

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний авіаційний університет

## ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА І ОСНОВИ КОНСТРУЮВАННЯ

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих технічних навчальних закладів*

Київ 2015

УДК 621.81+5318.8+539.3(042.4)  
ББК Ж12я 73-2  
П 759

Автори: *Г. М. Борозенець, В. М. Павлов, О. В. Голубничій,*  
*Є. М. Бабенко*, *В. О. Кольцов*

Рецензенти:

*Л. Ф. Головка* — д-р техн. наук, проф.  
(Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»)

*Р. Г. Мнацаканов* — д-р техн. наук, проф.  
(Національний транспортний університет)

*М. М. Регульський* — канд. тех. наук,  
старш. наук. співроб.  
(Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України)

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України  
(лист № 1/11-9028 від 29.09.2010).*

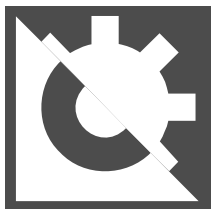
**Прикладна механіка і основи конструювання:** навч.  
П 759 посіб. / Г. М. Борозенець, В. М. Павлов, О. В. Голубничій [та ін.]. —  
К. : НАУ, 2015. — 356 с.  
ISBN 978–966–598–843-4

Розглянуто основи опору матеріалів, теорії механізмів і машин, деталей  
машин та основи конструювання.  
Для студентів вищих технічних навчальних закладів.

**УДК 621.81+5318.8+539.3(042.4)**  
**ББК Ж12я 73-2**

**ISBN 978–966–598–843-4**

© Борозенець Г. М., Павлов В. М.,  
Голубничій О. В. [та ін.], 2015  
© НАУ, 2015



## ВСТУП

**Р**озглянемо основні поняття та визначення, які потрібно знати студентам, що починають вивчати курс «Прикладна механіка і основи конструювання».

*Машинознавство* — це наука про машини, що об'єднує комплекс дисциплін, пов'язаних із машинобудуванням. Головне місце серед них посідають «Опір матеріалів», «Теорія механізмів і машин», «Деталі машин».

*Механікою* називають галузь науки, метою якої є вивчення руху і напруженого стану елементів машин, будівельних конструкцій, суцільних середовищ та іншого під дією прикладених до них сил.

Механіку прийнято ділити на теоретичну і прикладну. Діалектично вони взаємопов'язані. У *теоретичній механіці* встановлено загальні закономірності об'єктів, що вивчають, без зв'язку з їх конкретним застосуванням. Під терміном *прикладна механіка* розуміють галузь механіки, що вивчає рух і напружений стан реальних технічних об'єктів — *конструкцій, машин, робототехнічних систем* тощо з урахуванням основних закономірностей, встановлених у теоретичній механіці.

*Прикладна механіка машин* може розглядатися як частина більш загальної галузі науки — *машинознавства*, включаючи, крім *механіки, теорію проектування і технологію виготовлення машин*.

*Машинобудування* є основною галуззю народного господарства, яка забезпечує розвиток інших його галузей — енергетики, гірничодобувної промисловості, сільського господарства, хімічної промисловості тощо. У зв'язку з автоматизацією виробництва велике значення має приладобудування.

*Механіка приладів і механіка машин* мають загальні основи і відрізняються лише постановкою розв'язання низки задач. У пропонуваному посібнику поняття «прикладна механіка» викладено в дещо вузькому розумінні, що відповідає навчальній програмі вищих освітніх закладів для немеханічних спеціальностей. При цьому

досягається основна мета — дати студентам загальне уявлення про будову і способи дії механічних частин машин, методи забезпечення працездатності при їх конструюванні, виготовленні й експлуатації і таким чином значно розширити підґрунтя інженерної підготовки.

*Коротка історична довідка.* «Прикладна механіка і основи конструювання» як наука про машини виділилась із теоретичної механіки на початку XIX ст. Її становлення пов'язане з розвитком машинного методу виробництва. Однак ще задовго до цього багато винахідників і вчених (Архімед, Леонардо да Вінчі, Уатт, Кулон, Ползунов та інші) створили фундамент машинобудування.

Виникнення науки про опір матеріалів пов'язане з іменем італійського вченого Галілео Галілея (1564–1642), який у 1638 р. видав книгу, що вміщує перші відомості про розрахунки балок. Слід, проте, зазначити, що деякі питання міцності досліджував ще Леонардо да Вінчі (1452–1519).

У 1678 р. англійський учений Роберт Гук опублікував основний закон опору матеріалів, який встановлює зв'язок між деформаціями та навантаженнями.

Подальший розвиток опору матеріалів пов'язаний з іменами Е. Маріотта, Г. Лейбніца, Ш. Кулона, Я. Бернуллі, Л. Ейлера, Ж. Лагранжа, Т. Юнга, О. Коші, С. Пуассона, А. Сен-Венана, Г. Ламе, К. Мора, А. Веллера, Г. Кірхгофа, Т. Кармана та ін.

Наприкінці XIX – на початку XX ст. важливі дослідження в галузі опору матеріалів виконали видатні вітчизняні вчені Д. І. Журавський, Х. С. Головін, Ф. С. Ясинський, В. Л. Кирпичов, А. В. Гадолін, О. М. Крилов, М. Г. Бубнов, Б. Г. Гальоркін, С. П. Тимошенко, В. В. Болотін, В. З. Власов, М. І. Мухелішвілі, О. М. Дінник, П. Ф. Папкович, Ю. М. Работнов, С. В. Серенсен, І. А. Одінг, Г. М. Савін, Г. С. Писаренко та ін.

Значний вклад у розвиток прикладної механіки внесли вчені-винахідники: М. В. Ломоносов (1711–1765), який розробив конструкції машин для виробництва скла і випробування матеріалів, І. П. Кулібін (1735–1818) — створив протез, годинник-автомат, самохідне судно «самокатку» з педальним приводом; батько і син Е. О. і М. Е. Черепанови — побудували перший у Росії паровоз та багато інших. Академік Санкт-Петербурзької академії наук Л. Ейлер (1707–1783) запропонував для зубчастих коліс евольвентне зачеплення, яке використовується вже понад два століття для механічних передач.

До когорти відомих учених, що створили наукові засади курсу прикладної механіки, слід віднести: видатного математика і механіка П. Л. Чебишева (1821–1894), якому належить низка оригінальних досліджень, присвячених синтезу механізмів, теорії регуляторів і зубчастого зачеплення, структурі плоских механізмів; І. О. Вишнеградського (1831–1895) — основоположника теорії автоматичного регулювання, Т. Олів'є (1793–1858), Р. Вілліса (1800–1875), Ф. Рело (1829–1905), Х. І. Гофмана (1851–1916), відомих з фундаментальних робіт із синтезу зубчастих механізмів; М. П. Петрова (1836–1920), який заклав основи гідродинамічної теорії тертя в підшипниках; М. Е. Жуковського (1847–1921), який зробив вагомий внесок у вивчення складних питань динаміки механізмів, теорії гідродинамічного змащування машин, розподілу навантаження між витками різьби; В. П. Горячкіна (1868–1935), який першим розробив динаміку робочих машин, заклав теоретичні основи розрахунку і будови сільськогосподарських машин, займався питаннями кінематики та динаміки плоских і просторових механізмів, теорією зрівноваження та стійкості машин і механізмів; Л. В. Ассура (1878–1920), який створив найраціональнішу класифікацію плоских механізмів залежно від їхньої структури, створивши підґрунтя теорії механізмів; А. П. Малишева, який розробив методи структурного аналізу та синтезу механізмів.

Фундаментальні дослідження з кінематики складних механізмів, їх класифікації, точності та інших питань теорії механізмів і машин належать видатним ученим: І. І. Артоболевському (1905–1977), Н. Г. Бруєвичу (1896–1987), В. В. Добровольському (1880–1957), Г. Г. Баранову (1899–1968), С. М. Кожевникову (1906–1979) та іншим.

На розвиток сучасного курсу «Прикладна механіка і основи конструювання» величезний вплив має швидкий прогрес вітчизняного і зарубіжного машинобудування. Цей прогрес потребує дедалі більшої стандартизації й уніфікації деталей та вузлів загального призначення.

## ОСНОВИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

### 1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

#### 1.1. Основні визначення

Проектуючи споруди і машини, інженери обирають матеріал та розміри кожного елемента конструкції так, щоб він надійно, без ризику руйнування та виникнення значних деформацій, чинив опір дії зовнішніх навантажень, які передаються на нього від сусідніх частин конструкції. У деяких випадках потрібно перевіряти попередньо визначені розміри запроектованих чи наявних конструкцій або визначати навантаження, які можна прикладати до них.

Для цього треба мати міцні знання з *опору матеріалів* — науки про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд.

*Міцність* — це здатність конструкцій витримувати певне навантаження, не руйнуючись.

*Жорсткість* — здатність конструкцій чинити опір деформуванню. Деформації при цьому не повинні перевищувати певних значень.

*Стійкість* — здатність конструкцій зберігати початкову форму пружної рівноваги.

Теоретичними засадами опору матеріалів є математика і теоретична механіка, експериментальними — фізика, матеріалознавство.

Опір матеріалів є складовою механіки деформівного твердого тіла, у яку входять також теорія пружності, теорія пластичності, теорія повзучості, механіка руйнування та інші. Ці теоретичні дисципліни досліджують, по суті, ті ж проблеми, що й опір матеріалів, але точніше, що призводить до застосування більш складного математичного апарату та громіздких обчислень і, відповідно, до істотного звуження кола можливостей розв'язання практичних задач.

Наука про опір матеріалів ґрунтується на припущеннях щодо властивостей матеріалів, спрощень у геометрії реальних об'єктів, які дозволяють створити просту і зручну для інженерної практики теорію розрахунків елементів конструкцій.

Міцність та жорсткість реальних тіл визначаються величиною та розподілом внутрішніх сил взаємодії між сусідніми частинками тіла. Саме визначення розподілу внутрішніх зусиль уздовж характерних розмірів елемента конструкції за різних варіантів навантаження і є головним завданням опору матеріалів.

З іншого боку, інтерес становлять можливості тих чи тих матеріалів опиратися дії зовнішніх навантажень. У зв'язку з цим в опорі матеріалів вивчають стандартні методи експериментального дослідження характеристик міцності та пластичності матеріалів (механічних характеристик). Отже, розрахунок на міцність складається з аналізу розподілу внутрішніх сил, визначення небезпечних (розрахункових) величин (точок) і порівняння цих небезпечних (максимальних) значень із граничними значеннями для матеріалу, які отримані в результаті попередніх лабораторних випробувань. При цьому найчастіше використовують питомі величини внутрішніх зусиль, так звані напруження.

Методів розрахунків на міцність декілька. Вони обираються залежно від умов експлуатації конструкції і вимог, що до неї висуваються. Найпоширенішими є розрахунки за допустимими напруженнями.

## **1.2. Основні гіпотези**

В опорі матеріалів, як і в усіх природничих науках, дослідження реального об'єкта починається з вибору розрахункової моделі (схеми). Слід передусім з'ясувати, що в конкретному випадку істотно і що неістотно, та відкинути всі чинники, які не можуть помітно вплинути на суть задачі. Такі спрощення в усіх випадках конче необхідні, бо розв'язання задачі з урахуванням усіх властивостей реального об'єкта є принципово неможливим.

Для побудови теорії опору матеріалів приймають деякі гіпотези і принципи відповідно до структури і властивостей матеріалів, характеру деформацій, а також діючих сил і геометрії конструкцій.

Здебільшого матеріал тіла вважається суцільним, однорідним та ізотропним (це дозволяє не враховувати дискретної, атомістичної структури речовин) та ідеально пружним, тобто таким, для якого справедливий закон Гука.

Вважають, що деформації малі порівняно з розмірами тіла. Це дає змогу нехтувати змінами в розташуванні зовнішніх сил відносно окремих частин тіла при його деформуванні і складати рівняння статички для недеформованого тіла.

Вводиться гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі), згідно з якою перерізи, що були плоскими до навантаження, лишаються плоскими і після навантаження.

Прийняті гіпотези щодо властивостей матеріалу і характеру деформацій дають можливість застосовувати принцип суперпозиції (незалежності дії сил): результат дії на тіло системи навантажень дорівнює сумі результатів дії тих самих навантажень, які прикладаються послідовно і в будь-якому порядку.

Крім того, у розв'язанні задач застосовують принцип Сен-Венана. У точках тіла, достатньо віддалених від місця прикладання зовнішніх сил, результати їх дії (деформації) мало залежать від конкретного способу прикладання цих сил. Використання такого припущення дозволяє замінювати задану систему навантажень статично еквівалентною.

### 1.3. Об'єкти вивчення

Обираючи розрахункову схему, приймаються спрощення і в геометрії реальних об'єктів. Незважаючи на всю різноманітність видів конструктивних елементів машин і споруд, їх можна звести до порівняно невеликої кількості основних форм. Це стержні, оболонки, пластинки та масивні тіла.

В опорі матеріалів основним об'єктом вивчення є *брус (стержень)* — тіло, у якого розміри поперечних перерізів значно менші за довжину. Стержні бувають прямолінійні, криволінійні, сталого чи змінного перерізу (рис. 1.1).

*Віссю стержня* називається лінія, що проходить через центри ваги всіх послідовно проведених поперечних перерізів стержня.

*Поперечний переріз* утворюється при розсіченні бруса площиною, що перпендикулярна до його осі.

Поширені елементи конструкцій — вали, осі, балки є прикладами прямолінійних стержнів. Кільця ланцюгів, вантажопідйомні гаки розглядають як криволінійні стержні, а циліндрична пружина як просторово зігнутий брус. При найбільш наближених розрахунках у рамках моделі бруса можна розглядати навіть крило літака, корпус ракети, зуб шестірні тощо.



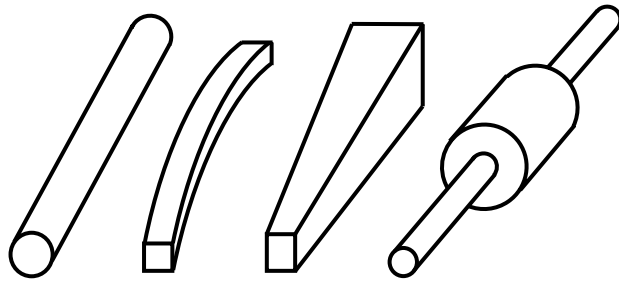


Рис. 1.1. Стержні

Численні складні конструкції розглядаються як такі, що складаються з окремих стержнів. Їх *називають стержневими системами*.

Другою типовою моделлю форми в опорі матеріалів є *оболонка* — тіло, обмежене двома поверхнями, відстань між якими (товщина) мала порівняно з іншими розмірами (рис. 1.2).

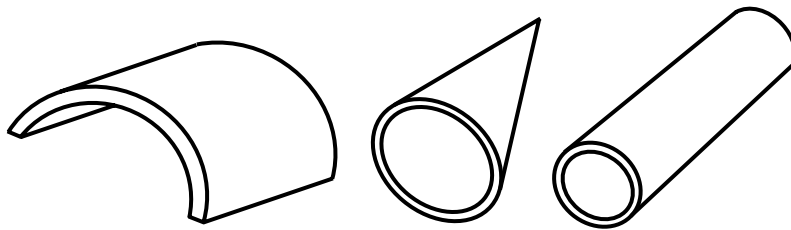


Рис. 1.2. Оболонки

До моделі оболонки зводяться резервуари, баки, куполи будівель, корпуси реактивних двигунів, фюзеляжі літальних апаратів, корпуси суден тощо.

Геометрія оболонки визначається формою *серединної поверхні* — поверхні, що поділяє навпіл оболонку по товщині.

Якщо серединна поверхня являє собою площину, то оболонка перетворюється в *пластинку*. Пластинки бувають різноманітної форми в плані (рис. 1.3).

Як пластинки розглядаються диски компресорів і турбін, днища і кришки резервуарів, плити перекриттів споруд та інші.

*Просторовим тілом (масивом)* називається модель елемента конструкції, у якого всі розміри мають один порядок (рис. 1.4).

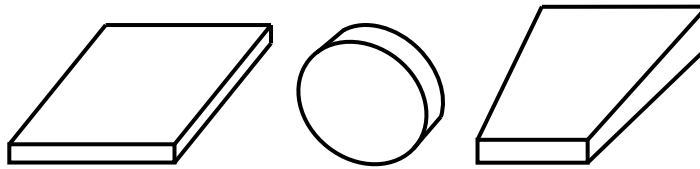


Рис. 1.3. Пластинки

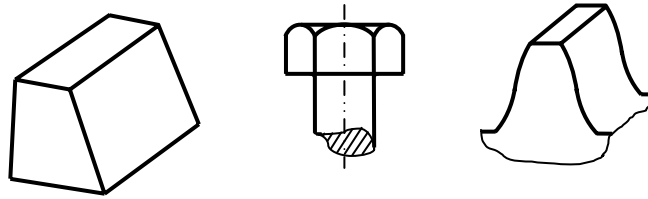


Рис. 1.4. Масивні тіла

До такої моделі зводяться греблі, фундаменти, будівельні блоки (зокрема цегла) тощо. Просторові моделі також розглядають при розрахунках концентрації напружень, у контактних задачах і т. п.

#### 1.4. Класифікація зовнішніх навантажень

У процесі експлуатації елементи конструкцій взаємодіють із сусідніми елементами, внаслідок чого від одних елементів (деталей) до інших передаються навантаження (сили).

*Зовнішніми* називаються прикладені до тіла сили, що спричинені дією інших тіл. Їх поділяють на:

- а) поверхневі сили, тобто такі, які прикладені до поверхні тіла (вага зовнішнього вантажу, реакція опори, тиск пари в котлі тощо);
- б) об'ємні (масові) сили, що прикладені до всіх точок тіла (власна вага, сили інерції тощо).

Поверхневі навантаження поділяють на зосереджені та розподілені.

*Зосереджені* сили діють на досить малі площадки поверхні тіла й умовно вважаються прикладеними в точці. Вони вимірюються в ньютонках (Н) чи кратних одиницях (кН, МН). Прикладами таких навантажень є вантаж, підвішений на тросі, тиск кульки шарико-підшипника, тиск колеса на рейку тощо.

*Розподілені* навантаження прикладаються безперервно протягом деякої довжини (вага троса чи балки) або на деякій поверхні (тиск повітря на крило літака, тиск газу на стінки посудини чи циліндра двигуна тощо).

Величина розподіленого навантаження, яка припадає на одиницю площі чи довжини тіла (питоме навантаження), називається *інтенсивністю навантаження*. Якщо навантаження розподілене по довжині, інтенсивність (погонне навантаження) вимірюється в Н/м чи кН/м, коли ж навантаження розподілене по площі, інтенсивність вимірюється в Н/м<sup>2</sup>; кН/м<sup>2</sup> і т.п.

Об'ємні навантаження відповідно вимірюються в Н/м<sup>3</sup>; кН/м<sup>3</sup>.

Слід зазначити, що ті самі навантаження, залежно від поставленої задачі, можна моделювати по-різному. Наприклад, вагу танка, що стоїть на залізничній платформі, можна розглядати як розподілене по площі чи по довжині навантаження, а в разі переміщення танка по мосту через Дніпро — як зосереджений вантаж.

За характером дії розрізняють статичні і динамічні навантаження.

*Статичні* навантажують конструкцію поступово, збільшуючись від нуля до кінцевої величини. При цьому прискореннями окремих елементів можна нехтувати і вважати, що всі частини конструкції знаходяться в рівновазі.

*Динамічні навантаження*, навпаки, змінюють свою величину протягом малого проміжку часу, що супроводжується значними прискореннями. Прикладами таких навантажень є раптові, ударні, циклічні навантаження.

### 1.5. Внутрішні сили. Метод перерізів

Міцність і жорсткість реальних тіл визначається величиною й розподілом внутрішніх зусиль, які виникають між сусідніми частинками тіла (атомами, молекулами, кристалами) під дією зовнішніх навантажень. Ці сили намагаються втримати частинки тіла на певних відстанях одна від одної й опираються будь-яким спробам змінити ці відстані (деформувати тіло).

Визначення внутрішніх сил за різних варіантів навантаження тіла є основним завданням опору матеріалів. Власне від цього походить і сама назва — опір матеріалів (як матеріали опираються дії зовнішніх навантажень). При цьому внутрішні зусилля, що виникають у тілі, яке перебуває в ненавантаженому стані, не беруться до уваги.

Щоб знайти внутрішні сили, застосовують *метод перерізів*.

Розглянемо довільне тіло, яке знаходиться в рівновазі під дією якоїсь системи зовнішніх сил (рис. 1.5, а). Розріжемо подумки тіло

довільною площиною  $i$ , відкинувши одну з відсічених частин (II), розглянемо залишену частину (I), що знаходиться в рівновазі під дією зовнішніх сил і внутрішніх зусиль, які, згідно з прийнятими гіпотезами, розподілені безперервно по перерізу (рис. 1.5, б). Принципово зовсім несуттєво, яку з частин тіла (I чи II) відкидати, тому, що відповідно до третього закону Ньютона, дія лівої частини на праву дорівнює дії правої частини на ліву.

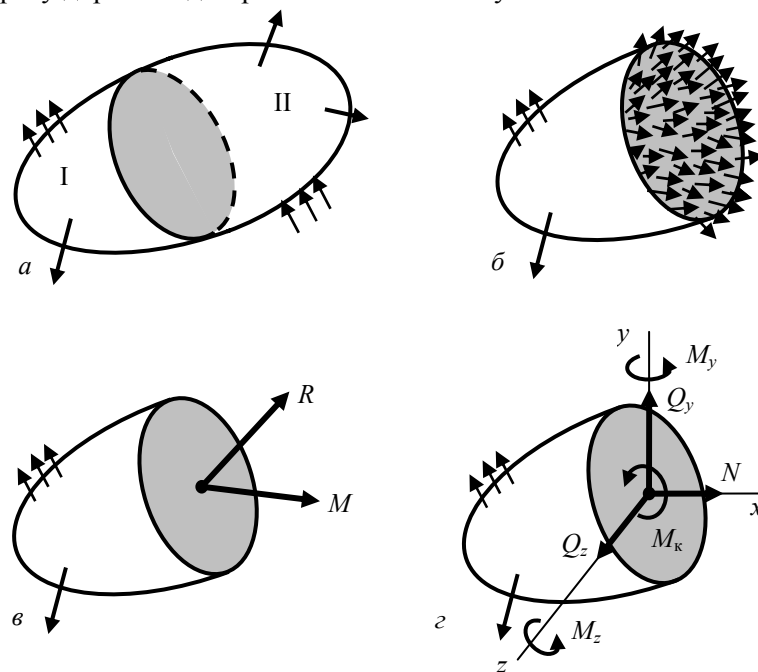


Рис. 1.5. Визначення внутрішніх зусиль

Як відомо з теоретичної механіки, будь-яку систему сил можна звести до головного вектора  $R$  і головного моменту  $M$  (рис. 1.5, в).

Для зручності розв'язання конкретних задач розглядаються проєкції цих векторів на координатні осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 1.5, г). Початок координат знаходиться в центрі ваги перерізу, вісь  $x$  перпендикулярна до перерізу, а осі  $y$ ,  $z$  лежать у його площині.

Отримані таким чином шість компонентів внутрішніх зусиль (внутрішніх силових факторів) мають такі назви:  $N$  — нормальна

(поздовжня) сила;  $Q_y, Q_z$  — поперечні (перерізувальні) сили;  $M_x$  ( $M_x$ ) — крутний момент;  $M_y, M_z$  — згинальні моменти.

Отже, основне завдання опору матеріалів — визначення внутрішніх зусиль, що виникають у тілі під дією певної комбінації зовнішніх навантажень, за допомогою методу перерізів зводиться до таких етапів розрахунку:

- проводиться переріз у тому місці, де планується визначати внутрішні зусилля;
- відкидається одна з частин тіла;
- дія відкинутої частини на ту, що залишилася, замінюється внутрішніми силовими факторами;
- знаходяться величини внутрішніх зусиль із розгляду рівноваги відсіченої частини.

Слід зазначити, що під час практичних розрахунків докладний розгляд рівноваги зі складанням рівнянь статички та їх наступним розв'язанням не проводиться, а внутрішні зусилля визначаються як сума відповідних зовнішніх навантажень. Наприклад, поздовжня (нормальна) сила  $N$  чисельно дорівнює алгебричній сумі проєкцій на нормаль до перерізу  $x$  зовнішніх навантажень, прикладених до відсіченої частини. Аналогічно формулюються правила для визначення інших компонентів внутрішнього зусилля.

Цей прийом буде неодноразово продемонстрований у наступних розділах.

## 1.6. Типи простих деформацій бруса

У загальному випадку навантаження в перерізах тіла виникають шість складових внутрішніх зусиль:  $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$ . Але, залежно від характеру зовнішніх навантажень, один чи декілька внутрішніх силових факторів можуть дорівнювати нулю. Тому в опорі матеріалів спочатку досліджуються більш прості розрахункові випадки навантаження бруса, які отримали назву *прості деформації*. Цих часткових випадків чотири:

1. *Розтягання чи стискання*. Зовнішні навантаження зводяться до системи сил, що діють уздовж осі бруса. У поперечних перерізах виникають тільки нормальні сили  $N$ .

2. *Зсув*. Зовнішні навантаження зводяться до двох протилежних сил, які перпендикулярні до осі бруса, з малою відстанню одна від одної. У перерізі між лініями дії сил виникає тільки поперечна сила  $Q$ .

