[k] + ap[k]);$$
$$\beta_{k-1} = \begin{cases} \dfrac{(f'(x[k]), f'(x[k]) - f'(x[k-1]))}{(f'(x[k]), f'(x[k]))}, & k \notin I \\ 0, \ k \in I \end{cases}.$$

Здесь I- множество индексов: $I = \{0, n, 2n, 3n, ...\}$, т. е. обновление метода происходит через каждые n шагов.

Геометрический смысл метода сопряженных градиентов состоит в следующем (Рис. 2.11). Из заданной начальной точки $x[0]$ осуществляется спуск в направлении $p[0] = -f'(x[0])$. В точке $x[1]$ определяется вектор-градиент $f'(x[1])$. Поскольку $x[1]$ является точкой минимума функции в направлении $p[0]$, то $f'(x[1])$ ортогонален вектору $p[0]$. Затем отыскивается вектор $p[1]$, H-сопряженный к $p[0]$. Далее отыскивается минимум функции вдоль направления $p[1]$ и т. д.

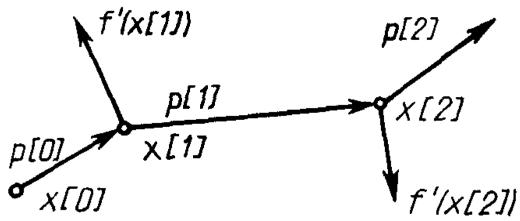


Рис. 2.11. Траектория спуска в методе сопряженных градиентов

Методы сопряженных направлений являются одними из наиболее эффективных для решения задач минимизации. Однако следует отметить, что они чувствительны к ошибкам, возникающим в процессе счета. При большом числе переменных погрешность может настолько возрасти, что процесс придется повторять даже для квадратичной функции, т. е. процесс для нее не всегда укладывается в n шагов.

Метод линейной оптимизации Гомори

Существует ряд задач оптимального планирования, в которых переменные могут принимать лишь целочисленные значения. Такие задачи связаны с определением количества единиц неделимой продукции, числа станков при загрузке оборудования, численности работников в структурных подразделениях предприятия и т.д. Достаточно часто возникают задачи с так называемыми булевыми переменными, решениями которых являются суждения типа “да-нет”. Если функция и ограничения в таких задачах линейны, то мы говорим о задаче линейного целочисленного программирования.

Задача линейного целочисленного программирования формулируется следующим образом: *найти такое решение (план)*

$X = (X_1, X_2, ..., X_n)$,

при котором линейная функция

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

принимает максимальное или минимальное значение при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n$$

x_j – öåëû å ÷èñëà.

Одним из методов решения задач линейного целочисленного программирования является **метод Гомори.** Сущность метода заключается в построении ограничений, отсекающих нецелочисленные решения задачи линейного программирования, но не отсекающих ни одного целочисленного плана.

Рассмотрим алгоритм решения задачи линейного целочисленного программирования этим методом.

1. Решаем задачу симплексным методом без учета условия целочисленности. Если все компоненты оптимального плана целые, то он является оптимальным и для задачи целочисленного программирования. Если обнаруживается неразрешимость задачи, то и неразрешима задача целочисленного программирования.
2. Если среди компонент оптимального решения есть нецелые, то к ограничениям задачи добавляем новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

- оно должно быть линейным;

- должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;

- не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Для построения ограничения выбираем компоненту оптимального плана ***с наибольшей дробной частью*** и по соответствующей этой компоненте k-й строке симплексной таблицы записываем ограничение Гомори:

$$f_k = \sum_{j \notin \text{Á}} f_{kj} x_j - S^*, \quad S^* \geq 0,$$

где $f_k = x_j - [x_j];$

$f_{kj} = z_{kj} - [z_{kj}];$

S^* - новая переменная;

$[x_j]$, $[z_{kj}]$ -ближайшее целое, не превосходящее x_j и z_{kj} соответственно.

