МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Лабораторний практикум
для студентів напряму підготовки
6.170101 «Безпека інформаційних
і комунікаційних систем»

VIVERE!
VINCERE!
CREARE!

Київ 2014

УДК 519.2 (076.5)
ББК В172я7
Т338

Укладачі: *О.К. Юдін, А.В. Чунарьова*

Рецензент: *А.Б.Єлізаров*

Затверджено на засіданні методично-редакційної ради Національного авіаційного університету (протокол №2/12 від 15.03.2012)

Теорія ймовірностей та математична статистика: лабораторний практикум / уклад.: О.К.Юдін, А.В.Чунарьова. – К.: НАУ, 2012. – 32 с.

Містить теоретичні відомості, порядок, завдання виконання лабораторних робіт та список літератури.

Для студентів напряму підготовки 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем».

ЗМІСТ

ВСТУП...4
Лабораторна робота 1
Дослідження однопараметричних законів розподілу
неперервних випадкових величин 5
Лабораторна робота 2
Дослідження двопараметричних законів розподілу
неперервних випадкових величин 8
Лабораторна робота 3
Дослідження статистичної функції розподілу
випадкової величини і гістогами...11
Лабораторна робота 4
Критерій згоди χ^2 Пірсона..14
Лабораторна робота 5
Кореляційний аналіз. Коефіцієнт кореляції...............................18
Лабораторна робота 6
Сутність основного завдання прийому сигналів за
наявності завад у каналі зв'язку..20
Лабораторна робота 7
Критерії максимуму
правдоподібності та апостеріорної ймовірності.........................22
Лабораторна робота 8
Критерії Котельнікова та Неймана-Пірсона 26
Лабораторна робота 9
Багатоальтернативні правила прийняття рішення......................28
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ 31

ВСТУП

Лабораторний практикум з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» є складовою професійної підготовки фахівців за напрямом 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем».

Мета курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» – надати студентам знання та основні поняття з основ дисципліни; навчити визначати основні математичні моделі, які застосовуються для опису ймовірнісних характеристик процесів у радіотехнічних пристроях, методи аналізу проходження сигналу й завад через лінійні радіотехнічні системи, принципи статистичного синтезу радіотехнічних пристроїв.

Лабораторний практикум складається з теоретичної та практичної частин. Практикумом передбачено здобуття студентами необхідних навичок із реалізації за допомогою програмного забезпечення MathCAD основних математичних моделей теорії ймовірностей та математичної статистики. Студенти повинні навчитися проводити комп’ютерне моделювання законів розподілу випадкових величин та визначати їх кількісні характеристики; проводити моделювання каналу зв’язку і визначення параметрів інформаційного сигналу та моделювання основних завад, наявних в інформаційних системах та мережах; здійснювати кореляційний аналіз та визначати коефіцієнт кореляції; моделювати параметричні алгоритми ідентифікації сигналів; критеріїв прийняття рішення; виконувати ідентифікацію прийнятого інформаційного сигналу і знаходити ймовірності правильного прийняття рішення при вирішенні двохальтернативної та багатоальтернативної процедури прийняття рішення.

Знання та вміння, здобуті під час вивчення цієї дисципліни, будуть використані як базові для опанування переважної більшості дисциплін професійної та практичної підготовки фахівців напряму 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем», серед яких «Інформаційно-комунікаційні системи та мережі», «Теорія інформації та кодування», «Технології програмування», «Прикладна криптографія», «Захист програмного забезпечення».

Лабораторна робота 1
ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧНИХ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета: теоретично та експериментально дослідити за допомогою програмного забезпечення MathCad закони розподілу випадкових величин.

Теоретичні відомості

Законом розподілу випадкової величини називається співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та їх імовірностями. Закони розподілу дозволяють досить просто визначати всі основні характеристичні та кількісні характеристики випадкових величин.

Експоненціальний закон розподілу

Експоненціальний закон розподілу відіграє велику роль у теорії масового обслуговування та теорії надійності. Неперервна випадкова величина x має експоненціальний закон розподілу з параметром $\lambda > 0$, якщо її щільність ймовірності $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0. \end{cases}$$

На рис. 1.1 показано графік щільності розподілу ймовірності експоненціального закону розподілу випадкових величин. Функція розподілу випадкової величини x, розподіленої за експоненціальним законом, є:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ подано на рис 1.2.

Визначимо числові характеристики випадкової величини за експоненціальним законом розподілу.

Математичне сподівання: $m_x = \dfrac{1}{\lambda}$.

Дисперсія: $D_x = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Середньоквадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Коефіцієнт асиметрії: $A_x = 2$.

Ексцес: $E_X = 6$.

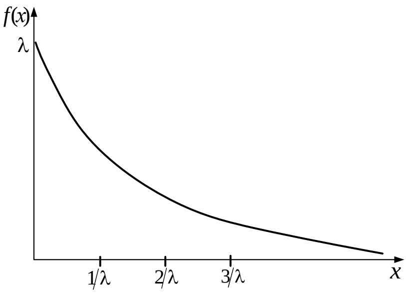

Рис. 1.1. Графік щільності розподілу ймовірності експоненціального закону

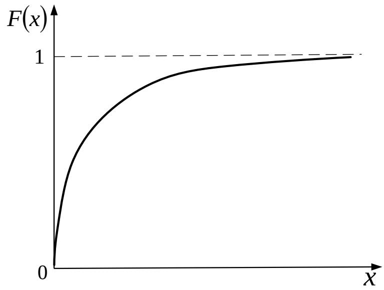

Рис. 1.2. Графік функції розподілу експоненціального закону

Релеївський закон розподілу

Неперервна випадкова величина X має релеївський закон розподілу з параметром σ_x, якщо її щільність імовірності $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{x}{\sigma_x^{\;2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}},\ 0 \le x < \infty .$$

На рис. 1.3 показано графік щільності розподілу ймовірності релеївського закону розподілу. Функція розподілу випадкової величини x, розподіленої за релеївським законом, є

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}},\ 0 \le x < \infty .$$

Графік функції $F(x)$ подано на рис. 1.4.

Визначимо числові характеристики випадкової величини з рівномірним розподілом.

Математичне сподівання: $m_x \approx 1{,}25\sigma$.

Дисперсія: $D_x \approx 0{,}43\sigma^2$.

Середньоквадратичне відхилення: $\sigma_x \approx 0{,}65\sigma$.

Коефіцієнт асиметрії: $A_x = 0{,}63$.

Ексцес: $E_x = -0{,}3$.

