МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ТАЧИНІНА ОЛЕНА МИКОЛАЇВНА**

УДК 681.5.015.24:629.7 (043.5)

# МЕТОДИ СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИМИ СКЛАДЕНИМИ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ІЗ РОЗГАЛУЖЕНИМИ ТРАЄКТОРІЯМИ РУХУ

05.13.03 - Системи та процеси керування

**Автореферат**
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі автоматизації та енергоменеджменту Національного авіаційного університету Міністерства освіти і науки України.

**Науковий консультант**: доктор технічних наук, професор
**Лисенко Олександр Іванович,**
заслужений діяч науки і техніки України,
лауреат Державної премії України
в галузі науки і техніки,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», професор кафедри телекомунікацій.

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор
**Баранов Георгій Леонідович,**
заслужений діяч науки і техніки України,
лауреат Державної премії України
в галузі науки і техніки,
Національний транспортний університет,
професор кафедри інформаційних систем і
технологій;

доктор технічних наук, професор
**Котляров Володимир Петрович,**
Центральний науково-дослідний інститут
Збройних Сил України, головний науковий
співробітник;

доктор технічних наук, доцент
**Фірсов Сергій Миколайович,**
Національний аерокосмічний університет
ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний
інститут», професор кафедри електротехніки та
мехатроніки.

Захист відбудеться «13» грудня 2018 р. о $\underline{14^{00}}$ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.062.03 в Національному авіаційному університеті за адресою: 03680, м. Київ, пр. Космонавта Комарова, 1.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Національного авіаційного університету: 03680, м. Київ, пр. Космонавта Комарова, 1.

Автореферат розісланий «____» ____________ 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.062.03 С. В. Павлова

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Успіхи у створенні прецизійних механічних об’єктів, безпроводових телекомунікаційних систем та високопродуктивних малогабаритних бортових комп'ютерів дозволяють проектувати складні технічні системи нового покоління, що вирішують єдину технічну задачу без механічного зв'язку та з інформаційним обміном між окремими складовими цих об'єктів.

В якості різновидів таких перспективних складних технічних систем у дисертації розглядаються групи безпілотних літальних апаратів (БПЛА), оснащені безпроводовими телекомунікаційними системами, які утворюють так звані «літаючі сенсорні мережі» (роботизовані сенсорні мережі та системи), а також багаторазові авіаційно-космічні системи (АКС) типу «повітряний старт». З теоретичної точки зору ці об’єкти керування можуть бути класифіковані як складені динамічні системи (СДС), тобто системи складені із сукупності об’єктів (підсистем) із керованою зміною процесу їх взаємодії між собою, яка відбувається під час руху.

Траєкторії складених динамічних систем у науковій літературі отримали назву розгалужених, тому що вони складаються з ділянок спільного руху підсистем СДС і ділянок їх індивідуального руху до цілі по окремим гілкам траєкторії.

Ефективність функціонування СДС залежить від оперативного (в реальному масштабі часу) оптимального вибору просторових координат і моментів часу, у які відбуваються структурні перетворення СДС, а також від оперативного оптимального синтезу керування складовими елементами СДС при їхньому русі по гілкам траєкторії в інтервалах часу між структурними перетвореннями. Тому, проблема оперативної оптимізації розгалуженої траєкторії руху СДС визнано у світі актуальною з наукової та практичної точок зору.

Так, наприклад, комерційні запуски у космос корисного навантаження із використанням АКС, що реалізують технологію виведення типу «повітряний старт», потребують надійного гарантування запуску при деякій попередньо непередбачуваній зміні погодних умов у районі старту. Тобто актуальною є проблема оперативної корекції (оперативної оптимізації) розгалуженої траєкторії руху АКС, що складається із траєкторії руху літака-носія (ЛН) і орбітального ступеня (ОС) на етапі їх сумісного руху у так званій «зв’язці», спільної оптимізації траєкторій ЛН та ОС в процесі розділення та початкового розведення із подальшим виходом у задані точки навколоземного простору. Алгоритми оперативної корекції траєкторії АКС повинні програмуватися у комп’ютері бортового стартового комплексу ЛН, що дозволить виконати оперативну корекцію розгалуженої траєкторії в районі пуску і ця корекція буде врахована при прийнятті рішення про виконання маневрів повітряного старту. Підкреслимо, що задача оперативної оптимізації розгалуженої траєкторії АКС є актуальною і у аварійних ситуаціях, коли необхідно максимально безпечно і швидко відокремити ОС від ЛН.

Точна оперативна інформація про потерпілих у зоні надзвичайної ситуації в умовах практично повного руйнування інфраструктури (пожежі, землетруси, цунамі, торнадо і т.д.) може бути отримана завдяки використанню сенсорів розміщених на БПЛА (мобільних сенсорів), що утворюють «літаючу сенсорну мережу». Актуальною є проблема оперативної оптимізації «групової поведінки» (оптимізація розгалуженої траєкторії руху) мобільних сенсорів у агресивному середовищі, яке виникає під час надзвичайної ситуації. Алгоритм оперативної оптимізації програмується у бортовому комп'ютері телекомунікаційної платформи, яка керує рухом мобільних сенсорів. Успіх проведення пошуково-рятувальної операції визначається в першу чергу узгодженістю «групової поведінки» елементів «літаючої сенсорної мережі», яка повинна надавати актуальну та якісну (своєчасну і достовірну) інформацію про потерпілих та необхідну для них термінову допомогу. Не узгодженість «групової поведінки» мобільних сенсорів може призвести до повного зриву рятувальної операції.

З загальнотеоретичної точки зору, вирішення задачі оптимального керування СДС з розгалуженою траєкторією руху зводиться до задачі керування розривною системою. Термін «розривна система» включає в себе великий клас моделей: складені, багатоступеневі, з релейним керуванням, з проміжними умовами, з імпульсним впливом і т.д.. Математичні моделі розривних систем описують диференціальними рівняннями з розривними (кусково-неперервними) правими частинами. Дослідженню ознак і властивостей оптимальних рішень для розривних систем присвячені роботи Л.С. Понтрягіна, В.А. Троїцького, Р.В. Гамкрелідзе, В.І. Уткіна , В.Г. Болтянского, М.М. Красовського.

Різновидом розривних систем у теоретичному плані є системи, розглянуті в роботах Брайсона Хою Ши, В.А. Боднера, Л.Т. Ащепкова, Б. Ф. Кротова, Л.Л. Самойленка, Н.А. Перестюка, А.А. Асланяна, О.І. Лисенка та інших авторів. У цих роботах у термінах розривних систем сформульовані задачі оптимального керування складеними системами, в яких виділявся пріоритетний елемент і відносно нього розглядалося застосування теорії розривних систем.

Для перетворення складених динамічних систем у розривні в цих роботах використовувався метод довизначення, або лінійних часових перетворень, що приводило до збільшення розмірів вектору стану і вектору керування розривної системи пропорційно кількості гілок траєкторії СДС. Тому цільна постановка задачі відшукання оптимальної розгалуженої траєкторії всієї СДС не розглядалась, а задача керування СДС формулювалася як задача керування розривними системами, коли виділявся пріоритетний елемент і відносно нього розглядалося застосування теорії розривних систем.

На сьогоднішній день, теоретичні розробки, отримані попередніми авторами, не опрацьовані в прикладному плані до такого рівня, щоб їх можна було використовувати для вирішення задач проектування траєкторії руху СДС у реальному масштабі часу.

Це пояснюється тим, що абстрактно-формальне занурення задач про розгалужені траєкторії СДС у клас задач про розривні системи призводить до того, що розмірність вектору стану та розмірність вектору керування розривної системи збільшуються пропорційно кількості гілок траєкторії і стає практично неможливою реалізація алгоритму оперативної оптимізації розгалужених траєкторій у бортовому комп’ютері.

Прикладні дослідження, які б з самого початку заклали в постановку задачі не далеке від дійсності уявлення про розривність системи, а ясне фізичне уявлення про характер – «схему» руху складеної системи по гілкам траєкторії, пояснили б механізм побудови умов оптимальності розгалуженої траєкторії з довільною схемою, розглянули всі прикладні аспекти, а також дали результати у вигляді максимально доступному широкому колу прикладників-дослідників, з точки зору можливості організації обчислювальних процедур, що реалізують ці умови, дотепер не були проведені.

Таким чином маємо конфліктну ситуацію (неузгодженість або протиріччя): з одного боку на теперішній час вже апаратно створені і активно створюються новітні складені динамічні системи типу «повітряний старт», «літаючі сенсорні мережі», а, з іншого, для керування цими складеними динамічними системами застосовуються методи керування, які не дозволяють повністю використовувати усі закладені у ці системи технічні властивості.

Тому, актуальною є наступна наукова проблема оперативної оптимізації процесу керування рухом СДС, яка дозволила б на наявних на борту обчислювальних засобах, в реальному масштабі часу вирішувати задачу оперативного синтезу оптимальних розгалужених траєкторій руху такого типу систем. Для вирішення цієї проблеми постає завдання розроблення умов оптимальності розгалужених траєкторій руху складених динамічних систем у формі зручній для синтезу у реальному часі (оперативний синтез) оптимального керування цими складеними системами.

Таким чином, дисертаційні дослідження є актуальними для розв'язання задач траєкторного керування сучасними та перспективними складеними динамічними системами.

**Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота відповідає основним науковим напрямкам розвитку науки і техніки України на період до 2021 року (відповідно до Закону України «Про пріоритетні напрями інноваційної діяльності в Україні», постанов Кабінету міністрів України № 294 від 12.03.2012 р., № 980 від 18.10.2017 р. «Про затвердження середньострокових пріоритетних напрямів інноваційної діяльності галузевого рівня на 2012-2016 та 2017-2021 роки) та планам НДР Міністерства освіти і науки України в рамках виконання науково-дослідних робіт: НДР № 2020-п «Методи та системи управління безпроводовими сенсорними мережами із мобільними сенсорами, телекомунікаційними наземними вузлами та аероплатформами у зоні надзвичайної ситуації» (номер державної реєстрації – № 0117U004282); НДР № 8/07.01.04 «Сучасні концепції підвищення ефективності електроенергетичних комплексів, процесу їх автоматизації на транспорті»; НДР № 92/07.01.05 «Управління динамічними системами та їх станом»; НДР № 50/07.01.05 «Методи оптимального керування складеними динамічними об’єктами», де здобувач був відповідальним виконавцем; НДР № 72/07.01.05 «Управління технічним станом авіаційних електроенергетичних комплексів на стадіях проектування та експлуатації».

**Мета і завдання дослідження.** Розвиток методів оптимального керування детермінованими розривними системами в задачах із розгалуженими траєкторіями руху детермінованих складених динамічних систем для розробки необхідних, необхідних і достатніх, достатніх умов оптимальності керування цими системами у формі зручній для синтезу керування у реальному часі (оперативного синтезу).

Поставлена мета дисертаційного дослідження досягається розв'язанням наступних задач:

1. Аналіз умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху детермінованої складеної динамічної системи.
2. Побудова математичної моделі руху складеної динамічної системи у формі розгалуженої траєкторії.
3. Розробка методу представлення математичної моделі руху складеної динамічної системи у вигляді математичної моделі розривної динамічної системи зі змінними у моменти структурних перетворень розмірами векторів стану та керування.
4. Розробка необхідних умов оптимальності керування складеною динамічною системами із розгалуженою траєкторією руху із довільною та спеціальними схемами розгалужень на основі розвитку метода Понтрягіна.
5. Розробка необхідних і достатніх умов оптимальності керування складеною динамічною системами із розгалуженою траєкторією руху із довільною та спеціальними схемами розгалужень на основі розвитку метода Беллмана.
6. Розробка достатніх умов оптимальності керування складеною динамічною системами із розгалуженою траєкторією руху із довільною та спеціальними схемами розгалужень на основі розвитку метода Кротова.
7. Дослідження шляхів практичного застосування умов оптимальності для оперативного синтезу розгалужених траєкторій руху існуючих і перспективних складених динамічних систем.

**Об'єктом дослідження** є процес оптимального керування детермінованими складеними динамічними системами.

**Предметом дослідження** є методи оптимального керування детермінованими складеними динамічними системами із розгалуженими траєкторіями руху.

**Методи дослідження.** При проведенні теоретичних досліджень в дисертаційній роботі використовувались методи теорії оптимального керування звичайними та розривними динамічними системами, які застосовувалися для доказу умов оптимальності та розробки методу, що виносяться на захист: метод принципу мінімуму; метод інваріантного занурення та метод динамічного програмування, з використанням детермінованої функції Беллмана; принцип розширення функціонала по Кротову з використанням детермінованої функції Кротова.

При розв’язанні задач використовувались методи аеродинаміки, динаміки польоту, розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, чисельні методи розв'язання екстремальних задач.

**Наукова новизна одержаних результатів.**

1. Уперше розроблено метод представлення математичної моделі руху складеної динамічної системи у вигляді математичної моделі розривної динамічної системи, що відрізняється від існуючих тим, що розширення (збільшення розміру) векторів стану і керування здійснюється в інтервалах часу між структурними перетвореннями і дорівнює сумарному розміру векторів стану і керування, що відносяться до тих ділянок розгалуженої траєкторії, які потрапляють у розглянутий інтервал. При використанні існуючого методу перетворення складеної динамічної системи в розривну (метод довизначення) розміри вектору стану і вектору керування розривної системи стають рівними сумі розмірів векторів стану і керування, які відносяться до всіх гілок розгалуженої траєкторії.

2. Одержав подальший розвиток метод Понтрягіна в задачах керування розривними динамічними системами зі змінним в моменти структурних перетворень розміром векторів стану і керування. Відмінність полягає у використанні спеціальних умов стикування для спряжених змінних і для гамільтоніанів в моменти часу структурних перетворень, які враховують характер розгалуження траєкторії складеної динамічної системи.

3. Уперше на основі розвиненого методу Понтрягіна сформульовані необхідні умови оптимальності типових розгалужених траєкторій в формі зручній для оперативного синтезу цих траєкторій.

4. Уперше розроблено умови оптимальності розгалужених траєкторій із нескінченною кількістю розгалужень у заданому інтервалі часу (траєкторії з альтернативою).

5. Одержав подальший розвиток метод динамічного програмування (метод динамічного програмування Беллмана) в задачах керування розривними динамічними системами зі змінним в моменти структурних перетворень розміром векторів стану і керування. Відмінність полягає в урахуванні розривів функції Беллмана і спеціальних умов стрибка цієї функції в моменти часу структурних перетворень, які враховують характер розгалуження траєкторії складеної динамічної системи.

6. Уперше на основі розвиненого методу динамічного програмування Беллмана сформульовані необхідні та достатні умови оптимальності типових розгалужених траєкторій в формі зручній для оперативного синтезу цих траєкторій.

7. Одержав подальший розвиток метод Красовского А.А. в задачах керування розривними динамічними системами зі змінним в моменти структурних перетворень розміром векторів стану і керування. Сформульовані умови оптимальності типових розгалужених траєкторій в формі зручній для оперативного синтезу цих траєкторій, які використовують поняття функціоналу узагальненої роботи. Відмінність полягає в використанні розривного функціоналу узагальненої роботи і спеціальних умов стикування цього функціоналу в моменти часу структурних перетворень, які враховують характер розгалуження траєкторії складеної динамічної системи (розгалуження або об'єднання гілок траєкторії).

8. Одержав подальший розвиток метод Кротова (метод функцій Кротова) в

задачах керування розривними динамічними системами зі змінним в моменти структурних перетворень розміром векторів стану і керування. Відмінність полягає в використанні розривної функції Кротова і спеціальних умов стрибка цієї функції в моменти часу структурних перетворень, які враховують характер розгалуження траєкторії складеної динамічної системи.

9. Уперше на основі розвиненого методу Кротова сформульовані достатні умови оптимальності типових розгалужених траєкторій в формі зручній для оперативного синтезу цих траєкторій.

**Практичне значення одержаних результатів.**

1. Розроблені умови оптимальності дозволяють в реальному часі оптимізувати розгалужені траєкторії руху СДС та здійснювати оперативну корекцію траєкторій їх руху у разі виникненні непередбачуваних на попередньому етапі розрахунків факторів впливу, які є критичними для реалізації цільового призначення СДС. Розроблені умови: володіють універсальністю застосування для вирішення задач з будь-яким кінцевим числом гілок траєкторії і широтою охоплення математичних моделей складених систем, що призводить до зниження обчислювальних процедур при розрахунках керування і подолання складнощів, пов'язаних з невизначеністю формування початкових умов і зшивання траєкторій. Технологічність форми подання умов оптимальності пояснюється використанням аналітично підготовлених розрахункових співвідношень, що мають ясний фізичний зміст і орієнтованих на застосування стандартних додатків.

2. Показано застосування умов оптимальності для вдосконалювання алгоритмів «інтелектуального підкажчика» поліергатичної системи керування рухом групи БПЛА.

3. Отримана в аналітичному вигляді програма руху по розгалуженій траєкторії ракети з головною частиною що розділяється, яка може використовуватися в бортових обчислювальних алгоритмах для аналогічного класу апаратів в якості опорної програми їх руху. Розрахована оптимальна траєкторії руху ракети з головною частиною що розділяється, яка виводить групу наносупутників на навколоземну орбіту.