3. Составленное ограничение добавляем к имеющимся в симплексной таблице, тем самым получаем расширенную задачу. Чтобы получить опорный план этой задачи, необходимо ввести в базис тот вектор, для которого величина $\left|\frac{\Delta_j}{f_{kj}}\right|$ минимальна. И если для этого вектора величина $\theta = \min\limits_{z_{ij}>0} \frac{x_j}{z_{ij}}$ получается по дополнительной строке, то в следующей симплексной таблице будет получен опорный план. Если же величина θ не соответствует дополнительной строке, то необходимо переходить к М-задаче (вводить искусственную переменную в ограничение Гомори).
4. Решаем при помощи обычных симплексных преобразований полученную задачу. Если решение этой задачи приводит к целочисленному оптимальному плану, то искомая задача решена. Если мы получили нецелочисленное решение, то снова добавляем одно дополнительное ограничение, и процесс вычислений повторяется. Проделав конечное число итераций, либо получаем оптимальный план задачи целочисленного программирования, либо устанавливаем ее неразрешимость.

Замечания:

1. Если дополнительная переменная S^* вошла в базис, то после пересчета какого-либо последующего плана соответствующие ей строку и столбец можно удалить (тем самым сокращается размерность задачи).
2. Если для дробного x_j обнаружится целочисленность всех коэффициентов соответствующего уравнения (строки), то задача не имеет целочисленного решения.

Примеры решения задач оптимизации методом Гомори

Задача: Для приобретения нового оборудования предприятие выделяет 19 ден.ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 16 кв.м. Предприятие может заказать оборудование двух видов: машины типа “А” стоимостью 2 ден.ед., требующие производственную площадь 4 кв.м и обеспечивающие производительность за смену 8 т продукции, и машины типа “В” стоимостью 5 ден.ед., занимающие площадь 1 кв.м и обеспечивающие производительность за смену 6 т продукции.

Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность.

Решение: Обозначим через x_1, x_2 количество машин соответственно типа “А” и “В”, через L - их общую производительность. Тогда математическая модель задачи:

$max\ L = 8x_1 + 6x_2$

при ограничениях

$$2x_1 + 5x_2 \le 19;$$
$$4x_1 + x_2 \le 16;$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 7$$

x_1 , x_2 - целые числа

решаем задачу симплексным методом без учета целочисленности.

C_0	$Б_0$	X_0	8	6	-	-
			X1	X2	X3	X4
-	X3	19	2	5	1	-
-	X4	16	4	1	-	1
zi		0	-	-	-	-
Δi			-8	-6	-	-

C_1	$Б_1$	X_1	8	6	-	-
			X1	X2	X3	X4
-	X3	11	-	9/2	1	-1/2
8	X1	4	1	1/4	-	1/4
zi		32	80	2	-	2
Δi			-	-4	-	2

C_2	$Б_2$	X_2	8	6	-	-	-
			X1	X2	X3	X4	S1
6	X2	22/9	-	1	2/9	-1/9	-
8	X1	61/18	1	-	-1/18	5/18	-
zi		376/9	8	6	8/9	14/9	-
Δi			-	-	8/9	14/9	-
		4/9	-	-	2/9	8/9	-1

Получен оптимальный нецелочисленный план $X_{опт}$= (61/18;22/9). L_{max} = 376/9.

Т.к. у компоненты плана x_2 максимальная дробная часть: max(4/9;7/18) = 4/9, то дополнительное ограничение записываем по первой строке.

$$22/9 - [22/9] = (2/9 - [2/9])x_3 + (-1/9 - [-1/9])x_4 - S_1,\ S_1 \ge 0$$

$$22/9 - 2 = (2/9 - 0)x_3 + (-1/9 - (-1))x_4 - S_1,\ S_1 \ge 0$$

$4/9 = 2/9x_3 + 8/9x_4 - S_1,\ S_1 \ge 0$ - *первое ограничение Гомори.*

Составленное ограничение дописываем к имеющимся в симплексной таблице.

После построения дополнительного ограничения имеем новую задачу линейного программирования, в которой 3 ограничения. Для получения опорного плана этой задачи необходимо найти третий базисный вектор. Для этого определяем:

$\min \dfrac{\Delta_j}{f_{kj}} = \min\left(\dfrac{8/9}{2/9}; \dfrac{14/9}{8/9}\right) = 7/4$, следовательно, в базис вводим вектор x_4.

Рассчитываем величину $\theta = \min\limits_{z_{ij}>0} \dfrac{x_j}{z_{ij}} = \min\left(-; \dfrac{61/18}{5/18}; \dfrac{4/9}{8/9}\right) = 1/2$. Минимальное значение θ получено по дополнительной строке, значит, не прибегая к искусственной переменной, получаем опорный план расширенной задачи.