3. *Кручення*. Система зовнішніх навантажень зводиться до декількох пар сил (зосереджених моментів), що діють у площинах, перпендикулярних до осі бруса. У поперечних перерізах виникають тільки крутні моменти  $M_k$ .

4. *Згинання*. Зовнішні навантаження діють у площині, яка збігається з поздовжньою віссю бруса, у поперечних перерізах якого виникають перерізувальні сили  $Q$  та згинальні моменти  $M$ .

У подальших розділах опору матеріалів розглядаються випадки так званого складного опору, коли брус зазнає дії двох і більше типів простих деформацій одночасно, наприклад згинання із крученням, розтягання із згинанням тощо.

### 1.7. Деформації та напруження

Під дією зовнішніх навантажень елементи конструкцій деформуються, тобто змінюють свої розміри та форму. Деформації пов'язані з переміщеннями точок тіла, а також ліній і площин, що з'єднують певні точки.

Деформації, які характеризуються зміною відстані між точками тіла, називаються *лінійними*.

Деформації, що пов'язані з поворотом ліній та площин, проведених між точками тіла, називаються *кутовими*.

Розрізняють пружні і залишкові деформації.

*Пружні деформації* зникають у разі зняття навантаження.

*Залишкові (пластичні) деформації* залишаються в тілі після припинення дії навантажень.

Як уже зазначалося, для аналізу міцності і жорсткості конструкцій за допомогою методу перерізів визначаються внутрішні силові фактори. Але цей метод дозволяє визначити тільки суми проекцій внутрішніх зусиль, безперервно розподілених по перерізу, на певні напрямки. А в багатьох розрахункових випадках треба знати ще й закони розподілу внутрішніх зусиль по перерізу.

Це призвело до введення поняття *напруження* — інтенсивності внутрішніх сил взаємодії (питомого внутрішнього зусилля).

Розглянемо елементарну площадку  $\Delta A$  в околі довільної точки перерізу (рис. 1.6). Величина внутрішньої сили, що виникає на цій площадці, дорівнює  $\Delta R$ . Відношення цієї внутрішньої сили до величини площадки називається *середнім напруженням*  $p_{cp}$  в околі даної точки:

$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta R}{\Delta A}.$$

Зменшуючи величину  $\Delta A$ , отримаємо величину напруження

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}. \quad (1.1)$$

Тобто *напруження* — це кількість внутрішнього зусилля, що припадає на одиницю площі перерізу.

У практичних розрахунках величина  $p$  (повне напруження) майже не застосовується. Виявилось, що зручніше використовувати його проекції:  $\sigma$  — на нормаль  $n$  до перерізу і  $\tau$  — на площину перерізу (рис. 1.6).

Величини  $\sigma$  — *нормальне напруження* і  $\tau$  — *дотичне напруження* є основними величинами в розрахунках на міцність та жорсткість.

Згідно з визначенням (1.1), вони мають розмірність «сила, поділена на площу». Рекомендованою одиницею вимірювання напружень є *мегапаскаль*

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Н/мм}^2.$$

Тобто, розв'язуючи задачі, зручно підставляти у формули сили в ньютонках, а розміри в міліметрах.

У технічній системі одиниць застосовуються одиниці вимірювання напружень, які пов'язані з мегапаскалем, так

$$0,1 \text{ кгс/мм}^2 \approx 1 \text{ МПа} \approx 10 \text{ кгс/см}^2.$$

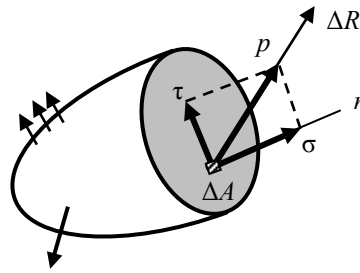


Рис. 1.6. Напруження в точці



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що вивчає наука про опір матеріалів?
2. У чому полягає суть понять «міцність», «жорсткість», «стійкість»?
3. Назвіть основні гіпотези опору матеріалів.
4. Які моделі форм реальних об'єктів розглядаються?
5. Що називається брусом?
6. Що називається віссю бруса, поперечним перерізом?
7. Як класифікують зовнішні навантаження?

8. Які внутрішні силові фактори виникають у перерізі?
9. Як визначають внутрішні зусилля за допомогою методу перерізів?
10. Які існують типи простих деформацій бруса?
11. Що називається лінійними і кутовими деформаціями?
12. Які деформації називають пружними, які — залишковими?
13. У чому полягає суть поняття «напруження»?
14. Які напруження є нормальними, які — дотичними?
15. В яких одиницях вимірюються напруження?

## 2. РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ

### 2.1. Нормальні сили і напруження

Деформація розтягання або стискання реалізується в брусі в разі дії на нього системи сил, напрямлених уздовж його осі. При цьому в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні сили.

Нормальна сила вважається *додатною*, якщо вона напрямлена у бік зовнішньої нормалі до перерізу (розтягальна); протилежно напрямлена нормальна сила (стискальна) вважається *від'ємною*. Правила знаків в опорі матеріалів зручно наводити графічно (рис. 2.1), зображуючи частину бруса між двома перерізами.

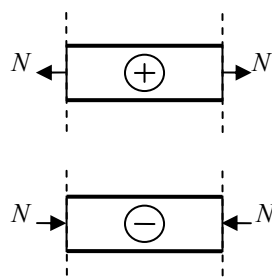


Рис. 2.1. Правило знаків для нормальних сил

Розглянемо брус (рис. 2.2, а), що знаходиться в умовах розтягання–стискання. Для визначення нормальних зусиль застосуємо метод перерізів.

Попередньо визначимо ділянки бруса, у межах яких до відсіченої частини прикладена та сама комбінація зовнішніх навантажень, тобто в поперечних перерізах виникають ті ж нормальні сили. Неважко помітити, що таких ділянок три і їхніми границями будуть точки прикладання зовнішніх зосереджених сил.

Далі переходимо до розгляду кожної ділянки окремо.

*Перша ділянка.* Проводимо переріз I—I і розглядаємо рівновагу правої відсіченої частини (рис. 2.2, б).

Визначаємо внутрішнє зусилля  $N$  як суму зовнішніх навантажень, прикладених до відсіченої частини.

$$N = -2F .$$



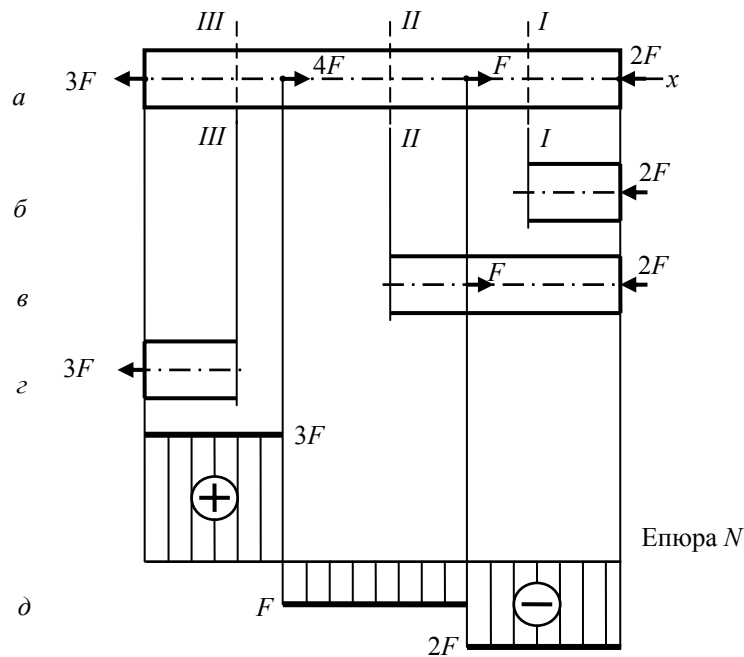


Рис. 2.2. Нормальні сили в перерізах бруса

При цьому кожне зовнішнє навантаження треба враховувати згідно з правилом знаків для нормальних сил (рис. 2.1). Така методика є загальноприйнятою і буде нами застосовуватись майже без змін при кожному використанні методу перерізів для всіх видів деформацій.

Далі друга ділянка (рис. 2.2, в)  $N = -2F + F = F$ .

Слід зазначити, що коли при переході від однієї ділянки до іншої розглядати ту саму відсічену частину бруса (у даному випадку праву), то достатньо ретельно визначити знак тільки першого навантаження ( $-2F$ ), а потім решту навантажень порівнювати з ним (якщо ліворуч «мінус», то праворуч «плюс»).

Це впливає з того, що сили є векторними величинами (хоча в опорі матеріалів і не прийнято їх позначати зверху стрілками чи рисками).

Третя ділянка. Розглянемо ліву відсічену частину (рис. 2.2, з), бо вона значно простіша, ніж права  $N = 3F$ .

Тут і завжди треба пам'ятати, що від вибору відсіченої частини залежить тільки обсяг розрахунків, але не результат.

Розподіл внутрішніх зусиль по довжині бруса унаочнюється у вигляді так званих епюр. *Еюра* — це графік, побудований за специфічними правилами:

- еюра повинна зображуватись обов'язково поруч із розрахунковою схемою;
- вісь епюри (база) має бути паралельна до осі бруса;
- ординати епюри відкладаються в зручному масштабі;
- на епюрі не повинно бути ніяких шкал;
- у характерних перерізах проставляють відповідні значення внутрішнього зусилля, а в полі епюри в кружках значки «плюс» чи «мінус» при кожному переході графіка через нульову лінію;
- проводиться штриховка тонкими лініями, перпендикулярними до бази;
- лінії самого графіка мають бути товщі за всі інші;
- біля епюри повинен бути зроблений напис, що засвідчує графік якої величини зображений і в яких одиницях виміру, якщо задані числові значення.

З дотриманням таких вимог побудована еюра нормальних сил для розглянутого нами бруса (див. рис. 2.2, *д*). Характерною ознакою цієї епюри є наявність так званих «стрибків» у місцях прикладання зосереджених сил. Ці стрибкоподібні зміни ординат епюри  $N$  мають умовний характер, як умовні самі поняття «точка», «зосереджена сила». Під час побудови і, особливо, перевірки епюр обов'язково треба відстежувати відповідність місць розташування, величин і напрямків стрибків прикладеним силам.

Нормальна сила, що виникає в поперечному перерізі бруса, являє собою рівнодійну елементарних нормальних зусиль, розподілених по площі перерізу:  $N = \int_A \sigma dA$ , де  $\sigma$  — нормальне напруження на довільній площадці поперечного перерізу  $dA$ ;  $A$  — площа перерізу.

Експериментально встановлено, що за центрального розтягання–стискання виконується гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі), тобто поздовжні деформації окремих волокон бруса однакові. Крім того, згідно з прийнятою моделлю матеріал відповідає закону Гука. Це дозволяє стверджувати, що нормальні напруження рівномірно розподіляються по перерізу і визначаються за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Зважаючи на те, що площа  $A$  є величиною скалярною, напруження мають знак нормальної сили.

Для аналізу розподілу напружень по довжині бруса, так само, як і для  $N$ , будують епюри  $\sigma$ . Якщо поперечний переріз бруса сталий, то ці епюри подібні одна до одної. У разі різкої зміни площі поперечного перерізу (ступінчастого бруса) епюра нормальних напружень буде додатково мати стрибки в місцях ступінчастої (стрибкоподібної) зміни площі.

## 2.2. Поздовжні і поперечні деформації. Закон Гука

Розглянемо деформації прямого бруса постійного поперечного перерізу  $A$  (рис. 2.3). У всіх перерізах бруса виникають однакові нормальні сили  $N = F$ .

Під дією прикладеної сили  $F$  довжина бруса збільшується. Величина  $\Delta l = l_1 - l$  називається *абсолютною поздовжньою деформацією (подовженням)*. Відношення абсолютної деформації до початкової довжини  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  називається *відносною поздовжньою деформацією*.

Експериментально встановлено, що для більшості матеріалів виконується залежність (закон Гука)

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (2.1)$$

де  $E$  — *модуль поздовжньої пружності (модуль Юнга)* — коефіцієнт пропорційності в законі Гука, що залежить від пружних властивостей матеріалу.

Добуток  $EA$  називають *жорсткістю* при розтяганні-стисканні.

Використовуються також інші формули закону Гука, які виражають залежність деформацій від напружень

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \sigma = \varepsilon E. \quad (2.2)$$

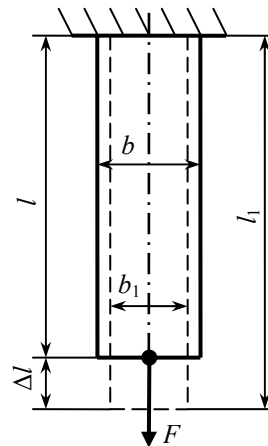


Рис. 2.3. Деформації бруса при розтяганні

Із залежностей (2.2) добре видно, що модуль  $E$  має розмірність напруження.

Одночасно зі збільшенням поздовжніх розмірів бруса його поперечні розміри зменшуються. Величина  $\Delta b = b_1 - b$  називається *абсолютною поперечною деформацією*, а  $\varepsilon = \Delta b/b$  — *відносною поперечною деформацією*.

Також експериментально встановлений зв'язок між поздовжніми і поперечними деформаціями

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon,$$

тут  $\mu$  — *коефіцієнт поперечної деформації* (коефіцієнт Пуассона), він нерозмірний.

Величини  $E$  і  $\mu$  є основними *пружними константами матеріалу*. Вони визначаються дослідним шляхом і наводяться в довідниках. Так, для сталей  $E = 2 \cdot 10^5, \dots, 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu = 0,25, \dots, 0,3$ ; для алюмінієвих сплавів  $E \approx 0,7 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu \approx 0,33$ . Тобто алюмінієві конструкції приблизно втричі гнучкіші за аналогічні сталеві.

Матеріали, у яких пружні властивості ( $E, \mu$ ) однакові по всіх напрямках, називають *ізотропними*, це метали, природний камінь, бетон, цегла, каучук, деякі види пластмас тощо. Якщо ж пружні властивості матеріалів відрізняються за деякими напрямками, то вони називаються *анізотропними*. До таких матеріалів належать: деревина, фанера, тканини, композиційні матеріали тощо.

### 2.3. Експериментальні дослідження властивостей матеріалів. Діаграма розтягання

Щоб виконати розрахунки елементів конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість, треба знати певні характеристики матеріалів (механічні характеристики). Ці величини визначаються експериментально за стандартними методиками.

Так, для випробувань металів на розтягання, використовується міждержавний стандарт країн СНД — ГОСТ 1497-84, який встановлює вимоги до випробувальних машин та вимірювальних інструментів, форми і розмірів зразків; регламентує процес підготовки зразків до випробувань, режими самих випробувань, методику визначення відповідних характеристик і форму звітнього протоколу.

У процесі випробувань на розтягання на машині автоматично будується графік — *діаграма розтягання* в координатах «наванта-

ження — абсолютна деформація» ( $F - \Delta l$ ). Для початкового ознайомлення з властивостями матеріалів і особливостями процесу розтягання зразка, її краще подати в координатах «напруження — відносна деформація», поділивши навантаження на початкову площу перерізу зразка  $\sigma = F/A_0$ , а подовження — на початкову розрахункову довжину  $\epsilon = \Delta l/l_0$ .

На рис. 2.4 зображено типову діаграму розтягання зразка із маловуглецевої сталі. На початковій прямолінійній ділянці  $OA$  матеріал зразка відповідає закону Гука. Точці  $A$  відповідає напруження  $\sigma_{пц}$  — *границя пропорційності*.

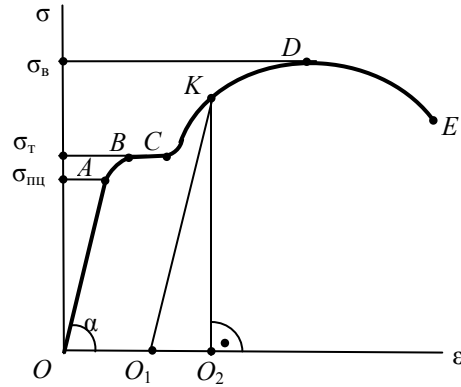


Рис. 2.4. Діаграма розтягання зразка із маловуглецевої сталі

На відрізку діаграми  $BC$  спостерігається зростання деформації зразка без збільшення напруження. Матеріал, як кажуть, «тече», а сама ділянка  $BC$  має назву *площадка текучості*. На ній визначається  $\sigma_t$  — *границя текучості* — найменше напруження, за якого зразок деформується без помітного збільшення розтягального навантаження.

У межах ділянки  $BC$  в матеріалі зразка відбуваються істотні зміни структури, пов'язані з мікрозсувами та рухом дефектів кристалічної ґратки, так званих дислокацій. Під час такого пластичного деформування матеріал зразка зміцнюється і далі доводиться знову збільшувати навантаження (напруження), але тепер цей процес буде нелінійний (ділянка  $CD$ ).

При наближенні до точки  $D$  деформація починає зосереджуватись в одному перерізі — утворюється «шийка» — місцеве звужен-

ня зразка. Площа поперечного перерізу зменшується, зменшується і потрібне для подальшого розтягання зусилля — на діаграмі спостерігається спадна ділянка  $DE$ . Найбільше напруження, яке витримує зразок при випробуванні, називається *границею міцності* чи *тимчасовим опором* і позначається  $\sigma_b$ . Таке позначення походить від російського терміна «временное сопротивление».

У точці  $E$  відбувається остаточне руйнування зразка — розділення його на дві частини.

Якщо зразок навантажити в межах початкової ділянки  $OA$  і навіть трошки більше та зняти навантаження, то лінія розвантаження збігатиметься з лінією навантаження і перо самописа повернеться в точку  $O$ . Це означає, що початкова ділянка діаграми характеризується наявністю тільки пружних деформацій. Найбільше напруження, до якого в матеріалі з'являються тільки пружні деформації, називається *границею пружності*. Для більшості матеріалів вона практично збігається з границею пропорційності.

Іншою буде картина, якщо зразок навантажити до деякої точки  $K$ , напруження в якій перевищує границю пружності, та зняти навантаження. Виявляється, що лінія розвантаження  $KO_1$  буде паралельна  $OA$ , а повна деформація  $OO_2$  буде складатися із пружної деформації  $O_1O_2$ , яка зникає в разі розвантаження, і пластичної  $OO_1$ , яка залишається.

У разі повторного навантаження цього ж зразка діаграма розтягання матиме вигляд кривої  $O_1KDE$ , тобто матеріал набуває здатності сприймати більші навантаження без залишкових деформацій.

Явище підвищення пружних властивостей матеріалу внаслідок попереднього пластичного деформування має назву *наклепа* і широко використовується для надання металевим деталям певних властивостей. Граничні напруження  $\sigma_{пл}$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_b$  є основними *характеристиками міцності* матеріалу. Тут слід зазначити, що більшість конструкційних сплавів, зокрема і якісні сталі, не мають на діаграмі розтягання площадки текучості.

Для таких матеріалів, згідно з ГОСТ 1497-84, визначається *умовна границя текучості*  $\sigma_{0,2}$  при досягненні відносної залишкової деформації величини 0,2 % (рис. 2.5).

Як характеристики пластичності матеріалу використовуються величини:

- відносне подовження після розриву

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} 100 \% ;$$

– відносне звуження після розриву

$$\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} 100 \% ,$$

тут  $l_k$  — кінцева розрахункова довжина зразка;  $A_k$  — мінімальна площа поперечного перерізу зразка після розриву.

Поділ матеріалів на *пластичні і крихкі* є досить умовним. Ті самі матеріали, залежно від умов навантаження і мети розрахунків, можуть вважатися більш пластичними чи більш крихкими. Для навчальних розрахунків можна припустити, що пластичні матеріали мають відносне подовження після розриву  $\delta > 5 \%$ , а крихкі  $\delta < 5 \%$ .

Більшість конструкційних сплавів мають близькі значення граничних напружень  $\sigma_{шц}$  і  $\sigma_T$ , різниця між ними менша за розкид характеристик міцності, що існує між окремими партіями (плавками) металу. Тому в якості *базових характеристик* матеріалів прийняті —  $\sigma_T(\sigma_{0,2})$ ,  $\sigma_b$ ,  $\delta$  і  $\psi$ . Вони включаються в технічні умови на поставку металевих матеріалів у паспорти приймальних випробувань, а також наводяться в довідниках для розрахунків міцності.

До базових характеристик також належать модуль поздовжньої пружності  $E$ , який визначається як тангенс кута  $\alpha$  початкової ділянки  $OA$  діаграми розтягання (див. рис. 2.4, 2.5), і коефіцієнт поперечної деформації  $\mu$ , що визначається як модуль відношення відносної поперечної деформації до поздовжньої (див. розд. 2.2).

#### 2.4. Допустимі напруження. Основи розрахунків на міцність

Інженерні методи розрахунку на міцність ґрунтуються, з одного боку, на формулах опору матеріалів, які дозволяють визначати напруження в небезпечних місцях елементів конструкцій, а з іншого — на характеристиках міцності матеріалів, що визначаються за результатами стандартизованих випробувань лабораторних зразків.

При розрахунках машинобудівних деталей основним методом є *розрахунок за допустимими напруженнями*. Згідно з цим методом

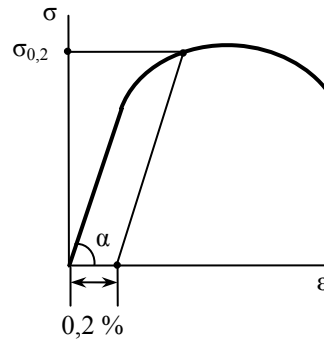


Рис. 2.5. Визначення умовної границі текучості

напруження в будь-якій точці конструкції не повинні перевищувати деякого допустимого значення. Звичайно порівнюють не всі напруження, а тільки найбільші, для чого, власне, і потрібен аналіз розподілу внутрішніх зусиль (побудова епюр), що дозволяє визначити небезпечні (розрахункові) точки.

Так, наприклад, при розтяганні–стисканні умова міцності має такий вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (2.3)$$

де  $[\sigma]$  — допустиме напруження.

*Допустимим* вважається напруження, за якого деталь може працювати тривалий час без небезпеки руйнування або виникнення значних пластичних деформацій. Як бачимо, у це формулювання закладено два граничних стани:

1. Руйнування. Воно настає, коли напруження досягають границі міцності. Цей стан є визначальним у разі використання крихких матеріалів, які руйнуються без значних залишкових деформацій. Допустиме напруження для крихкого матеріалу визначається за формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n},$$

тут  $n$  — коефіцієнт запасу міцності.

2. Недопустимі залишкові деформації. Вони виникають у пластичних матеріалах при досягненні границі текучості. У цьому випадку

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}.$$

Коефіцієнт запасу міцності (запас міцності) вводиться, коли встановлюють допустимі напруження, по-перше, тому, що граничні напруження  $\sigma_b$ ,  $\sigma_T$  знаходяться при незворотних випробуваннях лабораторних зразків і для конкретного виробу їх визначити неможливо. Крім того, запас міцності залежить від багатьох чинників, серед яких:

- якість матеріалу;
- призначення (відповідальність) елемента конструкції;
- степінь достовірності розрахунків;
- умови експлуатації конструкції;
- кваліфікація персоналу, який виготовляє чи експлуатує конструкції і т. п.



Коефіцієнти запасу міцності встановлюються на стадії проектування на основі досвіду експлуатації аналогічних конструкцій згідно з чинними в галузі рекомендаціями. У подальшому процесі експлуатації конструкції вони підтверджуються і коригуються за результатами додаткових випробувань.

Встановлення коефіцієнтів запасу не є предметом опору матеріалів, цим займаються державні нормувальні установи у відповідних галузях машинобудування і будівництва. У навчальних розрахунках можна використовувати орієнтовні значення коефіцієнтів запасу міцності:

- для пластичних матеріалів  $n = 1,5, \dots, 2, 2$ ;
- для крихких матеріалів  $n = 1,7, \dots, 3$ .

При розрахунках можливі три варіанти використання умови міцності (2.3):

1. *Проектувальний розрахунок.* За заданими величинами нормальної сили (що залежить від зовнішніх навантажень) і допустимого напруження дібрати переріз бруса

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

2. *Перевірний розрахунок.* За відомими розмірами ( $A$ ) і навантаженнями ( $N$ ) перевірити, чи витримає деталь задане навантаження

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

3. *Визначення допустимого навантаження (вантажопідйомності).* За відомими розмірами ( $A$ ) і допустимим напруженням визначити нормальну силу в небезпечному перерізі, а потім — допустимі зовнішні навантаження, що її спричиняють  $N \leq A[\sigma]$ .

Аналогічно, використовуючи відповідні умови міцності, проводять розрахунки на міцність і за інших навантажень бруса. Іноді оцінювання міцності зручно проводити за коефіцієнтом запасу

$$n \geq [n],$$

де  $n$  — розрахунковий коефіцієнт запасу міцності;  $[n]$  — допустиме значення коефіцієнта запасу.

Наведений метод розрахунку на міцність не єдиний. Іншим поширеним методом розрахунків конструкцій (у тому числі й авіаційних) із пластичних матеріалів є *розрахунок за граничними*

навантаженнями. Крім цієї назви у літературі можна зустріти такі — розрахунок за руйнуючими навантаженнями, розрахунок за граничними станами, розрахунок за несучою здатністю, розрахунок поза межами пружності тощо.