4. Розрахована оптимальна за мінімумом часу виведення орбітального літака та літака-носія в задані точки навколоземного простору розгалужена траєкторія авіаційно-космічної системи з гіперзвуковим літаком-носієм, що задовольняє спеціальним умовам у точці розділення та обмеженню на різницю висот польоту орбітального літака та літака-носія після їхнього розділення і показана її більш висока ефективність, у порівнянні за векторним критерієм, по відношенню до траєкторій, що мінімізують час виведення тільки орбітального літака або літака-носія.

Результати дисертаційної роботи впроваджено і підтверджено відповідними актами: у виробничий процес ДП Антонов; у розробках Інституту проблем математичних машин і систем НАН України, Інституту геохімії навколишнього середовища НАН України та Військового інституту телекомунікацій та інформатизації; у навчальний процес Національного авіаційного університету.

**Особистий внесок здобувача.** Основні положення та результати роботи повною мірою висвітлені у публікаціях [1–42]. Усі результати, подані у дисертаційній роботі, здобувачем отримані особисто. У наукових працях, що публіковано у співавторстві, здобувачу належить: [1, 3, 5] – методика перетворення складеної динамічної системи в розривну динамічну систему із змінним в моменти структурних перетворень розміром векторів стану та управління; [2] – метод побудови оптимальних траєкторій з альтернативою; [5, 6]– розрахункова схема та математична модель просторового руху квадрокоптера; [10] – алгоритм інтелектуального підказувача для оператора, що керує групою БПЛА; [11] – метод структурно-параметричного синтезу оптимального алгоритму керування БПЛА, [8, 12]–необхідні умови оптимальності траєкторії руху детермінованої СДС з довільною схемою розгалужень; [13] – алгоритм послідовної оптимізації керування малогабаритними БПЛА з урахуванням ієрархії цільових функціоналів; [15] – необхідні умови оптимальності траєкторії детермінованої динамічної системи;
[16] – необхідні і достатні умови оптимальності траєкторії руху складеної динамічної системи з довільною схемою розгалуження; [19] – достатні умови оптимальності траєкторії руху детермінованою складеної динамічної системи з довільною схемою розгалуження; [19] – необхідні умови оптимальності фазових координат і керувань, в точках структурних перетворень розгалуженої траєкторії руху двоступеневого безпілотного демонстратора гіперзвукових технологій; [22, 25] – методу конструювання розгалуженої траєкторії руху інформаційного робота; [23] – математична модель просторового руху групи квадрокоптерів; [24] – метод виведення наноспутників на навколоземну орбіту.

**Апробація результатів роботи.** Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних конференціях: Simpozionul stintific al inginerilor Romani de pretutindeni (SINGRO 2014), жовтень 2014 р., Бухарест, Румунія; The Sixth World Congress «Aviation in the XXI-st century», вересень 2014 р., Київ, Україна; XII-й міжнародній науково-технічній конференції «АВІА-2015», квітень 2015 р., Київ, Україна; міжнародній науково-технічній конференції «Сучасні проблеми державного та муніципального управління», квітень 2015 р., Київ, Україна; міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми моделювання ризиків і загроз виникнення надзвичайних ситуацій на об’єкт критичної інфраструктури», квітень 2015 р., Київ, Україна; Tenth International Scientific Conference «Modern challenges in telecommunications», квітень 2015 р., Київ, Україна; Usporiadateľ edzinárodnej vedeckej konferencie: Akadémia ozbrojených síl generála Milana Rastislava tefánika, лютий 2016, Ліптовський Мікулаш, Словаччина; міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми моделювання ризиків і загроз виникнення надзвичайних ситуацій на об’єкт критичної інфраструктури» квітень 2016 р., Київ, Україна; міжнародній науково-технічній конференції «Проблеми телекомунікацій» (ПТ-2017), квітень 2016 р., Київ, Україна та на науковій-практичній конференції «Винахід заради перемоги: обмін досвідом модернізації і ремонту бойової техніки і озброєння в умовах АТО», травень 2015 р., Київ, Україна;

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 42 наукові праці, у тому числі 10 статей у фахових наукових журналах і збірниках, які входять до переліку ВАК України, 11 статей у наукових фахових виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз (у тому числі 7 статей без співавторів), 1 монографія, 7 патентів, а також 13 робіт у збірниках матеріалів і праць міжнародних конференцій, 3 з яких входять до наукометричної бази Scopus.

**Структура і обсяг роботи.** Дисертаційна робота, складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Обсяг основного тексту дисертації складає 299 сторінок друкованого тексту. Робота ілюстрована 13 таблицями і 30 рисунками. Список використаних джерел містить 154 найменувань, з них 118 кирилицею та 36 латиницею.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

**У вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та завдання дисертаційної роботи, визначено об'єкт і предмет дослідження, а також наукову новизну та практичне значення одержаних результатів.

**У першому розділі «Необхідні умови оптимальності розгалуженої траєкторії руху детермінованої складеної динамічної системи»** обґрунтовано та сформульовано визначення складеної динамічної системи і розгалуженої траєкторії, по якій вона переміщається. Проведено аналіз умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху детермінованої складеної динамічної системи. Побудовано математичну модель руху складеної динамічної системи по розгалуженій траєкторії.

Сформульовано задачу оптимізації розгалуженої траєкторії руху СДС, яка полягає в пошуку оптимальних керувань і траєкторій руху підсистем по ділянкам розгалуженої траєкторії, що мінімізують заданий критерій, а також в знаходженні оптимальних моментів часу і фазових координат, в яких відбуваються структурні перетворення СДС.

Для вирішення зазначеної задачі запропоновано методику комплексного застосування методів оптимального керування розривними системами для формування умов, що дозволяють виконати оперативну оптимізацію розгалужених траєкторій руху складених динамічних систем, яка складається з трьох етапів: на першому етапі здійснюється перехід від складеної динамічної системи до розривної динамічної системи зі змінним розміром векторів стану керування; на другому етапі здійснюється оптимізація розривної системи зі змінним розміром векторів стану керування із застосуванням методів оптимального керування; на третьому етапі здійснюється повернення до термінів вихідної постановки задачі в формі оптимізації розгалуженої траєкторії (декомпозиція оптимального рішення, отриманого для розривної системи).

Для переходу від складеної динамічної системи до розривної динамічної системи розроблено метод представлення математичної моделі руху складеної динамічної системи у вигляді математичної моделі розривної динамічної системи зі змінними у моменти структурних перетворень розмірами векторів стану та керування, який полягає в наступному:

1. Виходячи з фізичних міркувань функціонування СДС, викреслюється схема розгалуженої траєкторії (рис 1, а), складаються рівняння руху підсистем (блоків) уздовж гілок траєкторії, записуються обмеження, що діють неперервно на підсистеми (блоки) і в граничних точках, формулюється критерій.

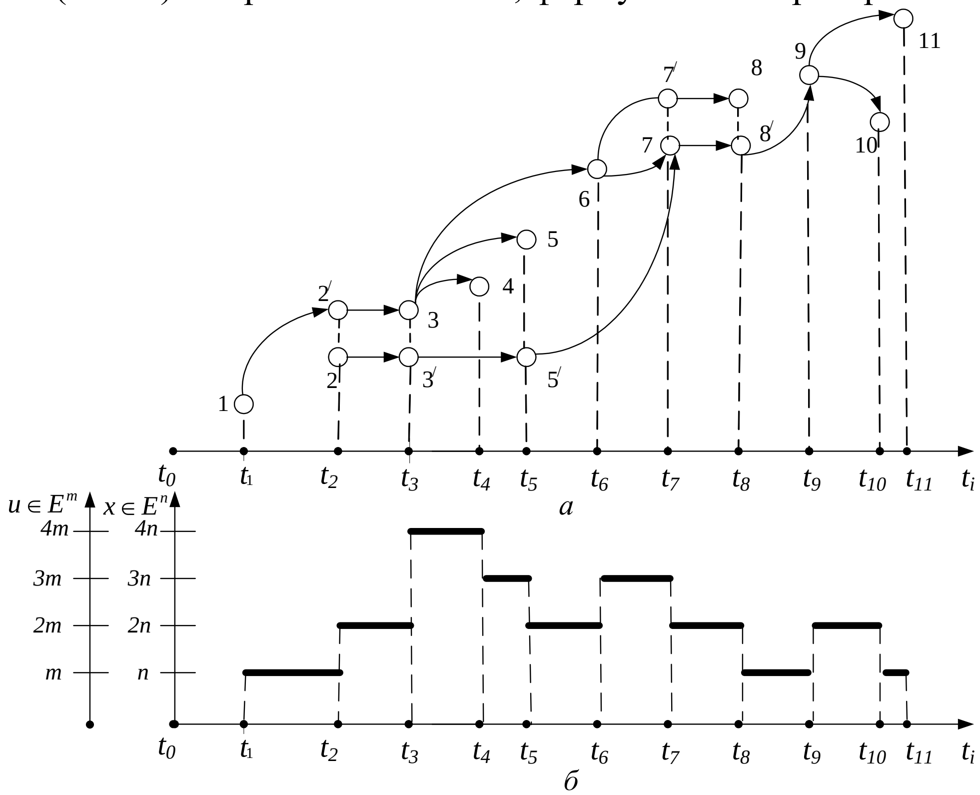



Рис. 1. Приклад структурної схеми розгалуженої траєкторії: *а*- послідовність структурних перетворень в часі; *б*–зміна розміру вектору стану і вектору керування розривної системи; $t_i$ - моменти часу структурних перетворень СДС; $x \in E^n$ – вектор стану, $u \in E^m$ – вектор керуючих впливів СДС; стрілки умовно показують напрямок руху підсистем і блоків СДС.

Рух СДС по гілкам розгалуженої траєкторії описується диференціальною системою, яка має вигляд

$$\dot{x} = f\,(x,u;y,v;t),\; t \in [t_0, t_i], \qquad (1)$$

де $x \in E^n$ – вектор стану СДС, $u \in \Omega \subset E^m$– вектор керуючих впливів СДС, $\Omega$ – обмежена множина простору $E^m$; $y$ – фазові координати, $v$– вектор керування підсистем зі складу СДС, що впливають на рух інших підсистем; $t_0$, $t_i$– моменти часу початку і кінця руху СДС по відповідним гілкам траєкторії.
На траєкторії підсистем (1) накладаються скалярні обмеження виду

$$g_i(x(t_0), y(t_0), .t_0; x(t_i), y(t_i), t_i) \begin{cases} = 0, & i = \overline{1, k_g} \\ \le 0, & i = \overline{k_g + 1, n_g} \end{cases} \qquad (2)$$

$$q_i(x(t),u(t),.t_0;y(t),v(t);t)\begin{cases}=0, & \overline{i=1,k_q}\\ \le 0, & \overline{i=k_q+1,n_q}\end{cases} \tag{3}$$

де $t\in[t_0,t_i]$.

Критерій, що оцінює ефективність функціонування СДС, описується виразом

$$P=\Pi(\cdot)+\rho_{\sum}\ \to\min, \tag{4}$$

де $\Pi(\cdot)$ – термінальна складова критерію, що залежить від фазових координат підсистем (блоків) в моменти часу структурних перетворень СДС і самих моментів часу; $\rho_{\sum}$ – інтегральна складова критерію, що складається з суми частинних інтегральних складових типу

$$\rho=\int_{t_0}^{t_f}h(x(t),u(t);y(t),v(t);t)\,dt, \tag{5}$$

що відповідають окремим гілкам траєкторії СДС.

2. Встановлюється хронологічна послідовність моментів часу структурних перетворень СДС.

3. В інтервалах часу між структурними перетвореннями СДС вводяться розширені вектори стану ${}_iX$ і керування ${}_iU$ ($i=\overline{1,N}$), де $N+1$– кількість структурних перетворень СДС з урахуванням структурного перетворення, пов'язаного з початком руху СДС ($i$=0), що складаються відповідно з векторів стану і керування динамічними підсистемами, які переміщаються по гілкам траєкторії в даному інтервалі часу.

4. Здійснюється перехід від складеної динамічної системи до розривної системи зі змінним розміром вектором стану і керування (рис 1, *б*).

В результаті застосування розробленого методу переходу від складеної динамічної системи до розривної динамічної системи сформульовано постановку задачі оптимізації розривної системи зі змінним розміром векторів стану і керування.

$${}_i\dot{X}={}_iF({}_iX,{}_iU,t),\ t\in\left[t_{i-1}^{+},\quad t_i^{-}\right],\ i=\overline{1,N}\,; \tag{6}$$

$$Q_{ij}({}_iX(t),\ {}_iU(t),t)\begin{cases}=0, & j=\overline{1,K_{Q_i}}\,;\\ \le 0, & j=\overline{K_{Q_i}+1,N_{Q_i}}\,;\end{cases} \tag{7}$$

$$G_l({}_1X(t_0^{+}),t_0;\ {}_1X(t_1^{-}),\ {}_2X(t_1^{+}),t_1;\ldots;{}_N X(t_N^{-}),t_N)\begin{cases}=0, & l=\overline{1,K_G};\\ \le 0, & l=\overline{1,K_G+1,N_G};\end{cases} \tag{8}$$

$$I = S({}_1X(t_0^+), t_0;\ {}_1X(t_1^-),\ {}_2X(t_1^+), t_1;\ {}_2X(t_2^-),\ {}_3X(t_2^+), t_2; \ldots$$
$$\ldots;\ {}_iX(t_i^-),\ {}_{i+1}X(t_i^+), t_i; \ldots; \ldots;\ {}_NX(t_N^-), t_N) + \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \Phi(X, U, t)\mathrm{dt} \to \min, \tag{9}$$

де ${}_iX \in E^{n_{\sum i}}$, $U \in \Omega_i \subset E^{m_{\sum i}}$; ${}_iX$, ${}_iU$ – розширені вектори фазового стану і керуючих впливів, які відповідають $i$-му інтервалу часу між структурними перетвореннями СДС, розмірності $n_{\sum i}$ і $m_{\sum i}$; $t_i$ – моменти часу структурних перетворень СДС; $t_i^+$, $t_i^-$ – відповідно моменти часу справа та зліва від $t_i$; $\Omega_i$ – обмежена множина простору $E^{m_{\Sigma i}}$; $Q_{ij}$ – обмеження на поточні значення фазових координат та керувань; $G_l$ – обмеження на граничні значення фазових координат та моменти часу їх досягнення.

Розроблений метод представлення математичної моделі руху складеної динамічної системи у вигляді математичної моделі розривної динамічної системи, відрізняється від існуючого методу довизначення тим, що розширення (збільшення розміру) векторів стану і керування здійснюється в інтервалах часу між структурними перетвореннями і дорівнює сумарному розміру векторів стану і керування, що відносяться до тих ділянок розгалуженої траєкторії, які потрапляють у розглянутий інтервал (рис 1, *б*), тоді як при використанні методу довизначення розміри вектору стану і вектору керування розривної системи стають рівними сумі розмірів векторів стану і керування, які відносяться до всіх гілок розгалуженої траєкторії.

У розділі доведені і сформульовані у формі основної теореми необхідні умови оптимальності керування детермінованою СДС, що переміщається по розгалуженій траєкторії з довільною схемою розгалужень. Необхідні умови оптимальності доведені на основі використання модифікованої леми Розоноера і сформульовані у вигляді принципу мінімуму для детермінованих складених динамічних систем.

Нехай ${}_iX(t), {}_iU(t), t_0, t_1, ..., t_N (t_{i-1} < t_i, t \in [t_0, t_N], i = \overline{1, N})$ – допустимий процес задачі (6)–(9).