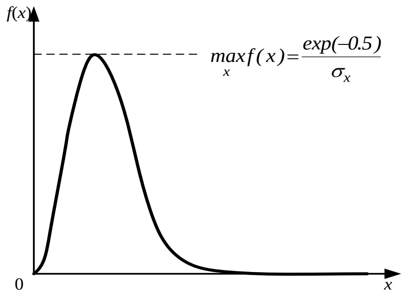

Рис. 1.3. Графік щільності розподілу ймовірності релеївського закону

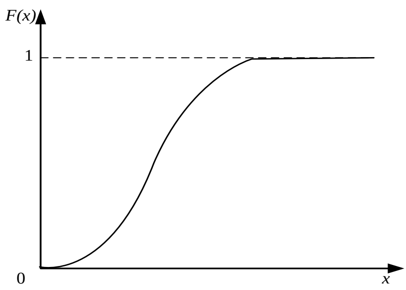

Рис. 1.4. Графік функції розподілу релеївського закону

Порядок виконання лабораторної роботи

Кожен студент повинен виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанта і зробити висновки на основі проведених теоретичних та практичних досліджень. У висновках слід указати, яких навичок та знань набули студенти під час виконання індивідуальних завдань.

У середовищі MathCad змоделювати експоненціальний та релеївський закони розподілу випадкових величин відповідно до варіанта та дослідити числові характеристики.

Визначити головні характеристики випадкових величин:

– щільність розподілу ймовірностей;
– функція розподілу ймовірностей.

Визначити числові характеристики законів розподілу:

– математичне сподівання (перший центральний момент);
– дисперсію (другий центральний момент);
– середньоквадратичне відхилення;
– третій центральний момент (характеристика асиметрії розподілу);
– четвертий центральний момент (характеристика «крутизни» розподілу).

Порядок вибору варіанта: номер варіанта завдання відповідає порядковому номеру студента в журналі.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Що таке закон розподілу випадкових величин?
2. Схарактеризуйте експоненціальний закон розподілу випадкових величин.
3. Схарактеризуйте релеївський закон розподілу випадкових величин.

4. Наведіть основні числові характеристики експоненціального та релеевського законів розподілу випадкових величин.

Лабораторна робота 2
ДОСЛІДЖЕННЯ ДВОПАРАМЕТРИЧНИХ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета: теоретично та експериментально дослідити за допомогою програмного забезпечення MathCad закони розподілу випадкових величин.

Теоретичні відомості

Рівномірний закон розподілу

У радіотехніці рівномірний закон розподілу трапляється рідко, але даному закону належить особлива роль у задачах статистичного моделювання через те, що шляхом нескладних функціональних перетворень можна отримати з рівномірного розподілу випадкових величин інші величини, що підлягають більш складним законам розподілу.

Випадкова величина має рівномірний закон розподілу, якщо її значення в межах деякого інтервалу (a,b) однаково ймовірно розподілені (рис. 2.1). Аналітичний запис рівномірної щільності розподілу ймовірності має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0, x < a, x > b. \end{cases}$$

Функція розподілу випадкової величини *x*, розподіленої за рівномірним законом, є:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & x < a; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ подано на рис. 2.2.

Визначимо числові характеристики випадкової величини з рівномірним розподілом.

Математичне сподівання: $m_x = \int\limits_a^b xf(x)dx = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b xdx = \dfrac{a+b}{2}$.

Дисперсія: $D_x = \int_a^b (x - m_x)^2 f(x) dx = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Середньоквадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Коефіцієнт асиметрії: $A_x = 0$.

Ексцес: $E_x = -1{,}2$.

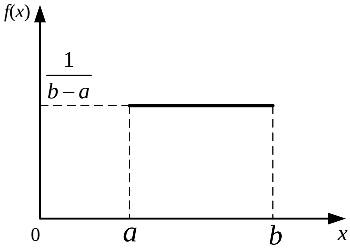

Рис. 2.1. Рівномірна щільність розподілу ймовірності

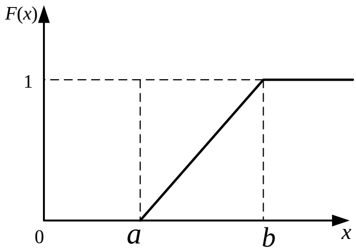

Рис. 2.2. Функція розподілу рівномірно розподіленої величини

Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу найбільше використовується на практиці. Головна особливість, що виділяє його серед інших законів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони. Нормальний закон розподілу (розподіл Гаусса) характеризується щільністю розподілу ймовірності такого виду:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

де σ_x – середньоквадратичне відхилення; m_x – математичне сподівання. На рис. 2.3 показано графік щільності нормального розподілу ймовірності.

Функція розподілу випадкової величини x, розподіленої за нормальним законом, є

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left[\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$ – табульований інтеграл Лапласа.

Графік функції $F(x)$ наведено на рис. 2.4.

Визначимо числові характеристики випадкової величини з рівномірним розподілом.

Дисперсія: $D_x = \sigma_x{}^2$.

Коефіцієнт асиметрії: $A_x = 0$.

Ексцес: $E_x = 0$.

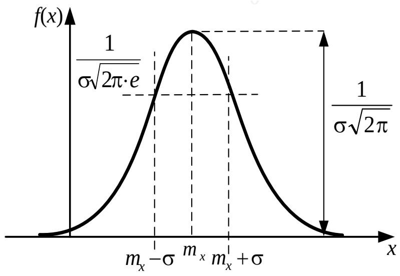

Рис. 2.3. Графік нормальної щільності розподілу ймовірності

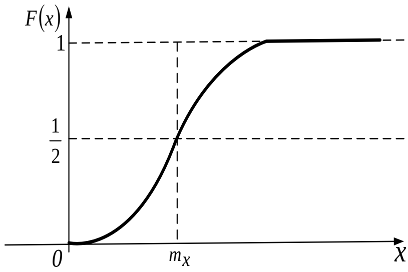

Рис. 2.4. Графік функції розподілу нормального закону

Порядок виконання лабораторної роботи

Кожен студент повинен виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанта і зробити висновки на основі проведених теоретичних та практичних досліджень. У висновках потрібно вказати яких навичок та знань набули студенти під час виконання індивідуальних завдань .

У середовищі MathCad змоделювати рівномірний та нормальний закони розподілу випадкових величин відповідно до варіанта та дослідити числові характеристики (за допомогою вбудованих функцій MathCad та класичних формул).

Визначити головні характеристики випадкових величин:

– щільність розподілу ймовірностей;
– функцію розподілу ймовірностей.

Визначити числові характеристики законів розподілу:

– математичне сподівання (перший центральний момент);
– дисперсію (другий центральний момент);
– середньоквадратичне відхилення;
– третій центральний момент (характеристика асиметрії розподілу);
– четвертий центральний момент (характеристика «крутизни» розподілу).

Порядок вибору варіанта: номер варіанта завдання відповідає порядковому номеру студента в журналі.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Що таке функція розподілу випадкових величин?
2. Схарактеризуйте нормальний закон розподілу випадкових величин.
3. Схарактеризуйте рівномірний закон розподілу випадкових величин.
4. Назвіть основні числові характеристики нормального та рівномірного законів розподілу випадкових величин.

Лабораторна робота 3

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ І ГІСТОГРАМИ

Мета: теоретично та експериментально дослідити статистичні функції розподілу випадкових величин і порядку побудови гістограми.