Згідно із цим підходом, граничним вважається таке навантаження  $P_{гр}$ , при якому конструкція втрачає здатність опиратися зростанню навантаження, тобто стає геометрично змінною. Граничне (руйнуюче) навантаження порівнюється із проектним (експлуатаційним)  $P_{max}$ , при цьому умова міцності має такий вигляд:

$$P_{max} \leq P_{гр}/n.$$

Під час розрахунку за граничними навантаженнями матеріал вважається ідеально пластичним, тобто таким, що не зміцнюється. Діаграма розтягання такого матеріалу (рис. 2.6) називається *діаграмою Прандтля*. Схематизація діаграми полягає у припущенні, що матеріал пружно деформується до границі текучості, а горизонтальна площадка текучості необмежена.

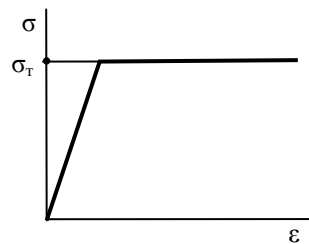


Рис. 2.6. Діаграма розтягання ідеально пластичного матеріалу

Розрахунки за граничними навантаженнями і за допустимими напруженнями призводять до різних результатів тільки, коли при пружному деформуванні конструкції напруження в поперечних перерізах її елементів розподілені нерівномірно (наприклад, при згинанні чи крученні), а також під час розрахунків статично невизначуваних систем.

Для розрахунку будівельних конструкцій застосовується *метод розрахунку за граничними станами*. Граничним вважається такий стан конструкції, при якому неможлива її подальша нормальна експлуатація. Таких станів встановлено три:

- I — втрата несучої здатності (міцності чи стійкості);
- II — виникнення надмірних деформацій чи коливань;
- III — виникнення тріщин або інших місцевих пошкоджень.

Замість одного коефіцієнта запасу вводяться три коефіцієнти надійності, які враховують характер навантаження, властивості матеріалу та умови експлуатації. Розрахунок за першим граничним станом є одним із варіантів розрахунку за граничними навантаженнями. Розрахунки за методом граничних станів виходять за рамки основного курсу опору матеріалів.

## 2.5. Переміщення перерізів бруса. Розрахунки на жорсткість

При проектуванні конструкцій, крім забезпечення міцності, часто буває необхідно досягти певної жорсткості чи, навпаки, гнучкості її суміжних елементів. Для цього треба вміти визначати переміщення її окремих точок. Крім того, без визначення переміщень, не можна розрахувати на міцність так звані статично невизначені конструкції, про що йтиметься далі.

Розглянемо розтягання бруса сталого перерізу під дією зосередженої сил  $F$  і власної ваги, яка моделюється рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q = \gamma A$ , де  $\gamma$  — питома вага матеріалу бруса;  $A$  — площа його поперечного перерізу (рис. 2.7, а).

Поздовжня сила в довільному перерізі бруса на відстані  $x$  від нижнього кінця (рис. 2.7, б)  $N = F + qx$ , напруження  $\sigma = (F + qx)/A$ .

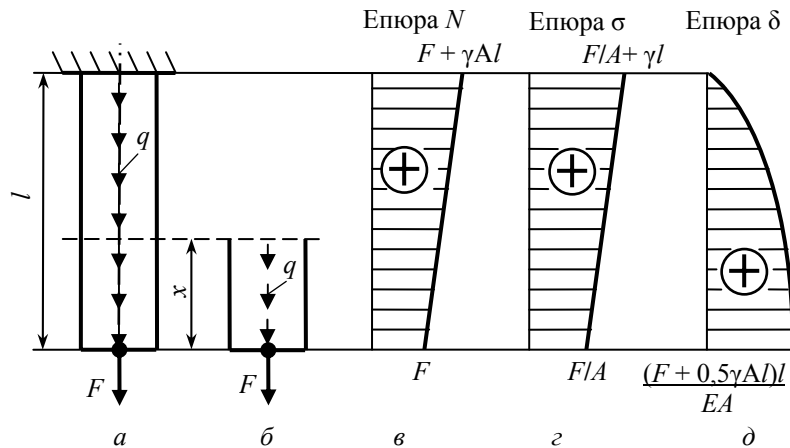


Рис. 2.7. Розтягання бруса з урахуванням власної ваги

Вертикальне переміщення перерізу буде дорівнювати подовженню частини бруса довжиною  $l - x$ , що міститься між перерізом і жорсткою опорою

$$\delta = \int_x^l \frac{N(x)}{EA} = \frac{1}{EA} \int_x^l (F + qx) dx = \frac{F}{EA} (l - x) + \frac{\gamma}{2E} (l^2 - x^2).$$

Із наведених формул випливає, що нормальна сила і напруження досягають найбільших значень біля опори (при  $x = l$ )

$N_{\max} = F + \gamma Al$ ;  $\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma l$ , а переміщення, навпаки, біля нижнього кінця бруса (при  $x = 0$ )

$$\delta_{\max} = \Delta l = \frac{(F + 0,5\gamma Al)l}{EA}.$$

Відповідні епюри зображено на рис. 2.7, в, з, д.

Умова жорсткості при розтяганні-стисканні має такий вигляд:

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(x)}{EA(x)} dx \leq [\Delta l]. \quad (2.4)$$

Розрахунки за умовою жорсткості завжди слід доповнювати розрахунком на міцність.

## 2.6. Потенціальна енергія деформації

Якщо стержень постійного перерізу  $A$  розтягається зосередженою силою (див. рис. 2.3), яка прикладається плавно і поступово збільшується від нуля до свого значення  $F$ , то таке навантаження називається *статичним*. Робота, що здійснюється такою силою при пружному деформуванні бруса, дорівнює добутку середнього значення  $F/2$  цієї сили на величину деформації  $\Delta l$ . Отже, *потенціальна енергія*, що накопичується в брусі під дією зовнішньої сили, згідно із законом збереження енергії, буде дорівнювати цій роботі

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l.$$

Графічно вона зображується площею заштрихованої частини діаграми розтягання (рис. 2.8).

У даному випадку  $N = F$ , і, використавши закон Гука (2.1), отримаємо формулу для визначення потенціальної енергії деформації при розтяганні-стисканні

$$U = \frac{N^2 l}{2EA}.$$

Питома потенціальна енергія  $u = U/V$ , де  $V = Al$  — об'єм бруса, буде дорівнювати

$$u = \frac{U}{Al} = \frac{1}{2E} \frac{N^2}{A^2} \text{ чи, остаточно}$$

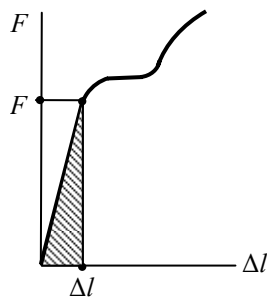


Рис. 2.8. Визначення потенціальної енергії деформації

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon.$$

При розвантаженні бруса накопичена в ньому пружна енергія здійснюватиме роботу. Властивість пружних тіл акумулювати енергію широко застосовується в техніці (пружини, ресори, амортизатори тощо).

### 2.7. Статично невизначувані системи

Статично невизначуваними називаються системи, зусилля в яких неможливо визначити за допомогою рівнянь статки. Такі конструкції застосовуються в різних галузях техніки та будівництві завдяки їх підвищеній жорсткості та живучості порівняно з аналогічними статично визначеними (рис. 2.9).

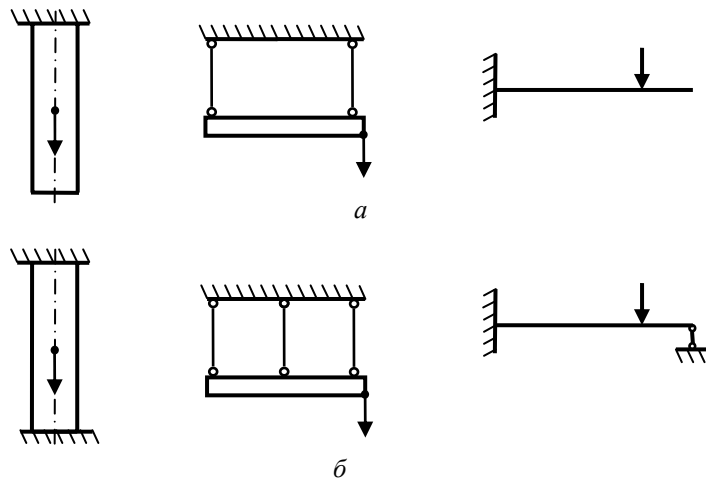


Рис. 2.9. Порівняння статично визначуваних (а) та статично невизначуваних (б) систем

Під живучістю тут розуміється здатність конструкції виконувати свої функції в разі пошкодження її окремих елементів.

Із прикладів статично невизначуваних систем (рис. 2.9, б) видно, що при відкиданні (руйнуванні) деяких зв'язків, вони зберігають здатність сприймати зовнішні навантаження, якщо мають достатній запас міцності, натомість аналогічні статично визначувані конструкції, у такому разі, перетворюються в механізми (рис. 2.10).

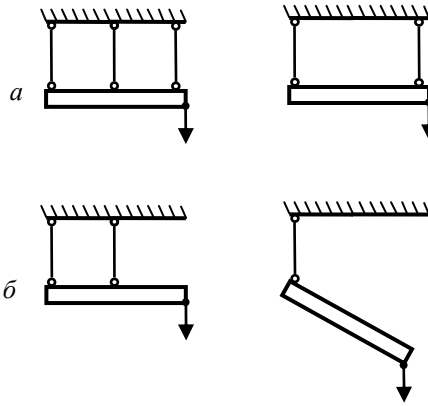


Рис. 2.10. Відмінності у відгуку на пошкодження елемента статично невизначуваної (а) і статично визначуваної (б) систем

Розраховуючи статично невизначувані системи, доводиться складати *додаткові рівняння переміщень*, аналізуючи деформації конструкції. Тобто методами теоретичної механіки такі задачі розв'язати неможливо.

Додаткові рівняння складаються на основі дотримання умов *сумісності деформацій*, тобто урахування того, що в разі деформування конструкції не відбуваються відокремлення чи непередбачені переміщення однієї її частини відносно іншої.

Кількість додаткових рівнянь, що доводиться складати для розрахунку системи, визначає *ступінь її статичної невизначеності*.

Розглянемо стержень, жорстко закріплений обома кінцями і навантажений силою  $F$  (рис. 2.11), під дією якої в опорних точках  $A$  і  $B$  виникають відповідні реакції.

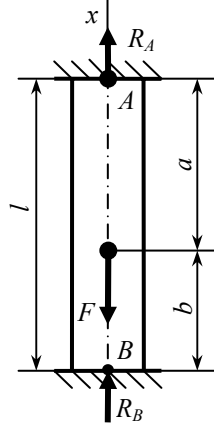


Рис. 2.11. Статично невизначений брус, навантажений силою

У цьому випадку рівновага бруса визначається одним рівнянням статички

$$\sum X = R_A + R_B - F = 0,$$

у яке входять дві невідомі реакції  $R_A$  і  $R_B$ . Тобто треба скласти ще одне рівняння сумісності деформацій:

$$\Delta l = \Delta a + \Delta b = 0.$$

За допомогою закону Гука переходимо до рівняння, яке пов'язує невідомі сили

$$\frac{R_A a}{EA} - \frac{R_B b}{EA} = 0, \quad \text{звідки } R_A = R_B \frac{b}{a}.$$

Далі підставляємо цей вираз у рівняння статички і знаходимо величини шуканих реакцій

$$R_B = \frac{a}{l} F; R_A = \frac{b}{l} F.$$

Після цього задача переходить у розряд статично визначених.

При розв'язанні цього найпростішого прикладу чітко простежується загальна послідовність розрахунку статично невизначених задач (*розкриття статичної невизначеності*):

1. Записуються рівняння рівноваги для всієї конструкції або для деякої її частини (*статичний бік задачі*).

2. Після аналізу деформацій системи складаються додаткові рівняння переміщень (*геометричний бік задачі*).

3. За допомогою закону Гука переміщення або деформації, що входять у додаткові рівняння, виражаються через невідомі зусилля (*фізичний бік задачі*).

4. Розв'язується спільно система рівнянь рівноваги і рівнянь сумісності деформацій, унаслідок чого знаходяться шукані невідомі зусилля (*синтез*).

Слід зазначити, що в ролі невідомих можуть бути обрані чи реакції опор, чи внутрішні силові фактори, залежно від того рівновага і деформації якої частини конструкції розглядаються.

Характерною ознакою статично невизначених систем є те, що зусилля в них можуть виникати через неточності виготовлення, зміни температури, зміщення опорних закріплень, а не тільки від зовнішніх навантажень, як у статично визначених конструкціях.

Розглянемо брус, жорстко закріплений обома кінцями (рис. 2.12). У разі збільшення температури на  $\Delta t^\circ$  стержень намагається розширитись, чому перешкоджають опори. Внаслідок цього в опорах виникають однакові опорні реакції  $R$ . Значення реакції  $R$  не можна визначити з рівняння рівноваги, яке в цьому випадку вироджується  $\sum X = R - R = 0$ . Додаткове рівняння сумісності деформацій, як і в попередньому випадку, виражає той факт, що подовження деформація стержня відсутня

$$\Delta l = \Delta l_t - \Delta l_R = 0,$$

де  $\Delta l_t$  — подовження стержня від нагрівання;  $\Delta l_R$  — деформація стержня від дії реактивних сил.

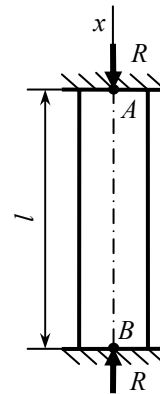


Рис. 2.12. Статично невизначуваний брус при нагріванні

Застосовуючи закон Гука та формулу для подовження при нагріванні, відому з курсу фізики,  $\Delta l_t = \alpha l \Delta t^\circ$ , дістанемо фізичне рівняння

$$\alpha l \Delta t^\circ - \frac{Rl}{EA} = 0,$$

звідки  $R = \alpha EA \Delta t^\circ$ .

### Приклад розрахунку

Для сталевого бруса (рис. 2.13, а) побудувати епюри нормальних сил, напружень і переміщень поперечних перерізів. Перевірити міцність бруса. Взяти  $F = 50$  кН;  $A = 2$  см<sup>2</sup>;  $q = 40$  кН/м;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $a = 50$  см;  $b = 40$  см;  $[\sigma] = 160$  МПа.

#### Розв'язання

Ділимо брус на ділянки і позначаємо їх на схемі (рис. 2.13, а).

Розглядаємо кожен ділянку окремо, визначаючи нормальні сили  $N$ , напруження  $\sigma$  і абсолютні деформації  $\Delta l$  (подовження).

#### Ділянка I. $0 \leq x \leq a$ .

Проводимо переріз і зображуємо відсічену частину (рис. 2.13, б).

Нормальна сила  $N = -F = -50$  кН.

Нормальне напруження

$$\sigma = \frac{N}{2A} = -\frac{50 \cdot 10^3}{2 \cdot 200} = 125 \text{ МПа.}$$

Подовження

$$\Delta a = \frac{Na}{E2A} = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 200} = -0,3125 \text{ мм.}$$

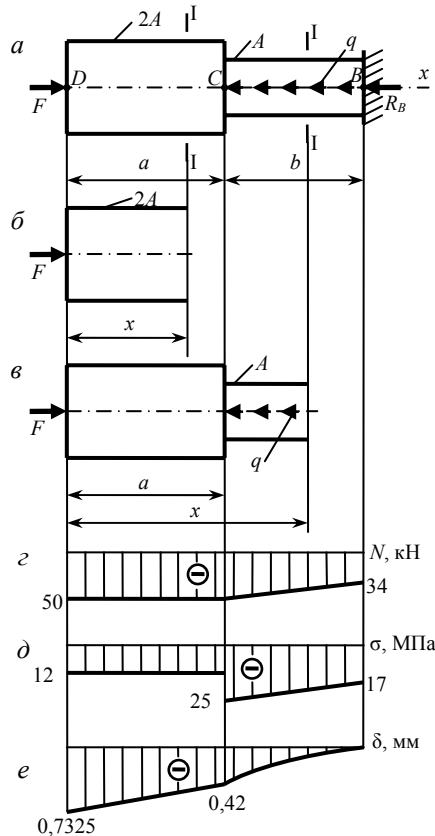


Рис. 2.13. Приклад розрахунку сталевго бруса



**Ділянка II.**  $a \leq x \leq a + b$ . Для відсіченої частини (рис. 2.13, в): нормальна сила

$$N(x) = -F + q(x - a);$$

$$x = a; N = -50 \text{ кН}; x = a + b; N = -F + qb = -50 + 40 \cdot 0,4 = -34 \text{ кН}.$$

Нормальні напруження

$$\sigma = \frac{N(x)}{A};$$

$$x = a; \sigma = \frac{-50}{200} = -250 \text{ МПа}; x = a + b; \sigma = \frac{-34}{200} = -170 \text{ МПа}.$$

Подовження

$$\begin{aligned} \Delta b &= \frac{1}{EA} \int_a^{a+b} N(x) dx = \frac{1}{EA} \int_a^{a+b} [-F + q(x - a)] dx = \left| \frac{u = x - a}{dx = du} \right| = \\ &= \frac{1}{EA} \int_0^b (-F + qu) du = \frac{1}{EA} \left( -Pb + \frac{qb^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} \left( -50000 \cdot 400 + \frac{40 \cdot 400^2}{2} \right) = -0,420 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Визначаємо переміщення меж ділянок. Точка  $B$  знаходиться на жорсткій опорі її переміщення  $\delta_B = 0$ .

Між точками  $C$  і  $B$  розташована ділянка II, подовження якої  $\Delta b$  визначили, тому

$$\delta_C = \Delta b = -0,42 \text{ мм}.$$

Далі, аналогічно

$$\delta_D = \Delta b + \Delta a = -0,42 - 0,3125 = -0,7325 \text{ мм}.$$

Будуємо епюри  $N$ ,  $\sigma$  і  $\delta$  (рис. 2.13, з, д, е). На епюрі  $N$  стрибки: в точці  $D$  на величину сили  $F$ , в точці  $B$  на величину реакції  $R$ .

На епюрі  $\sigma$ , крім стрибків у точці  $D$  і  $B$ , що відповідають зосередженим силам, додається стрибок у точці  $C$ , де раптово змінюється площа перерізу.

Кути нахилу епюри  $\delta$  відповідають величинам напруження, у точці  $C$ , де напруження змінюється стрибком, на епюрі  $\delta$  — перелом.

Перевіряємо міцність бруса, аналізуючи епюру  $\sigma$  (рис. 2.13, д)

$$\sigma_{\max} = 250 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Тобто міцність бруса не забезпечена. Щоб виправити становище, можна рекомендувати збільшити площу перерізу бруса до величини

$$A = \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{50 \cdot 10^3}{160} = 312,5 \text{ мм}^2.$$



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. За яких умов у брусі виникає деформація розтягання–стискання?
2. Які внутрішні зусилля виникають у перерізах бруса при розтяганні?
3. За якими правилами будуються епюри внутрішніх зусиль?
4. За якою формулою визначають напруження при розтяганні?
5. Який вигляд мають вирази закону Гука?
6. Що називається абсолютними і відносними деформаціями?
7. Що являє собою модуль поздовжньої пружності?
8. Що називається коефіцієнтом Пуассона?
9. Які характерні ділянки має діаграма розтягання зразка із маловуглецевої сталі.
10. У чому полягає явище наклепу?
11. Які величини є основними характеристиками міцності?
12. Які величини є характеристиками пластичності матеріалу?
13. Що таке умовна границя текучості?
14. Який вигляд має умова міцності?
15. Поясніть як визначають допустимі напруження.
16. Від чого залежить і як встановлюється запас міцності?
17. Який вигляд має умова жорсткості?
18. Як визначається потенціальна енергія деформації?
19. Які конструкції називаються статично невизначуваними?
20. Наведіть розрахунок статично невизначуваних систем.

### 3. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО ТА ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

#### 3.1. Напружений стан у точці

Через кожну точку тіла можна провести нескінченну кількість перерізів, нахилених під різними кутами. Сукупність напружень, що виникають у цих перерізах, характеризує напружений стан у точці. Коли досліджують напружений стан, точку зазвичай зображують у вигляді елементарного паралелепіпеда. Напруження на границях цього елемента називають *компонентами напруження* в точці (рис. 3.1).

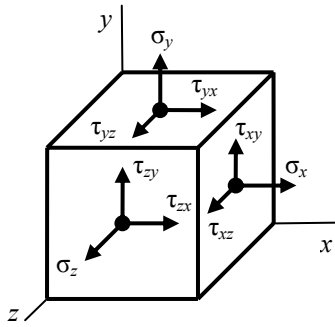


Рис. 3.1. Компоненти напруження в точці

*Дотичні напруження вважаються додатними*, якщо вони утворюють пару, що намагається повернути елемент за годинниковою стрілкою навколо координатної осі. При цьому слід дивитися з боку додатного напрямку осі.

Варто зазначити, що в літературі трапляються й інші варіанти позначення напружень.

#### 3.2. Головні напруження. Види напруженого стану

Через кожну точку тіла можна провести три взаємно перпендикулярні площадки, на яких будуть відсутні дотичні напруження. Такі площадки називаються головними, а нормальні напруження на них — *головними напруженнями*. Вони позначаються  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , причому  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , тобто  $\sigma_1$  є найбільше, за алгебричною величиною, напруження.

Нормальні напруження в даній точці досягають на головних площадках екстремальних значень. Тобто  $\sigma_1$  чи  $\sigma_3$  можуть бути найбільшими за абсолютною величиною з усіх можливих нормальних напружень у точці. Тому їх визначення і знаходження положення головних площадок є дуже важливим для подальшого оцінювання міцності конструкції.

Існує три види напруженого стану в точці (рис. 3.2):

- лінійний — коли два головних напруження дорівнюють нулю;
- плоский — коли одне головне напруження дорівнює нулю;
- об'ємний — коли всі три головні напруження відмінні від нуля.

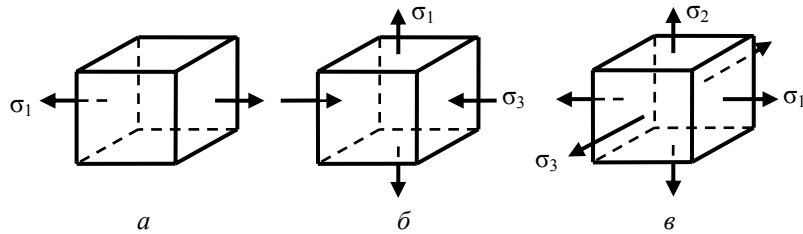


Рис. 3.2. Види напруженого стану:  
*a* — лінійний; *b* — плоский; *c* — об'ємний

### 3.3. Лінійний напружений стан

Лінійний напружений стан реалізується, наприклад, у точках стержня за осьового розтягання–стискання. Головні напруження, що виникають у поперечних перерізах бруса, відомі:  $\sigma_1 = N/A$ .

Визначимо напруження в деякому перерізі  $m_1k$ , що розташований під кутом  $\alpha$  до поперечного перерізу  $mk$  (рис. 3.3).

Кут  $\alpha$  вважається додатним, якщо він відкладається проти годинникової стрілки.

Використовуючи метод перерізів, розглянемо рівновагу нижньої частини. Сума проекцій усіх сил на нормаль  $n$  до площадки  $m_1k$  дорівнює

$$\sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \cos \alpha = 0,$$

де  $A$  — площа поперечного перерізу  $mk$ ;  
 $A_0 = A/\cos \alpha$  — площа похилого перерізу  $m_1k$ .

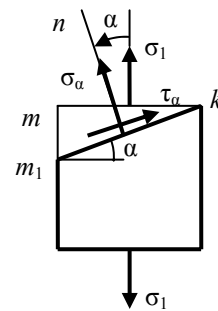


Рис. 3.3. Напруження в похилому перерізі

Із отриманого рівняння рівноваги випливає, що

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha. \quad (3.1)$$

Далі споектуємо всі сили на напрямок  $m_1k$

$$\tau_{\alpha} A_{\alpha} - \sigma_1 A \sin \alpha,$$

звідки 
$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.2)$$

Проаналізувавши формули (3.1), (3.2), дійдемо висновку, що найбільші нормальні напруження виникають у поперечному перерізі

$$\max \sigma_{\alpha} = \sigma_1 \text{ (при } \alpha = 0),$$

найбільші дотичні напруження — на площадках, нахилених під ку-

том  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\max \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2}$ .

### 3.4. Плоский напружений стан

Розглянемо задачу про визначення напружень  $\sigma_{\alpha}$ ,  $\tau_{\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta}$ ,  $\tau_{\beta}$  на площадках, нахилених до головних під кутом  $\alpha$  і  $\beta = \alpha + 90^\circ$ . На головних площадках задані напруження  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  (рис. 3.4).

Застосовуючи принцип суперпозиції, за формулами (3.1), (3.2) визначаємо напруження на похилих площадках окремо від дії  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  і результати складаємо. У підсумку маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \sigma_{\beta} &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \\ \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \\ \tau_{\beta} &= \frac{-\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Складаючи перші дві формули (3.3), отримуємо закон суми нормальних напружень

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}, \quad (3.4)$$

тобто сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках є величина стала (3.4).

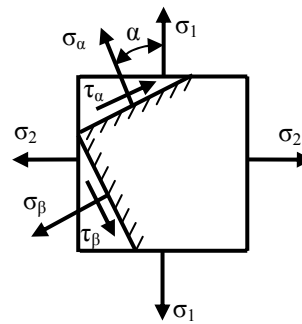


Рис. 3.4. Напруження при плоскому напруженому стані

Із третьої і четвертої формул (3.3) випливає закон парності дотичних напружень

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}, \quad (3.5)$$

тобто дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках рівні між собою та протилежні за знаком.