Для оптимальності процесу ${}_iX(t), {}_iU(t), t_0, t_1, ..., t_N (t_{i-1} < t_i, t \in [t_0, t_N], i = \overline{1, N})$ необхідно існування множників $v_l (l = \overline{0, N_G})$, $\mu_{ij}(t)$ $(i = \overline{1, N}; j = \overline{1, N_{Q_i}})$ $t \in [t_0, t_N]$ не рівних одночасно нулю і неперервних при $t_0 \le t \le, t_N$, $t \ne t_i$ $(i = \overline{1, N})$ рішень ${}_i\lambda(t)$ спряжених векторних рівнянь

$${}_i\dot{\lambda}(t) + \partial H_i({}_i\hat{X}(t), {}_i\hat{U}(t), {}_i\lambda(t), (t) / \partial_i \hat{X}(t) = 0 \ \ (i = \overline{1, N}),$$

де «^» означає оптимальні величини змінних і параметрів, таких, що праведливі умови:

($1^o$) невід'ємності і доповнюючої нежорсткості

$$v_0 > 0,$$

$$v_l \begin{cases} \geq 0, G_l({}_1X(t_0^+), t_0; \ldots ;{}_N X(t_N^-), t_N) = 0, l = \overline{1, K_G}; \\ \left.\begin{array}{l} \geq 0, G_l({}_1X(t_0^+), t_0; \ldots ;{}_N X(t_N^-), t_N) = 0, \\ = 0, G_l({}_1X(t_0^+), t_0; \ldots ;{}_N X(t_N^-), t_N) < 0, \end{array}\right\} l = \overline{K_G + 1, N_G}; \end{cases}$$

$$\mu_{ij} \begin{cases} \geq 0, Q_{ij}({}_1X(t), {}_iU(t), t) = 0,\ j = \overline{1, K};\ i = \overline{1, N}; \\ \left.\begin{array}{l} \geq 0, Q_{ij}({}_1X(t), {}_iU(t), t) = 0, \\ = 0, Q_{ij}({}_1X(t), {}_iU(t), t) < 0, \end{array}\right\} j = \overline{K_{Qi} + 1, N_{Qi}}; \end{cases}$$

$2^o$) трансверсальності для спряжених функцій і гамільтоніанів

$$\left.\frac{\partial S^*}{\partial {}_1X(t_0)}\right|_\wedge + {}_1\lambda(\hat{t}_0^+) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial S^*}{\partial {}_N X(t_N)}\right|_\wedge - {}_N\lambda(t_N^-) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial S^*}{\partial t_0}\right|_\wedge - H_1({}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+), {}_1\hat{U}(\hat{t}_0^+), {}_1\lambda(\hat{t}_0^+), \hat{t}_0^+) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial S^*}{\partial t_N}\right|_\wedge - H_N({}_N\hat{X}(\hat{t}_N^-), {}_N\hat{U}(\hat{t}_N^-), {}_N\lambda(\hat{t}_N^-), \hat{t}_N^-) = 0;$$

($3^o$) скачка для спряжених функцій і гамільтоніанів

$$\left.\frac{\partial S^*}{\partial {}_iX(\hat{t}_{i-1}^+)}\right|_\wedge + {}_i\lambda(\hat{t}_{i-1}^+) = 0; \quad (i = \overline{2, N});$$

$$\left.\frac{\partial S^*}{\partial {}_iX(t_i^-)}\right|_\wedge - {}_i\lambda(\hat{t}_i^-) = 0; \quad (i = \overline{1, N-1});$$

$$\left.\frac{\partial S^*}{\partial t_i}\right|_\wedge + H_i({}_i\hat{X}(\hat{t}_i^-), {}_i\hat{U}(\hat{t}_i^-), {}_i\lambda(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i^-) -$$

$$-H_{i+1}({}_{i+1}\hat{X}(\hat{t}_i^+), {}_{i+1}\hat{U}(\hat{t}_i^+), {}_{i+1}\lambda\hat{t}_i^+), \hat{t}_i^+) = 0; (i = \overline{1, N-1});$$

($4^o$) мінімуму гамільтоніану в моменти часу $t_{i-1} \leq t < t_i$ $(i = \overline{1, N})$

$$H_i({}_i\hat{X}(t), {}_i\hat{U}(t), {}_i\lambda(t), t) = \min_{{}_iU \in \Omega_i} H_i({}_i\hat{X}(t), {}_iU(t), {}_i\lambda(t), t).$$

Із основної теореми виведені наслідки для типових випадків розгалуження траєкторії СДС. Доведені і сформульовані у вигляді наслідку з основної теореми необхідні умови оптимальності керування СДС зі схемою розгалуження траєкторії, що містить центральну і бічні гілки без взаємного впливу підсистем після розділення (рис. 2).

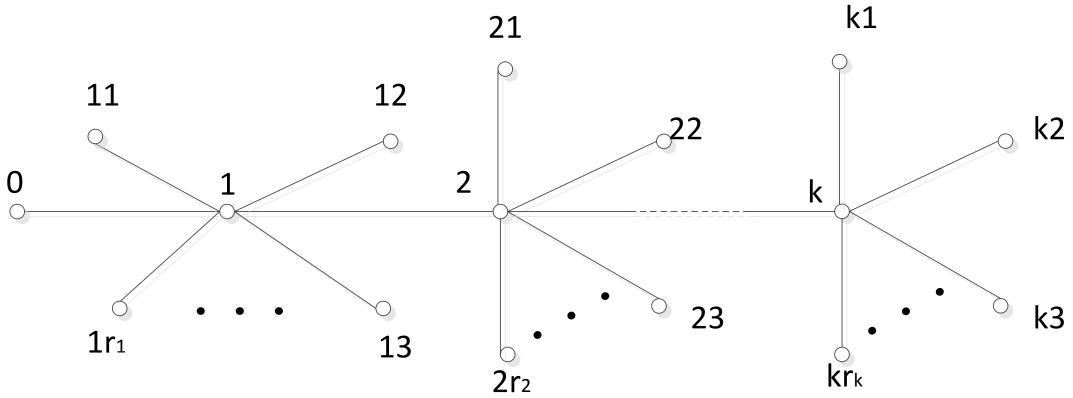
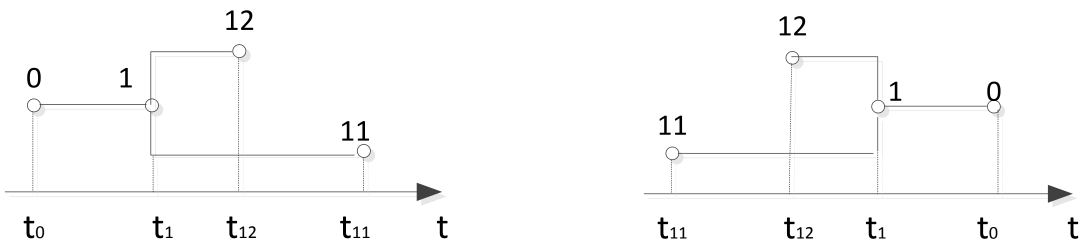



Рис. 2. Схема розгалуження траєкторії СДС, що містить центральну та бічні гілки без взаємного впливу підсистем після розділення: *k*-моменти структурних перетворень СДС, $r_k$ - підсистеми що відділяються

Доведені і сформульовані у вигляді наслідку з основної теореми необхідні умови оптимальності керування СДС, з урахуванням взаємного впливу підсистем після розділення (рис.3).




*а*)

*б*)

Рис. 3. Схеми типових розгалужених траєкторій СДС з урахування взаємного впливу підсистем після розділення: *а*– з розділенням підсистем; *б*– з групуванням підсистем.

Отримані результати були застосовані в п’ятому розділі для конструювання оптимальної траєкторії руху ракети з головною частиною що розділяється, яка виводить групу наносупутників на навколоземну орбіту та розрахунку оптимальної за мінімумом часу виведення орбітального літака та літака-носія в задані точки навколоземного простору розгалуженої траєкторії авіаційно-космічної системи.

**У другому розділі «Оптимальна траєкторія руху з альтернативою для детермінованої складеної динамічної системи»** для спеціального класу розгалужених траєкторій, що містять центральну гілку і континуум бічних гілок обґрунтовано та введено поняття – траєкторії з альтернативою. Альтернативність властивостей траєкторії полягає в тому, що в кожен момент часу руху динамічної системи по цій траєкторії існують умови для іншого варіанту руху, ціль якого виключає основну ціль руху системи. До вказаного класу траєкторій відносяться, наприклад, траєкторії посадки літального апарату (ЛА) з будь-якої точки якої можливий вихід на друге коло; траєкторія виведення ЛА на орбіту, що дозволяє виконати маневр повернення при виникненні несправностей; траєкторія польоту ЛА, з будь-якої точки деякої заданої ділянки якої можливе безаварійне скидання вантажу.

На підставі отриманих в першому розділі необхідних умов оптимальності траєкторії руху складеної динамічної системи, в даному розділі отримані необхідні умови оптимальності для різних випадків виникнення траєкторій з альтернативою.

Сформульовані необхідні умови оптимальності траєкторії СДС з можливою зміною цілі руху в будь-який момент часу в заданому інтервалі.

Розглядалась наступна постановка задачі. Складену динамічну систему

$$\dot{x} = f(x,u,t), t \in [t_0, t_f], \tag{10}$$

де $x \in E^n$ – вектор стану СДС; $u \in \Omega \subset E^m$ – вектор керуючих впливів; $\Omega$ – обмежена множина простору $E^m$; $t_0$, $t_f$ – моменти часу початку і кінця руху СДС, необхідно перевести з деякого довільного стану $(x(t_0),t_0) \in Q_0$, в заданий $(x(t_f),t_f) \in Q_f$, таким чином, щоб мінімізувати критерій

$$I = S(x(t_0),t_0); x(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x,u,t)dt \to \min_{u(t)\in\Omega}, \tag{11}$$

де $Q_0, Q_f$ – області допустимих значень фазових координат початку та завершення руху системи; S(·) – термінальна та Ф(·) – інтегральна складові критерію.

При цьому в кожен момент часу на інтервалі $[t', t''] \subset [t_0, t_f]$ можлива зміна кінцевої цілі руху вихідної системи. З огляду на це, диференціальна система (10) представляється диференціальною системою

$$\dot{x}^0 = f^0(x^0, u^0, \eta), \eta \in [\tau, t_k^\tau], \tau \in [t', t''], x^0 \in E^n, u^0 \in \Omega^0 \subset E^{m_0}, \tag{12}$$

яку треба перевести з точки $x^0(\tau) = x(\tau)$ в точку $x^0(t_k^\tau) = \text{const}, t_k^\tau = \text{var}$,
де

$$Q_k = \left\{ (x(t_k^\tau), t_k^\tau) : \varphi_j^{(k)}(x^0(t_k^\tau), t_k^\tau) \begin{cases} \le 0, \; j = \overline{1, r_k^{(k)}}; \\ = 0, \; j = \overline{r_k^{(k)} + 1, r^{(k)}}. \end{cases} \right\},$$

$Q_к$ – область допустимих значень фазових координат в момент завершення руху системи при альтернативному русі; $\varphi_j^{(k)}$ – скалярні обмеження на кінцеві координати при альтернативному русі системи; $r_k$ – загальна кількість обмежень на кінцеві координати при альтернативному русі системи;

$r^{(k)}-r_k^{(k)}<n+1$, $t_k^{\tau}$ – час досягнення системою (12) кінцевої точки, за умови що зміна динаміки руху системи і (або) зміна цілі її руху відбулася в момент часу $\tau$, з урахуванням виконання обмеження

$$I^0=S^0(x^0(\tau),\tau);x^0(t_k^{\tau}),t_k^{\tau})+\int\limits_{\tau}^{t_k^{\tau}}\Phi^0(x^0,u^0,\eta)d\eta\leq 0. \qquad (13)$$

Сформульовані в роботі необхідні умови оптимальності траєкторії СДС для задачі (10)–(11) в умовах, коли зміна динаміки системи та (або) зміна кінцевої цілі руху відбувається не в фіксований або оптимально підібраний момент часу, а в будь-який поточний момент часу, що належить заданому інтервалу $[t',t'']\subset[t_0,t_f]$ полягають у наступному.

Для оптимальності процесу $x(t)$, $u(t)$, $x^0(\eta)$, $u^0(\eta)$, $t_0$, $t_j$, $t_k^{\tau}$, $t\in[t_0,t_f]$, $\eta\in[\tau,t_k^{\tau}]$, $\tau\in[t',t'']\subset[t_0,t_f]$ необхідно існування невід'ємних множників Лагранжа $\xi$ ,$\xi_{0j}(j=\overline{1,r^{(0)}})$, $\xi_{fj}(j=\overline{1,r^{(f)}})$, $\nu(\tau)$, $\mu_j(\tau)(j=\overline{1,r^{(k)}})$; функціонального векторного множника Лагранжа $\lambda(t)$ обмеженої варіації, що є рішенням диференціального рівняння

$$\dot{\lambda}(t)=-\partial H/\partial x\big|_{\wedge}$$

для $t\in[t_0,t_f]\backslash[t',t'']$ та векторного множника Лагранжа $\lambda_{\tau}^0(t)$ обмеженої варіації, що є рішенням рівняння

$$\dot{\lambda}_{\tau}^0(\eta)=-\partial H^0/\partial x^0\big|_{\wedge},\ \eta\in[\tau,t_k^{\tau}],\quad \tau\in[t',t''],$$

таких, що справедливі умови:

($1^0$) трансверсальності:

$$\xi\left[\partial S/\partial x(t_0)_{\wedge}+\lambda(\hat{t}_0)\right]+\partial\varphi^{(0)T}/\partial x(t_0)\big|_{\wedge}\xi_0=0,$$

$$\xi\left[\partial S/\partial x(t_0)_{\wedge}-H(\hat{x}(\hat{t}_0),\hat{u}(\hat{t}_0),\lambda(\hat{t}_0),\hat{t}_0\right]+\sum_{j=1}^{r^{(0)}}\xi_{0j}\partial\varphi_j^{(0)}/\partial t_0\big|_{\wedge}=0,$$

$$\xi\left[\partial S/\partial x(t_f)_{\wedge}-\lambda(\hat{t}_f)\right]+\partial\varphi^{(f)T}/\partial x(t_f)\big|_{\wedge}\xi_f=0,$$

$$\xi\left[\partial S/\partial t_f\big|_{\wedge}+H(\hat{x}(\hat{t}_f),\hat{u}(\hat{t}_f),\lambda(\hat{t}_f),\hat{t}_f\right]+\sum_{j=1}^{r^{(f)}}\xi_{fj}\partial\varphi_j^{(f)}/\partial t_f\big|_{\wedge}=0,$$

$$d\nu(\tau)\left[\partial S^0/\partial x^0(t_k^{\tau})\big|_{\wedge}-\lambda_{\tau}^0(\hat{t}_k^{\tau})\right]+\partial\varphi^{(k)T}/\partial x(t_k^{\tau})\big|_{\wedge}d\mu(\tau)=0,$$

$$d\nu\ \tau\left[\partial S^0/\partial t_k^{\tau}\big|_{\wedge}+H^0(\hat{x}^0(\hat{t}_k^{\tau}),\hat{u}^0(\hat{t}_k^{\tau}),\lambda(\hat{t}_k^{\tau}),\hat{t}_k^{\tau})\right]+\sum_{j=1}^{r^{(k)}}d\mu_j(\tau)\partial\varphi_j^{(k)}/\partial t_k^{\tau}\big|_{\wedge}=0;$$

$(2^0)$ стрибка:

$$\xi\ \lambda(t_1+0)-\lambda(t_1-0)\ =0;$$

$(3^0)$ мінімуму гамільтоніану:

$$H(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\lambda(t),t)=\min_{u(t)\in\Omega,t\in\left[\hat{t}_0,\hat{t}_f\right]} H(\hat{x}(t),u(t),\lambda(t),t)$$

$$H^0(\hat{x}^0(\eta),\hat{u}^0(\eta),\lambda^{0N}(\eta),\eta)=\min_{\substack{u^0(\eta)\in\Omega^0,\\ \eta\in[\tau_i,\hat{t}_k^\tau],\tau\in[t',t'']}} H^0(\hat{x}^0(\eta),u^0(\eta),\eta);$$

$(4^0)$ нетривіальності і доповнюючої нежорсткості:

$$\xi+\sum_{j=1}^{r^{(0)}}\xi_{0j}\sum_{j=1}^{r^{(f)}}\xi_{fj}+\int_{t'}^{t''}\left[d\nu(\tau)+\sum_{j=1}^{r^{(k)}}d\mu_j(\tau)\right]=1,$$

$$\xi_{0j}\varphi_j^{(0)}(\hat{x}(\hat{t}_0),\hat{t}_0)=0,(j=\overline{1,r^{(0)}}),\xi_{fj}\varphi_j^{(f)}(\hat{x}(\hat{t}_f),\hat{t}_f)=0,(j=\overline{1,r_f^{(f)}}),$$

$$d\mu_j(\tau)\varphi_{kj}(\hat{x}\ (\hat{t}_k^\tau),\hat{t}_k^\tau)=0\ (j=\overline{1,r_k^{(k)}}),$$

$$d\nu(\tau)=\begin{cases}=0,\ I^0\ <0;\\ \geq=0,\ I^0\ =0.\end{cases}$$

Траєкторія динамічної системи, яка будується відповідно до сформульованих умов оптимальності, має ту особливість, що надає динамічній системі (10) можливість перейти в інтервалі часу $[t',t'']$ на траєкторію типу (12), в разі зміни динаміки руху вихідної системи (10) або її перенацілювання. Тобто, в кожен момент часу $t\in[t',t'']$ руху системи існує альтернативний варіант руху по траєкторії, що описується рівнянням (12) з дотриманням умов (13).

Також, були отримані необхідні умови оптимальності розгалуженої траєкторії СДС для випадку, коли розділення СДС на підсистеми може відбутися в кожен поточний момент часу на заданому інтервалі.

Сформульовані умови є частиною математичного забезпечення системи автоматизованого проектування і можуть бути використані для побудови обчислювальних алгоритмів, які враховують специфіку взаємодії елементів конкретних типів складених динамічних систем з поточним моментом розділення.

**У третьому розділі «Необхідні та достатні умови оптимальності траєкторії руху детермінованої складеної динамічної системи»** сформульовані і доведені у вигляді основних теорем необхідні та достатні умови оптимальності керування детермінованою складеною динамічною системою, що переміщається по розгалуженій траєкторії з довільною схемою розгалужень. Отримані умови доведені на основі використання методу динамічного програмування.

В результаті застосування розробленого в дисертації методу переходу від складеної динамічної системи до розривної динамічної системи сформульовано постановку задачі пошуку необхідних і достатніх умов оптимізації розривної системи зі змінними розмірами векторів стану і керування.

Розглядалась СДС, що переміщається по розгалуженій траєкторії з довільною схемою розгалужень. Динаміка руху СДС, яка була перетворена у розривну систему зі змінними розмірами векторів стану і керування, описується рівняннями виду

$$ {}_i\dot{X} = {}_iF({}_iX, {}_iU, t),\ t \in [t_{i-1}^{+}, t_i^{-}]\ , \tag{14}$$

де ${}_iX$ , ${}_iU$ – розширені вектори фазового стану і керуючих впливів, відповідні $i$-му інтервалу часу між структурними перетвореннями СДС; ${}_iX \in E^{n_{\Sigma i}}$ , ${}_iU \in E^{m_{\Sigma i}}$ , $(i = \overline{1, N})$ , $t_i \in E\ \ (i = \overline{0, N})$; $t_i$- моменти часу структурних перетворень СДС; $t_i^{+}$ , $t_i^{-}$ – відповідно моменти часу справа та зліва від $t_i$ .