Теоретичні відомості

Припустимо, що вивчається деяка випадкова величина X, закон розподілу якої невідомий, і потрібно визначити цей закон з проведеного досліду або перевірити експериментально гіпотезу про те, що величина X підпорядкована тому або іншому закону розподілу випадкової величини. З цією метою над випадковою величиною X проводиться ряд незалежних дослідів (спостережень). У кожному з цих дослідів випадкова величина X набуває певного значення. Сукупність спостережених значень величини і є первинний статистичний матеріал, що підлягає обробці та аналізу.

Простий статистичний ряд є первинною формою запису статистичного матеріалу, який можна обробити різними способами. Одним зі способів такої обробки є побудова статистичної функції розподілу випадкової величини.

Статистичною функцією розподілу випадкової величини X називається частота події $X < x$ у даному статистичному матеріалі:

$$F^*(x) = P^*(X < x).$$

Для того щоб знайти значення статистичної функції розподілу при даному x, досить підрахувати кількість дослідів, у яких величина X набула значення, меншого, ніж x, і поділити на загальну кількість n проведених дослідів. Статистична функція розподілу будь-якої випадкової величини є ступеневою функцією, стрибки якої відповідають значенням випадкової величини та за обсягом дорівнюють частотам цих значень. Якщо кожне окреме значення випадкової величини X спостерігалося лише один раз, то значення статистичної функції розподілу в кожному спостереженні дорівнює $1/n$, де n — число спостережень. Зі збільшенням числа дослідів n згідно з теоремою Бернуллі за будь-якого x частота події $X<x$ наближається (збігається за ймовірністю) до ймовірності цієї події. Отже, зі збільшенням n статистична функція розподілу $F^*(x)$ наближається (збігається за ймовірністю) до справжньої функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X. Загалом побудова статистичної функції розподілу вирішує завдання опису експериментального матеріалу. Однак при великій кількості дослідів n побудова $F^*(x)$ дуже трудомістка. Крім того, часто буває зручно для наочності користуватися іншими характеристиками статистичних розподілів, аналогічними не функції розподілу $F(x)$, а щільності $f(x)$.

Статистичний ряд. Гістограма. У разі великої кількості спостережень (порядку сотень) проста статистична сукупність перестає бути зручною формою запису статистичного матеріалу – вона стає занадто громіздкою і мало наочною. Для надання більшої компактності і наочності статистичний матеріал слід додатково обробити – побудувати так званий «статистичний ряд». Припустимо, що в нашому розпорядженні результати спостережень над неперервною випадковою величиною X, оформлені у вигляді простої статистичної сукупності. Розділимо весь діапазон спостережених значень X на інтервали або «розряди» і підрахуємо кількість значень m_i, що припадає на кожен i-й розряд. Це число розділимо на загальне число спостережень n і знайдемо частоту, що відповідає даному розряду: $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$.

Сума частот усіх розрядів, очевидно, повинна дорівнювати одиниці. Побудуємо табл., в якій наведемо розряди в порядку їх розташування уздовж осі абсцис і відповідні частоти. Ця таблиця називається статистичним рядом.

Статистичний ряд часто оформлюється графічно у вигляді так званої ***гістограми***. Гістограма будується так. По осі абсцис відкладаються розряди, і на кожному з розрядів на їх підставі будується прямокутник, площа якого дорівнює частоті даного розряду.

Таблиця 3.1

Статистичний ряд

I_i	$x_1; x_2$	$x_2; x_3$	$\dots$	$x_i; x_{i+1}$	$\dots$	$x_k; x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_i^*	$\dots$	p_k^*

Примітка: I_i – позначення i-го розряду; x_i; x_{i+1} – межі розряду; p_i^* – відповідна частота; k – число розрядів.

Для побудови гістограми потрібно частоту – кожного розряду розділити на його довжину і отримане число взяти як висоту прямокутника. У разі однакових по довжині розрядів висоти прямокутників пропорційні відповідним частотам. Зі способу побудови гістограми випливає, що повна площа її дорівнює одиниці. Очевидно, зі збільшенням кількості дослідів можна вибирати все більш і більш дрібні розряди; при цьому гістограма буде все більше наближатися до деякої кривої, яка обмежує площу, що дорівнює одиниці. Неважко переконатися, що ця крива є графікоом щільності розподілу величини X. Користуючись даними статистичного ряду, можна наближено побудувати і статистичну функцію розподілу величини X.

Вирівнювання статистичних рядів. Під час обробки статистичного матеріалу часто доводиться вирішувати питання про те, як підібрати для даного статистичного ряду теоретичну криву розподілу, яка має лише суттєві ознаки статистичного матеріалу, але не випадковості, пов’язані з недостатнім обсягом експериментальних даних. Таке завдання називається завданням вирівнювання (згладжування) статистичних рядів. Завдання вирівнювання полягає в тому, щоб підібрати теоретичну плавну криву розподілу, яка з тієї чи іншої точки зору найкраще описує даний статистичний розподіл (рис. 3.2).

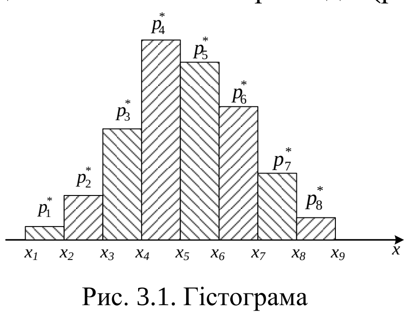

Рис. 3.1. Гістограма

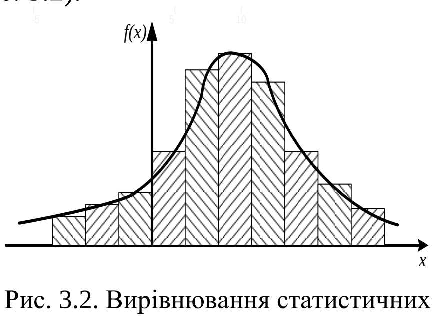

Рис. 3.2. Вирівнювання статистичних рядів

Порядок виконання лабораторної роботи

Кожен студент повинен виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанта і зробити висновки на основі проведених теоретичних та практичних досліджень. У висновках потрібно вказати, яких навичок та знань набули студенти під час виконання індивідуальних завдань.

У середовищі MathCad змоделювати закони розподілу випадкових величин та побудувати гістограми відповідно до варіанта. Провести вирівнювання статистичних рядів.

Порядок вибору варіанта: номер варіанта завдання відповідає порядковому номеру студента в журналі.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Що таке статистичний ряд ?
2. Що являє собою статистична функція ?
3. Що таке гістограма?
4. Наведіть порядок побудови гістограми.
5. Що розуміють під поняттям «вирівнювання статистичних рядів»?

Лабораторна робота 4
КРИТЕРІЙ ЗГОДИ χ^2 ПІРСОНА

Мета: теоретично та експериментально дослідити за допомогою програмного забезпечення MathCad критерій згоди χ^2 Пірсона.