C3	Б3	X3	8	6	-	-	-	-
			X1	X2	X3	X4	S1	S2
6	X2	5/2	-	1	1/4	-	-1/8	-
8	X1	13/4	1	-	-1/8	-	5/16	-
-	X4	1/2	-	-	1/4	1	-9/8	-
zi		41	8	6	1/2	-	7/4	-
Δi			-	-	1/2	-	7/4	-
		1/2	-	-	1/4	-	7/8	-1

Найденный план оптимален, но нецелочисленный. Строим новое ограничение Гомори.

Т.к. максимальная дробная часть среди компонент плана равна 1/2, записываем дополнительное ограничение по первой строке (можно и по третьей).

$5/2 - [5/2] = (1/4 - [1/4])x_3 + (-1/8 - [-1/8])S_1 - S_2,\ S_2 \geq 0$

$1/2 = 1/4x_3 + 7/8S_1 - S_2,\ S_2 \geq 0$ - второе ограничение Гомори

Это ограничение добавляем в последнюю симплексную таблицу.

Получили задачу, в которой 4 ограничения, следовательно, в базисе должно быть 4 единичных вектора.

Определяем вектор, вводимый в базис: $\min\left(\dfrac{1/2}{1/4}; \dfrac{7/4}{7/8}\right) = 2$. Можно ввести либо x_3, либо S_1. Введем вектор S_1.

Тогда значение $\theta = \min\left(-; \dfrac{13/4}{5/16}; -; \dfrac{1/2}{7/8}\right) = 4/7$ соответствует дополнительному ограничению.

C4	Б4	X4	8	6	-	-	-	-	-
			X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3
6	X2	18/7	-	1	2/7	-	-	-1/7	-
8	X1	43/14	1	-	-3/14	-	-	5/14	-
-	X4	8/7	-	-	4/7	1	-	-9/7	-
-	S1	4/7	-	-	2/7	-	1	-8/7	-
zi		40	8	6	-	-	-	2	-
Δi			-	-	-	-	-	2	-
		4/7	-	-	2/7	-	-	6/7	-1

Получаем новый оптимальный нецелочисленный план. Учитывая замечание 1, вычеркиваем строку и столбец, соответствующие переменной S_1.

В полученном плане максимальную дробную часть имеет компонента x_2, поэтому записываем дополнительное ограничение по первой строке.

$4/7 = 2/7x_3 + 6/7S_2 - S_3,\quad S_3 \geq 0$ - третье ограничение Гомори.

Определяем вектор, вводимый в базис: $\min\left(\frac{0}{2/7};\frac{2}{6/7}\right)=0$. Это вектор x_3. Минимальное значение θ = 2, что соответствует дополнительной строке.

После проведения очередных симплексных преобразований получили:

C_5	$Б_5$	X_5	8	6	-	-	-	-	-
			X1	X2	X3	X4	S2	S3	S4
6	X2	2	-	1	-	-	-1	1	-
8	X1	7/2	1	-	-	-	1	-3/4	-
-	X4	-	-	-	-	1	-3	2	-
-	X3	2	-	-	1	-	3	-7/2	-
zi		40	8	6	-	-	-	2	-
Δi			-	-	-	-	-	2	-
		4/7	-	-	-	-	-	1/4	-1

План X_5 - оптимальный нецелочисленный.

Дополнительное ограничение запишем по второй строке:

$1/2 = 1/4S_3 - S_4,\ S_4 \geq 0$ - четвертое ограничение Гомори.

Т.к. базисной компонентой может быть S_3, определяем величину $\theta=\min\left(\frac{2}{1};-;\frac{0}{2};-;\frac{1/2}{1/4}\right)=0$.

Минимальное значение получилось по 3 строке, а не по строке Гомори, следовательно, переходим к М-задаче: введем дополнительную переменную x_5 в ограничение Гомори.