На рух підсистем накладено обмеження

$$ ({}_1X(t_0^{+}), t_0) \in B_0,\ ({}_NX(t_N^{-}), t_N) \in B_N\ \ ; \tag{15}$$

$$ ({}_iX(t_i^{-}), {}_{i+1}X(t_i^{+}), t_i) \in B_i,\ i = \overline{1, N-1}; \tag{16}$$

$$ ({}_1X(t), {}_1U(t)) \in W_i(t),\ t \in [t_{i-1}^{+}, t_i^{-}]\ ,\ i = \overline{1, N}, \tag{17}$$

$$ \begin{gathered} I = I(t_0, ..., t_N; {}_1X(t_0^{+}), ..., {}_NX(t_{N-1}^{+}); {}_1X(t_1^{-}), ..., {}_NX(t_N^{-}); \\ {}_1X(\cdot), ..., {}_NX(\cdot); {}_1U(\cdot), ..., {}_NU(\cdot)) = S_0({}_1X(t_0^{+}), t_0) + \sum_{i=1}^{N} I_i \to \inf \end{gathered} \tag{18}$$

де

$$ I_i = S_i({}_iX(t_i^{-}), {}_{i+1}X(t_i^{+}), t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i({}_iX, {}_iU, t)dt\ \ (i = \overline{1, N-1}), $$

$$ I_N = S_N({}_NX(t_N^{-}), t_N) + \int_{t_{N-1}}^{t_N} \Phi_N({}_NX, {}_NU, t)dt, $$

$B_0$, $B_N$, $B_i$, $(i = \overline{1, N-1})$, $W_i(t)$, $(i = \overline{1, N})$ - задані підмножини відповідно з $E^{n_{\Sigma i}} \times E^1$, $E^{n_{\Sigma N}} \times E^1$, $E^{n_{\Sigma i}} \times E^{n_{\Sigma i+1}} \times E^1$ $(i = \overline{1, N-1})$, $E^{n_{\Sigma i}} \times E^{m_{\Sigma i}}$ , $(i = \overline{1, N})$.

Позначимо через $D_i({}_iX(t), t_{i-1}, t_i)$ $(i = \overline{1, N})$ множину всіх допустимих керувань ${}_iU(\cdot)$, визначених на відрізку $[t_{i-1}^{+}, t_i^{-}]$, що задовольняють умовам (17), $D_i \neq 0$, $i = \overline{1, N}$. Крім того, позначимо через ${}_iX(t)$, ${}_iU(t)$, $t_0$, $t_i$, $(i = \overline{1, N})$, $t_0 \leq t \leq t_N$ один із допустимих процесів задачі (14)– (18). Допустимий процес $({}_1\hat{X}(\hat{t}_0^{+}), ..., {}_N\hat{X}(\hat{t}_{N-1}^{+}); {}_1\hat{X}(\hat{t}_1^{-}), ..., {}_N\hat{X}(\hat{t}_N^{-}); {}_1\hat{X}(\cdot), ..., {}_N\hat{X}(\cdot);\quad {}_1\hat{U}(\cdot), ..., {}_N\hat{U}(\cdot); \hat{t}_0, ..., \hat{t}_N)$ вважатимемо рішенням задачі (14)– (18), тобто оптимальним процесом, якщо

$$\hat{I} = I(\hat{t}_0,...,\hat{t}_N;{}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+),...,{}_N\hat{X}(\hat{t}_{N\text{-}1}^+);{}_1\hat{X}(\hat{t}_1^-),...,{}_N\hat{X}(\hat{t}_N^-);$$
$${}_1\hat{X}(\cdot),...,{}_N\hat{X}(\cdot);{}_1\hat{U}(\cdot),...,{}_N\hat{U}(\cdot)) = \inf_{B_0}...\inf_{B_N}\inf_{D_1}...\inf_{D_N} I. \tag{19}$$

Методом динамічного програмування задача (14)– (18), (19) вирішувалась у наступній постановці:

$$\hat{I} = \inf_{B_0}...\inf_{B_N}\left[S_0({}_1X(t_0^+),t_0) + \inf_{D_1}\left[I_1 + \inf_{D_2}\left[I_2 + ... + \inf_{D_N} I_N\ ...\right]\right]\right]. \tag{20}$$

Пошук нижньої границі виразу (20) починався з $N$-ої внутрішньої дужки.

Вводилась функція Беллмана

$$V_N({}_NX(t),t) = \inf_{D_N({}_NX(t),t,t_N)}[S_N({}_NX(t_N^-),t_N) + \int_t^{t_N}\Phi_N({}_NX,{}_NU,t)dt], t\in[t_{N\text{-}1}^+,t_N^-], \tag{21}$$

яка задовольняє рівнянню Беллмана

$$-\frac{\partial V_N}{\partial t} = \inf_{({}_NX,{}_NU)\in W_N(t)\cdots}\left[\Phi_N({}_NX,{}_NU,t) + \left(\frac{\partial V_N}{\partial {}_NX}\right)^T {}_NF({}_NX,{}_NU,t)\right] \tag{22}$$

при граничних умовах

$$V_N({}_NX(t_N^-),t_N) = S_N({}_NX(t_N^-),t_N)\Big|_{({}_NX(t_N^-),t_N)\in B_N}. \tag{23}$$

Далі, за аналогією з (21) – (23) вводилась функція

$$V_i({}_iX(t),t) = \inf_{D_i({}_iX(t),t,t_i)}[V_{i+1}({}_{i+1}X(t_i^+),t_i) + S_i({}_iX(t_i^-),$$
$${}_{i+1}X(t_i^+),t_i) + \int_t^{t_i}\Phi_i({}_iX,{}_iU,t)dt],\quad i = N-1,N-2,...,1; t\in[t_{i\text{-}1}^+,t_i^-],$$

яка задовольняє рівнянню

$$-\frac{\partial V_i}{\partial t} = \inf_{({}_iX,{}_iU)\in W_i(t)}[\Phi_i({}_iX,{}_iU,t) + \left(\frac{\partial V_i}{\partial {}_iX}\right)^T {}_iF({}_iX,{}_iU,t)]$$

при граничних умовах

$$V_i({}_iX(t_i^-),t_i) = [S_i({}_iX(t_i^-),{}_{i+1}X(t_i^+),t_i) + V_{i+1}({}_{i+1}X(t_i^+),t_i)].$$

Задаючи $i$ послідовно, зменшуючи його значення від $N$-1 до 1, та враховуючи рекурентне співвідношення

$$\inf_{D_i}\left[I_i + V_{i+1}({}_{i+1}X(t_i^+),t_i)\right] = V_i({}_iX(t_{i\text{-}1}^+),t_{i\text{-}1})$$

було сформульовано необхідні та достатні умови оптимальності допустимого процесу.

Для оптимальності допустимого процесу задачі (14)– (18) необхідно та достатньо існування таких функцій Беллмана $V_i({}_iX(t),t)$, $t\in[t_{i-1}^{+},t_i^{-}]$ $(i=\overline{1,N})$, які задовольняють рівнянням Беллмана

$$-\frac{\partial V_i}{\partial t}=\inf_{({}_iX,{}_iU)\in W_i(t)}[\Phi_i({}_iX,{}_iU,t)+\left(\frac{\partial V_i}{\partial_i X}\right)^T {}_iF({}_iX,{}_iU,t)]\Bigg|_{{}_iX} \tag{24}$$

всюди на $[t_{i-1}^{+},t_i^{-}]$ $(i=\overline{1,N})$, де існують похідні, та пов'язаних граничними умовами

$$V_i({}_iX(t_i^{-}),t_i)=\left[V_{i+1}({}_{i+1}X(t_i^{+}),t_i)+S_i({}_iX(t_i^{-}),{}_{i+1}X(t_i^{+}),t_i)\right]\Big|_{({}_iX(t_i^{-}),{}_{i+1}X(t_i^{+}),t_i)\in B_i},$$

$$(i=\overline{1,N-1}) \tag{25}$$

$$V_N({}_NX(t_N^{-}),t_N)=S_N({}_NX(t_N^{-}),t_N)\Big|_{({}_NX(t_N^{-}),t_N)\in B_N} \tag{26}$$

і таких, що задовольняють співвідношенню

$$\hat{I}=\inf_{B_0}\inf_{B_1}...\inf_{B_N}[S_0({}_1X(t_0^{+}),t_0)+V_1({}_1X(t_0^{+}),t_0);{}_1X(t_1^{-}),...,{}_NX(t_{N-1}^{-});$$
$${}_2X(t_1^{+}),...,{}_NX(t_{N-1}^{+});t_1,...,t_N)]. \tag{27}$$

З необхідних та достатніх умов оптимальності керування детермінованою складеною динамічною системою, що переміщається по розгалуженій траєкторії з довільною схемою розгалужень (24)–(27) були виведені наслідки для типових випадків розгалуження траєкторій складених динамічних систем.

У вигляді наслідків з умов (24)–(27) були отримані необхідні та достатні умови для СДС зі схемою розгалужень траєкторії, що містить центральну та бічні гілки без взаємодії підсистем (рис. 2), а також з урахуванням їх взаємодії після розділення (рис. 3). Наслідки представлені у вигляді максимально підготовленому для розробки на їх базі обчислювальних алгоритмів.

Запропоновано метод аналітичного конструювання алгоритмів керування СДС на основі використання функціоналу узагальненої роботи Красовського А.А., що дозволяє використовувати його не тільки на етапі попереднього синтезу розгалужених траєкторій СДС, а й для оперативного синтезу в процесі функціонування системи в реальному масштабі часу. Запропонований рекурентний алгоритм аналітичного конструювання по Красовському А.А. дозволяє в повній мірі використовувати обчислювальні процедури, розроблені в даний час для вирішення відомих рівнянь аналітичного конструювання по функціоналу узагальненої роботи. Методика рішення дворівневих задач, викладена в даному розділі була використана для різних типів СДС у вигляді наслідків з основних теорем і є продовженням та розвитком ряду досліджень по оптимальному керуванню, пов'язаних з оптимізацією за критерієм Красовського А.А, з побудовою керування по алгоритму послідовної оптимізації.

Отримані результати були застосовані в п’ятому розділі для вдосконалення алгоритмів «інтелектуального підказувача» поліергатичної системи керування рухом групи безпілотних літальних апаратів.

**У четвертому розділі «Достатні умови оптимальності розгалуженої траєкторії руху детермінованої складеної динамічної системи»** отримано достатні умови оптимальності розгалуженої траєкторії руху детермінованої складеної динамічної системи для типових схем розгалуження траєкторії. Достатні умови оптимальності отримано з використанням принципу розширення по Кротову та методу інваріантного занурення в поєднанні з методом функцій Кротова і сформульовано у вигляді модифікованого принципу розширення по Кротову для детермінованих складених динамічних систем.

В результаті застосування розробленого в дисертації методу переходу від складеної динамічної системи до розривної динамічної системи сформульовано постановку задачі пошуку достатніх умов оптимізації розривної системи зі змінними розмірами векторів стану і керування.

Розглядалась СДС, що переміщається по розгалуженій траєкторії з довільною схемою розгалужень. Динаміка руху СДС, яка була перетворена у розривну систему зі змінними розмірами векторів стану і керування, описується рівняннями виду

$$ {}_i\dot{X}^l = {}_iF({}_iX^l, {}_iU^l, t),\ t \in \left[t_{i-1}^{l+}, t_i^{l-}\right] (i = \overline{1,N},\ l = \overline{1,N}), \tag{28} $$

де ${}_iX^l$, ${}_iU^l$ – вектори фазового стану та керування $l$-ї підсистеми зі складу СДС, відповідні $i$-му інтервалу часу між структурними перетвореннями СДС; ${}_iX^l \in E^{n_{\Sigma i}}$; ${}_iU^l \in E^{m_{\Sigma i}}$; $t \in \left[t_{i-1}^{l+}, t_i^{l-}\right]$ –інтервал часу від моменту праворуч від $t_{i-1}^l$, до моменту зліва від $t_i^l$.

На траєкторії підсистем (28) накладаються обмеження виду

$$ (t_0^l, t_1^l, ..., t_N^l; {}_1X^l(t_0^{l+}), {}_2X^l(t_1^{l+}), ..., {}_NX^l(t_{N-1}^{l+}); {}_1X^l(t_1^{l-}), ..., {}_NX^l(t_N^{l-})) \in B; $$

$$ t_{i-1}^l < t_i^l (i = 1, N), ({}_iX^l(t), {}_iU^l(t)) \in W_i (i = \overline{1,N}); $$

де $B$, $W_i$ – задані підмножини відповідно з $E^{n_{\Sigma i}}$ та $E^{m_{\Sigma i}}$ .

Задача оптимізації розгалуженої траєкторії руху СДС полягає в мінімізації критерію:

$$ \begin{gathered} I = S(t_0^l, .., t_N^l; {}_1X^l(t_0^{l+}), .., {}_NX^l(t_{N-1}^{l+}); ({}_1X^l(t_1^{l-}), .., {}_NX^l(t_N^{l-})) + \\ + \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}^{l+}}^{t_i^{l-}} \Phi_i({}_iX^l, {}_iU^l, t) dt \to \inf_D I, \end{gathered} \tag{29} $$

де $D$ – множина допустимих процесів $({}_iX^l(t), {}_iU^l(t), t), t_{i-1}^{l+} \le t \le t_i^{l-}$ $(i = \overline{1,N})$, які відповідають умовам задачі (28)–(29) $(D \ne \phi)$.

Основним узагальнюючим моментом у постановці задачі (28) - (29) є те, що в якості рішення задачі оптимального керування СДС приймається мінімізуюча послідовність $\nu^l = ({}_iX^l(t), {}_iU^l(t), t_{i-1}^{l+} \le t \le t_i^{l-}, i = \overline{1,N})$, а не певний допустимий процес $({}_iX^l(t), {}_iU^l(t),\ t_{i-1}^{l+} \le t \le t_i^{l-},\ i = \overline{1,N})$.

Сформульовані в роботі достатні умови оптимальності розгалуженої траєкторії СДС для задачі (28)–(29) з використанням принципу розширення по Кротову полягають у наступному. Для того, щоб допустима послідовність $\nu^l = ({}_iX^l(t), {}_iU^l(t), t_{i-1}^{l+} \le t \le t_i^{l-}, i = \overline{1,N})$ була рішенням задачі (28) – (29) достатньо існування гладких по ${}_iX^l(t), t$ функцій Кротова $\Psi_i({}_iX^l, t), t \in \left[t_{i-1}^{l+}, t_i^{l-}\right],\ (i = \overline{1,N})$ таких, що

$$R_i({}_iX^l(t), {}_iU^l(t), t) \xrightarrow{M} \hat{R}_i(t)$$

на інтервалі $t \in \left[t_{i-1}^{l+}, t_i^{l-}\right], (i = \overline{1,N}),$

$$\Lambda(t_0^l, ..., t_N^l; {}_1X^l(t_0^{l+}), ..., {}_NX^l(t_{N-1}^{l+}); {}_1X^l(t_0^{l-}), ..., {}_NX^l(t_{N-1}^{l-}) \longrightarrow \hat{\Lambda},$$

де символ $\xrightarrow{M}$ означає збіжність по мірі,

$$R_i({}_iX^l, {}_iU^l, t) = \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial_i X^l}\right)^T F_i({}_iX^l, {}_iU^l, t) + \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t}\right) + \Phi_i({}_iX^l, {}_iU^l, t);$$

$$\hat{R}_i(t) = \inf_{({}_iX^l, {}_iU^l) \in W_i(t)} R_i({}_iX^l, {}_iU^l, t) = 0;$$

$$\Lambda(t_0^l, ..., {}_NX^l(t_N^{l-})) = S(t_0^l, ..., t_N^l; {}_1X^l(t_0^{l+}), ..., {}_NX^l(t_{N-1}^{l+}); {}_1X^l(t_N^{l-}, ..., {}_NX^l(t_N^{l-})) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \left[\Psi_i({}_iX^l(t_{i-1}^{l+}), t_{i-1}^{l+} - \Psi_i({}_iX^l(t_i^{l-}), t_i^{l-}\right];$$

$$\hat{\Lambda} = \inf_B \Lambda(t_0, ..., {}_NX\ \ (t_N^-)).$$

Основна ідея методу інваріантного занурення в поєднанні з методом функцій Кротова полягає в тому, що вихідну задачу включаємо в деяке сімейство задач оптимізації (інваріантне занурення). При цьому може виявитися, що між окремими задачами існують прості співвідношення і серед задач сімейства знайдеться така, яка вирішується методом Кротова. Тоді, використовуючи рішення останньої і співвідношення, що зв'язують окремі задачі, отримуємо рішення вихідної задачі. Як і в випадку використання принципу розширення по Кротову, в якості рішення задачі розглядається мінімізуюча послідовність, яка вибирається так, щоб мінімізувати критерій

$$I = S_0({}_1X^l(t_0^{l+}), t_0^{l+}) + \sum_{i=1}^{N} J_i \to \inf_D, \tag{30}$$

де $J_i = S_i({}_iX^l(t_i^{l-}), {}_{i+1}X^l(t_0^{l+}), t_i^l) + \int\limits_{t_N^{l+}}^{t_N^{l-}} \Phi_i({}_iX^l, {}_iU^l, t),\ (i = \overline{1, N}),$ при умовах (28), (29).