Теоретичні відомості

Статистичний критерій – математичне правило, за яким приймається або відкидається та чи інша статистична гіпотеза. Побудова критерію – це вибір відповідної функції за результатами спостережень (ряду статистично отриманих значень), яка потрібна для виявлення розбіжності між статистичними і теоретичними значеннями. Одним з таких поширених статистичних критеріїв є критерій згоди χ^2 Пірсона. Розглянемо питання про узгодженість теоретичного та статистичного розподілу.

Припустимо, що заданий статистичний розподіл випадкової величини X вирівняно за допомогою деякої теоретичної кривої $f(x)$. Як би добре не була підібрана теоретична крива, між нею та статистичним розподілом можливі розбіжності. Тому порівняння емпіричного й теоретичного розподілів проводиться за допомогою спеціально підібраної випадкової величини – критерію згоди.

На основі отриманих статистичних даних потрібно перевірити гіпотезу H, яка полягає в тому, що випадкова величина X підпорядковується деякому закону розподілу випадкових величин. Цей закон може бути заданий у тій чи іншій формі: наприклад, у вигляді функції розподілу $F(x)$, або у вигляді щільності розподілу $f(x)$, або ж у вигляді сукупності ймовірностей p_i, де p_i – імовірність того, що величина X потрапить до межі i-го розряду.

Для того щоб прийняти або відхилити гіпотезу H, розглянемо деяку величину U, яка характеризує ступінь розбіжності теоретичного та статистичного розподілів.

Величину U можна вибрати різними способами, наприклад, як U можна взяти суму квадратів відхилень теоретичних імовірностей p_i від відповідних частот p_i^*, або ж максимальне відхилення статистичної функції розподілу $F^*(x)$, від теоретичної $F(x)$, або ж максимальне відхилення статистичної щільності розподілу $f^*(x)$ від теоретичної $f(x)$ і т. д.

Припустимо, що величина U обрана тим або іншим способом. Очевидно, це є деяка випадкова величина. Закон розподілу цієї випадкової величини залежить від закону розподілу випадкової величини X, над якою проводилися досліди, і від числа дослідів n. Якщо гіпотеза H правильна, то закон розподілу величини U визначається законом розподілу величини X (функцією $F(x)$ або щільністю $f(x)$) та числом n.

Припустимо, що цей закон розподілу відомий. У результаті даної серії дослідів виявлено, що обрана міра розбіжності U набула деякого значення u. Для відповіді на питання розбіжності між теоретичним і статистичним розподілами приймемо, що гіпотеза H правильна, і обчислимо в цьому припущенні ймовірність того, що міра розбіжності U виявиться не меншою, ніж спостереження в досліді значення u, тобто розрахуємо ймовірність події: $U \geq u$.

Якщо ця ймовірність досить мала, то гіпотезу H слід відкинути як не правдоподібну, коли ж ця ймовірність значна, слід визнати, що експериментальні дані не суперечать гіпотезі H. Розглянемо один з найбільш застосовуваних на практиці критеріїв згоди – так званий критерій χ^2 Пірсона. *Критерій Пірсона* використовується для перевірки гіпотези про закон розподілу випадкової величини.

У багатьох практичних задачах точний закон розподілу невідомий, тобто є гіпотезою H, яка потребує статистичної перевірки. Припустимо, що зроблено n незалежних дослідів, у кожному з яких випадкова величина X набула певного значення. Результати дослідів зведено в k розрядів і подано у вигляді статистичного ряду:

I_i	$x_1;x_2$	$x_2;x_3$	$\dots$	$x_k;x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_k^*

Потрібно перевірити, чи узгоджуються експериментальні дані з гіпотезою про те, що випадкова величина X має цей закон розподілу (заданий функцією розподілу $F(x)$ або щільністю $f(x)$). Назвемо цей закон розподілу «теоретичним».

Знаючи теоретичний закон розподілу, можна знайти теоретичні ймовірності попадання випадкової величини в кожен з розрядів k:

$$p_1, p_2,..., p_k.$$

Перевіряючи узгодженість теоретичного та статистичного розподілів, будемо виходити з розбіжностей між теоретичними ймовірностями p_i і спостереженими частотами p_i^*.

Спочатку як розбіжність між теоретичним і статистичним розподілами можна вибрати суму квадратів відхилень $\left(p_i^* - p_i\right)$, узятих з деякими «вагами» c_i:

$$U = \sum_{i=1}^{k} c_i \left(p_i^* - p_i\right)^2.$$

Коефіцієнти c_i («ваги» розрядів) уводяться тому, що в загальному випадку відхилення, пов'язані з різними розрядами, не можна вважати рівноправними за значущістю. Тому природно «ваги» c_i узяти обернено пропорційними ймовірностям розрядів p_i. Далі виникає питання про те, як вибрати коефіцієнт пропорційності. Візьмемо за коефіцієнт c_i

$$c_i = \frac{n}{p_i},$$

то при великих n закон розподілу величини U має досить прості властивості: він практично не залежить від функції $F(x)$ або щільності розподілу $f(x)$ і від числа дослідів n, а залежить тільки від кількості розрядів k, а саме цей закон зі збільшенням n наближається до так званого розподілу χ^2.

За умови такого вибору коефіцієнтів c_i міра розбіжності зазвичай позначається χ^2:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

де $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$, m_i — число значень в i-му розряді.

Розподіл χ^2 залежить від параметра r – числа «степенів вільності» розподілу.

Для розподілу χ^2 складені спеціальні таблиці. Користуючись цими таблицями, можна для кожного значення χ^2 і числа «степенів вільності» r знайти ймовірність p того, що величина, розподілена за деяким законом, тобто дозволяє знайти погодженість між теоретичним та статистичним розподілом.

Порядок виконання лабораторної роботи

Кожен студент повинен виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанта і зробити висновки на основі проведених теоретичних та практичних досліджень. У висновках потрібно вказати, яких навичок та знань набули студенти під час виконання індивідуальних завдань .

Кожному студенту потрібно:

1. Змоделювати флуктуаційну заваду з нормальним закон розподілу випадкових величин та виміряти її числові характеристики.
2. Змоделювати корисний інформаційний сигнал, поданий у вигляді періодичної послідовності відео- або радіоімпульсу.
3. Змоделювати адитивну суміш корисного сигналу та завади і визначити числові характеристики адитивної суміші.
4. Побудувати гістограми для отриманої адитивної суміші, завади та інформаційного сигналу.
5. Дослідити за допомогою критерію χ^2 Пірсона узгодженість теоретичного та статистичного розподілів випадкових величин.

Порядок вибору варіанта: номер варіанта завдання відповідає порядковому номеру студента в журналі.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Як визначають статистичні критерії згоди і ціль їх використання?

2. Що таке статистичний критерій ?
3. З'ясуйте поняття критерію згоди χ^2 Пірсона.
4. Опишіть схему застосування критерію згоди χ^2 Пірсона.

Лабораторна робота 5
КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ. КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

Мета: теоретично та експериментально дослідити за допомогою програмного забезпечення MathCad кореляційні функції прийнятого інформаційного сигналу.