Для потреб практики більш важливою є обернена задача: за заданими на двох взаємно перпендикулярних площадках напруженнями знайти положення головних площадок і величини головних напружень.

Віднімемо з першої формули (3.3) другу

$$\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta} = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha. \quad (3.6)$$

Із третьої формули (3.3) маємо

$$2\tau_{\alpha} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \quad (3.7)$$

Поділивши (3.7) на (3.6), отримуємо формулу для кута нахилу головних площадок

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}}. \quad (3.8)$$

При знаходженні положення головних площадок за формулою (3.8) слід урахувати правило знаків для кута  $\alpha$ , яке зобразимо графічно (рис. 3.5).

Далі, підносимо до квадрата вирази (3.6), (3.7) і додаємо результати

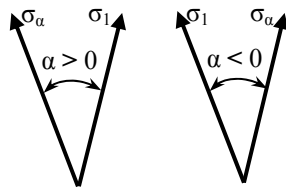


Рис. 3.5. Правило знаків для кута нахилу головних площадок

$$4\tau_{\alpha}^2 + (\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2,$$

звідки, з урахуванням закономірності (3.4), отримаємо формули для визначення головних напружень

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left( \sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} + \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau_{\alpha}^2} \right); \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left( \sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} - \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau_{\alpha}^2} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ці вирази отримані на основі залежностей (3.3), які є результатом розв'язання прямої задачі про визначення напружень на похилих площадках при заданих головних напруженнях  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  (див. рис. 3.4).

Якщо ж задатись іншими головними напруженнями, наприклад  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$  (див. рис. 3.2, б), то ці ж величини, звичайно, отримаємо розв'язавши обернену задачу. У загальному випадку залежності (3.9) зручно подати у вигляді

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{1}{2} \left( \sigma_\alpha + \sigma_\beta \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right). \quad (3.10)$$

### 3.5. Деформації при об'ємному напруженому стані

Розглянемо елементарний паралелепіпед, що знаходиться в умовах об'ємного напруженого стану (див. рис. 3.2, в). Використовуючи принцип суперпозиції, визначимо його деформацію в напрямку  $\sigma_1$ , враховуючи вплив кожного з напружень окремо

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогічно записуються формули для визначення деформацій елемента  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$  у напрямках  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ . Всі три вирази для головних деформацій мають назву *узагальненого закону Гука*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; & \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Сума головних деформацій являє собою відносну зміну об'єму елемента  $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  чи, із застосуванням (3.11),

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

### 3.6. Теорії міцності

Як уже зазначалося в розд. 2.4, розрахунки на міцність найчастіше проводяться, порівнюючи напруження в «небезпечній» точці конструкції з допустимим значенням, яке зумовлене характеристиками міцності матеріалу ( $\sigma_T$  чи  $\sigma_B$ ). Такий підхід не викликає ніяких сумнівів за лінійного напруженого стану (див. рис. 3.2, а), бо і граничні напруження визначаються при випробуваннях на однісіне розтягання чи стискання.

У разі більш складних видів напруженого стану — плоского (див. рис. 3.2, б) і об'ємного (див. рис. 3.2, в), ситуація значно ускладнюється тим, що зразок при випробуваннях може бути доведений до граничного стану при різних співвідношеннях головних напружень, не кажучи вже про технічні труднощі реалізації двовісних і тривісних навантажень.

Нині розрахунки на міцність при складному напруженому стані проводяться з використанням так званих *теорій (гіпотез) міцності*, які встановлюють критерії еквівалентності («рівнонебезпечності») різних напружених станів. При цьому використовуються різні комбінації головних напружень, що становлять *розрахункове чи еквівалентне напруження*, яке й порівнюють із допустимими. Тобто умови міцності мають вигляд

$$\sigma_p \leq [\sigma].$$

Теорій міцності існує декілька десятків, і вже сама їх кількість показує, що жодна з них не годиться «на всі випадки життя». У курсі опору матеріалів традиційно розглядають лише п'ять таких теорій:

1. *Перша теорія міцності* (теорія найбільших нормальних напружень)

$$\sigma_p = \sigma_1 \text{ чи } \sigma_p = |\sigma_3|.$$

2. *Друга теорія міцності* (теорія найбільших відносних деформацій). За критичний стан приймається стан досягнення найбільшою головною деформацією певного (допустимого) значення  $|\epsilon_{\max}| \leq [\epsilon]$ , а розрахункове напруження розраховується за допомогою відповідної формули узагальненого закону Гука

$$\sigma_p = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3).$$

3. *Третя теорія міцності* (теорія найбільших дотичних напружень)

$$\sigma_p = \sigma_1 - \sigma_3.$$

4. *Четверта теорія міцності* (енергетична теорія)

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}.$$

5. *Теорія міцності Мора*. Особливість критерію Мора полягає в тому, що він базується не на гіпотезах, а на узагальненні результатів експериментів. Умову міцності Мора можна отримати за до-



помогою так званих кругів напружень (кругів Мора), які в даному посібнику не розглядаються (див. підручник Писаренка [1])

$$\sigma_p = \sigma_1 - k\sigma_3,$$

де  $k = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$ ,  $[\sigma_p]$  і  $[\sigma_c]$  — допустимі напруження за одновісного розтягання та стискування відповідно.

Для пластичних матеріалів  $[\sigma_p] = [\sigma_c]$ , а  $k = 1$ , тобто теорія Мора є узагальненням третьої теорії міцності в разі використання крихких матеріалів, які по-різному сприймають розтягання та стискування. Для пластичних матеріалів рекомендують застосовувати четверту або третю теорії міцності.

### Приклади розрахунку

**Приклад 3.1.** Для елемента, гранями якого є головні площадки (рис. 3.6), знайти нормальні і дотичні напруження на площадках, нахилених до головних під кутом  $\alpha = 30^\circ$ , якщо  $\sigma_1 = 80$  МПа;  $\sigma_2 = 50$  МПа.

#### Розв'язання

Для визначення напружень на похилих площадках використовуємо формули (3.3)

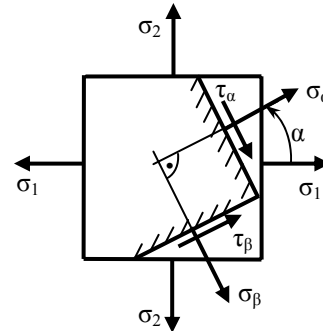


Рис. 3.6. До прикладу 3.1

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \\ &= 80 \cdot 0,866^2 + 50 \cdot 0,5^2 = 72,5 \text{ МПа}; \\ \sigma_\beta &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha = \\ &= 80 \cdot 0,5^2 + 50 \cdot 0,866^2 = 57,5 \text{ МПа}; \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{80 - 50}{2} 0,866 = 13 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

За законом парності дотичних напружень (3.5)

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha = -13 \text{ МПа}.$$

Згідно з правилом знаків (див. рис. 3.5) відкладаємо додатний кут  $\alpha = 30^\circ$  від напрямку  $\sigma_1$  проти годинникової стрілки й отримуємо напрямок  $\sigma_\alpha$ , напрямок  $\sigma_\beta$  — перпендикулярний до  $\sigma_\alpha$ . Зображуємо похилі площадки перпендикулярними до відповідних нормальних напружень і дотичні напруження, напрямлені за правилом знаків (див. підрозд. 3.1).

**Приклад 3.2.** Для елемента, на гранях якого відомі нормальні та дотичні напруження (рис. 3.7), визначити головні напруження і положення головних площадок.

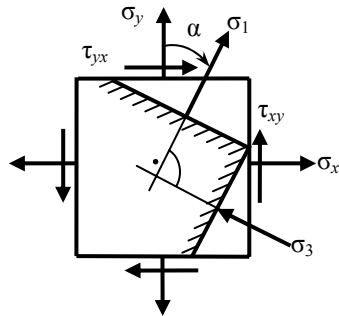


Рис. 3.7. До прикладу 3.2

Прийняти  $\sigma_x = -52,5$  МПа,  $\sigma_y = 22,5$  МПа,  $\tau_{xy} = -65$  МПа.

*Розв'язання*

Для того, щоб мати змогу користуватись розрахунковими формулами розд. 3, треба провести перепозначення: від індексів  $x$  і  $y$  перейти до  $\alpha$  і  $\beta$ .

При цьому за  $\sigma_\alpha$  вибираємо найбільше за алгебричною величиною нормальне напруження

$$\sigma_\alpha = \sigma_y = 22,5 \text{ МПа, тоді}$$

$$\sigma_\beta = \sigma_x = -52,5 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{xy} = \tau_\beta = -65 \text{ МПа;}$$

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta = 65 \text{ МПа} = \tau_{yx}.$$

Головні напруження визначаємо за формулою (3.10)

$$\begin{aligned} \sigma_{\max/\min} &= \frac{1}{2} \left( \sigma_\alpha + \sigma_\beta \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 22,5 - 52,5 \pm \sqrt{(22,5 - 52,5)^2 + 4 \cdot 65^2} \right) = -15 \pm 75 \text{ МПа;} \\ \sigma_{\max} &= -15 + 75 = 60 \text{ МПа; } \sigma_{\min} = -15 - 75 = -90 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Третє головне напруження у напрямку, перпендикулярному до площини схеми, дорівнює нулю. З урахуванням цього розставляємо індекси головних напружень:

$$\sigma_1 = 60 \text{ МПа; } \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -90 \text{ МПа.}$$

Кут, що визначає положення головних площадок, знаходимо за формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}} = \frac{2 \cdot 65}{22,5 + 52,5} = 1,73,$$

звідки  $2\alpha = 60^{\circ}$ ;  $\alpha = 30^{\circ}$ .

Згідно з правилом знаків (див. рис. 3.5) відкладаємо додатний кут  $\alpha$  від напрямку  $\sigma_y = \sigma_{\alpha}$  за годинниковою стрілкою і отримуємо напрямки  $\sigma_1$ , напрямки  $\sigma_3$  перпендикулярний до  $\sigma_1$ . Зображуємо головні площадки перпендикулярними до відповідних головних напружень.



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що зумовлює напружений стан у точці?
2. Які правила знаків вводяться для нормальних і дотичних напружень?
3. Які напруження називаються головними?
4. Які види напруженого стану існують?
5. Як визначаються напруження на похилих площадках за лінійного напруженого стану?
6. На яких площадках виникають найбільші нормальні і дотичні напруження?
7. За якими формулами визначають напруження на похилих площадках при плоскому напруженому стані?
8. Як виражається закон суми нормальних напружень?
9. У чому полягає закон парності дотичних напружень?
10. Як визначається положення головних площадок?
11. Наведіть правило знаків для кута нахилу головних площадок.
12. Який вигляд мають співвідношення узагальненого закону Гука?
13. Що являють собою теорії міцності?
14. Поясніть, як визначаються розрахункові напруження теорії міцності, що розглядаються в курсі опору матеріалів.

## 4. ЗСУВ

### 4.1. Чистий зсув

Зсув — це такий вид простої деформації, за якого в перерізах бруса виникають тільки поперечні сили, а решта внутрішніх силових факторів відсутня. Подібний напружений стан виникає, наприклад, у брусі при дії однакових, протилежно спрямованих, близько розташованих одна до одної сил, що перпендикулярні до поздовжньої осі (рис. 4.1), як це буває при різанні ножицями. При цьому прямокутний елемент  $ABCD$ , що знаходиться між лініями дії сил

(рис. 4.1, а), перетворюється в паралелограм  $A_1B_1C_1D_1$  (рис. 4.1, б).

При деформації *чистого* зсуву відбувається лише зміна форми елемента без зміни його об'єму.

Це можливо тільки тоді, коли на гранях елемента виникають тільки дотичні напруження (рис. 4.2).

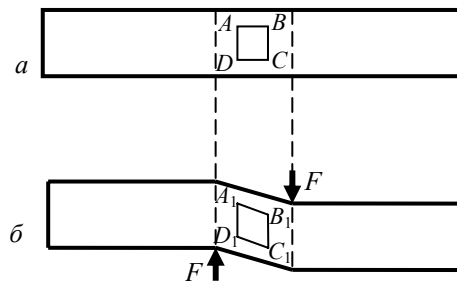


Рис. 4.1. Виникнення деформації зсуву

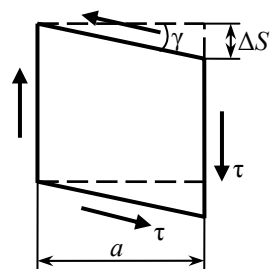


Рис. 4.2. Деформації при зсуві

Величина  $\Delta S$ , що є переміщенням сторони елемента при його деформуванні, називається *абсолютним зсувом* (абсолютною деформацією при зсуві).

Зважаючи на малість деформацій, величина відносної деформації при зсуві — *відносний зсув* (кут зсуву) визначається як

$$\gamma \approx \text{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}.$$

Вважаючи, що напруження по перерізу з площею  $A$  розподілені рівномірно, їх величину визначають за формулою

$$\tau = \frac{Q}{A}.$$

У межах пружного деформування справедливі залежності закону Гука, аналогічні таким же співвідношенням при розтягнанні-стисканні

$$\Delta S = \frac{Qa}{GA}; \quad \tau = G\gamma,$$

у яких коефіцієнт пропорційності  $G$  називають *модулем зсуву*, або *модулем пружності другого роду*.

Так, як і модуль Юнга  $E$ , модуль зсуву  $G$  є характеристикою пружності матеріалу, яка визначається експериментально за стандартними методиками. Між трьома характеристиками пружності  $E$ ,  $G$  і  $\mu$ -коефіцієнтом Пуассона є залежність

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Умова міцності при зсуві має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{A} \leq [\tau].$$

Величину допустимого дотичного напруження визначають так само, як і при розтяганні (див. розд. 2.4). У першому наближенні, для пластичних сплавів, можна користуватись співвідношенням  $[\tau] \approx 0,6[\sigma]$ .

#### 4.2. Практичні розрахунки з'єднань на зсув

Проектуючи конструкції, доводиться розраховувати кріпильні деталі і з'єднання частин машин (заклепки, болти, шпонки, шліци, зварювальні шви тощо) на зсув. Такі деталі мають поперечні розміри того ж порядку, що й довжина, тобто погано підходять під розрахункову модель бруса.

Точні теоретичні розв'язки подібних задач є дуже складними, тому на практиці застосовуються умовні (наближені) розрахунки, які ґрунтуються на двох основних припущеннях:

- напруження вважаються рівномірно розподіленими по перерізу, коли розглядають кожен розрахункову схему;
- якщо з'єднання виконані за допомогою декількох однакових деталей, вважається, що всі вони навантажені однаково.

Крім того, не враховується згинання, яке виникає навіть за малих відстаней між площинами дії сил.

Болтові і заклепкові з'єднання (рис. 4.3) розраховуються на зріз, зминання та розрив елементів, що з'єднуються, у послабленому перерізі.

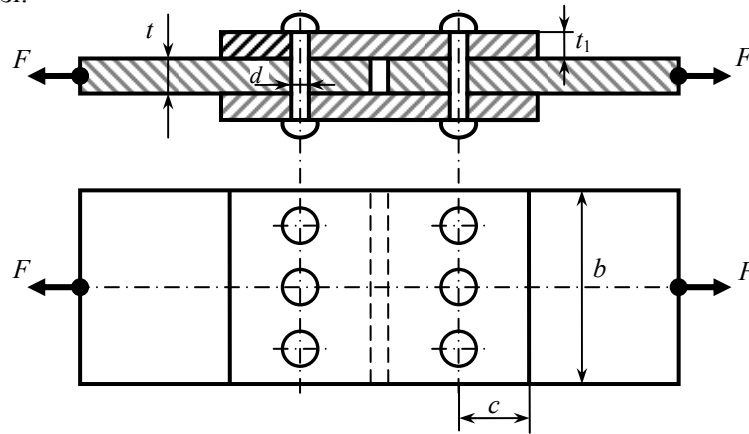


Рис. 4.3. Заклепкове з'єднання

*Розрахунок на зріз.* Руйнування з'єднувальних елементів, у даному прикладі заклепок, у разі недостатньої міцності, відбувається через їх перерізування по площинах контакту деталей, що з'єднуються. Тобто з'єднувальні елементи працюють на зріз.

Умова міцності на зріз заклепки:

$$\tau = \frac{F}{i n A_{зр}} \leq [\tau],$$

де  $i$  — кількість площин зрізу;  $n$  — кількість заклепок;  $A_{зр} = \pi d^2 / 4$  — площа поперечного перерізу заклепки.

*Розрахунок на зминання.* Тиск, що виникає на поверхнях отворів і з'єднувальних деталей, прийнято називати *напруженнями зминання*  $\sigma_{зм}$ . Розподілення цього тиску по циліндричній поверхні контакту є складним і досі до кінця не вивчене, крім того, воно залежить від зазору між отвором і, в даному випадку, заклепкою, який дуже складно виміряти. Тому за *розрахункову площу зминання*  $A_{зм}$  умовно береться площа проекції поверхні зминання на діаметральну площину (рис. 4.4). Умова міцності на зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{n A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}],$$

де  $[\sigma_{зм}]$  — допустиме напруження на зминання, у практичних розрахунках береться  $[\sigma_{зм}] = 1,8, \dots, 2,5 [\sigma]$ .

*Розрахунок на розрив листа.* Умова міцності на розрив у найбільш послабленому отворі під заклепки перерізі:

$$\sigma = \frac{F}{t(b - n_1 d)} \leq [\sigma],$$

де  $n_1$  — кількість заклепок у ряду, по якому можливий розрив.

У деяких з'єднаннях, крім наведених розрахунків, проводиться ще перевірка на зріз (*сколювання*) заклепкою частини листа від отвору до його краю (див. рис. 4.3). Умова міцності при цьому:

$$\tau = \frac{F}{nA_{ск}} \leq [\tau],$$

де  $A_{ск} = 2ct$  — площа сколювання.

Розрахунки на зминання, розрив і сколювання проводяться для тих елементів, що мають найменшу товщину. У нашому прикладі (див. рис. 4.3) для цього треба підрахувати, що менше: товщина листа  $t$  чи сумарна товщина накладок  $2t_1$ .

#### **Приклад розрахунку**

Перевірити міцність з'єднання, зображеного на рис. 4.3, якщо задано:  $F = 120$  кН;  $b = 200$  мм;  $t = 12$  мм;  $t_1 = 8$  мм;  $d = 20$  мм;  $c = 25$  мм;  $[\sigma] = 100$  МПа;  $[\tau] = 80$  МПа;  $[\sigma_{зм}] = 200$  МПа.

*Розв'язання*

1. Перевіряємо міцність заклепок на зріз:

$$\tau = \frac{F}{in A_{зр}} = \frac{4F}{in \pi d^2} = \frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{2 \cdot 3 \cdot 3,14 \cdot 20^2} = 63,7 \text{ МПа} < [\tau].$$

2. Перевіряємо міцність на зминання в місці контакту заклепки і листа, тому що товщина листа ( $t = 12$  мм) менша за товщину двох накладок ( $2t_1 = 16$  мм):

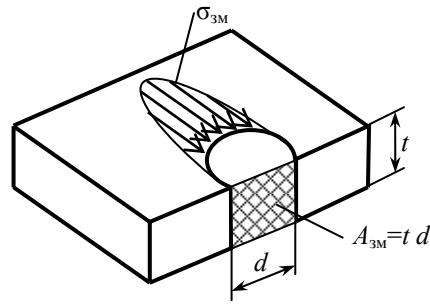


Рис. 4.4. До визначення умовної площі зминання

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{nA_{зм}} = \frac{F}{ntd} = \frac{120 \cdot 10^3}{3 \cdot 10 \cdot 20} = 167 \text{ МПа} < [\sigma_{зм}].$$

3. Перевіряємо міцність на розрив листа також, тому що  $t < 2t_1$ :

$$\sigma = \frac{F}{t(b-3d)} = \frac{120 \cdot 10^3}{12(200-3 \cdot 20)} = 71,4 \text{ МПа} < [\sigma].$$

4. Перевіряємо міцність на сколювання листа, тому що  $t < 2t_1$ :

$$\tau = \frac{F}{nA_{ск}} = \frac{F}{n \cdot 2ct} = \frac{120 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 12} = 66,7 \text{ МПа} < [\tau].$$

Міцність з'єднання забезпечена.

### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Коли в брусі виникає деформація зсуву?
2. Що називається чистим зсувом?
3. Що називається абсолютним, відносним зсувом?
4. Наведіть формулу, за якою визначають напруження при зсуві.
5. Який вигляд мають формули закону Гука при зсуві?
6. Що таке модуль зсуву?
7. Як записується умова міцності при зсуві?
8. Які припущення покладені в основу практичних розрахунків на зсув?
9. Що називають напруженнями зминання?
10. Як визначається розрахункова площа зминання?
11. По яких поверхнях у з'єднанні відбувається зріз, зминання, розрив і сколювання?
12. Наведіть формули, за якими розраховуються з'єднання на зріз, зминання, розрив і сколювання.

## 5. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

У попередніх розділах, під час розгляду деформацій розтягання і зсуву, зазначалося, що опір бруса, крім механічних властивостей матеріалу, значною мірою залежить від величини (площі) його перерізу. При подальшому дослідженні деформацій кручення, згинання і складного опору виявляється, що міцність і жорсткість стержнів буде залежати не тільки від величини перерізу, а й від його форми та орієнтації відносно зовнішніх навантажень.



Це наочно ілюструє відомий експеримент з лінійкою: в одному напрямку її легко зігнути, а, повернувши переріз на  $90^\circ$ , так легко це зробити не вдається.

Величини, що характеризують здатність перерізу бруса опиратися дії кручення чи згинання (статичні моменти і моменти інерції площі, моменти опору тощо), у звичайному курсі математики не вивчаються. Тому в опорі матеріалів доводиться розглядати цей розділ геометрії.

### 5.1. Основні визначення

Розглянемо геометричні характеристики довільної плоскої фігури (рис. 5.1). Найпростішою і найвідомішою характеристикою є *площа* — сума елементарних площадок

$$A = \int_A dA.$$

*Статичним моментом площі* фігури відносно деякої осі називається сума добутків елементарних площадок на їх відстані до цієї осі

$$S_z = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A z dA. \quad (5.1)$$

Із формул (5.1) видно, що статичні моменти можуть бути додатними і від'ємними, залежно від того, як провести координатні осі (від знаків відстаней  $y$  чи  $z$ ). Якщо ж осі провести через центр ваги  $C$  перерізу, то відносно них статичні моменти площі будуть дорівнювати нулю. Такі осі називаються *центральноними* ( $y_C, z_C$ ).

Свою назву статичний момент площі отримав за аналогією до моменту сили. Продовжуючи цю аналогію, можна стверджувати, якщо відома площа фігури і положення її центру ваги, то статичні моменти визначаються формулами:  $S_z = Ay_C$ ;  $S_y = Az_C$ , звідки *координати центру ваги*

$$y_C = \frac{S_z}{A}; \quad z_C = \frac{S_y}{A}. \quad (5.2)$$

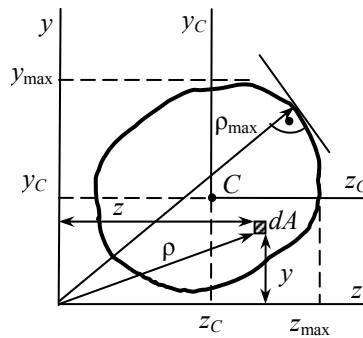


Рис. 5.1. До визначення геометричних характеристик

Осьовим моментом інерції площі фігури називається сума добутків елементарних площадок на квадрати їх відстаней до цієї осі

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA. \quad (5.3)$$

Полярним моментом інерції площі фігури називається сума добутків елементарних площадок на квадрати їх відстаней до полюса (початку координат)

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (5.4)$$

Згідно з визначеннями (5.3), (5.4) осьові і полярний моменти інерції є величинами додатними і між ними існує зв'язок

$$I_p = I_z + I_y, \quad (5.5)$$

який випливає з того, що радіус-вектор  $\rho$  є геометричною сумою декартових координат  $\rho^2 = z^2 + y^2$ .

Відцентровим моментом інерції площі фігури називається сума добутків елементарних площадок на їх відстані до обох координатних осей

$$I_{zy} = \int_A zy dA. \quad (5.6)$$

Відцентровий момент інерції може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю.

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називаються *головними осями інерції* фігури.

Знак відцентрового моменту інерції залежить від того, у яких квадрантах міститься більша частина фігури. Частини площі, що містяться в першій і третій чверті, будуть вносити додатні складові в інтеграл (5.6), а частини, що містяться в другому і четвертому квадрантах — від'ємні.

Моменти інерції є визначеними інтегралами, тому будь-який момент інерції фігури можна підрахувати як суму моментів інерції її складових частин відносно тих самих осей або полюса.

Слід зазначити, що жодна «інерція», звісно, у цьому розділі не розглядається, бо ніщо нікуди не рухається, а такі назви геометричні характеристики отримали, знову ж таки, за аналогією (подібністю визначень) із моментами інерції тіла.

Крім згаданих характеристик, у розрахунках на міцність та жорсткість використовуються ще *моменти опору перерізу* — осьові і полярний

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}; \quad W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}, \quad (5.7)$$

а також радіуси інерції перерізу

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

## 5.2. Моменти інерції найпростіших перерізів

Визначення моментів інерції складних перерізів через безпосереднє інтегрування є досить непростою математичною задачею, тому в практичних обчисленнях складні перерізи зазвичай подаються як суми простих фігур: прямокутників, трикутників, кругів та їхніх частин.