C_5	$Б_5$	X_5	8	6	-	-	-	-	-	-M
			X1	X2	X3	X4	S2	S3	S4	X5
6	X2	2	-	1	-	-	-1	1	-	-
8	X1	7/2	1	-	-	-	1	-3/4	-	-
-	X4	-	-	-	-	1	-3	2	-	-
-	X3	2	-	-	1	-	3	-7/2	-	-
-M	X5	1/2	-	-	-	-	-	1/4	-1	1
zi		40-M/2	8	6	-	-	2	-M/4	M	-M
Δi			-	-	-	-	2	-M/4	M	-

C_6	$Б_6$	X_6	8	6	-	-	-	-	-	-M
			X1	X2	X3	X4	S2	S3	S4	X5
6	X2	2	-	1	-	-1/2	1/2	-	-	-
8	X1	7/2	1	-	-	3/8	-1/8	-	-	-
-	S3	-	-	-	-	1/2	-3/2	1	-	-
-	X3	2	-	-	1	7/4	-9/4	-	-	-
-M	X5	1/2	-	-	-	-1/8	3/8	-	-1	1
zi		40-M/2	8	6	-	M/8	2-3M/8	-	M	-M
Δi			-	-	-	M/8	2-3M/8	-	M	-

C_7	$Б_7$	X_7	8	6	-	-	-	-	-
			X1	X2	X3	X4	S2	S4	S5
6	X2	4/3	-	1	-	-1/3	-	4/3	-
8	X1	11/3	1	-	-	1/3	-	-1/3	-
-	X3	5	-	-	1	1	-	-6	-
-	S2	4/3	-	-	-	-1/3	1	-8/3	-
zi		112/3	8	6	-	2/3	-	16/3	-
Δi			-	-	-	2/3	-	16/3	-
		2/3	-	-	-	1/3	-	2/3	-1

Дробная часть = max(1/3; 2/3) = 2/3 , следовательно, дополнительное ограничение записываем по второй строке.

2/3 = 1/3x₄ + 2/3S₄ - S₅ ,S₅≥ 0 - пятое ограничение Гомори.

Вектор, вводимый в базис: $\min\left(\frac{2/3}{1/3};\frac{16/3}{2/3}\right)=2$, вводим x_4.

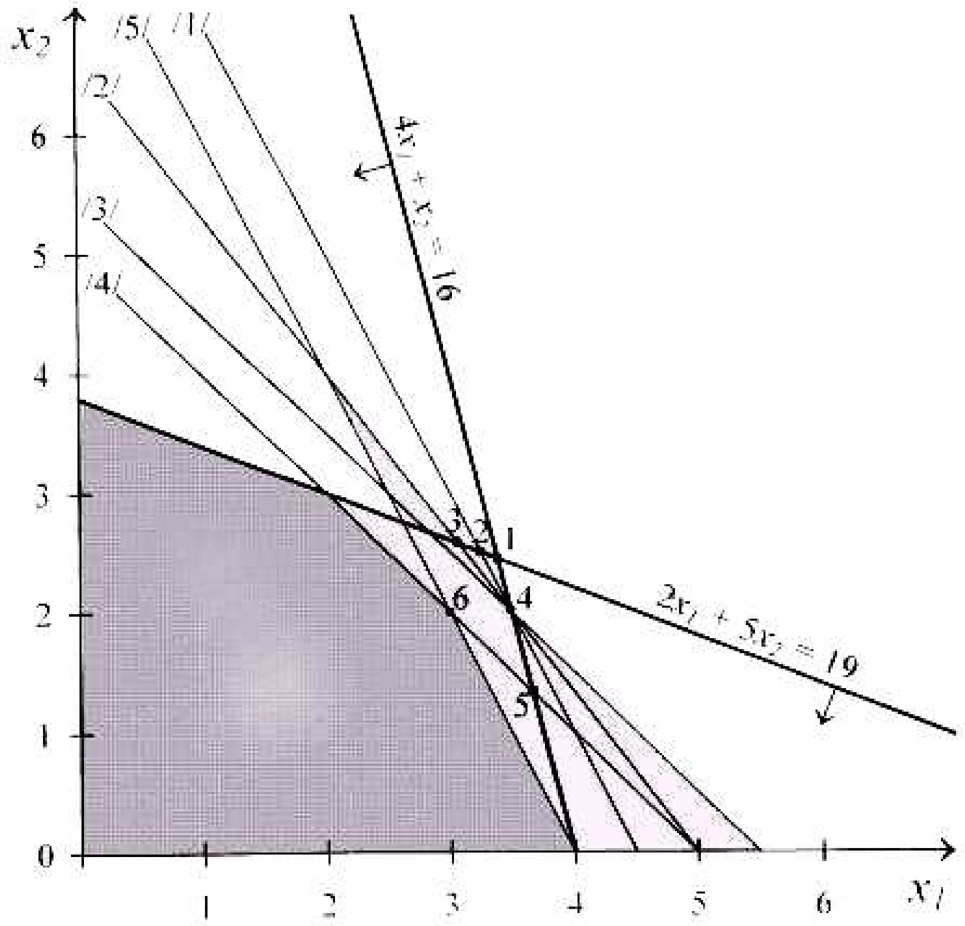
Тогда значение $\theta=\min\left(-;\frac{11/3}{1/3};\frac{5}{1};\frac{2/3}{1/3}\right)=2$ соответствует строке Гомори.