Теоретичні відомості

Кореляційний аналіз – це сукупність методів виявлення кореляційної залежності, тобто коефіцієнта кореляції між двома випадковими величинами та процесами. *Кореляція* – статистичний взаємозв'язок двох або декількох випадкових величин. При цьому зміни однієї або декількох із цих величин приводять до систематичної зміни іншої величини. Математичною мірою кореляції двох випадкових величин служить кореляційний момент та коефіцієнт кореляції. *Кореляційний момент* – це характеристика системи випадкових величин, що описує, крім розсіювання двох випадкових величин X й Y, ще й зв'язок між ними. Особливу роль у статистичній теорії відіграє *другий змішаний центральний момент:*

$$\mu_{1,1} = M[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}],$$

тобто математичне сподівання добутку центрованих величин.

Через те, що цей момент відіграє важливу роль у теорії систем випадкових величин, уведемо для нього особливе позначення:

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}] = M[(X - m_x)(Y - m_y)].$$

Характеристика K_{xy} називається *кореляційним моментом* (інакше «моментом зв'язку») випадкових величин X, Y.

Для перериваних випадкових величин кореляційний момент виражається формулою

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij} ,$$

а для нерервних – формулою

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij} ,$$

Для характеристики зв'язку між величинами X, Y у чистому вигляді переходять від моменту K_{xy} до безрозмірної характеристики $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$, де σ_x, σ_y — середні квадратичні відхилення величин X, Y.

Ця характеристика називається *коефіцієнтом кореляції* величини X и Y. Коефіцієнт кореляції обертається в нуль одночасно з кореляційним моментом. Отже, *для незалежних випадкових величин коефіцієнт кореляції дорівнює нулю.*

Випадкові величини, для яких кореляційний момент (а значить і коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю, називаються *некорельованими* (іноді — «незв'язаними»).

У випадку $r_{xy} > 0$ говорять про *позитивну кореляцію* величин X та Y, у разі $r_{xy} < 0$ — про *негативну кореляцію.*

$$-1 < r_{xy} < 1 .$$

Позитивна кореляція між випадковими величинами означає, що зі зростанням однієї з них інша має тенденцію в середньому зростати; негативна кореляція означає, що зі зростанням однієї з випадкових величин інша має тенденцію в середньому убувати.

Порядок виконання лабораторної роботи

Кожен студент повинен виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанта і зробити висновки на основі проведених теоретичних та практичних досліджень. У висновках слід указати, яких навичок та знань набули студенти під час виконання індивідуальних завдань.

Кожному студенту потрібно:

1. Змоделювати флуктуаційну заваду з нормальним закон розподілу випадкових величин та виміряти її числові характеристики.
2. Змоделювати корисний інформаційний сигнал, поданий у вигляді періодичної послідовності відео- або радіоімпульсу.
3. Змоделювати адитивну суміш корисного сигналу і визначити числові характеристики адитивної суміші.
4. Визначити кореляційну функцію для таких пар випадкових процесів: флуктуаційна завада та інформаційний сигнал; флуктуаційна завада та адитивна суміш; інформаційний сигнал та адитивна суміш.
5. Визначити коефіцієнт кореляції функції для таких пар випадкових процесів: флуктуаційна завада та інформаційний сигнал; флуктуаційна завада та адитивна суміш; інформаційний

сигнал та адитивна суміш.

Порядок вибору варіанта: номер варіанта завдання відповідає порядковому номеру студента в журналі.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Що таке кореляційний аналіз?
2. Що розуміється під поняттям «кореляція»?
3. Що таке коефіцієнт кореляції?
4. Розкрийте поняття позитивної та негативної кореляції.

Лабораторна робота 6
СУТНІСТЬ ОСНОВНОГО ЗАВДАННЯ ПРИЙОМУ СИГНАЛІВ ЗА НАЯВНОСТІ ЗАВАД У КАНАЛІ ЗВ'ЯЗКУ

Мета: теоретично та експериментально дослідити параметри інформаційного сигналу, адитивної суміші та заданої завади каналу зв'язку.

Теоретичні відомості

Під завадами розуміють будь-які випадкові процеси в каналі передачі інформації, що викликають відхилення прийнятого повідомлення від переданого. Завади зазвичай класифікують за місцем їхнього виникнення, за статистичними властивостями і за характером впливу на корисний сигнал.

За місцем виникнення завади можна поділити на зовнішні і внутрішні. До зовнішніх завад відносяться завади, джерела яких перебувають поза системою передачі інформації. Сюди можна зарахувати: атмосферні завади, викликані грозовими розрядами; космічні завади, викликані радіовипромінюванням Сонця й інших небесних тіл; промислові завади, обумовлені роботою різних електричних пристроїв.

Внутрішні завади виникають у самій апаратурі системи передачі інформації. Сюди можна віднести завади, викликані зміною параметрів ліній зв'язку, впливом однієї лінії передачі на іншу, а також за рахунок короткочасних розривів зв'язку; завади, що виникають при перетворенні сигналів в окремих елементах системи; апаратурні перекручування, викликані технічною несправністю або недостатньо точним налаштування апаратури.

За своїми властивостями завади можуть бути детермінованими й випадковими. Захист проти детермінованих завад не викликає особливих утруднень. Надалі розглянемо тільки випадкові завади, які виникають у каналі зв'язку та спричинюють порушення цілісності переданого інформаційного повідомлення.

Усі випадкові перешкоди можна об'єднати в три групи:

імпульсні завади; флуктуаційні завади та синусоїдні завади.

Імпульсні завади подаються у вигляді випадкової послідовності прямокутних імпульсів довільної форми з випадковою амплітудою, тривалістю. Характерною ознакою імпульсних завад є те, що перехідні процеси, викликані в апаратурах яким-небудь імпульсом, устигають практично загаснути до появи наступного імпульсу. Характерними прикладами імпульсних завад є завади, спричинені грозовими розрядами та пов'язані з комутаційними процесами.

Флуктуаційна завада являє собою сукупність великої кількості короткочасних нерегулярних імпульсів з випадковими параметрами. Завади наявні практично в усіх реальних каналах зв'язку, являють собою випадковий процес з нормальним розподілом. Флуктуаційні завади є звичайним білим гауссовим шумом.

Флуктуаційна завада найбільш характерна для більшості телекомунікаційних каналів. Для кількісних розрахунків дії флуктуаційного шуму на сигнал необхідно знати його основні статистичні характеристики. Оскільки флуктуаційний шум створюється як сума великої кількості незалежних коливань, то він згідно з центральною граничною теоремою є стаціонарним ергодичним випадковим процесом із *гауссовим* (нормальним) розподілом імовірності. Спектральна щільність потужності флуктуаційної завади залежить від фізичної природи його утворення, а також від точки, де він спостерігається. Як правило, спектральна щільність потужності флуктуаційної завади рівномірна від нуля до $10^{12} - 10^{13}$ Гц. У цьому випадку шум називають *білим.* Ця назва надана за аналогією з білим світлом, що має всі частотні компоненти. Якщо спектральна щільність потужності шуму рівномірна тільки в обмеженій смузі частот, наприклад сигналу, то шум називають *квазібілим.*

До таких завад можна віднести: теплові шуми опорів і напівпровідникових приладів; космічні завади; атмосферні завади в діапазоні коротких хвиль та ін.