Процедура пошуку мінімального значення функціоналу (30) за методом інваріантного занурення набуде вигляду

$$\hat{I} = \inf_{D} I = \inf_{D_1}(J_1 + \inf_{D_2}(J_2 + ... + \inf_{D_N}(J_N)),$$

де $D$ – множина допустимих процесів $\nu^l = ({}_iX^l(t), {}_iU^l(t), t_{i-1}^{l+} \le t \le t_i^{l-}$, які задовольняють умовам (28), (29) $(D \ne \phi)$; $D_i (i = \overline{1, N})$ – підмножина множини $D$, що розглядається на інтервалі $\left[t_{i-1}^l, t_i^l\right]$, тобто, $({}_iX^l(t), {}_iU^l(t), t_{i-1}^{l+} \le t \le t_i^{l-})$.

Для обох форм, вирішення задачі пропонується шукати у вигляді мінімізуючої послідовності за умови, що траєкторії руху підсистем СДС можуть бути кусково-неперервними. Практична значимість отриманих умов полягає в тому, що на їх основі можливо розробляти обчислювальні процедури для оперативного розрахунку оптимальних розгалужених траєкторій.

У вигляді наслідків з отриманих достатніх умов були сформульовані принцип розширення по Кротову для СДС зі схемою розгалуження траєкторії, що містить центральну і бічні гілки без взаємодії підсистем після розділення (рис. 2) та принцип розширення для СДС з урахуванням взаємодії підсистем після розділення (рис. 3).

На підставі сформульованих достатніх умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху детермінованої СДС, запропоновано алгоритм оперативного синтезу розгалуженої траєкторії руху «літаючої сенсорної мережі» що базується на застосуванні модифікованого методу функцій Кротова

**П'ятий розділ «Дослідження шляхів практичного використання розгалужених траєкторій руху детермінованих складених динамічних систем»** присвячено застосуванню сформульованих у роботі умов оптимальності для побудови оптимальних розгалужених траєкторій сучасних і перспективних СДС.

На підставі сформульованих необхідних умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху СДС з урахуванням взаємодії підсистем після розділення, виконано розрахунок оптимальної за мінімумом часу виведення орбітального апарата і літака-носія у задані точки навколоземного простору розгалуженої траєкторії авіаційно-космічної системи з гіперзвуковим літаком-носієм.

Розглядалась на ступна постановка задачі. В якості першого ступеня АКС у роботі розглядався гіперзвуковий безпілотний літак-носій (ЛН), а в якості орбітального ступеня – безпілотний орбітальний літак (ОЛ). Припускалось, що рух ступенів АКС відбувається в площині екватору в східному напрямі, ковзання відсутнє, а кут крену дорівнює нулеві. З урахуванням прийнятих припущень, в якості математичної моделі руху степенів АКС вздовж гілок траєкторії приймались відповідні рівняння руху центру мас ЛН+ОЛ (гілка 0 – 1), ЛН (гілка 1 – 12), ОЛ (гілка 1 – 11) (рис. 3, *а*) в проекціях на вісі траєкторної системи координат (за відсутністю вітру). Для позначення приналежності вектору стану, керування та інших параметрів до опису руху ступенів АКС вздовж гілок траєкторії 0-1 (ЛН+ОЛ), 1-12 (ЛН), 1-11 (ОЛ) будемо відмічати їх лівим нижнім індексом відповідно 1, 12, 11.

В якості критерію оптимізації розгалуженої траєкторії АКС прийнято мінімум часу виведення СН і ОС з положення підйом - розгін в задані кінцеві положення

$$I = b_1 \Delta t_1 + b_{12} \Delta t_{12} + b_{11} \Delta t_{11}, \tag{31}$$

де $b_1, b_{12}, b_{11}$– нормовані вагові коефіцієнти; $\Delta t_1 = t_1 - t_0$; $\Delta t_{1i} = t_{1i} - t_1$ $(i = 1,2)$; $t_1, t_{12}, t_{11}$ – моменти часу структурних перетворень траєкторії АКС, яка переміщається по типовій розгалуженій траєкторії з розділенням (рис. 3, *а*).

Вважалось, що ЛН+ОЛ починають підйом-розгін в момент часу $t_0 = 0$ з координатами $V_1$=1359,160 м/с; $\theta_1$=0; $h_1$=28·10$^3$м; $\lambda_1$=0; $m_1$=294·10$^3$кг, де: $V_1$- швидкість руху; $\theta_1$ - кут нахилу траєкторії; $h_1$- висота польоту; $\lambda_1$– довгота, що використовується для заміни часу як незалежної змінної; $m_1$- маса. Після підйому-розгону і відділення ступенів, орбітальний літак і літак-носій повинні досягнути швидкостей і висот відповідно $V_{11}$=7843,04 м/с, $h_{11}$=100·10$^3$м та $V_{12}$=3665,824 м/с, $h_{12}$=45·10$^3$м при будь-яких значеннях $\theta_{1i}$, $\lambda_{1i}$, $m_{1i}$, ($i$=1,2) в момент першого досягнення заданих швидкості і висоти.

Розв‘язуючи дану задачу, в якості допустимого розглядався такий рух ступенів АКС по гілкам розгалуженої траєкторії, при якому не порушуються обмеження, що накладаються на фазові координати $x = V, \theta, h, \lambda, m \;^T$ і керування $u = P, \alpha \;^T$: за величиною кута атаки $\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}$; за величиною тяги силової установки $P_{\min} \le P \le P_{\max}$.

На траєкторію руху АКС також накладалось наступне обмеження

$$h_{11}(t) - h_{12}(t) \ge A(t), t \in t_1, t_{12} \;, \tag{32}$$

яке забезпечує умову безпеки руху ОЛ і ЛН після їх розділення. Умова (32) вимагає, щоб графіки висот польоту ОЛ та ЛН не наближувались до небезпечної відстані, при якій існує реальна небезпека зіткнення ОЛ та ЛН або потрапляння одного з них в супутній слід іншого.

Методику розв'язання задачі оптимальної траєкторії руху АКС розроблено на основі застосування сформульованих в роботі необхідних умов оптимальності розгалуженої траєкторії детермінованої СДС, з урахуванням взаємодії підсистем після розділення, представлених у формі принципу мінімуму і які потребують вирішення трьох двоточкових крайових задач з дотриманням спеціальних умов в точках структурних перетворень СДС: умовами неперервності всіх фазових координат, крім маси; умовами стрибка по спряженим змінним і гамільтоніанам.

В даній постановці задачі рівняння, що описують рух АКС по гілкам розгалуженої траєкторії (рис.3, *а*), набувають вигляду:

$$ {}_1\dot{x} = {}_1 f({}_1x, {}_1u, t),\ t \in [t_0, t_1],\ ({}_1x(t_0), t_0) = const,\ ({}_1x(t_1), t_1) = \mathrm{var}, \tag{33} $$

$$ {}_{11}\dot{x} = {}_{11} f({}_{11}x, {}_{11}u, t),\ t \in [t_1, t_{11}],\ {}_{11}x(t_1) = const,\ t_{11} = \mathrm{var}, \tag{34} $$

$$ {}_{12}\dot{x} = {}_{12} f({}_{12}x, {}_{12}u, t),\ t \in [t_1, t_{12}],\ {}_{12}x(t_{12}) = const,\ t_{12} = \mathrm{var}, \tag{35} $$

де ${}_1x(t) \in E^n$, ${}_{11}x(t) \in E^n$, ${}_{12}x(t) \in E^n$ – відповідні вектори стану ступенів АКС; ${}_1u(t) \in \Omega_1 \subset E^{m_1}$, ${}_{11}u(t) \in \Omega_{11} \subset E^{m_{11}}$, ${}_{12}u(t) \in \Omega_{12} \subset E^{m_{12}}$ – відповідні вектори керувань.

У моменти розділення фазові координати ступенів АКС пов‘язані співвідношеннями

$$ {}_1x_i(t_1) = {}_{11}x_i(t_1) = {}_{12}x_i(t_1),\ (i = \overline{1, n-1}), \tag{36} $$

$$ {}_1x_n(t_1) = {}_{11}x_n(t_1) + {}_{12}x_n(t_1), \tag{37} $$

$$ Q({}_{11}x, {}_{12}x, {}_{11}u, {}_{12}u, t) \le 0,\ t \in [t_1, t_{12}], \tag{38} $$

де координата із індексом $n$ – це маса.

Векторний критерій оптимізації розгалуженої траєкторії ступенів АКС в адитивній формі набуває вигляду

$$ \begin{aligned} I = &\int_{t_0}^{t_1} \Phi_1({}_1x, {}_1u, t)dt + \int_{t_1}^{t_{12}} \Phi_{11}({}_{11}x, {}_{11}u, t) + \Phi_{12}({}_{12}x, {}_{12}u, t)\ dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_{11}} \Phi_{11}({}_{11}x, {}_{11}u, t)dt \to \min_{\substack{{}_1u(t), t\in[t_0,t_1],\ {}_{12}u(t), t\in[t_1,t_{12}], \\ {}_{11}u(t), t\in[t_1,t_{11}],\ {}_1x(t_1), t_1 t_{11}, t_{12}}} . \end{aligned} \tag{39} $$

Інтегральні члени критерію (39) виражають вимоги до характеру руху ступенів АКС вздовж відповідних гілок траєкторії.

Необхідні умови оптимальності розгалуженої траєкторії АКС для задачі (33) – (39) сформульовано у наступному вигляді.

Нехай ${}_1x(t), {}_1u(t), t \in [t_0, t_1]$, ${}_{12}x(t), {}_{12}u(t), t \in [t_1, t_{12}]$, ${}_{11}x(t), {}_{11}u(t)$, $t \in [t_1, t_{11}]$, $t_0 < t_1 < t_{12} < t_{11}$ – допустимий процес. Для оптимальності допустимого процесу необхідно існування функціонального множника $\mu(t) \ge 0, t \in [t_1, t_{12}]$, неперервних розв‘язків ${}_1\psi(t)$, $t \in [t_0, t_1], {}_{11}\psi(t)$, ${}_{12}\psi(t)$, $t \in [t_1, t_{12}]$, ${}_{11}\psi(t)$, $t \in [t_{12}, t_{11}]$ диференціальних рівнянь

$$ {}_1\dot{\psi} + \left.\frac{\partial H_1}{\partial {}_1x}\right|_{\wedge} = 0,\ t \in [t_0, \hat{t}_1], \tag{40} $$

$$ {}_{11}\dot{\psi} + \left.\frac{\partial H_{11}}{\partial {}_{11}x}\right|_{\wedge} = 0,\ t \in [\hat{t}_{12}, \hat{t}_{11}], \tag{41} $$

$$ {}_{12}\dot{\psi} + \left.\frac{\partial H_{12}}{\partial {}_{12}x}\right|_{\wedge} + \mu(t)\left.\frac{\partial Q}{\partial {}_{12}x}\right|_{\wedge} = 0,\ t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}], \tag{42} $$

$$ {}_{11}\dot{\psi} + \left.\frac{\partial H_{11}}{\partial_{11}x}\right|_{\wedge} + \mu(t)\left.\frac{\partial Q}{\partial_{11}x}\right|_{\wedge} = 0, t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}], \tag{43} $$

таких, що справедливі умови:
1) трансверсальності:

$$ H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\psi, \hat{t}_{11}) = 0; \tag{44} $$

2) стрибка:

$$ {}_1\psi(\hat{t}_1) = {}_{11}\psi(\hat{t}_1) + {}_{12}\psi(\hat{t}_1), \tag{45} $$

$$ {}_{11}\psi(\hat{t}_{12} - 0) = {}_{11}\psi(\hat{t}_{12} + 0), \tag{46} $$

$$ H_1({}_1\hat{x}, {}_1\hat{u}, {}_1\psi, \hat{t}_1) = H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\psi, \hat{t}_1) + H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\psi, \hat{t}_1) + \mu(\hat{t}_1)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, \hat{t}_1), \tag{47} $$

$$ \begin{gathered} H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\psi, \hat{t}_{12} - 0) + H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\psi, \hat{t}_{12} - 0) + \\ + \mu(\hat{t}_{12} - 0)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, \hat{t}_{12} - 0) - H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\psi, \hat{t}_{12} + 0) = 0; \end{gathered} \tag{48} $$

3) мінімуму гамільтоніанів:

$$ \begin{gathered} \mathrm{H}_\beta({}_\beta\hat{x}(t), {}_\beta\hat{u}(t), {}_\beta\psi(t), t) = \min_{{}_\beta u(t) \in \Omega_\beta} \mathrm{H}_\beta({}_\beta\hat{x}(t), {}_\beta u(t), {}_\beta\psi(t), t), \\ \beta = 1, t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1], ; \beta = 11, t \in [\hat{t}_{12}, \hat{t}_{11}], \end{gathered} \tag{49} $$

$$ \begin{gathered} H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{11}\psi, \hat{t}_1) + H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}\hat{u}, {}_{12}\psi, \hat{t}_1) + \mu(\hat{t}_1)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}\hat{u}, {}_{12}\hat{u}, \hat{t}_1) = \\ = \min_{\substack{{}_{11}u(t) \in \Omega_{11}, \\ {}_{12}u(t) \in \Omega_{12}, \\ t \in [\hat{t}_1, \hat{t}_{12}]}} \begin{bmatrix} H_{11}({}_{11}\hat{x}, {}_{11}u, {}_{11}\psi, \hat{t}_1) + \\ + H_{12}({}_{12}\hat{x}, {}_{12}u, {}_{12}\psi, \hat{t}_1) + \\ + \mu(\hat{t}_1)Q({}_{11}\hat{x}, {}_{12}\hat{x}, {}_{11}u, {}_{12}u, \hat{t}_1) \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{50} $$

де $H_1 = \Phi_1 + {}_1\psi^T{}_1 f$, $H_{12} = \Phi_{12} + {}_{12}\psi^T{}_{12} f$, $H_{11} = \Phi_{11} + {}_{11}\psi^T{}_{11} f$ .
Вектори стану і управління з рівнянь (33) – (39) будуть мати такий склад ${}_\beta x = V_\beta, \theta_\beta, h_\beta, \lambda_\beta, m_\beta{}^T$, ${}_\beta u = \alpha_\beta, P_\beta{}^T$, де $\beta$ – гілка розгалуженої траєкторії $(\beta = 1,12,11)$. Обмеження (38) набуває вигляду (32).

У процесі виконання розрахунків розглядались п‘ять варіантів оптимізації критерію (39), що відповідає у вихідній постановці задачі критерію (31) за умови, що $\Phi_\beta({}_\beta x, {}_\beta u, t) = b_\beta$, де $\beta$ – гілка розгалуженої траєкторії $(\beta = 1,12,11)$.

1. Головний варіант, що вимагає виконання усіх необхідних умов (40) – (50).

2. Допоміжний варіант за $H$ (за гамільтоніанами), що вимагає виконання умов (40) – (44), (47) – (50).

За фізичним змістом задачі це означає, що точка розділення оптимізується тільки за моментом часу розділення $t_1$ для довільної фазової координати ${}_1x(t_1)$, при якій виконуються вказані умови. Формально це означає, що мінімум виразу (39) шукають за усіма вказаними в ньому управлінням і параметрам, крім ${}_1x(t_1)$.

3. Допоміжний варіант за $\psi$ (за спряженими змінними), що вимагає виконання умов (40) – (46), (48) – (50).

За фізичним змістом задачі, це означає, що точка розділення оптимізується тільки за фазовою координатою ${}_1x(t_1)$ для довільного моменту часу розділення $t_1$, при якому виконуються вказані умови. Формально це означає, що мінімум виразу (39) шукають за усіма вказаними в ньому управліннями і параметрами, крім $t_1$.

4. Альтернативний варіант руху для орбітального літака, що вимагає виконання умов (40), (41) для $t \in [t_1, t_{11}]$, (42), (44), (49), для $\beta = 1$ і $t \in [t_0, t_1], \beta = 11$ і $t \in [t_1, t_{11}]$. За фізичним змісту задачі це означає, що в точці розділення створюються найкращі умови для виведення орбітального літака, що не враховують подальший рух літака-носія. Іншими словами, спочатку оптимізується ділянка траєкторії 0 – 1 – 11, а потім, виходячи з обчисленої точки $({}_1x(t_1), t_1)$, оптимізується рух ЛН вздовж гілки 1 – 12 за умови мінімізації інтервалу часу $\Delta t_{12} = t_{12} - t_1$ ($t_1 = const, t_{12} = \mathrm{var}$) перельоту в точку ${}_{12}x(t_{12}) = const$ та за дотриманням обмеження (38), в якому ${}_{11}x(\cdot)$ і ${}_{11}u(\cdot)$ є відомими функціями часу $t \in [t_1, t_{12}]$. Формально це означає, що в задачі (33) – (39) в точці розділення варіюються усі координати ступеню ЛН+ОЛ ${}_{11}x(t_1)$ крім маси, а також момент часу початку виведення на орбіту ОЛ.