C_8	$Б_8$	X_8	8	6	-	-	-	-
			X1	X2	X3	X4	S4	S5
6	X2	2	-	1	-	-	2	-1
8	X1	3	1	-	-	-	-1	1
-	X3	3	-	-	1	-	-8	3
-	X4	2	-	-	-	1	2	-3
zi		36	8	6	-	-	4	2
Δi			-	-	-	-	4	2

План X_8 = (3; 2; 3; 2) - оптимальный целочисленный. L_{max} = 36.

Экономическая интерпретация: согласно полученному решению предприятию необходимо закупить 3 машины типа "А" и 2 машины типа "В". При этом будет достигнута максимальная производительность работы оборудования, равная 36 т продукции за смену. Полученную экономию денежных средств в размере 3 ден.ед. можно будет направить на какие-либо иные цели, например, на премирование рабочих, которые будут заниматься отладкой полученного оборудования. На излишнюю площадь в 2 кв.м можно поставить ящик с цветами.

Геометрическая интерпретация метода Гомори: строим множество планов (см. рисунок). В точке 1 - оптимальный нецелочисленный план.



<u>*Первое ограничение Гомори:*</u> $2/9x_3 + 8/9x_4 - S_1 = 4/9,\ S_1 \ge 0$
Из первого ограничения задачи: $x_3 = 19 - 2x_1 - 5x_2$
Из второго ограничения задачи: $x_4 = 16 - 4x_1 - x_2$

Подставляем x_3 и x_4 в первое ограничение Гомори и после преобразований получаем: $4x_1 + 2x_2 + S_1 = 18,\ S_1 \ge 0.$

Отсюда имеем: $4x_1 + 2x_2 \ge 18$. Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 1. Новый оптимальный нецелочисленный план - точка 2.

<u>*Второе ограничение Гомори :*</u> $1/4x_3 + 7/8S_1 - S_2 = 1/2,\ S_2 \ge 0$
Из первого ограничения задачи: $x_3 = 19 - 2x_1 - 5x_2$
Из первого ограничения Гомори: $S_1 = 18 - 4x_1 - 2x_2$

Получаем: $4x_1 + 3x_2 + S_2 = 20,\ S_2 \ge 0$ или $4x_1 + 3x_2 \ge 20$. Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 2. Новый оптимальный нецелочисленный план - точка 3.

<u>*Третье ограничение Гомори :*</u> $2/7x_3 + 6/7S2 - S_3 = 4/7,\ S_3 \ge 0$
Из первого ограничения задачи: $x_3 = 19 - 2x_1 - 5x_2$
Из второго ограничения Гомори: $S_2 = 20 - 4x_1 - 3x_2$

После подстановки x_3 *и* S_2 в третье ограничение Гомори получаем: $4x_1 + 4x_2 \ge 22$. Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 3. Новый оптимальный нецелочисленный план - точка 4.

<u>*Четвертое ограничение Гомори :*</u> $1/4S_3 - S_4 = 1/2,\ S_4 \ge 0$
Из третьего ограничения Гомори: $S_3 = 22 - 4x_1 - 4x_2$

Получаем: $x_1 + x_2 + S_4 = 5,\ S_4 \ge 0$. Отсюда имеем: $x_1 + x_2 \ge 5$. Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 4. Новый оптимальный нецелочисленный план - точка 5.