Розглянемо *прямокутний* переріз (рис. 5.2). Осьовий момент інерції відносно центральної осі  $z$ , згідно з (5.3)

$$I_z = \int_A y^2 dA = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогічно знаходимо момент інерції відносно осі  $y$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}.$$

Моменти опору прямокутника визначаються за формулами (5.7)

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{bh^2}{6}.$$

Визначимо далі момент інерції *трикутника* (рис. 5.3) відносно осі  $z$ , яка проходить через основу. Ширину елементарної смужки  $dA$  знаходимо з подібності трикутників  $b(y) = (b/h)(h-y)$ , тоді

$$I_z = \int_A y^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Визначаючи полярний момент інерції *круга* (рис. 5.4) відносно його центра,

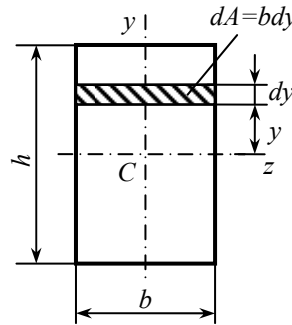


Рис. 5.2. Визначення моментів інерції прямокутника

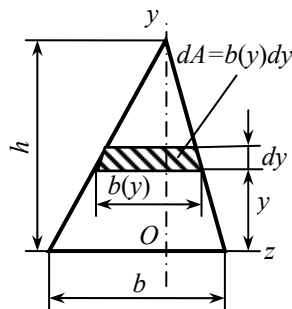


Рис. 5.3. Визначення моменту інерції трикутника

елемент площі обираємо у вигляді нескінченного тонкого кільця  $dA = 2\pi r dr$ , отже

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Полярний момент опору (5.7)

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Осьові моменти інерції, з урахуванням залежності (5.5)

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64},$$

осьові моменти опору

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32}.$$

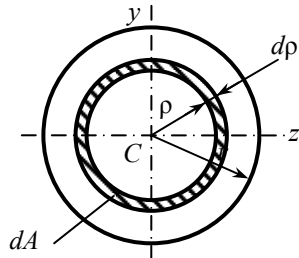


Рис. 5.4. Визначення моментів інерції круга

Як приклад визначення моментів інерції складної фігури розглянемо *кільце* (рис. 5.5), його можна подати як різницю двох кругів з діаметрами  $D$  і  $d$ . Тоді полярний момент інерції

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4),$$

де  $\alpha = d/D$ .

Осьові моменти інерції

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4).$$

Моменти опору

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4), \quad W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4).$$

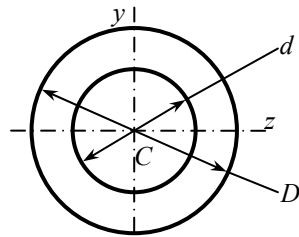


Рис. 5.5. Визначення моментів інерції кільця

### 5.3. Моменти інерції відносно паралельних осей

На відміну від кільця (рис. 5.5), більшість реальних перерізів складається з окремих фігур, які не є концентричними. Тому важливо вміти знаходити моменти інерції відносно осей, по-різному розташованих у площині перерізу.

Розглянемо довільний переріз (рис. 5.6). Нехай моменти інерції відносно центральних осей  $z, y$  відомі. Визначимо моменти інерції відносно осей  $z_1, y_1$ , паралельних центральним

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA =$$

$$= \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA = I_z + a^2 A,$$

тут ураховано, що  $\int_A y dA = S_z = 0$ , бо вісь  $z$  — центральна, а також, що  $\int_A dA = A$ .

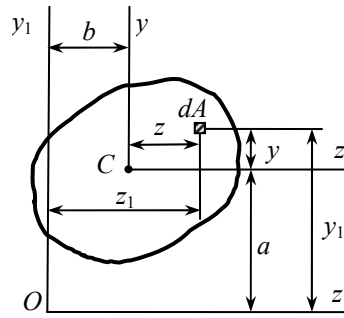


Рис. 5.6. Визначення моментів інерції відносно паралельних осей

Аналогічно можна знайти моменти інерції  $I_{y_1}$  та  $I_{y_1 z_1}$ , отже, остаточно

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A; \quad I_{y_1} = I_y + b^2 A; \quad I_{z_1 y_1} = I_{zy} + abA. \quad (5.8)$$

З отриманих формул (5.8) випливає, що осьові центральні моменти інерції  $I_z$  та  $I_y$  будуть меншими, ніж моменти інерції відносно будь-яких осей, паралельних центральним. Цього не можна сказати про відцентрові моменти, бо відстані  $a$  і  $b$  можуть бути додатними і від'ємними.

#### 5.4. Залежності між моментами інерції при повороті осей

Розглянемо довільний переріз (рис. 5.7), для якого відомі моменти інерції відносно деяких осей  $z, y$ . Визначимо моменти інерції відносно осей  $z_1, y_1$ , що повернуті до  $z, y$  на кут  $\alpha$ . Кут  $\alpha$  вважається додатним, якщо він відкладається проти годинникової стрілки.

Щоб знайти моменти інерції, спочатку треба встановити залежності між координатами довільного елемента площі  $dA$  в обох системах координат.

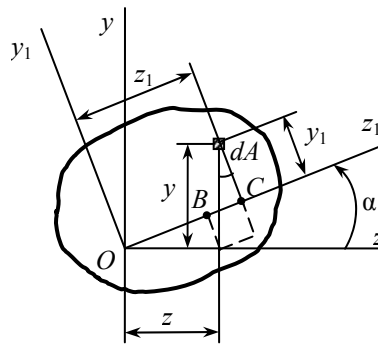


Рис. 5.7. Визначення моментів інерції при повороті осей

Наприклад,  $z_1 = OC + OB = z \cos \alpha + y \sin \alpha$ .

Тоді

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A z_1^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A zy dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA = \\ &= I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha + I_z \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Аналогічно, використовувачи тригонометричні залежності, знаходять моменти інерції  $I_{z_1}$  та  $I_{z_1 y_1}$ .

Остаточно маємо

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha; \\ I_{z_1} &= I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha; \\ I_{z_1 y_1} &= I_{zy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(I_z - I_y) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (5.9)$$

### 5.5. Головні осі, головні моменти інерції

Відносно головних осей відцентровий момент інерції дорівнює нулю, але більше практичне значення для розрахунків на міцність і жорсткість має той факт, що вони є осями з максимальним і мінімальним значеннями осьових моментів інерції.

Осьові моменти інерції відносно головних осей називаються *головними моментами інерції* перерізу.

Щоб знайти положення головних осей інерції відносно довільної системи координат  $z, y$ , візьмемо у третій формулі (5.9)  $I_{z_1 y_1} = 0$ , тоді

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}.$$

Формули (5.9) для знаходження головних моментів інерції можна перетворити до вигляду, що не має тригонометричних функцій

$$I_{\max/\min} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{zy}^2}.$$

Насамкінець слід зауважити, що для практичних розрахунків найчастіше використовуються *головні центральні моменти інерції*, тобто осьові моменти інерції відносно осей, що одночасно є головними і центральними для перерізу. Головними центральними осями інерції, зокрема, є осі симетрії фігури.

**Приклад 5.1.** Визначити головні центральні моменти інерції для рівнобедреного трикутника (рис. 5.8).

*Розв'язання*

Момент інерції трикутника відносно осі  $z_1$ , що проходить через основу, був отриманий у підрозд. 5.2.

$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12}$ , момент інерції відносно головної центральної осі  $z$  знайдемо, застосовуючи формулу (5.8)

$$I_z = I_{z_1} - a^2 A = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9} \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}.$$

Розглядаючи заданий трикутник як суму двох прямокутних трикутників з основою  $h$ , застосовуємо згадану формулу для моменту інерції відносно основи

$$I_y = 2 \frac{h \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}.$$

**Приклад 5.2.** Визначити головні центральні моменти інерції для перерізу, зображеного на рис. 5.9.

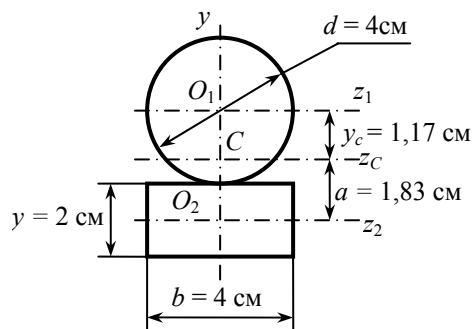


Рис. 5.9. До прикладу 5.2

*Розв'язання*

Вісь симетрії  $y$  є головною центральною віссю для круга, прямокутника і всього перерізу. Відносно неї момент інерції круга (першої фігури)

$$I_y^I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 12,6 \text{ см}^4.$$

Момент інерції прямокутника (другої фігури)

$$I_y^{II} = \frac{hb^3}{12} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 10,7 \text{ см}^4.$$

Момент інерції всього перерізу

$$I_y = I_y^I + I_y^{II} = 12,6 + 10,7 = 23,3 \text{ см}^4.$$

Визначаємо положення центру ваги перерізу. Як допоміжну обираємо центральну вісь круга  $z_1$ , відносно якої статичний момент круга  $S_{z_1}^I = 0$ . Тоді статичний момент усього перерізу дорівнюватиме статичному моменту прямокутника

$$S_{z_1} = S_{z_1}^{II} = A_2(-O_1O_2) = bh \left[ -\left( r + \frac{h}{2} \right) \right] = 4 \cdot 2(-3) = -24 \text{ см}^3,$$

а координата центру ваги

$$y_C = \frac{S_{z_1}}{A_1 + A_2} = \frac{-24}{12,6 + 8} = -1,17 \text{ см},$$

де  $A_1 = \pi r^2 = 3,14 \cdot 2^2 = 12,6 \text{ см}^2$ ;  $A_2 = bh = 4 \cdot 2 = 8 \text{ см}^2$  — площі круга і прямокутника відповідно.

Відкладаємо від'ємну величину  $y_C$  у напрямку, протилежному до напрямку  $y$  (вниз), позначаємо центр ваги перерізу  $C$  і проводимо головну центральну вісь перерізу  $z_C$ .

Моменти інерції складових фігур відносно власних центральних горизонтальних осей

$$I_{z_1}^I = I_y^I = 12,6 \text{ см}^4; \quad I_{z_2}^{II} = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 2^3}{12} = 2,67 \text{ см}^4.$$

Використовуючи формулу паралельного перенесення (5.8), знаходимо моменти інерції фігур відносно головної центральної осі перерізу  $z_C$

$$I_{z_C}^I = I_{z_1}^I + A_1 y_C^2 = 12,6 + 12,6 \cdot 1,17^2 = 29,8 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_C}^{II} = I_{z_2}^{II} + A_2 a^2 = 2,67 + 8 \cdot 1,83^2 = 29,5 \text{ см}^4$$

і головний центральний момент інерції всього перерізу

$$I_{z_C} = I_{z_1}^I + I_{z_C}^{II} = 29,8 + 29,5 = 59,3 \text{ см}^4.$$



## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називається статичними моментами перерізу?
2. Як визначається положення центру ваги перерізу?
3. Які осі називаються центральними?
4. Що називається осьовим, полярним, відцентровим моментом інерції перерізу?
5. Які осі називаються головними осями інерції фігури?
6. Що називається моментами опору перерізу?
7. Що називається радіусами інерції перерізу?
8. Як визначаються моменти інерції складного перерізу ?
9. За якими формулами обчислюються моменти інерції круга, прямокутника, трикутника?
10. За якими формулами визначаються моменти інерції при повороті осей?
11. Які залежності існують між моментами інерції відносно паралельних осей?
12. Поясніть, як визначається положення головних осей інерції перерізу.
13. Що називають головними центральними моментами інерції перерізу?
14. Наведіть формулу, за якою визначаються головні моменти інерції перерізу.

## 6. КРУЧЕННЯ

*Кручення* — це такий вид простої деформації, коли в поперечних перерізах бруса виникають тільки крутні моменти, а інші внутрішні силові фактори дорівнюють нулю. В умовах кручення працюють відповідальні деталі машин: вали й осі, гвинтові пружини тощо.

*Крутний момент вважається додатним*, якщо при погляді на торець відсіченої частини бруса він спрямований за годинниковою стрілкою (рис. 6.1).

Деформацію кручення спричиняють зосереджені зовнішні моменти (пари сил), площини дії яких перпендикулярні до осі бруса. Їх називають крутильними (*скручувальними*) моментами і позначають літерою  $T$ .

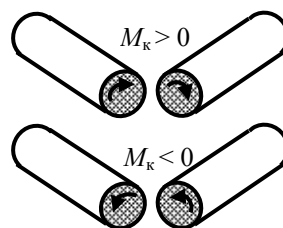


Рис. 6.1. Правило знаків для крутних моментів

Розподіл крутних моментів за довжиною бруса зручно зобразити графічно у вигляді епюри  $M_k$ , методика побудови якої майже збігається з викладеною в розд. 2 для епюр нормальних сил. Наприклад, брус, показаний на рис. 6.2, складається з трьох ділянок. Кожну ділянку розглядаємо окремо.

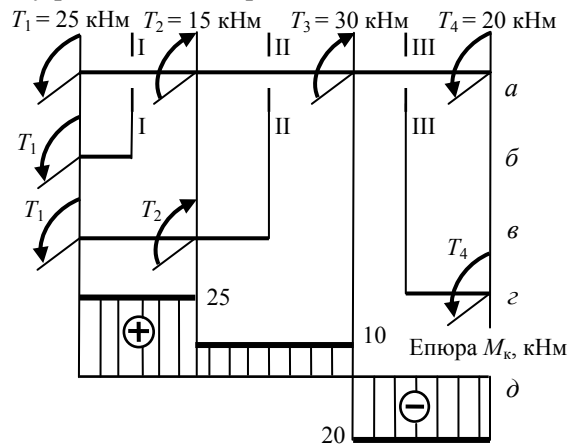


Рис. 6.2. До побудови епюри крутних моментів

#### Ділянка I

$$M_k = T_1 = 25 \text{ кНм.}$$

#### Ділянка II

$$M_k = T_1 - T_2 = 25 - 15 = 10 \text{ кНм.}$$

#### Ділянка III

$$M_k = -T_4 = -20 \text{ кНм.}$$

Перевіряючи епюру  $M_k$ , треба контролювати, щоб стрибки на епюрі відповідали за величиною і напрямком зовнішнім моментам  $T_i$ .

### 6.1. Кручення бруса круглого поперечного перерізу

При дослідженні цієї задачі приймаються такі припущення:

1. Усі поперечні перерізи в процесі деформації лишаються плоскими і перпендикулярними до осі бруса (гіпотеза плоских перерізів).
2. Радіуси, проведені в поперечних перерізах, не викривляються і зберігають свою довжину.
3. Відстані між сусідніми перерізами не змінюються.

Розглянемо брус, жорстко закріплений лівим кінцем (рис. 6.3, а). Виділяємо з нього елемент довжиною  $dx$  (рис. 6.3, б).

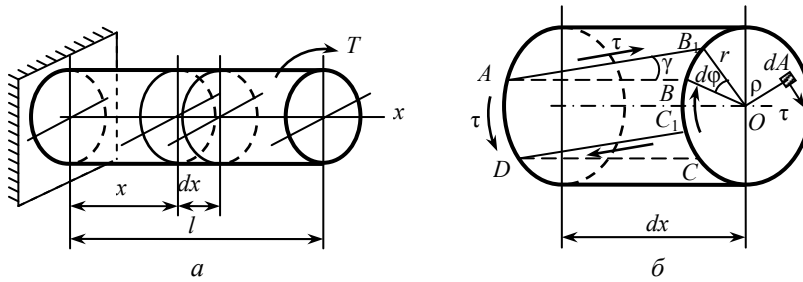


Рис. 6.3. Кручення бруса

Прямокутник  $ABCD$  після деформації перетворюється в паралелограм  $AB_1C_1D$ , а радіус  $OB$  займає положення  $OB_1$ . Кут  $d\varphi$  повороту правого перерізу відносно лівого характеризує абсолютну деформацію при крученні і має назву *кут закручування*.

Кут  $\theta = d\varphi/dx$  називається *відносним кутом закручування* (відносною деформацією). Трикутники  $ABB_1$  і  $OBB_1$  мають спільну сторону  $BB_1 = rd\varphi \approx \gamma dx$  (унаслідок малості кута  $\gamma$ ), тобто кут зсуву

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx} = r\theta.$$

Перекося елемент  $ABCD$  пов'язаний із виникненням на його гранях дотичних напружень  $\tau$ . Використовуючи формулу закону Гука при зсуві, маємо  $\tau = G\gamma = Gr\theta$ .

Ми розглянули деформацію прямокутного елемента на поверхні бруса. Так само деформуються елементи будь-якого циліндра радіусом  $\rho$ , що може бути виділений із бруса навколо його поздовжньої осі  $\tau = Gr\theta$ . Напруження  $\tau$  виникають у кожній точці перерізу  $dA$  (рис. 6.3, б) і в сумі створюють крутний момент

$$M_k = \int_A \tau dA \rho = G\theta \int_A \rho^2 dF = G\theta I_p.$$

Звідси отримаємо вирази закону Гука при крученні:

$$\theta = \frac{M_k}{GI_p}; \quad \varphi = \frac{M_k l}{GI_p}$$

і формулу для дотичних напружень у будь-якій точці перерізу

$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \rho. \quad (6.1)$$

Із формули (6.1) видно, що дотичні напруження лінійно зростають зі збільшенням відстані від центру перерізу (рис. 6.4) і досягають максимальних значень у точках біля зовнішньої поверхні бруса:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{I_p} r = \frac{M_{\text{к}}}{W_p}.$$

Умова міцності при крученні має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (6.2)$$

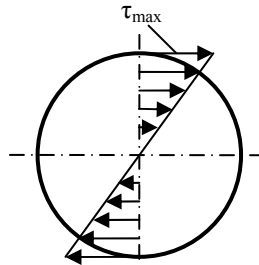


Рис. 6.4. Епюра розподілу дотичних напружень по перерізу

Неоднакове навантаження точок перерізу бруса (рис. 6.4) робить ефективним використання в машинах з жорсткими вимогами щодо ваги трубчастих валів і осей (з перерізами у вигляді кільця).

Крім розрахунку на міцність, у разі необхідності проводиться розрахунок на жорсткість за умовою

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{GI_p} \leq [\theta]. \quad (6.3)$$

Величини допустимих кутів закручування залежать від умов експлуатації і в різних галузях машинобудування беруться в межах  $[\theta] = 0,25, \dots, 1,0$  °/м.

#### Приклад

Вал (рис. 6.5, а) приводиться в рух за допомогою колеса 3, через яке від приводу передається потужність  $K_3 = 200$  кВт.

Колеса 1, 2, 4 своєю чергою передають потужності  $K_1 = 50$  кВт;  $K_2 = 70$  кВт;  $K_4 = 80$  кВт для приведення в рух різних механізмів. Вал обертається з частотою  $n = 750$  об/хв. Треба побудувати епюру крутних моментів, дібрати діаметр вала з розрахунків на міцність і жорсткість при  $[\tau] = 40$  МПа;  $[\theta] = 0,5$  °/м =  $8,73 \cdot 10^{-3}$  рад/м. Побудувати епюру кутів повороту перерізів вала відносно ведучого колеса, взявши  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

#### Розв'язання

Кутова швидкість обертання вала

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 750}{30} = 78,5 \text{ с}^{-1}.$$

Визначаємо скручувальні моменти, що прикладаються до вала через колеса  $T_i = \frac{K_i}{\omega}$  (рис. 6.5, б):

$$T_1 = \frac{50}{78,5} = 0,637 \text{ кНм}; \quad T_2 = \frac{70}{78,5} = 0,892 \text{ кНм};$$

$$T_3 = \frac{200}{78,5} = 2,55 \text{ кНм}; \quad T_4 = \frac{80}{78,5} = 1,02 \text{ кНм}.$$

Поділяємо вал на ділянки (рис. 6.5, б), визначаємо крутні моменти в його перерізах.

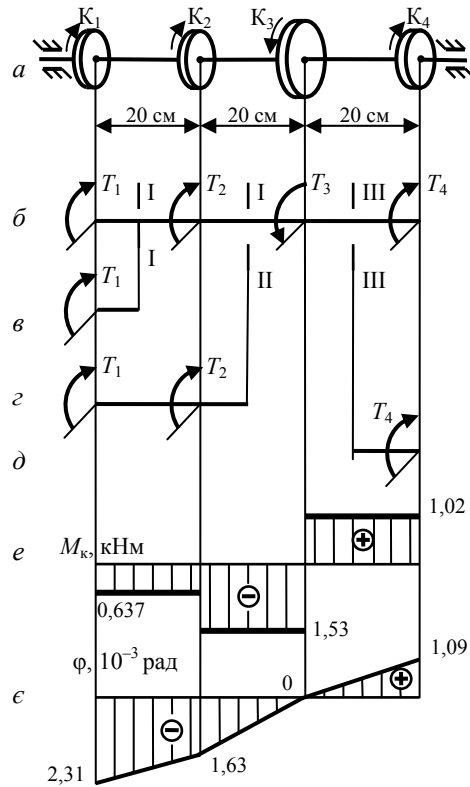


Рис. 6.5. До розрахунку вала

### Ділянка I

Для відсіченої частини (рис. 6.5, в)  $M_k = -T_1 = -0,637$  кНм.

### Ділянка II (рис. 6.5, з)

$$M_k = -T_1 - T_2 = -0,637 - 0,892 = -1,53 \text{ кНм.}$$

### Ділянка III (рис. 6.5, д) $M_k = T_4 = 1,02$ кНм.

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 6.5, е).

Стрибки на епюрі  $M_k$  відповідають за величиною і напрямком прикладеним крутним моментам  $T_i$ .

Розрахунковий (максимальний) крутний момент виникає на ділянці II  $M_k^{\max} = 1,53$  кНм.

Визначаємо діаметр вала з розрахунку на міцність (6.2). Потрібний полярний момент опору перерізу

$$W_p = \frac{M_k^{\max}}{[\tau]} = \frac{1,53 \cdot 10^6}{40} = 38250 \text{ мм}^3,$$

діаметр 
$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 38250}{3,14}} = 58 \text{ мм}.$$

Визначаємо діаметр вала з розрахунку на жорсткість (6.3). Потрібний полярний момент інерції перерізу

$$I_p = \frac{M_k^{\max}}{G[\theta]} = \frac{1,53 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 8,73 \cdot 10^{-6}} = 2,19 \cdot 10^6 \text{ мм}^4,$$

діаметр 
$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_p}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2,19 \cdot 10^6}{3,14}} = 68,7 \text{ мм}.$$

Із двох отриманих значень діаметра вибираємо більше і, округлюючи, остаточно беремо  $d = 70$  мм.

Визначаємо абсолютні деформації ділянок вала  $\varphi = \frac{M_k l}{G I_p}$ .

Жорсткість при крученні

$$G I_p = G \frac{\pi d^4}{32} = 8 \cdot 10^4 \frac{3,14 \cdot 70^4}{32} = 1,88 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

$$\text{Кути закручування } \varphi_1 = \frac{-0,637 \cdot 10^6 \cdot 200}{1,88 \cdot 10^{11}} = -0,678 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{II} = \frac{-1,53 \cdot 10^6 \cdot 200}{1,88 \cdot 10^{11}} = -1,63 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{III} = \frac{1,22 \cdot 10^6 \cdot 200}{1,88 \cdot 10^{11}} = 1,09 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Визначаємо кути повороту межі ділянок вала відносно до ведучого колеса (перерізу С):

$$\varphi_{BC} = \varphi_{II} = -1,63 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{AC} = \varphi_{II} + \varphi_I = (-1,63 - 0,678) \cdot 10^{-3} = -2,31 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EC} = \varphi_{III} = 1,09 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Будуємо епюру кутів повороту (рис. 6.5, *ε*). Кути нахилу відрізків прямих епюри  $\varphi$  пропорційні відповідним крутним моментам на ділянках вала.



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Який вид деформації називається крученням?
2. Яке правило знаків прийнято для крутного моменту?
3. Які припущення роблять, розглядаючи кручення круглого бруса?
4. Який вигляд мають вирази закону Гука при крученні?
5. Як розподіляються дотичні напруження по перерізу вала?
6. Поясніть, який вигляд має умова міцності при крученні.

## 7. ЗГИНАННЯ

Брус знаходиться в умовах *плоского згинання*, якщо його поперечні перерізи мають хоча б одну вісь симетрії, а зовнішні навантаження діють у площині, яка проходить через цю вісь симетрії і поздовжню вісь бруса. Брус, що працює на згинання, називається *балкою*.

### 7.1. Балки та їхні опори

Опорні пристрої балок бувають трьох типів:

1. *Шарнірно-рухома опора* (рис. 7.1, *а*), у якій виникає тільки одна реакція  $R$ , що спрямована перпендикулярно до опорної площини (уздовж опорного стержня).

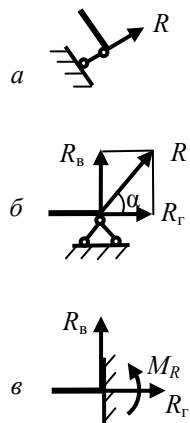


Рис. 7.1. Типи опорних закріплень балок

2. Шарнірно-нерухома опора (рис. 7.1, б). У цій опорі невідомі величина реакції  $R$  та її напрямок  $\alpha$ . У практичних розрахунках вектор  $R$  розкладають на дві складові, наприклад вертикальну  $R_v$  і горизонтальну  $R_r$ .