5. Альтернативний варіант руху для літака носія, що вимагає виконання умов (40), (41), (43), (44), (46), (49) для $\beta = 1$ і $t \in [t_0, t_1]$, $\beta = 12$ і $t \in [t_1, t_{12}]$, $\beta = 11$ і $t \in [t_{12}, t_{11}]$.

За фізичним змістом задачі це означає, що в точці розділення створюються оптимальні умови для підйому літака-носія, що не враховують подальший рух орбітального літака. Тобто, в першу чергу, оптимізується ділянка траєкторії 0 – 1 – 12. Потім, виходячи з обчисленої точки $({}_{11}x(t_1), t_1)$, оптимізується рух ОЛ вздовж гілки 1 – 11 за умови мінімізації інтервалу часу $\Delta t = t_{11} - t_1$ ($t_1 = const, t_{11} = \mathrm{var}$) виведення в точку ${}_{11}x(t_{11}) = const$ та за умови дотриманням обмеження (38), в якому ${}_{12}x(\cdot)$ і ${}_{12}u(\cdot)$ є відомими функціями часу $t \in [t_1, t_{12}]$. Формально це означає, що в задачі (33) – (39) в точці розділення варіюються усі координати ступеню ЛН+ОЛ ${}_1x(t_1)$ і всі координати ступеню ЛН, а також момент часу закінчення сумісного руху ЛН+ОЛ та моменту початку підйому руху ЛН.

Методика розрахунку оптимальної траєкторії руху АКС складалась з трьох етапів:

- на першому етапі було аналітично обґрунтовано оптимальний закон зміни тяги двигунів ступенів АКС;
- на другому етапі було проведено редукцію моделей динаміки руху ступенів АКС, яка полягала в послідовному переході від моделі динаміки руху ступенів АКС з п'ятьма залежними змінними до моделі з однією залежною змінною;

-на третьому етапі було проведено розрахунок оптимальної програми зміни кута атаки, фазових координат і моментів часу розділення ступенів АКС, який базувався на серії послідовних наближень від оптимальної розгалуженої траєкторії АКС, отриманої для найпростішої редукованої моделі динаміки руху ступенів АКС (з однією залежною змінною), до оптимальної розгалуженої траєкторії АКС для вихідної моделі (з п'ятьма залежними змінними).

Програма розрахунку складається з п'яти автономних блоків обчислень відповідно до кількості моделей динаміки руху ступенів АКС. Розрахунок починається з найпростішої моделі з однією залежною змінною і далі результат передається для використання в якості першого наближення в модель з двома залежними змінними і т.д. до моделі з п'ятьма залежними змінними.

Кожен блок розбитий на кілька взаємопов'язаних підблоків: формувача першої ітерації за результатами розрахунку оптимальної траєкторії для моделей меншої розмірності; обчислювача гамільтоніанів і їх мінімізації по керуванню в заданих точках; апроксимації керування в інтервалах між точками мінімізації гамільтоніанів; інтегрування диференціальних рівнянь динаміки руху ступенів АКС; чисельного диференціювання гамільтоніанів уздовж траєкторії руху ступенів і інтегрування рівнянь для спряжених змінних; градієнтної інтерактивної процедури розрахунку параметрів.

Результати розрахунку оптимальної за мінімумом часу виведення орбітального апарата і літака-носія у задані точки навколоземного простору розгалуженої траєкторії авіаційно-космічної системи приведені на рис. 4–9.

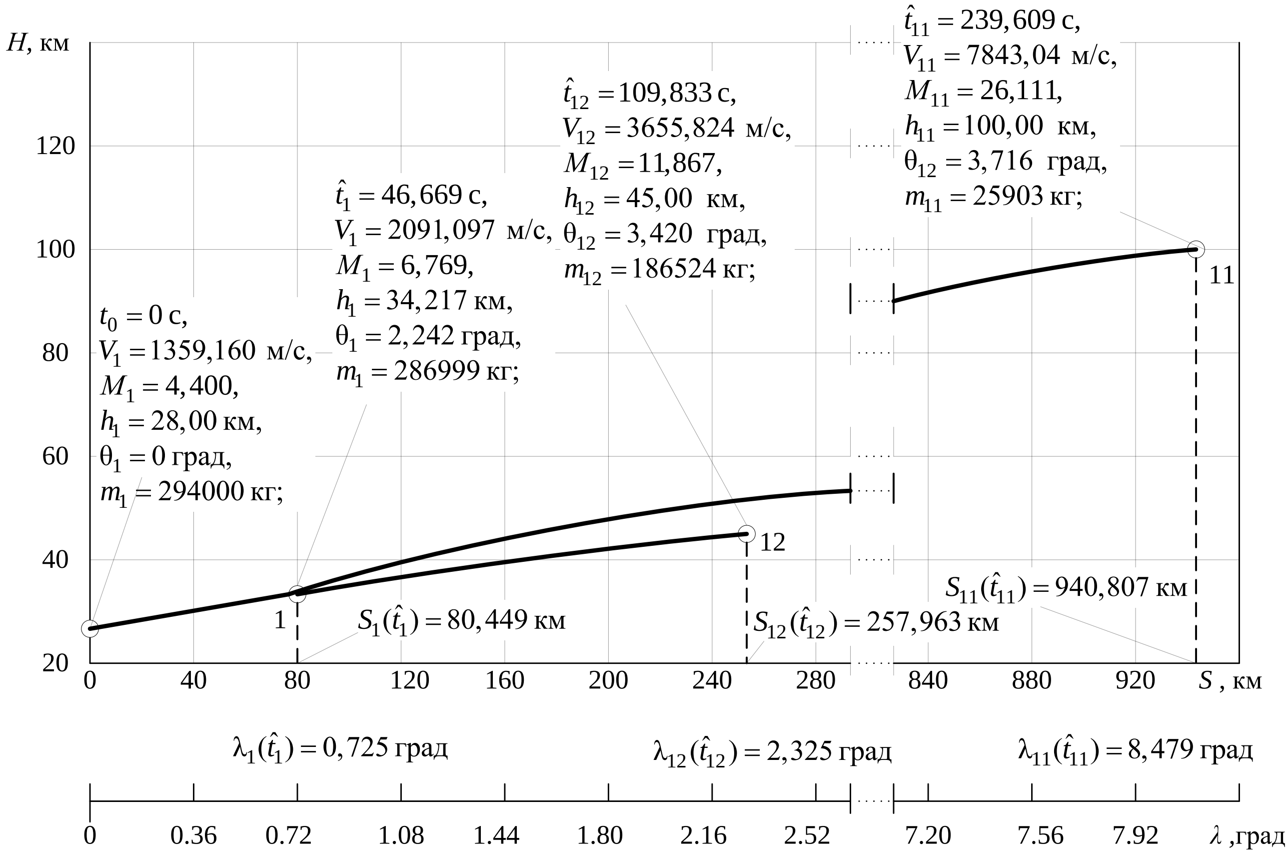



Рис.4. Профілі польоту ступенів АКС: $M$–число Маха, $n_{xk}$–тангенціальне перевантаження, $S$-дальність польоту.

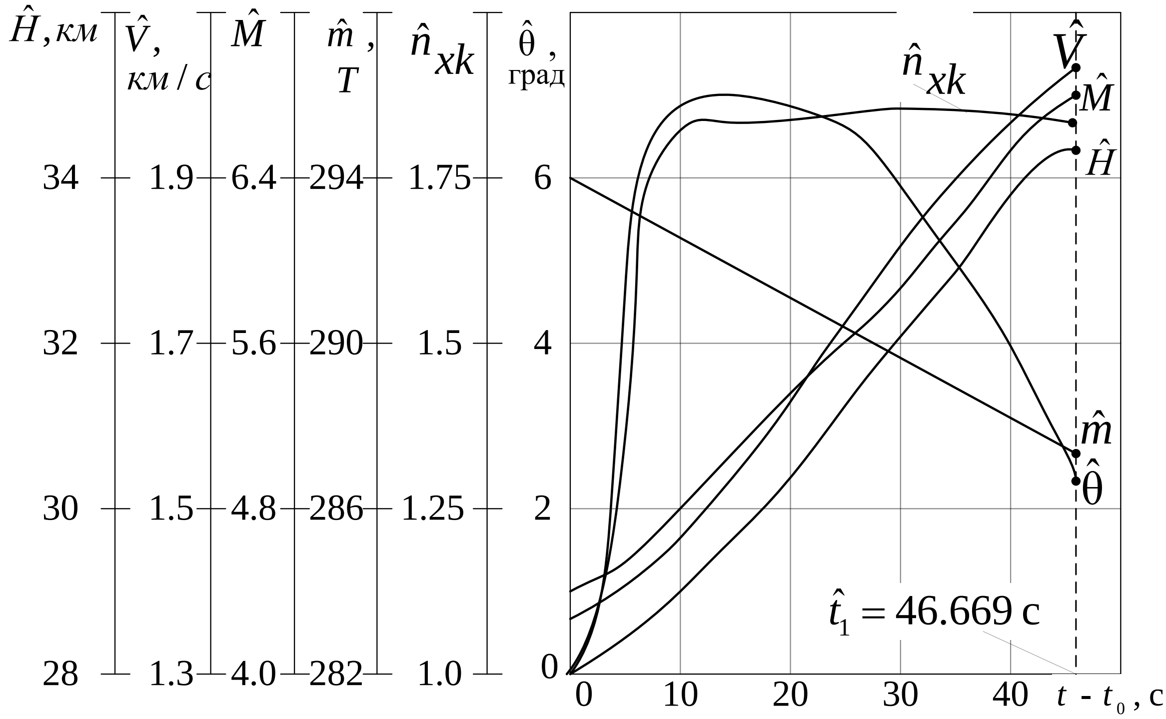



Рис. 5. Графіки оптимальних фазових координат для ділянки розгалуженої траєкторії руху АКС (політ ЛН+ОЛ, $t_0 = 0$ с): *M*–число Маха, $n_{xk}$–тангенціальне перевантаження.

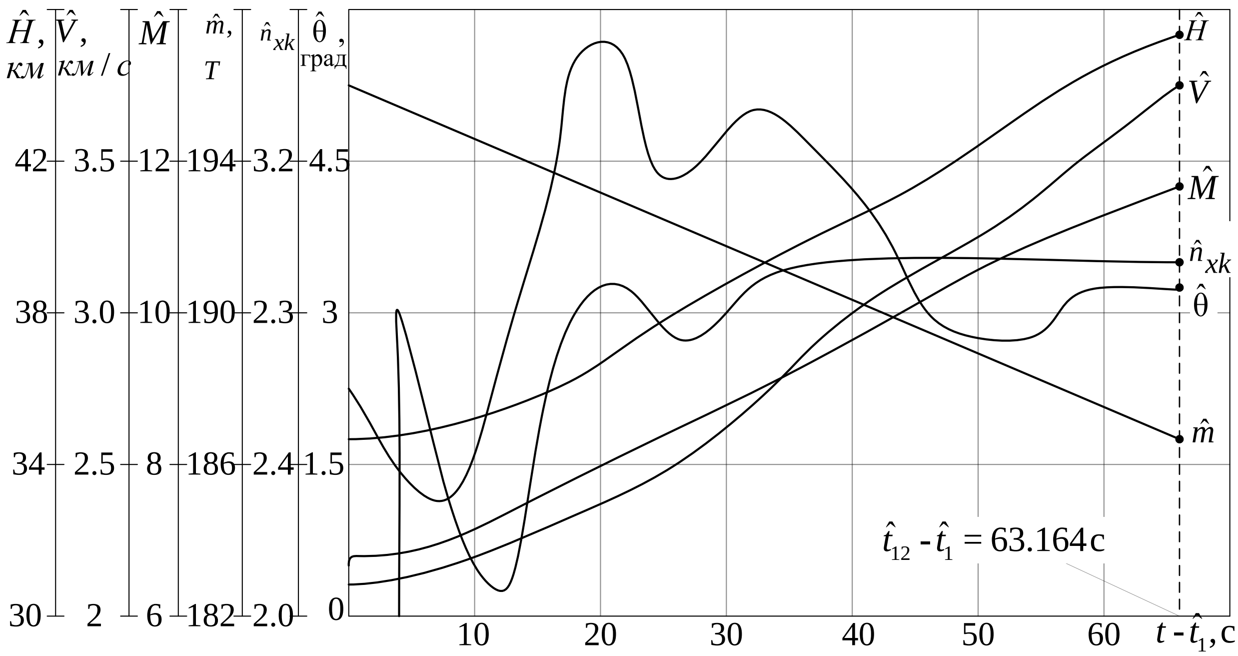



Рис. 6. Графіки оптимальних фазових координат для ділянки розгалуженої траєкторії руху АКС (політ ЛН, $\hat{t}_1 = 46.669$ с): *M*–число Маха, $n_{xk}$–тангенціальне перевантаження.

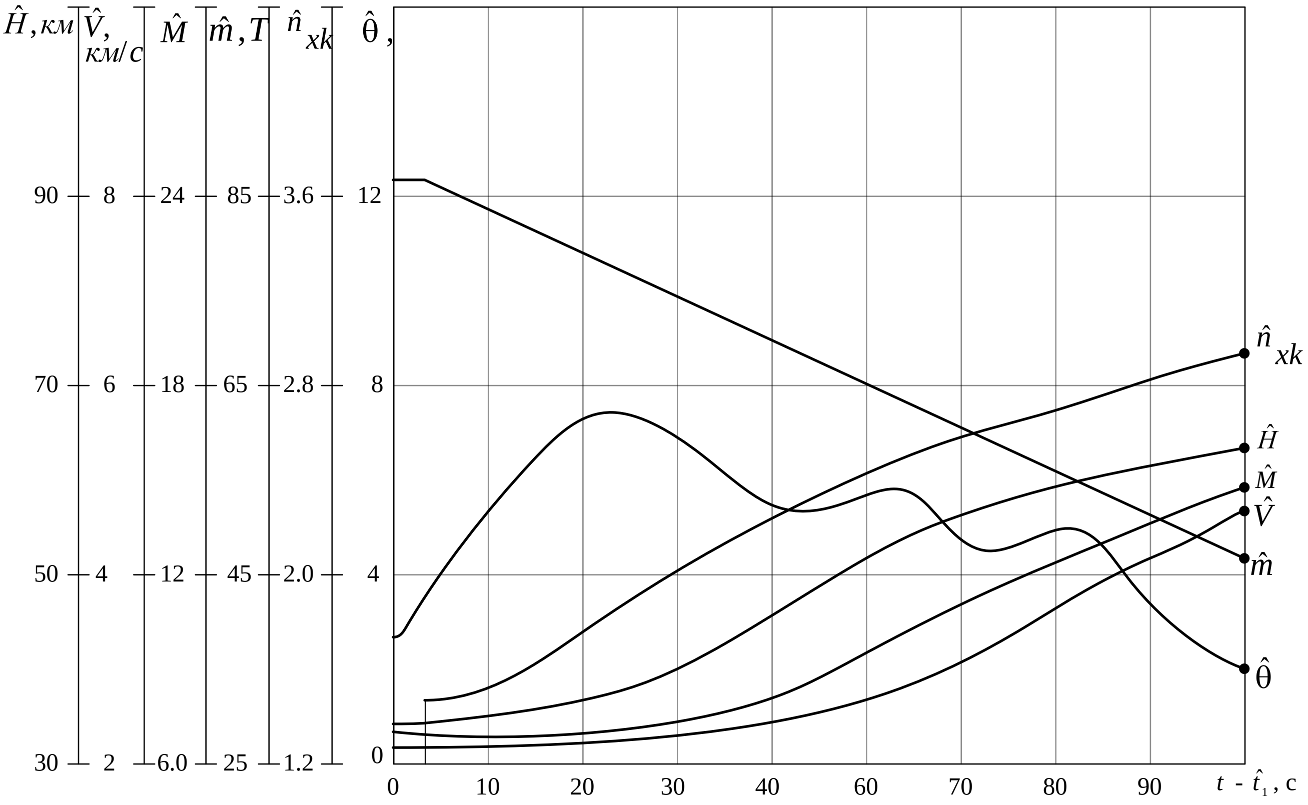



Рис. 7. Графіки оптимальних фазових координат для ділянки розгалуженої траєкторії руху АКС (політ ОЛ, $0 \leq t - \hat{t}_1 \leq 100$ с, $\hat{t}_1 = 46.669$ с): *M*–число Маха, $n_{xk}$–тангенціальне перевантаження.