Пятое ограничение Гомори : $1/3x_4 + 2/3S_4 - S_5 = 2/3,\ S_5 \geq 0$
Из второго ограничения задачи: $x_4 = 16 - 4x_1 - x_2$
Из четвертого ограничения Гомори: $S_4 = 5 - x_1 - x_2$

Получаем: $2x_1 + x_2 + S_5 = 8,\ S_5 \geq 0$. Отсюда: $2x_1 + x_2 \geq 8$. Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 5. Оптимальный целочисленный план - точка 6 с координатами (3;2).

Заштрихованная часть - целочисленное множество планов.

Выпуклая оптимизация. Условие выпуклости. Субградиентный метод выпуклой оптимизации. Метод растяжения пространства. Метод эллипсоидов.

Основная задача выпуклого программирования

Пусть задано выпуклое и замкнутое множество $\tilde{A} \subseteq E^n$. Рассмотрим множество

$X = \{x \in \tilde{A} : f(x) \geq b\}, \quad f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)), \quad b \in E^m$.

где $f_i(x)$ $(i = \overline{1, m})$ — вогнутые (выпуклые вверх) непрерывные на $\tilde{A} \subseteq E^n$ скалярные функции. В теории математического программирования каждый элемент $x \in X$ принято называть **допустимым планом**, а само множество X — **множеством допустимых планов**.

Формальная постановка задачи выпуклого программирования

Задачу

$\min\limits_{x \in X} \varphi(x)$,

где $\varphi(x)$ *выпукла, а X определяется вышеприведенными условиями, называется основной задачей выпуклого программирования.*

0 означает, что ставится задача:

Если существует минимальное значение функции $\varphi(x)$ на множестве *X*, то среди всех допустимых планов найти оптимальный план x^*, для которого

$\varphi^* = \varphi(x^*) = \min\limits_{x \in X} \varphi(x)$

при этом число φ^* называют **значением задачи**.

Если оптимального плана не существует, то требуется

- либо найти значение задачи как точную нижнюю грань значений функции $\varphi(x)$ на множестве *X*:
  $\varphi^* = \inf\limits_{x \in X} \varphi(x)$
- либо убедиться, что $\varphi(x)$ неограничена снизу на множестве *X*;
- либо убедиться в том, что множество допустимых планов *X* пусто.

Для решения предложенной оптимизационной задачи следует выполнить следующие действия:

- Определить множество $\tilde{A} \subseteq E^n$.
- Определить вектор-функцию $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ и вектор $b \in E^m$.
- Определить множество допустимых планов $X = \{x \in \tilde{A} : f(x) \geq b\}$.
- Привести задачу к стандартной форме основной задачи выпуклого программирования и определить оптимизируемую функцию $\varphi(x)$.
- Проверить, является ли полученная оптимизационная задача ЗВП, для этого
- проверить на выпуклость множество *X*;
- проверить на выпуклость функцию $\varphi(x)$.

В случае успеха п. □

- Построить функцию Лагранжа полученной ЗВП.

- С помощью дифференциальных условий Куна-Таккера найти седловые точки построенной функции Лагранжа.

В случае неудачи п. □ попытаться найти другие методы решения задачи.

Методы субградиентной оптимизации. Эти итеративные процедуры формируют последовательность векторов $\{l^k\}$. Начиная с некоторого начального значения l^0 эти вектора меняются по следующему правилу

$$l^{k+1} = l^k + t_k (Ax^k - b),$$

где x^k — оптимальное решение задачи LP_{λ^k}, а t_k — размер шага. Фундаментальный теоретический результат заключается в том, что

$$\nu(LP_{\lambda^k}) \to \nu(D), \text{ åñëè } t_k \to 0 \text{ è } \sum_{i=0}^{k} t_k \to \infty .$$

Размер шага на практике обычно выбирают, следуя,

$$t_k = \frac{\Theta^k (z^* - \nu(LP_{\lambda^k}))}{\left\| Ax^k - b \right\|^2},$$

Где q^k — скаляр, $0 < q^k \le 2$ и z^* — верхняя граница для *n(D)*. Обычно z^* получают эвристикой для *P*. В методе ветвей и границ z^* — текущий рекорд. Последовательность q^k, как правило, начинается с $q^0 = 2$ и затем q^k делится пополам, через фиксированное число итераций, зависящее от размерности задачи.