3. Жорстке закріплення (защемлення) (рис. 7.1, в). До двох складових реактивної сили  $R_v$  і  $R_r$  додається ще реактивний опорний момент  $M_R$ .

Як відомо з теоретичної механіки, у плоскому випадку дії сил тіло має три степені вільності. Тому опорні закріплення повинні накладати на нього три в'язі для забезпечення нерухомості. У такому разі тіло — балка буде *статично визначуваною*.

Прикладами статично визначуваних балок є консоль (рис. 7.2, а); однопрогінна балка (балка на двох опорах) (рис. 7.2, б); однопрогінна балка з консолю (рис. 7.2, в). Якщо ж кількість опорних в'язей (невідомих реакцій) буде більшою від трьох, то така балка буде статично невизначуваною, наприклад (рис. 7.2, г).

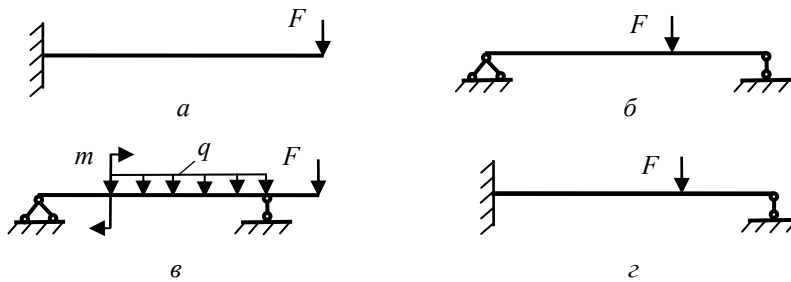


Рис. 7.2. Типи балок

Зовнішні навантаження моделюються зосередженими силами  $F$ , парами сил (зосередженими моментами)  $m$  і розподіленими навантаженнями (рис. 7.2, в). У звичайному курсі опору матеріалів розглядаються тільки рівномірно розподілені навантаження інтенсивністю  $q$ .



## 7.2. Внутрішні силові фактори

У поперечних перерізах балок при плоскому згинанні виникають два внутрішні силові фактори: поперечна сила і згинальний момент.

*Поперечна сила  $Q$*  чисельно дорівнює сумі проекцій зовнішніх навантажень, прикладених до відсіченої частини балки на вертикальну вісь  $y$ . Якщо зовнішнє навантаження намагається повернути відсічену частину балки за годинниковою стрілкою відносно головної центральної осі перерізу  $z$ , то у вираз для  $Q$  воно увійде з плюсом (рис. 7.3, *a*). Тобто правило знаків для поперечних сил збігається з правилом знаків для дотичних напружень (рис. 7.3, *b*), і це природно, бо поперечна сила є сумою дотичних зусиль, розподілених по перерізу.

*Згинальний момент  $M$*  чисельно дорівнює сумі моментів зовнішніх навантажень, прикладених до відсіченої частини балки, відносно осі  $z$ . Згинальний момент вважається додатним, якщо він спричинює стискання верхніх волокон балки (рис. 7.4).

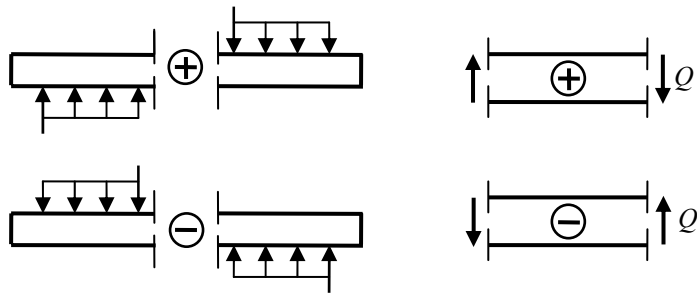


Рис. 7.3. Правило знаків для поперечних сил

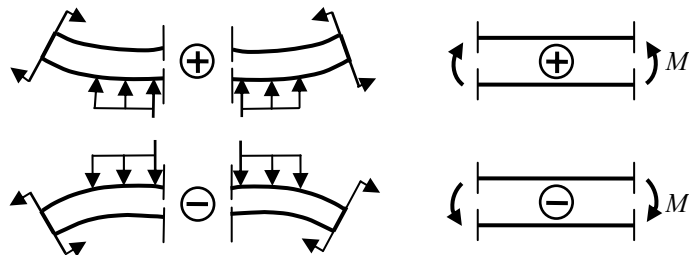


Рис. 7.4. Правило знаків для згинальних моментів

Так само, як для деформацій розтягання і кручення, розподіл внутрішніх зусиль по довжині балки зображується графічно у вигляді епюр.

При згинанні цей процес ускладнюється наявністю двох внутрішніх силових факторів та більшою кількістю видів зовнішніх навантажень і тому традиційно викликає труднощі в студентів.

#### Порядок побудови епюр $Q$ і $M$

1. За допомогою рівнянь рівноваги визначасмо реакції опор.
2. Поділяємо балку на ділянки.
3. На кожній ділянці:
  - а) зображуємо відсічену частину;
  - б) складаємо вирази для  $Q$  і  $M$ ;
  - в) обчислюємо значення  $Q$  і  $M$  на початку і в кінці ділянки та екстремуми, якщо вони є.
4. Зображуємо епюри в масштабі під розрахунковою схемою.
5. Проводимо перевірку правильності епюр.

### 7.3. Диференціальні залежності при згинанні

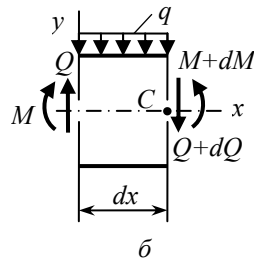
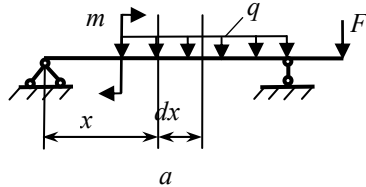


Рис. 7.5. Виведення диференціальних залежностей при згинанні

Розглянемо балку з довільною системою зовнішніх навантажень (рис. 7.5, а). Виділяємо з неї елемент довжиною  $dx$  (рис. 7.5, б) і розглядаємо його рівновагу:

$$\sum Y = Q - qdx + -(Q + dQ) = 0.$$

Звідси маємо

$$\frac{dQ}{dx} = -q. \quad (7.1)$$

Рівняння моментів

$$\begin{aligned} \sum M_c &= -M - Qdx + \\ &+ qdx \frac{dx}{2} + M + dM = 0 \end{aligned}$$

дає, при нехтуванні членом вищого порядку малості  $q \cdot dx \cdot dx/2$

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (7.2)$$

Аналіз залежностей (7.1), (7.2) дає змогу встановити деякі особливості, які слід ураховувати при побудові і, особливо, при перевірці епюр  $Q$  і  $M$ . Основні з них такі:

1. На ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюра  $Q$  пряма, паралельна осі, епюра  $M$  прямолінійна.
2. На ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження, епюра  $Q$  пряма під кутом до осі, епюра  $M$  криволінійна (квадратична парабола).
3. Нахил епюри  $M$  (тангенс кута нахилу дотичної) пропорційний величині  $Q$ .
4. У перерізах, де прикладені зосереджені сили, на епюрі  $Q$  стрибки на величину цих сил, на епюрі  $M$  переломи.
5. У перерізах, де прикладені зосереджені моменти, на епюрі  $M$  стрибки на величину цих моментів.

#### 7.4. Нормальні напруження

Для знаходження нормальних напружень розглянемо балку (рис. 7.6). Як видно, у перерізах балки виникають тільки згинальні моменти. Це випадок так званого *чистого згинання*, коли  $Q = 0$ , а  $M = \text{const}$ .

Зробимо такі припущення:

- плоскі перерізи балки залишаються плоскими і після деформації (гіпотеза плоских перерізів);
- поздовжні волокна балки не тиснуть одне на одне;
- деформація волокон не залежить від їх розташування по ширині перерізу, тобто і нормальні напруження по ширині перерізу не змінюються.

Із балки (рис. 7.6) двома перерізами 1—1 і 2—2 виділяємо елемент довжиною  $dx$  і розглянемо його стан до деформації (рис. 7.7, а) і після деформації (рис. 7.7, б).

Експериментальні дослідження показують, що при згинанні такої балки верхні волокна укорочуються, нижні подовжуються, а між ними є такі, що не змінюють своєї довжини. Сукупність цих волокон називається *нейтральним шаром*. Позначимо його  $O_1O_2$ . Тобто  $O_1O_2 = dx = \rho d\alpha$ .

Розглянемо деформацію довільного волокна  $AB$ , що знаходиться на відстані  $y$  від нейтрального шару. До деформації його довжина

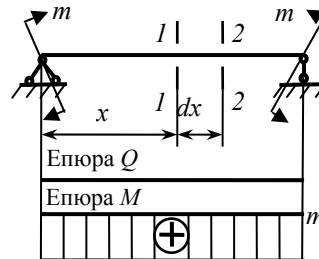


Рис. 7.6. Балка в умовах чистого згинання

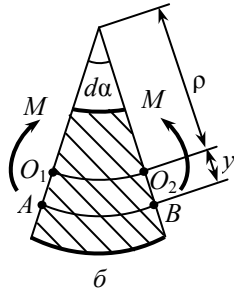
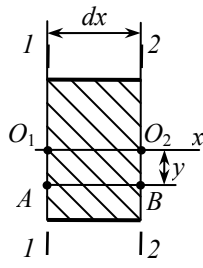


Рис. 7.7. Деформація елемента балки

була  $dx = \rho d\alpha$ , після деформації стала  $(\rho + y)d\alpha$ . Отже, його абсолютне подовження

$$\Delta AB = \Delta dx = (\rho + y)d\alpha - \rho d\alpha = y d\alpha,$$

а відносне подовження  $\varepsilon = \Delta dx / dx = y / \rho$ .

Далі, використовуючи закон Гука, дістанемо формулу для напружень

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}. \quad (7.3)$$

Пов'яжемо напруження із внутрішніми силовими факторами

$$N = \int_A \sigma dA = 0;$$

$$M = \int_A \sigma y dA. \quad (7.4)$$

Із першого співвідношення (7.4), з урахуванням (7.3) випливає, що

$$\frac{E}{\rho} \int_A y da = 0; \quad \int_A y dA = S_z = 0,$$

тобто вісь  $z$  (нейтральна лінія перерізу) проходить через його центр ваги.

Із другої формули (7.4) маємо, зважаючи на (7.3),

$$M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (7.5)$$

Підставляємо вираз для кривини нейтрального шару (7.5) у (7.3) й отримуємо формулу для нормальних напружень при згинанні

$$\sigma = \frac{My}{I_z}. \quad (7.6)$$

З отриманої формули (7.6) випливає, що напруження по висоті перерізу змінюється за лінійним законом (рис. 7.8). Максимальні напруження виникають у точках, найбільш віддалених від нейтральної осі

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max} = \frac{M}{W_z}. \quad (7.7)$$

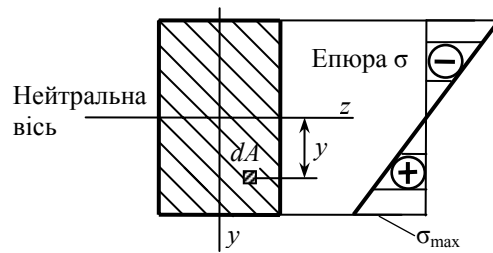


Рис. 7.8. Розподіл нормальних напружень по висоті перерізу

Умова міцності за нормальними напруженнями має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (7.8)$$

Усі залежності цього розділу отримані для умов чистого згинання. У разі плоского згинання, коли  $Q \neq 0$ , спостерігається порушення гіпотези плоских перерізів, поздовжні волокна починають тиснути одне на одне, тобто напружений стан стає плоским. Проте в практичних розрахунках використовуються формули (7.6)–(7.8) і для плоского згинання, похибки при цьому дуже незначні.

### 7.5. Дотичні напруження

Розглянемо балку прямокутного перерізу в найпростішому випадку плоского згинання (рис. 7.9).

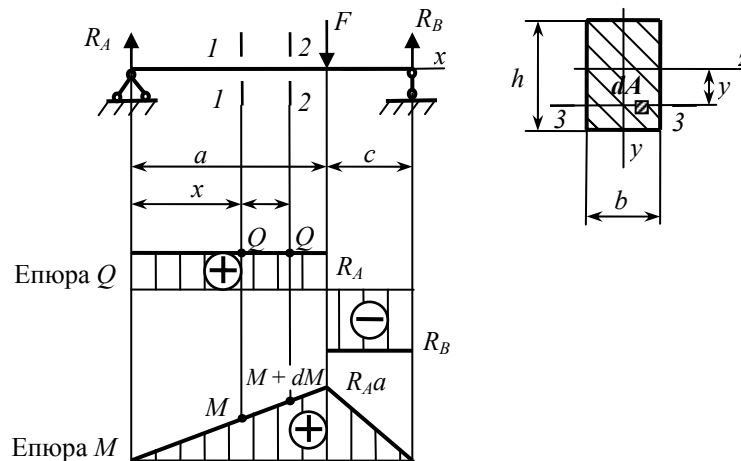


Рис. 7.9. Балка при плоскому згинанні

При дослідженні такої задачі Д. І. Журавський у 1855 р. вперше запропонував такі припущення при  $b \ll h$ :

- дотичні напруження в будь-якій точці перерізу паралельні  $Q$ ;
- дотичні напруження не змінюються по ширині перерізу.

Із балки (рис. 7.9) трьома перерізами 1—1, 2—2 і 3—3 виділяємо елемент у вигляді паралелепіпеда (рис. 7.10, а), на гранях якого виникають дотичні напруження  $\tau$ , викликані дією поперечної сили  $Q$ , і нормальні напруження  $\sigma'$ , спричинені згинальним моментом  $M$  у перерізі 1—1, і  $\sigma''$ , спричинені згинальним моментом  $M + dM$  у перерізі 2—2 (рис. 7.10, а). Нормальними напруженнями в перерізі 3—3 у цьому разі нехтують через їх відносну малість.

Замінюємо дію напружень на гранях елемента їхніми рівнодіючими (рис. 7.10, б) і визначаємо їх величини.

Зсувальна сила на верхній грані, зважаючи на те, що дотичні напруження не змінюються по ширині перерізу, дорівнює

$$dT = \tau b dx.$$

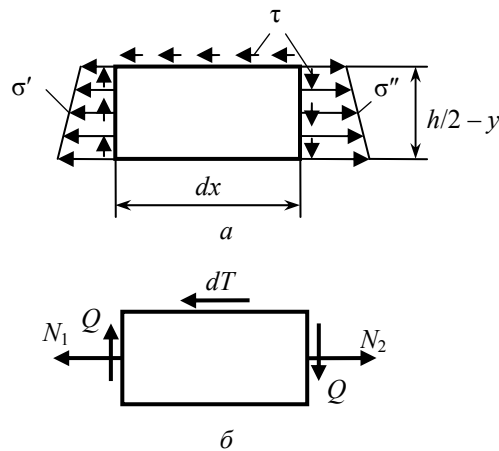


Рис. 7.10. Напруження на гранях елемента

Нормальне зусилля на лівій грані

$$N_1 = \int_{\omega} \sigma' dA,$$

тут інтегрування проводиться по частині площі перерізу  $\omega$ , що лежить нижче від 3—3.

Підставляючи величину напруження (7.6), маємо

$$N_1 = \frac{M}{I_z} \int y dA = \frac{M}{I_z} \bar{S}_z,$$

аналогічно отримуємо вираз для нормальної сили на правій грані

$$N_2 = \frac{M + dM}{I_z} \bar{S}_z.$$

Складаємо рівняння рівноваги елемента

$$\begin{aligned} \Sigma x = -N_1 + dT + N_2 &= 0; \\ -\frac{M}{I_z} \bar{S}_z - \tau b dx + \frac{M + dM}{I_z} \bar{S}_z &= 0, \end{aligned}$$

звідки, враховуючи, що  $Q = dM / dx$ , отримуємо

$$\tau = \frac{Q \bar{S}_z}{b I_z}. \quad (7.9)$$

Ця формула названа за прізвищем видатного російського інженера Д. І. Журавського. Хоча вона виведена для прямокутного перерізу, нею на практиці користуються й для інших перерізів, у яких висота більша за ширину, та навіть для круга і квадрата. Але вона не може застосовуватись для вузьких перерізів, які витягнуті перпендикулярно до  $Q$ , наприклад для полиць двотавра чи швелера.

У формулу Журавського входять:  $Q$  — поперечна сила в перерізі;  $\bar{S}_z$  — статичний момент відносно нейтральної осі частини перерізу, що розташована нижче від рівня, де визначається дотичне напруження;  $I_z$  — момент інерції всього перерізу відносно нейтральної осі  $z$ ;  $b$  — ширина перерізу на рівні, де визначається  $\tau$ .

Для більшості видів перерізів найбільшого значення дотичні напруження досягають на нейтральній осі, а умова міцності має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{Q S_z^{\max}}{b I_z} \leq [\tau], \quad (7.10)$$

де  $S_z^{\max}$  — статичний момент половини площі перерізу.

## 7.6. Розрахунок на міцність при згинанні

Розглянемо частину фасаду балки, що працює в умовах плоского згинання (рис. 7.11). З погляду розрахунків на міцність за нормальними напруженнями небезпечними будуть крайні точки 1, 2

того перерізу балки, у якому виникає найбільший згинальний момент  $M_{\max}$ . Залежно від крихкості матеріалу в одній із цих точок зазвичай проводиться підбір перерізу. При цьому з умови міцності (7.8) визначається потрібна величина осевого моменту опору

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

У разі дії на балку значних зосереджених зусиль небезпечною може виявитись точка 3 на нейтральному шарі в перерізі, де виникає максимальна поперечна сила  $Q_{\max}$ . У таких точках проводиться перевірений розрахунок з використанням умови міцності (7.10).

У деяких випадках небезпечними можуть бути точки 4, 5 у перерізах, де  $M$  і  $Q$  одночасно досить великі. У них  $\sigma$  і  $\tau$ , хоч і не набувають максимальних значень, але їхня комбінація може виявитись самою невигідною. Положення таких точок не є чітко визначеним як за довжиною балки, так і за висотою перерізу. Для перерізів з тонкими стінками (двотавр, швелер) вони розташовані в місцях з'єднання стінки з полицею.

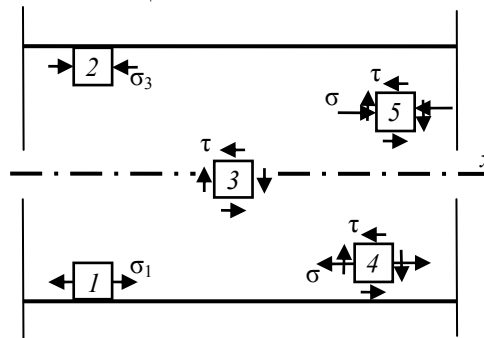


Рис. 7.11. Розташування розрахункових точок

У таких перерізах реалізується частковий випадок плоского напруженого стану за умови відсутності вертикального нормального напруження. При цьому головні напруження визначаються за формулами

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left( \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right); \quad \sigma_2 = 0,$$

а в небезпечній точці проводиться перевірений розрахунок з використанням третьої



$$\sigma_p = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad \text{чи} \quad \sigma_p = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

або четвертої теорії міцності

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

**Приклад 7.1.** Для балки, показаної на рис. 7.12, а, побудувати епюри  $Q$  і  $M$  та підібрати квадратний переріз, якщо  $m = 30$  кНм;  $[\sigma] = 100$  МПа.

*Розв'язання*

Перш за все визначимо реакції опор  $R_A$  і  $R_B$ . Дійсні напрямки реакцій ще невідомі, тому спрямуємо їх попередньо обидві вгору. Складаємо рівняння моментів відносно опорних точок

$$\sum M_A = -m + R_B \cdot 3 = 0;$$

$$R_B = \frac{m}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 3 - m = 0;$$

$$R_A = -\frac{m}{3} = -\frac{30}{3} = -10 \text{ кН}.$$

Реакція  $R_B$  виявилась додатною, отже, вона спрямована так, як було обрано — вгору; реакція  $R_A$  — від'ємна, тобто її напрямок не збігається з обраним. Змінимо на рис. 7.12 напрямок  $R_A$  на протилежний (вниз) і вважатимемо її далі додатною  $R_A = 10$  кН.

Для перевірки реакцій використовуємо рівняння суми проекцій сил на вертикальну вісь

$$\sum Y = -R_A + R_B = -10 + 10 = 0,$$

тобто величини реакцій визначені правильно.

Ділимо балку на ділянки I і II, позначаємо їх на схемі (рис. 7.12, а). Розглядаємо кожну з ділянок.

**Ділянка I** (рис. 7.12, б)  $0 \leq x \leq 2$  м;

$$Q = -R_A = -10 \text{ кН}; \quad M = -R_A x; \quad x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad M = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кНм}.$$

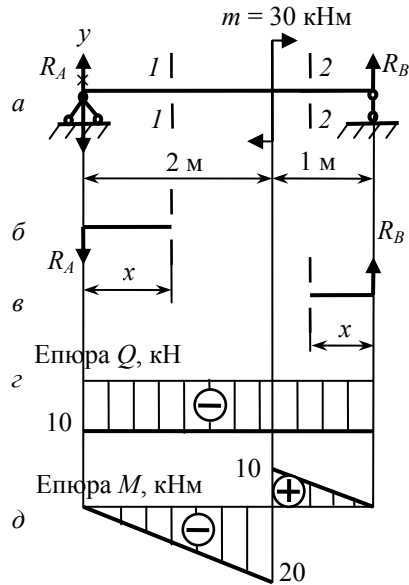


Рис. 7.12. До прикладу 7.1

**Ділянка II** (рис. 7.11, в)  $0 \leq x \leq 1$  м;

$$Q = -R_B = -10 \text{ кН}; M = -R_B x; x = 0; M = 0;$$

$$x = 1 \text{ м}; M = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кНм}.$$

Зображуємо епюри  $Q$  і  $M$  (рис. 7.12, з, д).

Перевіряємо правильність епюр:

- на обох ділянках немає розподіленого навантаження — епюра  $Q$  пряма, паралельна базі; епюра  $M$  прямолінійна;
- нахил епюри  $M$  на обох ділянках однаковий, що відповідає однаковим значенням  $Q$  на обох ділянках;
- стрибки на епюрі  $Q$  у точках  $A$  і  $B$  відповідають величинам реакцій;
- стрибок на епюрі  $M$  у місці прикладання і на величину зовнішнього моменту  $m$ .

Добираємо переріз. Потрібна величина моменту опору

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^6}{100} = 2 \cdot 10^5 \text{ мм}^3.$$

Для квадрата зі стороною  $a$   $W_z = \frac{a^3}{6}$ ; звідки

$$a = \sqrt[3]{6W_z} = \sqrt[3]{6 \cdot 2 \cdot 10^5} = 106 \text{ мм}.$$

**Приклад 7.2.** Для консолі (рис. 7.13, а) побудувати епюри  $Q$  і  $M$ , дібрати двотавровий переріз і перевірити міцність за дотичними напруженнями.

Прийняти  $F = 30$  кН;  $q = 20$  кН/м;  $[\sigma] = 160$  МПа.

*Розв'язання*

Для консолі можна проводити розрахунки без попереднього визначення реакцій у защемленні.

Ділимо балку на ділянки, позначаємо їх на схемі (рис. 7.13, а). Розглядаємо кожну з ділянок.

**Ділянка I** (рис. 7.13, б)  $0 \leq x \leq 1$  м;

$$Q = F = 30 \text{ кН}; M = Fx; x = 0; M = 0;$$

$$x = 1 \text{ м}; M = 30 \cdot 1 = 30 \text{ кНм}.$$

**Ділянка II** (рис. 7.13, в)  $1 \text{ м} \leq x \leq 3$  м;

$$Q = F - q(x - 1); M = Fx - \frac{q(x - 1)^2}{2};$$

$$x = 1 \text{ м}; Q = 30 \text{ кН}; M = 30 \cdot 1 = 30 \text{ кНм};$$

$$x = 3 \text{ м}; Q = 30 - 20(3 - 1) = -10 \text{ кН};$$

$$M = 30 \cdot 3 - \frac{20(3-1)^2}{2} = 50 \text{ кНм}.$$

Вираз для  $M$  на другій ділянці вміщує  $x^2$ , тобто графік  $M$  буде криволінійний (квадратична парабола). Перевіряємо, чи є на цій ділянці екстремум (вершина параболи).

Похідна від згинального моменту — поперечна сила  $Q$  на лівій межі ділянки має додатне значення  $Q = 30 \text{ кН}$ , а на правій — від'ємне  $Q = -10 \text{ кН}$ , тобто в межах ділянки є точка, де  $Q = 0$ . Визначаємо положення цієї точки — координату екстремуму

$$Q = F - q(\bar{x} - 1) = 0;$$

$$\bar{x} = \frac{F}{q} + 1 = \frac{30}{20} + 1 = 2,5 \text{ м}$$

і найбільше значення згинального моменту при  $x = 2,5 \text{ м}$

$$M = 30 \cdot 2,5 - \frac{20(2,5-1)^2}{2} = 52,5 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри  $Q$  і  $M$  (рис. 7.13, з, д).