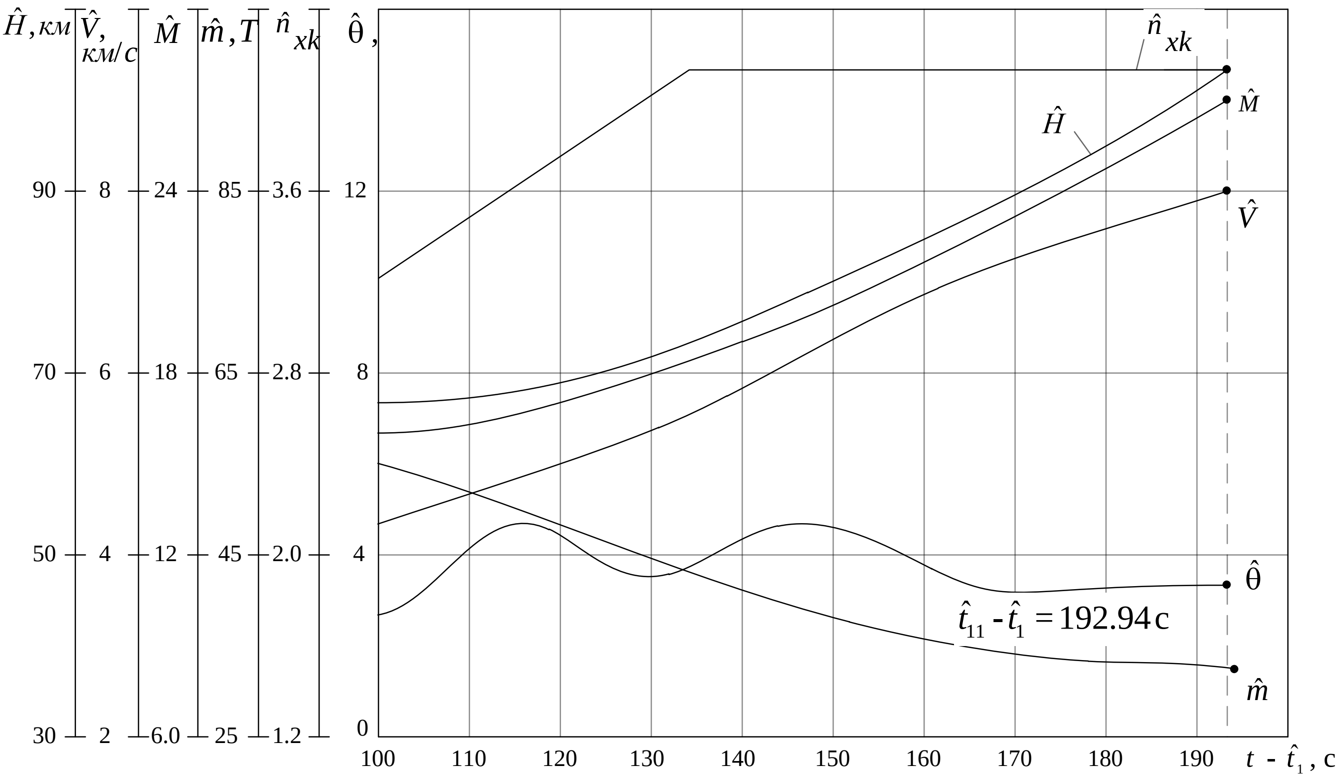
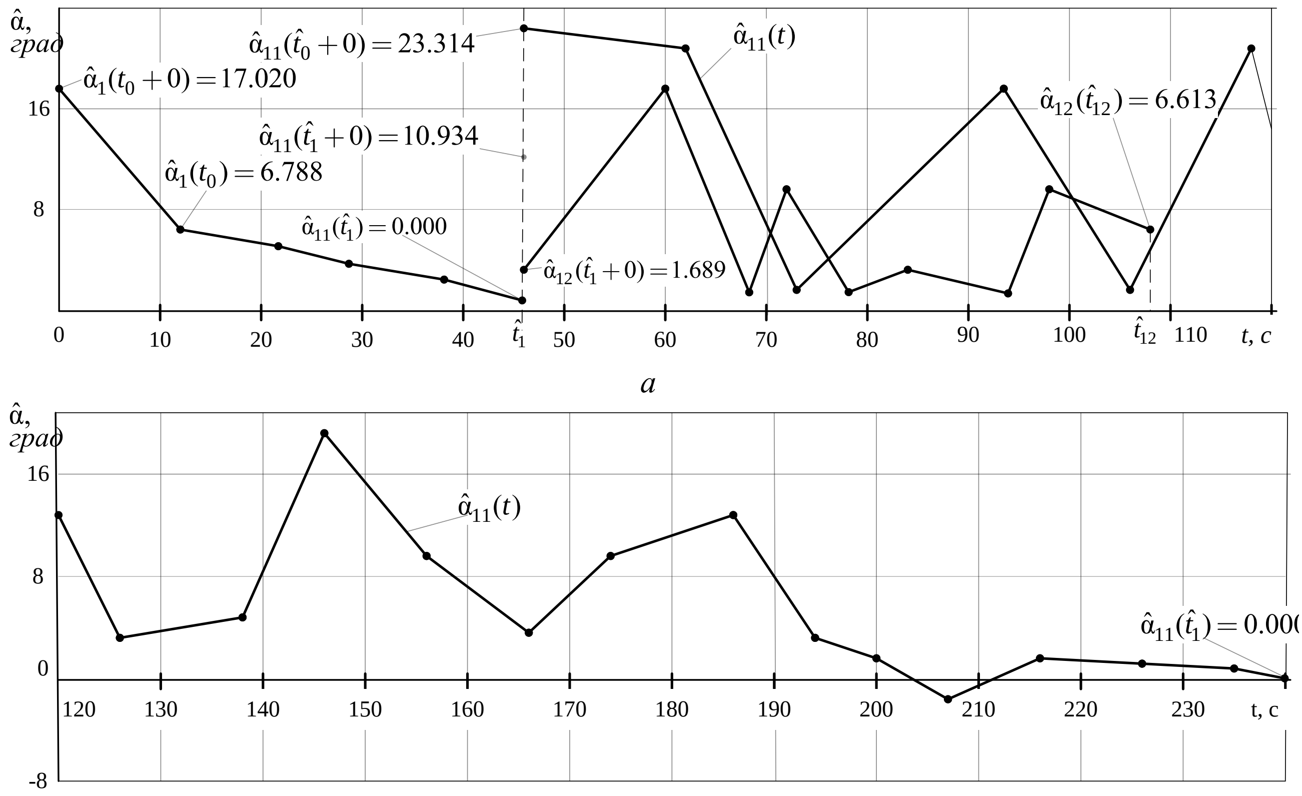



Рис. 8. Графіки оптимальних фазових координат для ділянки розгалуженої траєкторії руху АКС (політ ОЛ, 100 с $\leq t - \hat{t}_1 \leq \hat{t}_{11} - \hat{t}_1$, $\hat{t}_1 = 46.669$ с): *M*–число Маха, $n_{xk}$–тангенціальне перевантаження.




*б*

Рис. 9. Програма зміни в часі оптимального кута атаки: *а*– для ЛН+ОЛ $(\hat{\alpha}_1(t))$, ЛН $(\hat{\alpha}_{12}(t))$ та ОЛ $(\hat{\alpha}_{11}(t))$, *б*– продовження графіка $(\hat{\alpha}_{11}(t))$; $\hat{t}_1$=46.669 с, $\hat{t}_{12}$=109.833 с, $\hat{t}_{11}$=239.609 с.

Порівняльний аналіз п'яти варіантів оптимізації розгалуженої траєкторії руху АКС за основним показником, яким є критерій (31) показав, що найбільшою ефективністю володіє головний варіант, мінімальний час за критерієм (31) склав 302,773 с (рис. 4). Далі слідує альтернативний по літаку-носію варіант оптимізації, мінімальний час за критерієм (31) склав 303,136 с, а за ним альтернативний по орбітальному літаку варіант, мінімальний час за критерієм (31) склав 308,808 с. При цьому, альтернативний по літаку-носію варіант оптимізації істотно програє головному і альтернативному по орбітальному літаку варіантам – по масі, що виводиться на орбіту. Відповідні оптимальні значення мас для цих варіантів склали: 24712 кг, 25903 кг та 26000 кг. Також, в роботі проведено порівняння розрахованих п'яти варіантів оптимізації розгалуженої траєкторії руху АКС за умовним критерієм переваги. Аналіз значень умовного критерію також показав, що оптимальним варіантом є головний варіант оптимізації.

Крім цього, в даному розділі на підставі сформульованих необхідних умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху СДС з довільною схемою розгалуження, в аналітичному вигляді розрахована програма руху по розгалуженій траєкторії ракети з головною частиною, яка виводить групу наносупутників на навколоземну орбіту. Програма може використовуватися в бортових обчислювальних системах в якості обчислювального алгоритму для оперативної побудови опорної програми руху аналогічного класу апаратів. Також, запропоновано алгоритм стабілізації безпілотного літального апарата на заданій траєкторії руху з урахуванням можливого перенацілювання в кожен момент часу в заданому інтервалі.

На підставі сформульованих необхідних і достатніх умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху детермінованої СДС, в роботі запропоновано алгоритм «інтелектуального підказувача», що дозволяє задавати маневри безпілотних літальних апаратів, оцінювати координати поточного положення БПЛА щодо заданої траєкторії, розраховувати оптимальні моменти часу виконання групових маневрів. Синтезований алгоритм виробляє оптимальне, з точки зору заданого критерію якості, керування рухом мітки поточного положення до заданого положення і розраховує оптимальний момент часу і фазову координату розділення групи БПЛА.

Також в роботі, на підставі сформульованих достатніх умов оптимальності розгалуженої траєкторії руху детермінованої СДС, запропоновано алгоритм оперативного синтезу розгалуженої траєкторії руху «літаючої сенсорної мережі» що базується на застосуванні модифікованого методу функцій Кротова

## ВИСНОВКИ

У дисертації вирішена актуальна наукова проблема оперативного синтезу оптимальних розгалужених траєкторій руху детермінованих СДС. Оперативна оптимізація процесу керування рухом детермінованих СДС досягається завдяки застосуванню розроблених умов оптимальності розгалужених траєкторій руху складених динамічних систем на основі розвитку методів оптимального керування розривними системами (Понтрягіна, Беллмана, Кротова) у формі, що дозволяє синтезувати ці траєкторії в реальному масштабі часу. У виконаному дисертаційному дослідженні отримано такі основні наукові та прикладні результати:

1. Уперше розроблено метод представлення математичної моделі руху складеної динамічної системи у вигляді математичної моделі розривної динамічної системи, що відрізняється від існуючих тим, що розширення (збільшення розміру) векторів стану і керування здійснюється в інтервалах часу між структурними перетвореннями і дорівнює сумарному розміру векторів стану і керування, що відносяться до тих ділянок розгалуженої траєкторії, які потрапляють у розглянутий інтервал. При використанні існуючого методу перетворення складеної динамічної системи в розривну (метод довизначення) розміри вектору стану і вектору керування розривної системи стають рівними сумі розмірів векторів стану і керування, які відносяться до всіх гілок розгалуженої траєкторії.

2. Уперше розроблено необхідні, необхідні і достатні, достатні умови оптимальності керування розривними динамічними системами зі змінним в моменти структурних перетворень розміром векторів стану і керування на основі розвитку відповідно методів Понтрягіна, Беллмана, Кротова. При використанні методу Понтрягіна – відмінність полягає у використанні спеціальних умов стикування гамільтоніанів в моменти часу структурних перетворень, які враховують характер розгалуження траєкторії складеної динамічної системи (розгалуження або об'єднання гілок траєкторії). При використанні методу Беллмана – відмінність полягає в використанні розривних функцій Беллмана, пов'язаних між

собою спеціальними умовами стикування в моменти часу структурних перетворень, які враховують характер розгалуження траєкторії складеної динамічної системи (розгалуження або об'єднання гілок траєкторії). При використанні методу Кротова – відмінність полягає в використанні розривних функцій Кротова і спеціальних умов стикування цих функцій в моменти часу структурних перетворень, які враховують характер розгалуження траєкторії складеної динамічної системи (розгалуження або об'єднання гілок траєкторії).

3. Уперше на основі розвитку методів Понтрягіна, Беллмана, Кротова, сформульовані відповідно необхідні, необхідні і достатні, достатні умови оптимальності типових розгалужених траєкторій в формі зручній для оперативного синтезу цих траєкторій,

4. Розроблені умови оптимальності дозволяють в реальному часі оптимізувати розгалужені траєкторії руху СДС та здійснювати оперативну корекцію траєкторій їх руху у разі виникненні непередбачуваних на попередньому етапі розрахунків факторів впливу, які є критичними для реалізації цільового призначення СДС. Розроблені умови: володіють універсальністю застосування для вирішення задач з будь-яким кінцевим числом гілок траєкторії і широтою охоплення математичних моделей складених систем, що призводить до зниження обчислювальних процедур при розрахунках керування і подолання складнощів, пов'язаних з невизначеністю формування початкових умов і зшивання траєкторій. Технологічність форми подання умов оптимальності пояснюється використанням аналітично підготовлених розрахункових співвідношень, що мають ясний фізичний зміст і орієнтованих на застосування стандартних додатків.

5. Одержало подальшого розвитку поняття складеної динамічної системи, в результаті чого СДС є моделлю не тільки складених ЛА, зв'язаних між собою протягом певного часу жорстким або гнучким механічним зв'язком, але і групи літальних апаратів, що входять до складу «літаючої сенсорної мережі», що спільно виконують завдання пошуку і порятунку , що розширило область застосування розроблених умов оптимальності.

6. Одержав подальшого розвитку метод синтезу оптимального керування за критерієм узагальненої роботи в задачах керування розривними динамічними системами зі змінним в моменти структурних перетворень розміром векторів стану і керування. Сформульовані умови оптимальності типових розгалужених траєкторій в формі зручній для оперативного синтезу цих траєкторій, які використовують поняття функціоналу узагальненої роботи. Відмінність полягає в використанні розривного функціоналу узагальненої роботи і спеціальних умов стикування цього функціоналу в моменти часу структурних перетворень, які враховують характер розгалуження траєкторії складеної динамічної системи (розгалуження або об'єднання гілок траєкторії).

7. Теоретичні основи дисертаційної роботи доведено до рівня алгоритмів оптимізації розгалужених траєкторій руху конкретних СДС:

- показано застосування умов оптимальності для вдосконалення алгоритмів «інтелектуального підказувача» поліергатичної системи керування рухом групи безпілотних літальних апаратів;
- показано застосування умов оптимальності для вдосконалення алгоритмів

стабілізації безпілотного літального апарата на заданій траєкторії руху з урахуванням можливого перенацілювання в кожен момент часу в заданому інтервалі;

- в аналітичному вигляді розрахована програма руху по розгалуженій траєкторії ракети з головною частиною, яка виводить групу наносупутників на навколоземну орбіту. Програма може використовуватися в бортових обчислювальних системах в якості обчислювального алгоритму для оперативної побудови опорної програми руху аналогічного класу апаратів;

- розрахована оптимальна по мінімуму часу виведення орбітального літака і літака-носія в задані точки навколоземного простору розгалужена траєкторія авіаційно-космічної системи з гіперзвуковим літаком-носієм, що задовольняє спеціальним умовам в точці розділення і обмеженню на різницю висот польоту орбітального літака і літака-носія після їх розділення. Показана її більш висока ефективність, у порівнянні за векторним критерієм, по відношенню до траєкторій, які мінімізують час виведення тільки орбітального літака або літака-носія;

- у процесі виконання завдання пошуку оптимальної розгалуженої траєкторії АКС з дотриманням необхідних умов оптимальності у формі принципу мінімуму показана доцільність застосування методики, що полягає в послідовній редукції вихідної моделі динаміки руху ступенів АКС і застосування до редукованих моделей, необхідних умов оптимальності розгалужених траєкторій з метою отримання перших наближених рішень для задачі з повною моделлю.

Результати дисертаційних досліджень рекомендується використовувати в навчальних та наукових закладах МОН України, НАН України та підприємствах промисловості при розробці тактико-технічних вимог до систем керування складеними динамічними системами, синтезі алгоритмів їх функціонування і розрахунку оптимальних траєкторій.

## РОБОТИ, ОПУБЛІКОВАНІ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*Статті у наукових фахових виданнях*

1. Тачиніна О.М. Математическая постановка задачи оптимизации движения группы летающих роботов на базе беспилотных летательных аппаратов / О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко // Вісник АМУ. – К.: АМУ, 2014. – Вип. 1(7). – С. 93-99.

2. Тачиніна О.М. Метод построения оптимальных траекторий с альтернативой / О.М. Тачиніна, О. І. Лисенко // Вісник АМУ. – К.: АМУ, 2014. – Вип. 2(8). – С.69-74.

3. Тачиніна О.М. Постановка задачі застосування теорії розгалужених траєкторій для вирішення задач пошуку та рятування в зоні надзвичайних ситуацій/ О.М. Тачиніна, О. І. Лисенко, О. Ф. Нікулін, С. М. Чумаченко // Техническая механика: научный журнал.– 2015. – № 1. – С. 73-78.

4. Тачиніна О.М. Условия оптимальности траектории группы беспилотных летательных аппаратов с возможным изменением цели движения в любой момент времени в заданном интервале / О.М. Тачиніна // Вісник АМУ. – К.: АМУ, 2015. – Вип. 1(9). – С. 178-184.

5. Тачиніна О.М. Математическое моделирование движения квадрокоптера/ О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко // Вісник АМУ. – К.: АМУ, 2015. – Вип. 2(10). – С.128-136.

6. Тачиніна О.М. Математическая постановка задачи оптимизации движения группы квадрокоптеров/ О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко, С. М. Чумаченко// Техническая механика: научный журнал.– 2016. – № 1 – С.74-83.

7. Tachinina O. M. Optimization of multi-object dynamic system motion path with consideration for predetermined criteria / O. M. Tachinina // Scientific Bulletin AMA– K.: AMA, 2016. – ISSUE. 1-2(11). – P. 247-253.

8. Тачиніна О.М. Условия оптимальности траектории движения носителя при размещении сенсоров в зоне чрезвычайной ситуации /О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко, С. М. Чумаченко// Техническая механика: научный журнал. –2016. – №. 3 – С.87-93.