Синусоїдні завади є синусоїдними коливаннями з випадково змінюваною амплітудою, фазою й частотою. Ці завади характеризуються повільною зміною параметрів, унаслідок чого ширина спектра моделювальної функції синусоїдної перешкоди виявляється практично малою порівняно зі смугою пропускання каналу. Джерелами синусоїдних завад можуть бути сторонні радіоустановки, генератори змінного струму та ін.

За характером впливу на корисний інформаційний сигнал завади поділяються на адитивні й мультиплікативні. Адитивна завада – це завада, що є не залежним від сигналу випадковим доданком. Адитивну перешкоду називають іноді «шумами».

Мультиплікативна завада – це завада, що є залежним від сигналу випадковим множником. Більша частина завад, що трапляються на практиці, належить до групи адитивних завад.

Усі випадкові завади є випадковим процесом і описуються за допомогою функцій розподілу ймовірностей або числових характеристик у вигляді моментів розподілу.

Порядок виконання лабораторної роботи

Кожен студент повинен виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанта і зробити висновки на основі проведених теоретичних та практичних досліджень. У висновках потрібно вказати, яких навичок та знань набули студенти під час виконання індивідуальних завдань .

У середовищі MathCad потрібно змоделювати флуктуаційну заваду з нормальним законом розподілу відповідно до заданого варіанта та дослідити її вплив на корисний інформаційний сигнал.

Кожному студенту потрібно:

1. Змоделювати флуктуаційну заваду з нормальним законом розподілу випадкових величин.
2. Змоделювати корисний інформаційний сигнал поданий у вигляді періодичної послідовності відео- або радіоімпульсу.
3. Змоделювати адитивну суміш корисного сигналу та завади.
4. Визначити числові характеристики адитивної суміші і завади.
5. Дослідити вплив завади на інформаційний сигнал.

Порядок вибору варіанта: номер варіанта завдання відповідає порядковому номеру студента в журналі.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Що таке завада в каналі зв’язку?
2. Назвіть основні види завад.
3. Що таке імпульсна завада? Назвіть види імпульсних завад.
4. Назвіть завади за характером впливу на корисний сигнал.
5. Що таке гауссів шум?

Лабораторна робота 7

КРИТЕРІЇ МАКСИМУМУ ПРАВДОПОДІБНОСТІ ТА АПОСТЕРІОРНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Мета: теоретично та експериментально дослідити за допомогою програмного забезпечення MathCad критерії максимуму правдоподібності та апостеріорної ймовірності при розв’язанні двохальтернативного завдання.

Теоретичні відомості

Результатом впливу завад каналу зв'язку є часткова або повна втрата переданої інформації. Прийомний пристрій, здійснюючи обробку вхідного сигналу, що є сумою корисного сигналу й завади, повинен забезпечити добування із прийнятого сигналу якомога більшої кількості необхідної інформації.

Основне завдання приймача полягає в тому, щоб на підставі прийнятої реалізації вирішити найкращим способом, чи є даний сигнал у даній реалізації (завдання ідентифікації), або які параметри корисного сигналу (завдання відновлення). У зв'язку з цим слід виробити критерії, що дозволяють за прийнятим сигналом оптимальним способом вирішити поставлене завдання.

Вибір оптимального способу обробки сигналів і вироблення при цьому відповідних критеріїв становить зміст теорії статистичних рішень.

Завдання ідентифікації полягає в тому, щоб у результаті обробки прийнятого сигналу Y встановити, чи міститься в ньому корисний X сигнал чи ні.

Нехай прийнятий сигнал є адитивною сумою корисного сигналу й завади

$$y(t) = x(t) + \xi(t).$$

Інформаційний сигнал може приймати два значення: x_0 і x_1 з апріорними відповідно ймовірностями $p(x_0)$ та $p(x_1)$, тому справедливим буде співвідношення:

$$p(x_0) + p(x_1) = 1.$$

Отже, можливі дві взаємно виключні (альтернативні) гіпотези: у прийнятому сигналі міститься корисний сигнал (гіпотеза H_1) і відсутній корисний сигнал (гіпотеза H_0). Вирішальний пристрій приймача за даними вибірки повинен встановити, яка з цих гіпотез є правдоподібною.

Простір прийнятих сигналів V умовно розбивається на дві частини: область v_1 відповідає прийняттю гіпотези H_1 про те, що $X = x_1$, область v_0 відповідає прийняттю гіпотези H_0 про те, що $X = x_0$.

Це означає, що якщо вектор прийнятого сигналу виявиться в межах області v_1, то приймається гіпотеза H_1. Якщо ж вектор сигналу Y виявиться в області v_0, то приймається гіпотеза H_0.

У цих умовах можуть бути два значення апостеріорної ймовірності $p(X/Y)$: $p(X_1/Y)$ – умовна ймовірність наявності корисного сигналу X при даному значенні вибірки Y, $p(X_0/Y)$ – умовна імовірність відсутності X при даному значенні вибірки Y.

Аналогічно можна розглядати два значення функції правдоподібності $L(X)$: $L(x_1)=f(Y/X)$ – умовна щільність ймовірності вибірки Y за наявності корисного сигналу X; $L(x_0)=f(Y/x_0)$ – умовна щільність імовірності вибірки Y за відсутності X.

Відношення функцій правдоподібності

$$\lambda=\frac{L(x_1)}{L(x_0)}=\frac{f(Y/x_1)}{f(Y/x_0)}$$

прийнято називати відношенням правдоподібності.

Для вибору гіпотези H_1 або H_0 слід узяти за основу певне правило прийняття рішень.

Вибір правила прийняття рішення в математичному відношенні зводиться до оптимальної розбивки простору прийнятих сигналів V на області v_1 й v_0.

Щоб вибрати те або інше правило прийняття рішення, необхідно керуватися певними критеріями.

Критерій максимуму правдоподібності. Цей критерій формулюється в такий спосіб: найбільш правдоподібне те значення параметра X, для якого функція правдоподібності $L(X)$ максимальна.

Відповідно до цього критерію у разі двохальтернативної ситуації (виявлення сигналу) функції правдоподібності $L(x_1)$ й $L(x_0)$ мають два значення, і обирається та гіпотеза, якій відповідає більше значення функції правдоподібності. Якщо, наприклад, $L(x_1)>L(x_0)$, то приймається гіпотеза H_1. Якщо ж $L(x_1)>L(x_0)$, то приймається гіпотеза H_0.

Цей критерій можна записати в такому вигляді через відношення правдоподібності:

$$\text{якщо } \lambda=\frac{L(x_1)}{L(x_0)}>1, \text{ то } x=x_1;$$

$$\text{якщо } \lambda=\frac{L(x_1)}{L(x_0)}\le 1, \text{ то } x=x_0.$$

Отже, відповідно до даного критерію методика прийняття рішення зводиться до такого: обчислюються функції правдоподібності $L(x_1)$ і $L(x_0)$, визначається відношення правдоподібності X, і залежно від того, більше, дорівнює або менше X від одиниці приймається відповідна гіпотеза.