Перевіряємо правильність епюр:

- на першій ділянці немає розподіленого навантаження: епюра  $Q$  — пряма, паралельна осі, епюра  $M$  — прямолінійна;
- на другій ділянці діє рівномірно розподілене навантаження: епюра  $Q$  — прямолінійна, епюра  $M$  — криволінійна;
- нахил епюри  $M$  на обох ділянках відповідає величині  $Q$ , зокрема в точці, де  $Q = 0$ ;  $M = M_{\max}$ ;

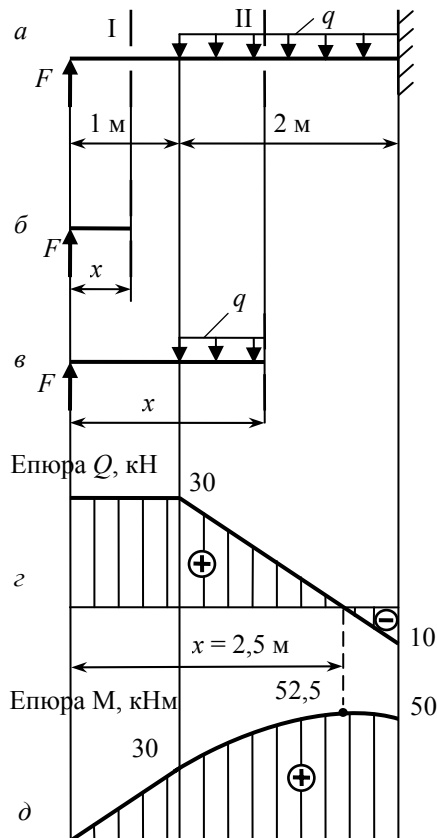


Рис. 7.13. До прикладу 7.2

– на епюрі  $Q$  стрибки в місцях прикладання сили  $F$  і реакції опори ( $R = 10$  кН);

– на епюрі  $M$  стрибок в опорному перерізі на величину реактивного моменту ( $M_R = 50$  кНм).

Добираємо двотавровий переріз. Потрібна величина моменту опору

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{52,5 \cdot 10^6}{160} = 0,328 \cdot 10^6 \text{ мм}^3 = 328 \text{ см}^3.$$

За ГОСТ 8239-89 обираємо двотавр № 27, у якого:

$$W_z = 371 \text{ см}^3; I_z = 5010 \text{ см}^4;$$

$$S_z^{\max} = 210 \text{ см}^3, \text{ товщина стінки } b = 6 \text{ мм}.$$

Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z^{\max}}{b \cdot I_z} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^3}{6 \cdot 5010 \cdot 10^4} = 30 \text{ МПа} < [\tau],$$

тут  $[\tau] = 0,6$   $[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96$  МПа.

Міцність балки забезпечена.

### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Назвіть умови виникнення плоского згинання.
2. Які внутрішні силові фактори виникають у поперечних перерізах балок?
3. Які правила знаків прийняті для  $Q$  і  $M$ ?
4. Який порядок побудови епюр  $Q$  і  $M$ ?
5. Які диференціальні залежності існують при згинанні?
6. Поясніть, як проводиться перевірка епюр  $Q$  і  $M$ .
7. За якою формулою визначаються нормальні напруження при згинанні?
8. Як визначаються дотичні напруження?
9. За якими умовами міцності і в яких точках проводяться розрахунки балок на міцність?

## 8. СКЛАДНИЙ ОПІР

У попередніх розділах розглядалися задачі про опір бруса при простих деформаціях (розтягання–стискання, зсуві, крученні, згинанні). У загальному випадку навантаження бруса, як зазначалося в розд. 1, можуть виникати одразу всі шість компонентів внутрішнього зусилля.

Напружений стан при цьому визначається за допомогою використання принципу суперпозиції, тобто визначаються напруження від кожного силового фактора окремо, а потім підсумовуються.

В опорі матеріалів розглядаються різні комбінації простих деформацій бруса, які й наводяться нижче.

### 8.1. Косе згинання

Косе згинання виникає в поперечних перерізах балки, якщо площина дії зовнішніх навантажень (площина згинального моменту  $M$ ) не збігається з жодною з головних осей інерції перерізу (рис. 8.1).

Косе згинання можна розглядати як суму двох одночасних плоских згинань відносно головних центральних осей інерції перерізу  $z$  і  $y$ , розкладаючи згинальний момент на дві складові

$$M_z = M \cos \varphi; \quad M_y = M \sin \varphi.$$

Очевидно, що *нормальні напруження* в довільній точці  $(y, z)$  перерізу визначаються сумою

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = M \left( \frac{\cos \varphi}{I_z} y + \frac{\sin \varphi}{I_y} z \right). \quad (8.1)$$

При розрахунках на міцність у випадку косоного згинання дотичними напруженнями зазвичай нехтують.

Визначимо далі положення *нейтральної осі* перерізу, тобто лінії, на якій нормальні напруження дорівнюють нулю. Із формули (8.1)

$$\frac{\cos \varphi}{I_z} y + \frac{\sin \varphi}{I_y} z = 0; \quad y = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \varphi z. \quad (8.2)$$

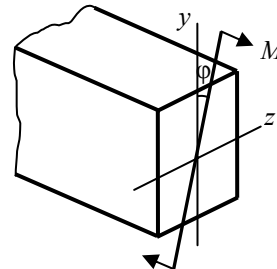


Рис. 8.1. Згинальний момент у перерізі

Рівняння нейтральної осі (8.2) являє собою рівняння прямої, що проходить через початок координат (центр ваги перерізу),  $y = kz$  з кутовим коефіцієнтом  $k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg}\varphi$  (рис. 8.2).

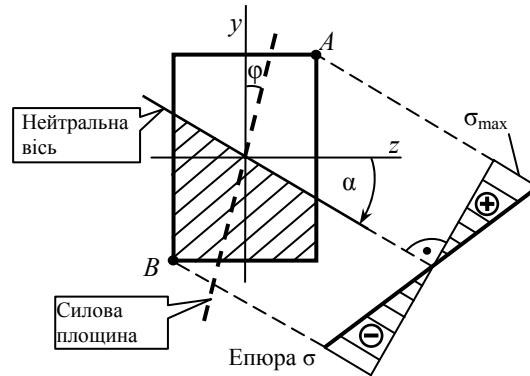


Рис. 8.2. Положення нейтральної осі перерізу

Із виразу (8.2) маємо, що положення нейтральної осі залежить від кута нахилу силової площини і форми перерізу; при  $I_z \neq I_y$  нейтральна вісь не перпендикулярна до силової площини. Нейтральна вісь ділить переріз на дві зони: розтягнуту і стиснуту (заштрихована).

Найбільші напруження виникають у точках, максимально віддалених від нейтральної осі. У точці  $A$  найбільше розтягання

$$\sigma_A = M \left( \frac{\cos \varphi}{W_z} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right) \leq [\sigma]_p. \quad (8.3)$$

У точці  $B$  найбільше стискання

$$|\sigma_B| = M \left( \frac{\cos \varphi}{W_z} + \frac{\sin \varphi}{W_y} \right) \leq [\sigma]_c. \quad (8.4)$$

Як бачимо, умови міцності (8.3), (8.4) вміщують одразу дві характеристики перерізу — моменти опору  $W_z, W_y$ , тому проектувальний розрахунок при косому згинанні доводиться проводити методом послідовних наближень.

## 8.2. Позацентрове розтягання–стискання

Такий напружений стан виникає в брусі, коли рівнодійна зовнішніх сил, паралельних до його поздовжньої осі, не збігається з цією віссю, а зміщена на деяку відстань  $e = OA$  — ексцентриситет (рис. 8.3, *a*).

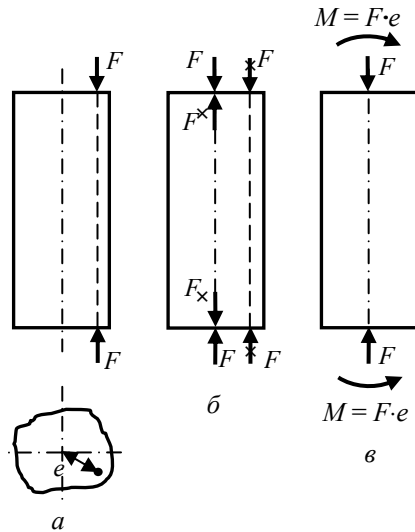


Рис. 8.3. Позацентрове стискання як комбінація осьового стискання і косого згинання

Прикладаючи на осі бруса однакові і протилежно спрямовані сили  $F$  (рис. 8.3, *b*), переходимо до еквівалентного стану (рис. 8.3, *в*). Такі перетворення дозволяють розглядати вихідний стан — позацентрове стискання (рис. 8.3, *a*) як комбінацію осьового стискання і косого згинання (рис. 8.3, *в*).

Якщо стискальна сила  $F$  (рис. 8.4) прикладена в точці з координатами  $(y_F, z_F)$ , то напруження в довільному перерізі в будь-якій точці з координатами  $(y, z)$  можна визначити, підсумовуючи напруження від стискання і косого згинання

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F z}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_z^2} \right), \quad (8.5)$$

де радіуси інерції  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ ;  $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ .

Визначимо положення нейтральної лінії, на якій  $\sigma = 0$ . Із (8.5) маємо

$$1 + \frac{z_F}{i_y^2} z + \frac{y_F}{i_z^2} y = 0,$$

це рівняння прямої, що не проходить через початок координат. Його зручно наводити у відрізках, що відсікаються на осях координат (рис. 8.4)

$$\text{якщо } z = 0, a_y = -\frac{i_z^2}{y_F};$$

$$\text{якщо } y = 0, a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}.$$

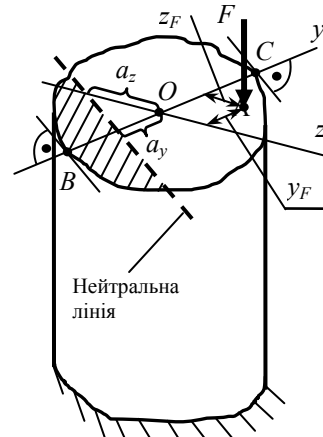


Рис. 8.4. Положення нейтральної лінії перерізу

На рис. 8.4 нейтральна лінія умовно показана на торцевому перерізі. Провівши паралельно нейтральній лінії дотичні до контуру перерізу, визначаємо найбільш віддалені від неї точки C і B, у яких виникають максимальні напруження. Запишемо умови міцності за позацентрального стиснення

$$|\sigma_C| = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F z_C}{i_y^2} + \frac{y_F y_C}{i_z^2} \right) \leq [\sigma]_c,$$

$$\sigma_B = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F z_B}{i_y^2} + \frac{y_F y_B}{i_z^2} \right) \leq [\sigma]_p.$$

Якщо нейтральна лінія проходить через переріз, то, як видно з рис. 8.4, вона ділить його на дві зони: стиснуту і розтягнуту (заштриховану). Тобто при дії стискального навантаження можуть виникати розтягальні напруження і навпаки. Це обов'язково треба враховувати, використовуючи матеріали, які по-різному опираються дії розтягання і стиснення, наприклад у будівництві.

У зв'язку з цим цікавим є визначення так званого *ядра перерізу* — ділянки навколо центра ваги перерізу бруса, під час прикладання в якій позацентрального навантаження певного знака, в усіх точках бруса виникають нормальні напруження того ж знака.



Наприклад: 1. Круглий переріз (рис. 8.5).

$$a_z = \frac{-i_y^2}{z_F}; z_F = \frac{-i_y^2}{a_z} = \frac{-r^2}{4r} = \frac{-r}{4}, \text{ де } i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\pi r^4}{4\pi r^2} = \frac{r^2}{4}.$$

2. Прямокутний переріз (рис. 8.6).

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}; y_F = \frac{-i_z^2}{a_y} = -\frac{h^2/2}{12h} = -\frac{h}{6}, \text{ де } i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}.$$

Аналогічно  $z_F = -\frac{b}{6}$ .

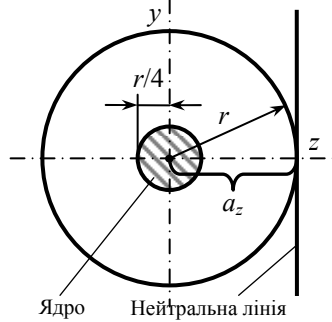


Рис. 8.5. Ядро перерізу для круга

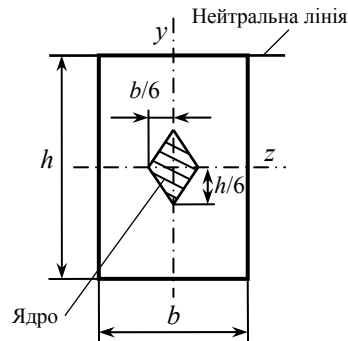


Рис. 8.6. Ядро перерізу для прямокутника

### 8.3. Згинання з крученням

Одночасна дія згинання з крученням являє собою частковий випадок складного опору, за якого зовнішні навантаження спричиняють виникнення в поперечних перерізах бруса крутних моментів  $M_k$ , згинальних моментів відносно обох головних центральних осей  $M_z$  і  $M_y$  та поперечних сил  $Q_z$ ,  $Q_y$ .

При цьому виникають дотичні напруження від кручення, нормальні і дотичні напруження від згинання у двох площинах. Останніми зазвичай нехтують, тому що вони набагато менші за інші, до того ж у небезпечних точках на поверхні бруса дотичні напруження від поперечних сил дорівнюють нулю.

Для розрахунків на міцність насамперед потрібно визначити розрахункові (небезпечні) перерізи, тобто побудувати епюри крутних  $M_k$  і згинальних моментів  $M_z$  і  $M_y$  (у вертикальній та горизонтальній площинах).

При розрахунках стержнів круглого перерізу будують ще епоору сумарного (результуючого) згинального моменту,  $M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ . Напрямок вектора сумарного моменту в різних перерізах може бути різним залежно від величини його складових  $M_z$  і  $M_y$ . Тому епоура  $M$  може на деяких ділянках бути криволінійною навіть за відсутності розподіленого навантаження.

Від дії крутного і сумарного згинального моментів у поперечних перерізах виникають дотичні і нормальні напруження (рис. 8.7, а), які набувають максимальних значень у точках  $A$  і  $B$  біля поверхні стержня.

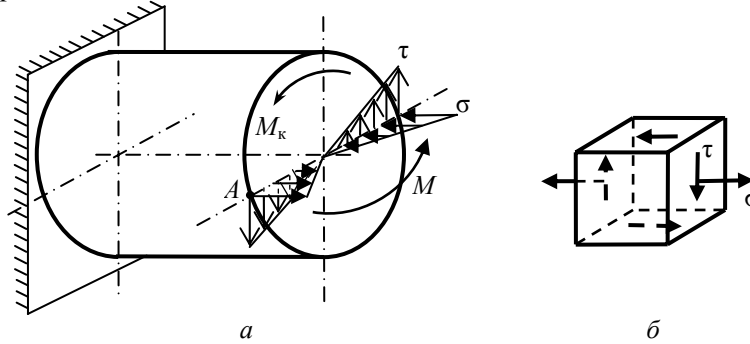


Рис. 8.7. Внутрішні зусилля при дії згинання з крученням

Елемент у небезпечній точці  $A$  (рис. 8.7, б) знаходиться в плоскому напруженому стані, тому розрахунки на міцність проводяться з використанням III або IV теорії міцності. Умова міцності має вигляд

$$\sigma_p = \frac{M_p}{W_z} \leq [\sigma], \quad (8.6)$$

де розрахунковий момент  $M = \sqrt{M^2 + M_k^2}$  — за III теорією міцності;  $M = \sqrt{M^2 + 0,75M_k^2}$  — за IV теорією міцності.

Більш докладно розрахунок на міцність при дії згинання із крученням викладено в наступному прикладі.

**Приклад 8.1.**

На вал (рис. 8.8, а) насаджено два зубчастих колеса, навантажені силами  $F_1 = 5$  кН і  $F_2$ . Сила  $F_1$  — вертикальна, сила  $F_2$  — гори-

зонтальна. Діаметри коліс  $D_1 = 400$  мм,  $D_2 = 200$  мм. Дібрати діаметр вала за третьою теорією міцності за допустимого напруження  $[\sigma] = 80$  МПа.

*Розв'язання*

Розглянемо спочатку кручення вала, воно відбувається на ділянці  $BE$  (рис. 8.8, б) під дією зовнішніх крутильних моментів

$$m_2 = m_1 = F_1 \frac{D_1}{2} = 5 \frac{0,4}{2} = 1 \text{ кНм.}$$

Крутильний момент  $M_k = m_1 = 1$  кНм. Будуємо епюру крутильних моментів (рис. 8.8, в).

Визначаємо силу  $F_2$  на другому колесі

$$m_2 = F_2 \frac{D_2}{2};$$

$$F_2 = \frac{2m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 1}{0,2} = 10 \text{ кН.}$$

Розглядаємо згинання вала у вертикальній площині (рис. 8.8, з), будуємо епюру вертикальних згинальних моментів  $M_B$  (рис. 8.8, д).

Далі розглядаємо згинання в горизонтальній площині (рис. 8.8, е), будуємо епюру горизонтальних згинальних моментів  $M_T$  (рис. 8.8, е).

Визначаємо сумарні згинальні моменти в характерних перерізах вала за формулою Піфагора  $M = \sqrt{M_B^2 + M_T^2}$ . У цьому випадку такий підрахунок необхідний тільки в точці  $B$

$$M = \sqrt{0,25^2 + 0,75^2} = 0,791 \text{ кНм.}$$

Будуємо епюру  $M$ , вона не є плоскою фігурою. Як уже зазначалося, її нахил залежить від співвідношення  $M_B$  і  $M_T$ . Проекція епюри

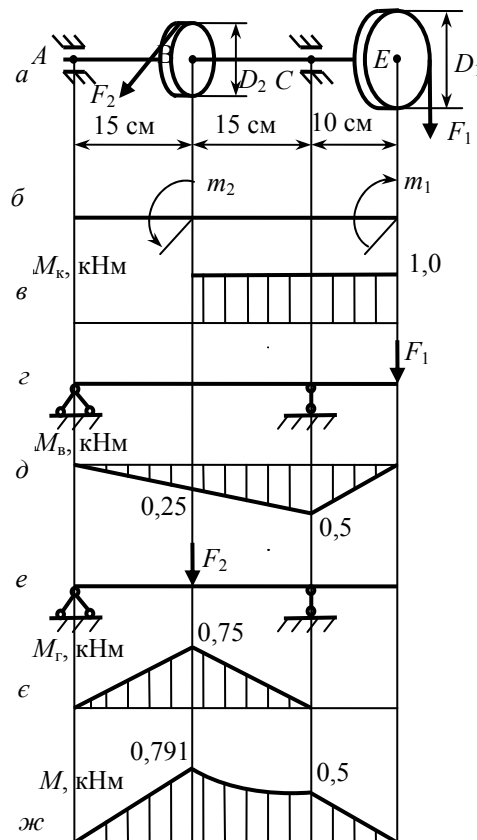


Рис. 8.8. До прикладу розрахунку

на площину рисунка буде прямолінійною на ділянці  $AB$ , де складові графіки  $M_B$  і  $M_T$  перетинають вісь в одній точці  $A$ , і криволінійною на ділянці  $BC$ , де складові епюри перетинають вісь у різних точках  $A$  і  $C$  (рис. 8.8, ж).

З аналізу епюр  $M$  і  $M_K$  робимо висновок, що небезпечним буде переріз у точці  $B$ . Згідно з третьою теорією міцності, розрахунковий момент

$$M_p = \sqrt{M^2 + M_K^2} = \sqrt{0,791^2 + 1^2} = 1,275 \text{ кНм}.$$

З умови міцності (8.6) знаходимо потрібний момент опору перерізу  $W_z = \frac{M_p}{[\sigma]} = \frac{1,275 \cdot 10^6}{80} = 15\,900 \text{ мм}^3$  і далі, діаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15900}{3,14}} = 54,5 \text{ мм} \approx 55 \text{ мм}.$$



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. За яких умов виникає косо згинання?
2. Як визначають положення нейтральної осі за косо згинання?
3. Який вигляд мають умови міцності за косо згинання?
4. Що називається позацентровим розтяганням–стисканням?
5. Який вигляд має рівняння нейтральної лінії за позацентрового розтягання?
6. Як визначаються напруження за позацентрового розтягання?
7. Що називається ядром перерізу? Як воно визначається?
8. Коли виникає згинання з крученням?
9. Поясність, який вигляд має умова міцності в разі згинання з крученням.

## 9. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

### 9.1. Поняття критичної сили

Із курсу фізики відомо, що рівновага жорсткого тіла може бути стійкою і нестійкою, дещо схоже спостерігається і для деформівних тіл. Розглянемо стискання тонкого прямого стержня (рис. 9.1).

Доки сила  $F$  незначна, стержень залишається прямолінійним і вертикальним, а в разі виведення з рівноваги додатковою горизонтальною силою повертається до початкового стану при знятті відхильного навантаження (рис. 9.1, а).

Коли сила  $F$  збільшується, спостерігається таке явище: прямолінійний стержень, виведений з рівноваги, не повертається в початковий стан, а стає криволінійним (рис. 9.1, б). Тобто початкова прямолінійна форма рівноваги змінюється на криволінійну (*втрата стійкості*).

Сила, при якій форма стійкої рівноваги змінюється, називається *критичною* і позначається  $F_k$ . Критична сила викликає в стержні *критичні напруження*

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A}.$$

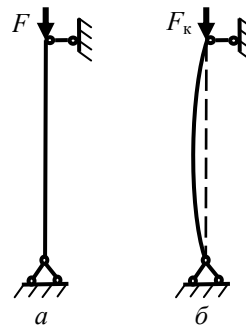


Рис. 9.1. Стискання тонкого стержня

Досягнення навантаженнями критичних значень означає втрату несучої здатності конструкції, оскільки втрата стійкості відбувається практично раптово і призводить до значного зростання деформацій та напружень при незмінному навантаженні.

## 9.2. Формула Ейлера для критичної сили

Задачу про визначення критичної сили для стиснутого стержня вперше розв'язав Л. Ейлер у 1744 р. Розглядаючи деформації прямолінійного стиснутого стержня (рис. 9.2), він використав рівняння пружної лінії балки  $EI_{\min}y'' = -M$ .

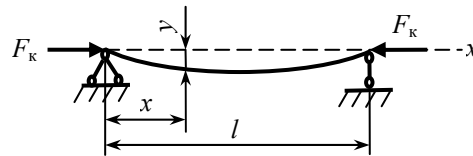


Рис. 9.2. До виведення формули Ейлера

З урахуванням того, що  $M = F_k y$ , маємо  $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -F_k y$ , чи

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 y = 0, \quad (9.1)$$

де  $k^2 = \frac{F_k}{EI_{\min}}$ .

Загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння (9.1) шукається у вигляді  $y = a \sin kx + b \cos kx$ .

Константи  $a$  і  $b$  знаходимо з умов на кінцях стержня:

якщо  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $b = 0$ ;

якщо  $x = l$ ;  $y = 0$ ;  $a \sin kl = 0$ .

Оскільки  $a \neq 0$  (стержень непрямолінійний), тоді  $\sin kl = 0$ .

З цього випливає, що  $k = \frac{n\pi}{l}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) і, з урахуванням (9.1),

$$F_k = n^2 \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Значення  $n = 0$  не відповідає умові задачі, бо з нього випливає, що  $F_k = 0$ . Практичне значення має найменша величина критичної сили (коли  $n = 1$ ), при цьому

$$F_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (9.2)$$

Вираз для критичної сили (9.2) отриманий для випадку шарнірного обпирання кінців стержня (рис. 9.2). Інші випадки обпирання кінців стержня враховуються застосуванням поняття зведеної довжини стержня  $l_{\text{зв}} = \mu l$ .

Таким чином формула Ейлера набуває вигляду

$$F = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}.$$

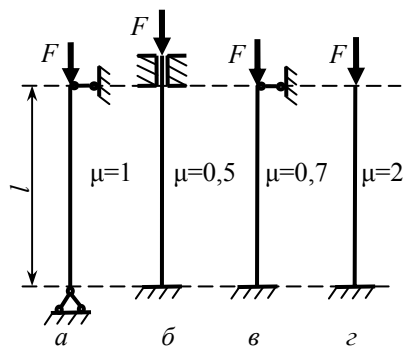


Рис. 9.3. Значення коефіцієнта зведення довжини

Коефіцієнти зведення довжини  $\mu$  для чотирьох найпоширеніших випадків закріплення кінців стержня показано на рис. 9.3.

Формула Ейлера для критичних напружень має вигляд

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (9.3)$$

де величина  $\lambda = \mu l / i_{\min}$  називається *гнучкістю стержня*;  $i_{\min}$  — мінімальний радіус інерції перерізу.

### 9.3. Границі застосування формули Ейлера. Формули Ясинського

Виведення формули Ейлера ґрунтується на використанні рівняння пружної лінії балки. Тим самим вводиться обмеження на її застосування при напруженнях, що не перевищують границю пропорційності матеріалу стержня  $\sigma_k \leq \sigma_{\text{пц}}$ . Якщо підставити цю умову у формулу (9.3), отримаємо обмеження за гнучкістю

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \lambda_{\text{гр}}, \quad (9.4)$$

тобто формула Ейлера може використовуватись для стержнів, гнучкість яких перевищує граничну.