9. Тачиніна О.М. Условия оптимальности траектории выведения группы наноспутников авиационно-космической системой / О.М. Тачиніна // Техническая механика: научный журнал.– 2017. – №. 1 – С.40-46.

10. Тачиніна О.М. Алгоритм интеллектуального подсказчика для оператора управляющего группой БПЛА/ О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко, І.В. Алєксєєва // Науковий журнал «Вчені записки Таврійського національного університету імені В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки».– К.: ТНУ, 2017. – Том 28 (67) № 1. – С.19 – 22.

11. Тачиніна О.М. Моделі застосування інформаційно-телекомунікаційних технологій на основі безпілотних авіаційних комплексів у надзвичайних ситуаціях/ О.М. Тачиніна, Лисенко О.І., Чумаченко С.М. та ін.// Монографія.–К.: НАУ, 2016. – 335 с.

*Статті у наукових фахових виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз*

12. Тачиніна О.М. Метод размещения сенсоров в зоне чрезваычайной ситуации на безе технологии составных динамических систем//О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко // Сборник научных трудов SWorld. – Выпуск 3(36). Том 1., 2014. – С. 84-89.

13. Тачиніна О.М. Новая интерпретация функционала обобщенной работы в задачах оптимального управления малогабаритными беспилотными летательными аппаратами/ О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко, Е.В. Назаренко // Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. праць. – К.: НАУ, 2015. – Вип. 4(52). – С.88-93.

14. Tachinina O. M. Optimal path of nanosatellites group injection for earth remote monitoring/ O. M.Tachinina // Electronics and control systems.– K.: NAU, 2016. –№ 3(49). – pp. 106-112.

15. Tachinina O. M. Optimal principle for dynamical system with alterative orbiting/O.M. Tachinina, O.I. Lysenko // Electronics and control systems.– K.: NAU, 2016. –№ 4(50). – pp. 108-113.

16. Тачиніна О.М. Метод динамического программирования для оптимизации произвольной ветвящейся траектории движения составной

динамической системы//О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко// Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. праць. – К.: НАУ, 2017. – Вип. 3(59). – С.38 – 43

17. Тачиніна О.М. Условия оптимальности ветвящейся траектории информационного робота с текущим моментом разделения / О.М.Тачиніна // Адаптивні системи автоматичного управління // Міжвідомчий науково-технічний збірник. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка». – 2017. – Вип. 2(31). – С. 110–117.

18. Tachinina O. M. Method of dynamic programming for information robot's branching path optimization/ O. M. Tachinina // Electronics and control systems.– K.: NAU, 2017. – № 3(53). – P. 100-105.

19. Тачиніна О.М. Принцип расширения для составных динамических систем с произвольной схемой ветвления траектории /О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко // Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. праць. – К.: НАУ, 2017. – Вип. 4(60). – С.51-57.

20. Тачиніна О.М. Розвиток методу оптимізації розгалужених траєкторій у задачах розрахунку опорного руху двоступеневого безпілотного демонстратора гіперзвукових технологій //О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко, І.В. Алєксєєва // Математичні машини і системи. – 2018.– № 1.– С.101-108.

21. Тачиніна О.М. Условия оптимальности ветвящейся траектории носителя при размещении десантируемого груза в зоне чрезвычайной ситуации/ О.М. Тачиніна // Системні технології: міжвузівський зб. наук. праць. –2017.– Вип. 5(112). – С. 70-79.

22. Tachinina O. M. Method of path constructing of information robot on the basis of unmanned aerial vehicle /O. M. Tachinina, O. I. Lysenko // Proceedings of the National Aviation University. –K.: NAU, 2017. –№ 4(73). – P. 60-68.

*Патенти*

23. Патент України на корисну модель: Спосіб безперервної аеропросторової ретрансляції пошуково-рятувальної інформації в умовах ліквідації наслідків надзвичайної ситуації / О.І. Лисенко, О.М. Тачиніна, В.М. Шмаров та ін.–№ 99483, заявл. 05.12.2014; опубл. 10.06.2015, бюл. № 11. – 14 с.

24. Патент України на корисну модель: Спосіб стабілізації польоту безпілотного літального апарата на траєкторіях баражування / О.І. Лисенко, О.М. Тачиніна, В.М. Шмаров та ін.–№ 93824, заявл. 10.06.2014; опубл. 10.10.2014, бюл. № 19. – 7 с.

25. Патент України на корисну модель: Спосіб зниження енерговитрат польоту безпілотного літального апарата / О.І. Лисенко, О.М. Тачиніна, В.М. Шмаров та ін. – № 91443, заявл. 04.12.2013; опубл. 10.07.2014, бюл. № 13. – 9 с.

26. Патент України на корисну модель: Система стабілізації безпілотного літального апарата на траєкторіях баражування / О.І. Лисенко, О.М. Тачиніна, В.М. Шмаров та ін. – № 91812 , заявл. 24.03.2014; опубл. 10.07.2014, бюл. № 13. – 7 с.

27. Патент України на винахід: Спосіб зниження енерговитрат польоту безпілотного літального апарата// О.І. Лисенко, О.М. Тачиніна, В.М. Шмаров та ін.–№ 109483, заявл. 04.12.2013; опубл. 25.08.2015, бюл. № 16. – 9 с.

28. Патент України на винахід: Спосіб безперервної аеропросторової ретрансляції пошуково-рятувальної інформації в умовах ліквідації наслідків надзвичайної ситуації / О.І. Лисенко, О.М. Тачиніна, В.М. Шмаров та ін.– № 110683, заявл. 05.12.2014; опубл. 25.01.2016, бюл. № 2. – 15 с.

29. Патент України на винахід: Система стабілізації безпілотного літального апарата на траєкторіях баражування / О.І. Лисенко, О.М. Тачиніна, В.М. Шмаров та ін.–№ 112657, заявл. 24.03.2014; опубл. 10.10.2016, бюл. № 19. – 8 с.

*Опубліковані праці в збірниках матеріалів і праць міжнародних конференцій, які входять до наукометричної бази Scopus*

30. Tachinina O. M. The scenario-based approach for control of multi-object dynamic system motion/O.M. Tachinina, O.I. Lysenko // IEEE 3rd International Conference, "Actual Problems of Unmanned Air Vehicles Developments" (Kyiv, Ukraine, october 13-15, 2015).– К.: NAU, 2015. – pp. 305-309.

31. Tachinina O. M. . The method of injection of earth remote monitoring subminiature satellites with the aid of flying space launch facility based on AN-124-100 and AN-225 airplanes / O.M. Tachinina, A.V. Gusynin, O.I. Lysenko , S.M. Chumachenko // IEEE 4th International Conference «Methods and Systems of Navigation and Motion Control» (Kyiv, Ukraine, october 18-20, 2016).– К.: NAU, 2016. – pp. 200–205.

32. Tachinina O. M. . Path constructing method of unmanned aerial vehicle/ O.M. Tachinina, O.I. Lysenko, I.V. Alekseeva // IEEE 4th International Conference, «Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Developments» (Kyiv, Ukraine, October, 17-19, 2017).– К.: NAU, 2017. – pp. 254-259.

*Матеріали конференцій*

33. Tachinina O. M. Optimization of flying robots group based on unmanned aerial vehicles / O.M. Tachinina, O.I. Lysenko ,V.M.Kazak, N.A. Tymoshenko .// Simpozionul stintific al inginerilor Romani de pretutindeni - SINGRO 2014, 23-24 octobrie 2014. – Bucureşti: AGIR, 2014. – P. 114–116.

34. Tachinina O. M. The mathematical formulation of movement optimization of flying robots group based on unmanned aerial vehicles / O.M. Tachinina, O.I. Lysenko, H.V. Panchenko // The Sixth World Congress «Aviation in the XXI-st century». (Kyiv, Ukraine, september 23-25, 2014).– К.: NAУ, 2014. – Т. І. – Р. 1.4.20 – 1.4.24.

35. Тачиніна О. М. Математическое моделирование движения квадрокоптера / О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко // Матеріали ХІІ міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2015», (28-29 квітня 2015 р.): тези доп. – К.: НАУ, 2015.– С.19.47 – 19.50.

36. Тачиніна О. М. Квадрокоптеры для поля боя: основные идеи применения/О.М. Тачиніна, О. І. Лисенко, І.С. Романченко, А.П. Андрієвський// Матеріали науково-практичної конференції «Винахід заради перемоги: обмін

досвідом модернізації і ремонту бойової техніки і озброєння в умовах АТО» (29 травня 2015р., ЦНДІ ОВТ ЗС України) : тези доп. – К.: – ЦНДІ ОВТ ЗСУ, 2015. –С. 31-38.

37. Тачиніна О. М.. Метод размещения сенсоров в зоне чрезвычайной ситуации на базе технологии составных динамических ситем / О.М. Тачиніна, О. І. Лисенко // «Сучасні проблеми державного та муніципального управління»: міжнародна науково-практична конференція, 3 квітня 2015 р., Київ: тези доп. – К., 2015.– Ч. 1.– С.225-226.

38. О.М. Тачиніна. Математическая постановка задачи оптимизации движения группы квадрокоптеров /О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко, С.М. Чумаченко // «Актуальні проблеми моделювання ризиків і загроз виникнення надзвичайних ситуацій на об'єкт критичної інфраструктури»: праці міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 20-21 квітня 2015р.). – К.:УкрНДІЦЗ, 2015.–Вип.1.–С.–113-119.

39. Tachinina O. M. The system of injection of subminiature satellites (nanosatellites) to near-Earth orbit on the basis of Ан-124-100 airplane/ O.M. Tachinina, O.I. Lysenko, S.M. Chumachenko // Tenth International Scientific Conference «Modern challenges in telecommunications» and Eighth International scientific conference of undergraduate and graduate students «Prospects for development of information-telecommuni-cation technologies and systems» (Kyiv, Ukraine, April 19-22, 2016). – К.: KPI, 2016. – pp. 477-449.

40. Tachinina O. M. Features of unmanned aerial vehicles group dynamics and control / O. M. Tachinina, O.I. Lysenko, I.V. Uriadnikova and it.//Usporiadateľ edzinárodnej vedeckej konferencie: Akadémia ozbrojených síl generála Milana Rastislava tefánika (Slovakia, Liptovsky Mikulas, February, 22-26, 2016). – Liptovsky Mikulas, 2016. – pp. 391-397.

41. Тачиніна О. М.. Условия оптимальности траектории движения группы дронов с мультисенсорами на борту с возможным перенацеливанием / Тачиніна О.М. // «Актуальні проблеми моделювання ризиків і загроз виникнення надзвичайних ситуацій на об'єкт критичної інфраструктури»: праці ІІ-ї міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 26-28 квітня 2016р.). – К.:УкрНДІЦЗ, 2016.–С.–295-400.

42. Тачиніна О. М.. Способ размещения сенсоров в зоне чрезвычайной ситуации на базе беспилотных летательных аппаратов /О.М. Тачиніна, О.І. Лисенко, С.М. Чумаченко // XI Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми телекомунікацій» ПТ-2017: Збірник матеріалів конференції (18–21 квітня 2017 р.). К.: НТУУ "КПІ", 2017. – С. 359-361.

## АНОТАЦІЯ

**Тачиніна О.М. Методи синтезу оптимального керування детермінованими складеними динамічними системами із розгалуженими траєкторіями руху.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.13.03 – «Системи та процеси керування». – Національний авіаційний університет, Київ, 2018.

Дисертація присвячена розвитку методів оптимального керування розривними системами стосовно їх застосування для розв’язання задач оперативного синтезу необхідних, достатніх, необхідних і достатніх умов оптимальності розгалужених траєкторій і керування сучасними та перспективними складеними динамічними системами.

Науково обґрунтовано визначення складеної динамічної системи та розгалуженої траєкторії. Побудовано математичну модель руху складеної динамічної системи в формі розгалуженої траєкторії. Розроблено метод представлення математичної моделі руху складеної динамічної системи у вигляді математичної моделі розривної динамічної системи зі змінними у моменти структурних перетворень розмірами векторів стану та керування.

Досліджена та вирішена наукова проблема розробки умов оптимальності, що дають опис набору операцій і правил їх чередування, які є основами оперативного синтезу оптимального керування складеними динамічними системами, які переміщаються по розгалуженим траєкторіям.

Сформульовані і доведені у формі основних теорем необхідні, достатні, необхідні і достатні умови оптимальності управління детермінованою складеною динамічною системою, що переміщається по розгалуженій траєкторії з довільним схемою розгалужень. З основних теорем виведені наслідки для найбільш типових практичних випадків розгалуження траєкторій складених динамічних систем. Наслідки представлені у вигляді максимально підготовленому для розробки на їх базі обчислювальних алгоритмів.

Розроблені умови: володіють універсальністю застосування для розв'язання задач із будь-яким кінцевим числом гілок траєкторії та широтою охоплення математичних моделей складених систем, що приводять до зниження обчислювальних витрат при розрахунках керування та подоланню складностей, пов'язаних з невизначеністю формування початкових умов і «зшивання» траєкторій; дозволяють аналізувати структуру оптимального керування складеними елементами таких систем. Технологічність форми представлення умов оптимальності пояснюється використанням аналітично підготовлених розрахункових співвідношень, що мають ясний фізичний зміст і орієнтованих на застосування стандартних прикладних програм.

**Ключові слова :** оптимальне керування, оптимальні умови, розгалужені траєкторії, складена динамічна система

## АННОТАЦИЯ

**Тачинина Е.Н. Методы синтеза оптимального управления детерминированными составными динамическими системами с ветвящимися траекториями движения**. – Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.13.03 – «Системы и процессы управления». – Национальный авиационный университет, Киев, 2018.

Диссертация посвящена развитию методов оптимального управления разрывными системами относительно их применения для решения задач

оперативного синтеза необходимых, достаточных, необходимых и достаточных условий оптимальности ветвящихся траекторий и управления современными и перспективными составными динамическими системами.

Научно обосновано определение составной динамической системы и ветвящейся траектории. Построена математическая модель движения составной динамической системы в форме ветвящейся траектории. Разработан метод представления математической модели движения составной динамической системы в виде математической модели разрывной динамической системы с переменными в моменты структурных преобразований размером векторов состояния и управления.

Исследована и решена научная проблема разработки условий оптимальности, дающих описание набора операций и правил их чередования, которые являются основами оперативного синтеза оптимального управления составными динамическими системами, которые перемещаются по ветвящимся траекториям.

Сформулированы и доказаны в форме основных теорем необходимые, достаточные, необходимые и достаточные условия оптимальности управления детерминированной составной динамической системой, перемещающейся по ветвящейся траектории с произвольной схемой разветвленя. Из основных теорем выведены следствия для наиболее типовых практических случаев разветвления траекторий составных динамических систем. Следствия представлены в виде максимально подготовленном для разработки на их базе вычислительных алгоритмов. Разработаны условия: обладают универсальностью применения для решения задач с любым конечным числом ветвей траектории и широтой охвата математических моделей составных систем, приводящих к снижению вычислительных затрат при расчетах управления и преодолению сложностей, связанных с неопределенностью формирования начальных условий и «сшивания» траекторий; позволяют анализировать структуру оптимального управления составными элементами таких систем. Технологичность формы представления условий оптимальности объясняется использованием аналитически подготовленных расчетных соотношений, имеющих ясный физический смысл и ориентированных на применение стандартных приложений.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, оптимальные условия, ветвящиеся траектории, составная динамическая система

## ABSTRACT

**Tachinina O.M. Methods for the synthesis of optimal control of deterministic compound dynamical systems with branching trajectories of motion. - Manuscript.**

Doctor of Engineering Science thesis with a degree in 05.13.03-«Systems and Control»– National Aviation University, Kiev, 2018.

The thesis is dedicated to the development of methods for the optimal control of discontinuous systems with respect to their application for solving the problems of operative synthesis of necessary, sufficient, necessary and sufficient conditions for optimality of branching trajectories and control of modern and perspective compound dynamic systems.

The definition of a compound dynamic system and branching trajectory is scientifically justified. A mathematical model of the motion of a compound dynamical system in the form of a branching trajectory is constructed. A method is developed for representing a mathematical model of motion of a compound dynamic system in the form of a mathematical model of a discontinuous dynamical system with variables at the moments of structural transformations of the size of the state and control vectors.

The scientific problem of optimality conditions development describing the set of operations and rules of their alternation is investigated and solved, which are the basis for the operational synthesis of optimal control of compound dynamical systems that move along branching trajectories.

The necessary, sufficient, necessary and sufficient conditions for the optimality of the control of a deterministic compound dynamical system moving along a branching trajectory with an arbitrary branching scheme are formulated and proved in the form of basic theorems. From the main theorems, we deduce the consequences for the most typical practical cases of branching trajectories of compound dynamical systems. The consequences are presented in the form of the most computational algorithms for developing on their basis. Conditions have been developed: they are universally applicable for solving problems with any finite number of branches of the trajectory and the breadth of coverage of mathematical models of compound systems, leading to a reduction in computational costs in the calculation of control and overcoming the difficulties associated with the uncertainty of the formation of initial conditions and the «sewing» of trajectories; allow us to analyze the structure of optimal control of the constituent elements of such systems. The technological nature of the form of representation of optimality conditions is explained by the use of analytically prepared calculated relationships that have a clear physical meaning and are oriented towards the application of standard applications.

**Keywords:** optimal control, optimal conditions, branching trajectories, compound dynamic system.