Критерій максимуму апостеріорної ймовірності. За цим критерієм при отриманому значенні вибірки Y приймається та гіпотеза, за якої апостеріорна ймовірність $p(X/Y)$ максимальна.

У разі двохальтернативної ситуації є два значення апостеріорної ймовірності $p(x_1/Y)$ і $p(x_0/Y)$. Зазвичай розглядається відношення цих величин і правило прийняття рішення записується у вигляді:

$$\text{якщо } \frac{p(x_1/Y)}{p(x_0/Y)} > 1, \text{ то } X = x_1;$$

$$\text{якщо } \frac{p(x_1/Y)}{p(x_0/Y)} \le 1, \text{ то } X = x_0.$$

Використовуючи формулу Баєса, виразимо відношення апостеріорних імовірностей через відношення функцій правдоподібності:

$$\frac{p(x_1/Y)}{p(x_0/Y)} = \frac{p(x_1)L(X_1)}{p(x_0)L(X_0)} = \frac{p(x_1)}{p(x_0)}\lambda.$$

Тоді критерій максимуму апостеріорної ймовірності може бути виражений через відношення правдоподібності:

$$\text{якщо } \quad \frac{p(x_1)}{p(x_0)}\lambda > 1, \text{ то } X = x_1;$$

$$\text{якщо } \quad \frac{p(x_1)}{p(x_0)}\lambda \le 1, \text{ то } X = x_0.$$

Співвідношення можна подати у вигляді:

$$\text{якщо } \quad \lambda > \frac{p(x_0)}{p(x_1)} = \lambda_0, \text{ то } X = x_1;$$

$$\text{якщо } \quad \lambda \le \frac{p(x_0)}{p(x_1)} = \lambda_0, \text{ то } X = x_0.$$

де λ_0 – граничне значення відношення правдоподібності.

Отже, процедура прийняття рішення відповідно до критерію максимуму апостеріорної ймовірності така ж, як і відповідно до критерію максимуму правдоподібності. Відмінність полягає лише в тому, що в першому випадку відношення правдоподібності порівнюються з одиницею, а в другому – з відношенням апріорних імовірностей $p(x_0)/p(x_1)$. За наявності апріорних даних $p(x_0)$ і $p(x_1)$ доцільно застосовувати критерій максимуму апостеріорної ймовірності, тому що при цьому є можливість користуватися додатковою інформацією, що дозволяє точніше розв'язати завдання ідентифікації сигналу.

Порядок виконання лабораторної роботи

Кожен студент повинен виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанта і зробити висновки на основі проведених теоретичних та практичних досліджень. У висновках потрібно вказати, яких навичок та знань набули студенти під час виконання індивідуальних завдань.

Кожному студенту потрібно:

1. Змоделювати флуктуаційну заваду з нормальним законом розподілу випадкових величин та виміряти числові характеристики.
2. Змоделювати корисний інформаційний сигнал, поданий у вигляді періодичної послідовності відео- або радіоімпульсу;
3. Змоделювати адитивну суміш корисного сигналу та завади і визначити числові характеристики адитивної суміші.
4. Дослідити критерій максимуму правдоподібності та апостеріорної ймовірності.

Порядок вибору варіанта: номер варіанта завдання відповідає порядковому номеру студента в журналі.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Назвіть основні завдання прийому сигналів за наявності завад у каналі зв'язку.
2. Що таке відношення правдоподібності?
3. Укажіть особливості прийняття рішення при використанні критерію максимуму правдоподібності.
4. Назвіть особливості прийняття рішення при використанні критерію максимуму апостеріорної ймовірності.
5. Назвіть відмінності критерію максимуму правдоподібності та максимуму апостеріорної ймовірності.

Лабораторна робота 8
КРИТЕРІЇ КОТЕЛЬНІКОВА ТА НЕЙМАНА-ПІРСОНА

Мета: теоретично та експериментально дослідити за допомогою програмного забезпечення MathCad критерії Котельнікова та Неймана-Пірсона під час виконання двохальтернативного завдання.

Теоретичні відомості

Критерій ідеального спостерігача (критерій Котельнікова). Відповідно до даного критерію обирається та гіпотеза, при якій забезпечується мінімум загальної помилки прийняття рішення.

Під час розв'язання задачі ідентифікації сигналу можуть буть помилки двох видів:

1) за відсутності корисного інформаційного сигналу вектор прийнятого сигналу Y виявляється в області v_1 і приймається відповідно до цього гіпотеза H_1;

2) за наявності корисного сигналу вектор Y виявляється в області v_0 і приймається гіпотеза H_0.

Перша помилка називається помилкою першого роду, або «фіктивною тривогою». Друга помилка називається помилкою другого роду, або «пропуском сигналу». Кількісно помилки першого й другого роду оцінюються умовними ймовірностями α і β помилковими рішеннями про наявність корисного сигналу, коли в дійсності він відсутній, і про відсутність сигналу, коли в дійсності він є:

$$\alpha = p\left(Y \in v_1/x_0\right) = \int_{v_1} f\left(Y/x_0\right)dY;$$

$$\beta = p\left(Y \in v_0/x_1\right) = \int_{v_0} f\left(Y/x_1\right)dY.$$

Загальна безумовна ймовірність помилкового рішення визначається виразом:

$$p_{пом} = p(x_0)\alpha + p(x_1)\beta$$

Отже, умова оптимального рішення за критерієм ідеального спостерігача має вигляд:

$$p_{пом} = p(x_0)\alpha + p(x_1)\beta = min\,.$$

Цей критерій можна записати в такому вигляді через відношення правдоподібності:

$$\text{якщо} \quad \frac{f\left(Y/x_1\right)}{f\left(Y/x_0\right)} = \lambda > \frac{p(x_0)}{p(x_1)} = \lambda_0\,,\ \text{то}\ X = x_1;$$

$$\text{якщо} \quad \frac{f\left(Y/x_1\right)}{f\left(Y/x_0\right)} = \lambda \le \frac{p(x_0)}{p(x_1)} = \lambda_0\,,\ \text{то}\ X = x_0.$$

Критерій Неймана-Пірсона. Цей критерій ґрунтується на тому, що помилки першого і другого роду не однаково небезпечні, причому помилка першого роду приводить до таких наслідків, що її ймовірність необхідно обмежити деякою дуже малою величиною. Другу помилку бажано при цьому забезпечити мінімальною.

Виходячи із цього, критерій Неймана-Пірсона можна сформулювати в такий спосіб: найкращим рішенням є таке, при якому забезпечується найменша ймовірність помилки другого роду при заданій припустимій імовірності помилки першого роду.

Отже, відповідно до критерію Неймана-Пірсона слід забезпечити

$$\beta = \int_{v_0} f\left(Y/x_1\right)dY = min\ ,\ \text{при}\ \alpha = \int_{v_1} f\left(Y/x_0\right)dY = \varepsilon\ ,$$

де ε – наперед задана величина.

Отже, правило прийняття рішення відповідно до критерію Неймана-Пірсона можна записати у вигляді:

$$\text{якщо}\quad \frac{f\left(Y/x_1\right)}{f\left(Y/x_0\right)} = \lambda > \lambda_0\ ,\ \text{то}\ \ X = x_1\ ;$$

$$\text{якщо}\quad \frac{f\left(Y/x_1\right)}{f\left(Y/x_0\right)} = \lambda \le \lambda_0\ ,\ \text{то}\ \ X = x_0\ .$$

Порядок виконання лабораторної роботи

Кожен студент повинен виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанта і зробити висновки на основі проведених теоретичних та практичних досліджень. У висновках потрібно вказати, яких навичок та знань набули студенти під час виконання індивідуальних завдань .

Кожному студенту потрібно:

1. Змоделювати флуктуаційну заваду з нормальним закон розподілу випадкових величин та виміряти числові характеристики.
2. Змоделювати корисний інформаційний сигнал, поданий у вигляді періодичної послідовності відео- або радіоімпульсу.
3. Змоделювати адитивну суміш корисного сигналу та завади і визначити числові характеристики адитивної суміші.
4. Дослідити критерій Котельнікова та Неймана-Пірсона.

Порядок вибору варіанта: номер варіанта завдання відповідає порядковому номеру студента в журналі.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Що таке помилки першого та другого роду?
2. Як розраховується ймовірність помилкового прийняття рішення при використанні критерію Котельнікова?
3. Охарактеризуйте правило прийняття рішення при використанні критерію Котельникова.

4. Охарактеризуйте правило прийняття рішення при використанні критерію Неймана-Пірсона.

Лабораторна робота 9
БАГАТОАЛЬТЕРНАТИВНІ ПРАВИЛА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ

Мета: теоретично та експериментально дослідити за допомогою програмного забезпечення MathCad критерії прийняття рішення під час розв’язання багатоальтернативної задачі.

Теоретичні відомості

Одним зі способів оптимального способу обробки сигналів і вироблення при цьому відповідних критеріїв є розрізнення сигналів.

При розрізненні сигналів може бути багатоальтернативна ситуація, коли корисний сигнал X може мати багато значень і приймальний пристрій обробки повинен визначити, яке саме значення з цієї безлічі є в дійсності. Розрізнення багатьох сигналів у принциповому відношенні мало відрізняється від задачі ідентифікації. Нехай сигнал X може набувати n можливих значень $x_1, x_2 ... x_n$ з апріорними ймовірностями $p(x_1), p(x_2) ... p(x_n)$ відповідно. При цьому простір сигналу V розбивається на n областей $v_1, v_2 ... v_n$ відповідних прийняття гіпотез $H_1, H_2 ... H_n$ про те, що $X = x_1, X = x_2, ..., X = x_n$ відповідно.

Правила прийняття рішень і розділення простору V на області $v_1, v_2 ... v_n$ можуть проводитися відповідно до будь-якого з критеріїв, розглянутих для випадку двохальтернативної ситуації і узагальнених для випадку багатоальтернативної ситуації. При розв’язанні задачі розрізнення сигналів використовуються ті ж критерії, що й при ідентифікації сигналу.

Процедура роботи вирішального пристрою приймача при розрізненні сигналів така. За даними вибірки Y визначаються функції правдоподібності $L(x_1) = f(Y/x_1)$; $L(x_2) = f(Y/x_2)$, … , $L(x_n) = f(Y/x_n)$і обчислюються співвідношення для всіх можливих поєднань пар x_j і x_i

$$\lambda_{ji} = \frac{f(Y/x_j)}{f(Y/x_i)}.$$

Порівнюються отримані значення співвідношення правдоподібності з пороговим значенням і вибирається таке значення сигналу x_j, для якого всі $\lambda_{ji} > \lambda_0$.

Порядок виконання лабораторної роботи

Кожен студент повинен виконати індивідуальне завдання відповідно до варіанта і зробити висновки на основі проведених теоретичних та практичних досліджень. У висновках потрібно вказати, яких навичок та знань набули студенти під час виконання індивідуальних завдань.

Кожному студенту потрібно:

1. Змоделювати флуктуаційну заваду з нормальним законом розподілу випадкових величин та виміряти числові характеристики.
2. Змоделювати корисний інформаційний сигнал, поданий у вигляді періодичної послідовності відео- або радіоімпульсу.
3. Змоделювати корисний інформаційний сигнал, який може приймати n можливих значень відповідно до варіанта.
4. Змоделювати адитивну суміш корисного сигналу та завади і визначити числові характеристики адитивної суміші.
5. Дослідити процедуру роботи вирішального пристрою під час розв'язання багатоальтернативної задачі, використовуючи критерій відповідно до заданого варіанта.

Порядок вибору варіанта: номер варіанта завдання відповідає порядковому номеру студента в журналі.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Що таке розрізнення сигналів?
2. Що таке багатоальтернативна ситуація ?
3. Запишіть співвідношення правдоподібності для багатоальтернативної ситуації.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Статистична обробка даних: монографія / В.П.Бабак, А.Я.Білецький, О.П.Приставка, П.О.Приставка. – К. : МІВВЦ, 2001. – 288 с.

2. Бабак В.П., Теорія ймовріностей, випадкові процеси та математична статистика: підручник / В.П.Бабак, Б.Г.Марченко, М.Є.Фриз. – К. : Техніка,2004. – 288с.

3. Бойко І.Ф. Статистична радіотехніка: навч. посіб. / І.Ф. Бойко., О.І.Давлет'янц. – К. : КМУЦА, 1998. – 124 с.

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С.Вентцель. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

5. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С.Гоноровский. – М.: Сов. радио, 1986. – 608 с.

6. Горяинов В.К. Статистическая радиотехника: примеры и задачи / В.К.Горяинов, А.Г.Журавлев, В.И.Тихонов. – М. : Сов. радио, 1980. – 544 с.

7. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / А.Н.Колмогоров. – М. : Наука, 1980. – 122 с.

8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1 / Б.Р.Левин. – М. : Сов. радио, 1974. – 552 с.

9. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 2. / Б.Р.Левин. – М.: Сов. радио, 1975. – 392 с.

10. Тихонов В.Р. Статистическая радиотехника / В.Р.Тихонов. – М. : Сов. радио, 1966. – 678 с.

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Лабораторний практикум
для студентів напряму 6.170101
«Безпека інформаційних і комунікаційних систем»

Укладачі: ЮДІН Олександр Костянтинович
ЧУНАРЬОВА Анна Вадимівна

Технічний редактор А.І.Лавринович
Коректор О.О.Крусь
Комп'ютерна верстка

Підп. до друку _______ Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк Ум друк. арк. ___ . Обл.-вид. арк. ____.
Тираж 100 пр. Замовлення № _______. Вид. № ____.

Видавництво НАУ
03058. Київ-58, проспект Космонавта Комарова, 1.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК
№ ___ від _______