*Гранична гнучкість*  $\lambda_{\text{гр}}$ , як видно з (9.4), є характеристикою, що залежить від властивостей матеріалу. Отже, довгі і тонкі стержні при стисканні втрачають стійкість у пружній зоні деформування за відсутності залишкових деформацій. Їх називають *стержнями великої гнучкості* ( $\lambda \geq \lambda_{\text{гр}}$ ). Критичне напруження для таких стержнів визначають за формулою Ейлера (9.3).

Раніше (у розд. 2) зазначалося, що короткі і товсті стержні при стисканні сплющуються, якщо матеріал, з якого вони зроблені, достатньо пластичний, чи руйнуються, якщо матеріал, навпаки, крихкий. Такі стержні називають *стержнями малої гнучкості*. Вони не втрачають стійкості при стисканні, для них критичним напруженням можна вважати величину

$$\sigma_k = \sigma_0 = \begin{cases} \sigma_{\text{т}} & \text{— для пластичних матеріалів;} \\ \sigma_{\text{в}} & \text{— для крихких матеріалів.} \end{cases} \quad (9.5)$$

Однак виявилось, що є ще одна категорія стержнів, так званої *середньої гнучкості*. Стискаючись, вони втрачають стійкість при напруженнях, що перевищують границю пропорційності, тобто з утворенням залишкових деформацій.

Теоретичного розв'язку, придатного для практичного застосування, для таких випадків втрати стійкості досі не існує, у зв'язку зі складністю задачі. Тому в розрахунках використовують емпіричні формули, які запропонував наприкінці XIX ст. російський дослідник Ф. С. Ясинський після аналізу і систематизації багатьох експериментальних результатів.

Для більшості матеріалів формули Ясинського є рівняннями спадної прямої

$$\sigma_k = a - b\lambda,$$

де коефіцієнти  $a$  і  $b$  — константи матеріалу, які визначаються експериментально і мають розмірність напруження.

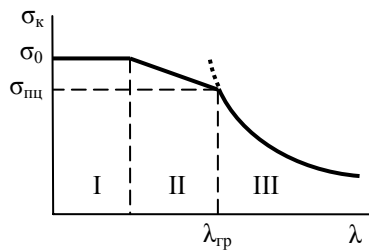


Рис. 9.4. Класифікація стиснутих стержнів за гнучкістю

Залежність критичних напружень від гнучкості стержнів демонструє графік (рис. 9.4), на якому чітко окреслені три ділянки:

I — зона стержнів малої гнучкості;

II — зона стержнів середньої гнучкості;

III — зона стержнів великої гнучкості.

Із зображеного на рис. 9.4 також видно, що використовувати формулу Ейлера для стержнів середньої гнучкості дуже небезпечно, оскільки вона дає завищені значення критичних напружень.

#### 9.4. Практичні розрахунки на стійкість

Для стиснутих стержнів, крім розрахунку на міцність за умовою

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma],$$

слід проводити розрахунок на стійкість згідно з умовою

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{\text{ст}}.$$

Виявимо залежність між допустимим напруженням для розрахунку на стійкість  $[\sigma]_{\text{ст}}$  і основним допустимим напруженням для стиснутих стержнів  $[\sigma]$

$$\frac{[\sigma]_{\text{ст}}}{[\sigma]} = \frac{\sigma_k n}{n_{\text{ст}} \sigma_0} = \varphi, \quad (9.6)$$

де  $\sigma_k$  — критичне напруження;  $n_{\text{ст}}$  — коефіцієнт запасу стійкості;  $\sigma_0$  — граничне напруження, що визначається умовою (9.5);  $n$  — коефіцієнт запасу міцності;  $\varphi$  — коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження для стиснутих стержнів.



З використанням коефіцієнта  $\varphi$  (9.6), умова стійкості набуває вигляду

$$\sigma = \frac{F}{A} = \varphi[\sigma]. \quad (9.7)$$

Аналізуючи визначення коефіцієнта  $\varphi$  (9.6), можна дійти висновку, що коефіцієнти  $\varphi \leq 1$  через те, що:

- критичне напруження не перевищує граничного  $\sigma_k \leq \sigma_0$  (рис. 9.4);
- коефіцієнт запасу стійкості завжди дещо перевищує коефіцієнт запасу міцності  $n_{ст} > n$ .

Коефіцієнти  $\varphi$  встановлюються державними чи галузевими регулювальними органами й наводяться в довідниках, зазвичай у вигляді таблиць (дод. 2).

Проектувальний розрахунок з використанням умови стійкості (9.6) доводиться проводити методом послідовних наближень, оскільки вона містить у цьому разі дві невідомих: площу  $A$  і коефіцієнт  $\varphi$ , який залежить, зокрема, від форми і розмірів перерізу стержня.

**Приклад 9.1.** Для стояка, наведеного на рис. 9.5, дібрати двотавровий переріз, якщо  $F = 300$  кН;  $[\sigma] = 160$  МПа;  $l = 1,9$  м;  $\mu = 0,7$ .

*Розв'язання*

Сталевий прокат, зокрема двотаври, виготовляються з матеріалу Ст3, тому в *першому наближенні* обираємо  $\varphi_1 = 0,6$ , це відповідає  $\lambda = 100$  — середині таблиці (дод. 2).

З умови стійкості (9.7) визначаємо площу

$$A = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 160} = 3125 \text{ мм}^2 = 31,25 \text{ см}^2.$$

За ГОСТ 8239-89 (дод. 1) обираємо двотавр № 22, у якого  $A = 30,6 \text{ см}^2$ ;  $i_{\min} = i_y = 2,27 \text{ см}$ .

Визначаємо гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 190}{2,27} = 58,6.$$

Для такої гнучкості за таблицею визначаємо значення коефіцієнта  $\varphi$ , використовуючи лінійну інтерполяцію

$$\varphi'_1 = 0,89 - \frac{0,89 - 0,86}{10} 58,6 = 0,864.$$

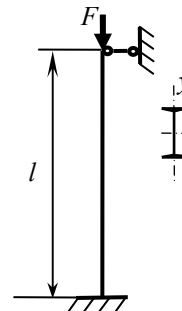


Рис. 9.5. Стиснутий стержень

Як бачимо, між величинами  $\varphi_1$  та  $\varphi'_1$  досить велика різниця, тому переходимо до *другого наближення*, беручи

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,6 + 0,864}{2} = 0,732.$$

Потрібна площа перерізу  $A = \frac{300 \cdot 10^3}{0,732 \cdot 160} = 2560 \text{ мм}^2 = 25,6 \text{ см}^2.$

За ГОСТ 8239–89 обираємо двотавр №20,  $A = 26,8 \text{ см}^2$ ;  $i_{\min} = 2,07 \text{ см}$ . Гнучкість  $\lambda = \frac{0,7 \cdot 190}{2,07} = 64,3.$

За таблицею  $\varphi'_2 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 64,3 = 0,838.$

Розходження між  $\varphi_2$  і  $\varphi'_2$  все ще значне, тому — *третьє наближення*

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,732 + 0,838}{2} = 0,785.$$

Площа  $A = \frac{300 \cdot 10^3}{0,785 \cdot 160} = 2390 \text{ мм}^2 = 23,9 \text{ см}^2.$

За ГОСТ 8239–89 обираємо двотавр №18;  $A = 23,4 \text{ см}^2$ ;  $i_{\min} = 1,88 \text{ см}$ . Гнучкість  $\lambda = \frac{0,7 \cdot 190}{1,88} = 70,7.$

За таблицею  $\varphi'_3 = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 70,7 = 0,806.$

Значення  $\varphi'_3$  наблизилось до  $\varphi_3$ . Визначаємо напруження в стержні

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{300 \cdot 10^3}{2340} = 128 \text{ МПа},$$

допустиме напруження на стійкість

$$[\sigma]_{\text{ст}} = \varphi'_3 [\sigma] = 0,806 \cdot 160 = 129 \text{ МПа}.$$

Недонавантаження становить

$$\frac{[\sigma]_{\text{ст}} - \sigma}{[\sigma]_{\text{ст}}} 100 \% = \frac{129 - 128}{129} 100 \% = 0,775 \% < 5 \%.$$

Остаточного обираємо двотавр №18.

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Поясніть, у чому полягає явище втрати стійкості.
2. У чому небезпечність втрати стійкості?
3. Що називається критичною силою і критичним напруженням?
4. Який вигляд має формула Ейлера для критичної сили, для критичного напруження?
5. Як урахується закріплення кінців стержня?
6. Що називається гнучкістю стержня, граничною гнучкістю?
7. Які границі застосування формули Ейлера ?
8. Як класифікуються стиснуті стержні за гнучкістю?
9. В яких випадках застосовують формули Ясинського?
10. Що називається коефіцієнтом зменшення основного допустимого напруження для стиснутих стержнів?
11. Який вигляд має умова стійкості?

## 10. ДИНАМІЧНА ДІЯ НАВАНТАЖЕНЬ

У попередніх розділах ми мали справу тільки зі *статичними навантаженнями*, тобто такими, що не змінюються в часі чи змінюються дуже повільно. При цьому прискорення елементів конструкцій невеликі і сили інерції можна не враховувати.

Проте під час роботи машин виникають і *динамічні навантаження*, які досить швидко змінюються в часі, що спричиняє значні прискорення елементів конструкцій. При дії динамічних навантажень, у кожен момент часу, зовнішні сили не врівноважуються внутрішніми силами пружності.

Розрахунки на міцність і жорсткість за високих швидкостей навантаження проводять, використовуючи принцип Даламбера, завдяки якому можна досягти миттєвої рівноваги, якщо до зовнішніх і внутрішніх зусиль додати ще сили інерції. Як відомо з теоретичної механіки, сила інерції матеріальної точки дорівнює добутку маси точки на її прискорення і спрямована обернено прискоренню.

### 10.1. Напруження при рівноприскореному русі

Розглянемо один із найпростіших випадків дії динамічного навантаження — рівноприскорений підйом вантажу  $Q$  (рис. 10.1).

У разі піднімання вантажу зі сталою швидкістю (рис. 10.1, *a*) сила натягу троса дорівнює вазі вантажу  $N = Q$  (вагу троса не враховуємо).

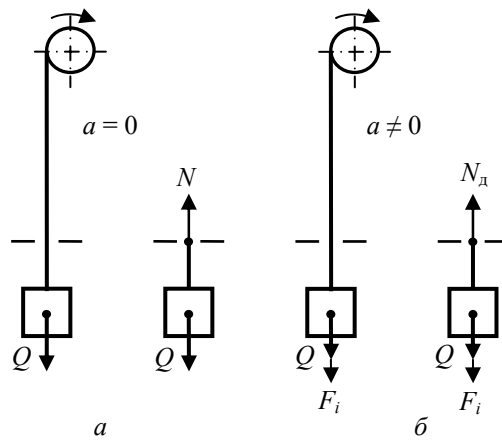


Рис. 10.1. Визначення зусиль у тросі при піднятті вантажу

Якщо ж вантаж піднімається з прискоренням  $a$  (рис. 10.1, б), треба додатково враховувати силу інерції  $F_i = \frac{Q}{g}a$  ( $g$  — прискорення вільного падіння).

При цьому динамічна нормальна сила в довільному перерізі

$$N_d = Q + \frac{Q}{g}a = Q \left( 1 + \frac{a}{g} \right).$$

Величину в дужках зазвичай називають *динамічним коефіцієнтом* при рівноприскореному русі —  $K_d$ . Тоді

$$N_d = K_d Q,$$

а відповідне напруження

$$\sigma_d = K_d \sigma_c,$$

де  $\sigma_c = Q/A$  — статичне напруження в тросі;  $A$  — площа перерізу троса.

## 10.2. Розрахунок обертового кільця

Розглянемо кільце постійного перерізу  $A$ , що швидко обертається навколо центральної осі з кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 10.2, а).

Виділяємо з нього елемент довжиною  $dS = Rd\theta$ . Сила інерції, що припадає на одиницю довжини кільця

$$q = ma = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 R,$$

тут  $m = \frac{\gamma A}{g}$  — маса одиниці довжини кільця;  $a = \omega^2 R$  — нормальне (відцентрове) прискорення;  $\gamma$  — питома вага матеріалу.

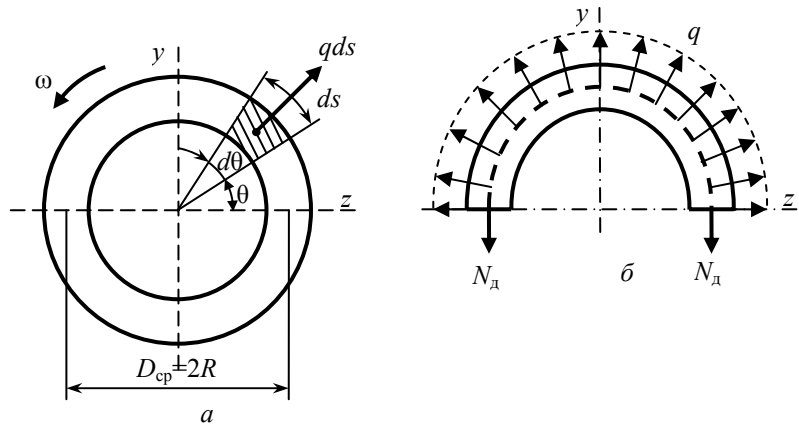


Рис. 10.2. До розрахунку обертового кільця

Тоді відцентрова сила інерції, що діє на виділений елемент, дорівнює  $qds = qRd\theta = \frac{\gamma A}{g} R^2 \omega^2 d\theta$ , а її вертикальна складова  $qds \sin \theta = \frac{\gamma A}{g} R^2 \omega^2 \sin \theta d\theta$ . Розріжемо кільце по горизонтальному діаметру і розглянемо рівновагу його вертикальної частини (рис. 10.2, б)

$$\Sigma Y = -2N_d + \frac{\gamma A}{g} R^2 \omega^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 0,$$

звідки  $N_d = \frac{\gamma A}{g} R^2 \omega^2$ , а динамічне напруження  $\sigma_d = \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2$ .

### 10.3. Ударна дія навантаження

Розглянемо балку, на яку з висоти  $h$  падає вага  $Q$  (рис. 10.3, а). При цьому різко змінюється швидкість тіла  $Q$  від максимальної до нуля і виникають дуже великі прискорення (уповільнення). Технічна теорія удару ґрунтується на таких припущеннях:

- у конструкції, що зазнає удару, напруження не перевищують границі пропорційності і виконується закон Гука;
- під час удару тіла не відділяються одне від одного;
- епюра переміщень балки при ударі (рис. 10.3, а) в будь-який момент часу подібна до епюри переміщень від статично прикладеної ваги  $Q$  (рис. 10.3, б).

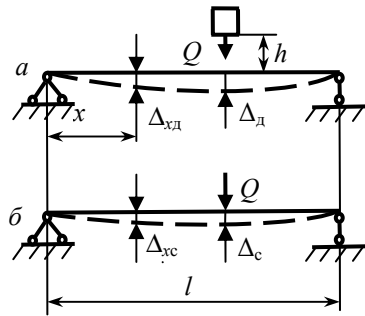


Рис. 10.3. Переміщення при ударній (а) і статичній (б) дії навантаження

Це дає змогу ввести поняття *динамічного коефіцієнта при ударі*

$$K_d = \frac{\Delta_{xd}}{\Delta_{xc}} = \frac{\Delta_d}{\Delta_c}. \quad (10.1)$$

У зв'язку з тим, що закон зміни швидкості в такому швидкоплинному процесі, як удар визначити дуже складно (а отже, і врахувати сили інерції) розрахунки проводять на основі закону збереження енергії.

Робота сили  $Q$  при падінні вантажу з висоти  $h$  (кінетична енергія) дорівнює  $Q(h + \Delta_d)$ . Потенціальна енергія деформації балки, накопичена під час удару,

$$U = \frac{1}{2} F_d \Delta_d,$$

де  $F_d$  — динамічна сила (сила удару), її можна подати як  $F_d = K_d Q$ .

У момент досягнення найбільшої деформації балки кінетична енергія тіла, що падає, цілком переходить у потенціальну енергію деформації

$$Q(h + \Delta_d) = \frac{1}{2} K_d Q \Delta_d.$$

Згідно з (10.1)  $\Delta_d = K_d \Delta_c$ , тоді

$$h + K_d \Delta_c = \frac{1}{2} K_d^2 \Delta_c,$$

інакше

$$K_d^2 - 2K_d - \frac{2h}{\Delta_c} = 0.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_c}}. \quad (10.2)$$

Перед коренем залишений тільки знак «плюс», тому що динамічний коефіцієнт і згідно з (10.1) переміщення при ударі не можуть бути від'ємні.

Зроблене на початку припущення про справедливість закону Гука, з урахуванням (10.1), приводить до формули для динамічних напружень

$$\sigma_d = K_d \sigma_c. \quad (10.3)$$

Як впливає з отриманих формул (10.2), (10.3), динамічний коефіцієнт і динамічні напруження при ударі, крім висоти падіння вантажу  $h$ , залежать ще від  $\Delta_c$  — переміщення в точці падіння вантажу від статично прикладеної сили його ваги. Тобто, більш гнучкі конструкції краще сприймають дію ударних навантажень.

У виведенні формули (10.2) не враховувалась маса балки. Коли ця маса (вага) значна відносно тіла, що падає, нехтувати нею не можна. Динамічний коефіцієнт при ударі з урахуванням маси тіла, що зазнає удару

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_c \left(1 + \beta \frac{Q_1}{Q}\right)}}$$

де  $Q_1$  — вага тіла, що зазнає удару;  $\beta$  — коефіцієнт зведення маси.

Коефіцієнт зведення  $\beta$  визначається за формулою

$$\beta = \frac{1}{Q_1} \int_{Q_1} \left( \frac{\Delta_{xc}}{\Delta_c} \right)^2 dQ_1,$$

у якій  $\Delta_{xc}$  та  $\Delta_c$  — переміщення пружної системи від статичної дії ваги  $Q$  (рис. 10.3, б).

Коефіцієнти  $\beta$  для типових розрахункових схем наводяться в довідниках.

**Приклад 10.1.** На двотаврову балку (двотавр №14) з висоти  $h = 2$  см падає вага  $Q = 6$  кН (рис. 10.4, а). Визначити найбільше динамічне напруження від удару і з'ясувати, як воно зміниться, якщо праву опору замінити пружиною із піддатливістю  $\alpha = 2,5$  см/кН.

*Розв'язання*

Випишемо з ГОСТ 8239-89 (дод. 1) геометричні характеристики двотавра №14:  $W_z = 81,7$  см<sup>3</sup>;  $I_z = 572$  см<sup>4</sup>.

Визначаємо максимальне напруження, що виникає в балці від статичної дії сили  $Q$  (рис. 10.4, б). Для цього визначаємо опорні реакції і будемо епюру згинальних моментів (рис. 10.4, в). За формулою (7.7)

$$\sigma_c^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{4 \cdot 10^6}{81,7 \cdot 10^3} = 49 \text{ МПа.}$$

Динамічний коефіцієнт при ударі, згідно з (10.2)

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20}{2,33}} = 5,26,$$

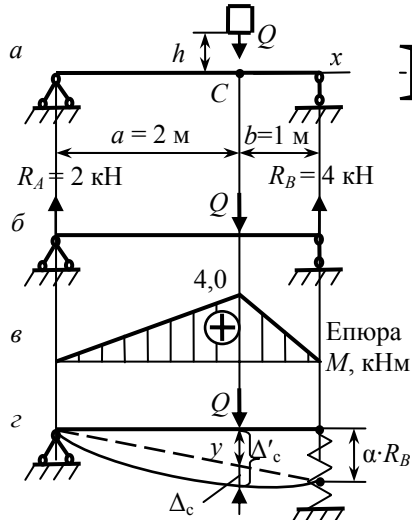


Рис. 10.4. До розрахунку балки на удар

де  $\Delta_c$  — прогін у місці падіння вантажу від статично прикладеної сили  $Q$ , який визначаємо, скориставшись табл. 27 із довідника [11] при  $x = a$

$$\begin{aligned} \Delta_c &= \frac{Qa^2b^2}{3EI_z(a+b)} = \\ &= \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 10^6}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^4 \cdot 3000} = \\ &= 2,33 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Тоді динамічні напруження

$$\begin{aligned} \sigma_d^{\max} &= K_d \sigma_c^{\max} = \\ &= 5,26 \cdot 49 = 258 \text{ МПа,} \end{aligned}$$

тобто при такій динамічній дії навантаження напруження не тільки значно перевищують

допустимі, які здебільшого дорівнюють  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ , а й більші за границю текучості (для матеріалу Ст3  $\sigma_T \approx 240 \text{ МПа}$ ). Це означає, що балка зазнає незворотних пластичних деформацій і буде виведена з ладу.

Проведені підрахунки доводять, яким небезпечним може бути падіння вантажу навіть з такої незначної висоти. Тобто опускати вантаж треба дуже обережно.

Якщо ж ударної дії навантажень уникнути неможливо, то рекомендується встановлювати амортизатори. Замінимо праву опору пружиною із піддатливістю  $\alpha$  (рис. 10.4, з).



У цьому разі під дією ваги  $Q$  правий кінець балки спуститься на величину  $\alpha R_B$ , а статичне переміщення точки  $C \Delta'_c$  буде складатися з переміщення від осадки пружини  $y$  і прогину балки  $\Delta_c$

$$\Delta'_c = y + \Delta_c = 66,7 + 2,33 = 69 \text{ мм},$$

де переміщення  $y = \frac{2}{3} \alpha R_B = \frac{2}{3} 25 \cdot 4 = 66,7 \text{ мм}$  визначається з подібності трикутників (рис. 10.4, з)  $y/\alpha R_B = 2/3$ .

Динамічний коефіцієнт у разі встановлення пружини

$$K'_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta'_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20}{69}} = 2,26,$$

а динамічні напруження

$$\sigma'_d = K'_d \sigma_c^{\max} = 2,26 \cdot 49 = 111 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Тобто установка пружини призводить до зменшення динамічних напружень у  $\frac{\sigma_d^{\max}}{\sigma'_d} = \frac{258}{111} = 2,32$  рази.



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Поясніть, у чому відмінність між статичними і динамічними навантаженнями.
2. Як визначаються напруження при рівноприскореному русі?
3. Як розраховується обертове кільце?
4. Які припущення покладені в основу технічної теорії удару?
5. Що таке динамічний коефіцієнт під час удару?
6. За якою формулою визначають динамічний коефіцієнт під час удару?
7. Як урахується маса тіла, що зазнає удару?

## 11. ОПР МАТЕРІАЛІВ ДІЇ ПОВТОРНО-ЗМІННИХ НАВАНТАЖЕНЬ

### 11.1. Змінні напруження та втомленість матеріалів

Багато деталей машин і елементів споруд в експлуатації зазнають дії циклічних навантажень. При цьому можливе раптове руйнування деталі без помітних залишкових деформацій, навіть якщо вона виготовлена з досить пластичного матеріалу, і при напруженнях значно менших за границю міцності.

Явище поступового накопичення пошкоджень і руйнування під дією повторно-змінних навантажень називається *втомленістю*.

Здатність матеріалів і деталей опиратися дії циклічних навантажень називається *витривалістю (опором утомленості)*.

З явищами раптового руйнування конструкцій, які були надійно розраховані на опір статичним навантаженням, уперше зіткнулися інженери в середині XIX ст. в період інтенсивного впровадження парових двигунів. І хоча з того часу вивчення явища втомленості безперервно продовжується в численних лабораторіях різних країн понад 150 років, переважна більшість машинобудівних конструкцій зазнає аварій саме від утомного руйнування.

За сучасними уявленнями, втомне руйнування твердих тіл зумовлене неоднорідністю їх структури. Це призводить, у процесі деформування, до перенапруження окремих ділянок тіла і, як наслідок, до виникнення мікродефектів. Багаторазова повторюваність навантажень викликає накопичення мікродефектів. Їх кількість і розміри поступово зростають. Далі утворюються мікротріщини, які ростуть, зливаються одна з одною і перетворюються в магістральну тріщину, наслідком подальшого розвитку якої і є руйнування тіла (деталі).

## 11.2. Цикли змінних напружень

Процес повторно-змінного навантаження конструкцій може бути будь-якої складності. Наприклад, під час руху транспортного засобу характер навантажень залежить від стану поверхні шляху, швидкості руху, величини вантажу, режиму роботи двигуна тощо.

Аналізуючи накопичення втомних пошкоджень, будь-який складний циклічний процес розкладають на стаціонарні синусоїдальні режими — *цикли навантажень (напружень)*.

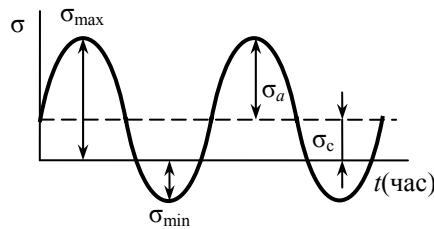


Рис. 11.1. Характеристики циклу змінних напружень

Цикл змінних напружень (рис. 11.1) характеризується максимальним  $\sigma_{\max}$  і мінімальним  $\sigma_{\min}$  значеннями напружень, а також *коефіцієнтом асиметрії циклу*

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

У деяких випадках циклічну дію напружень зручно розглядати як суму сталої складової  $\sigma_c$  — *середнього напруження циклу* і періодично змінюваних напружень з *амплітудою* —  $\sigma_a$ .

Для повної характеристики циклу змінних напружень достатньо знати дві з наведених вище величин, а решту можна легко підрахувати. Наприклад:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}; \quad \sigma_{\min} = R\sigma_{\max} \quad \text{і т. п.}$$

Розрізняють такі основні види циклів (рис. 11.2).

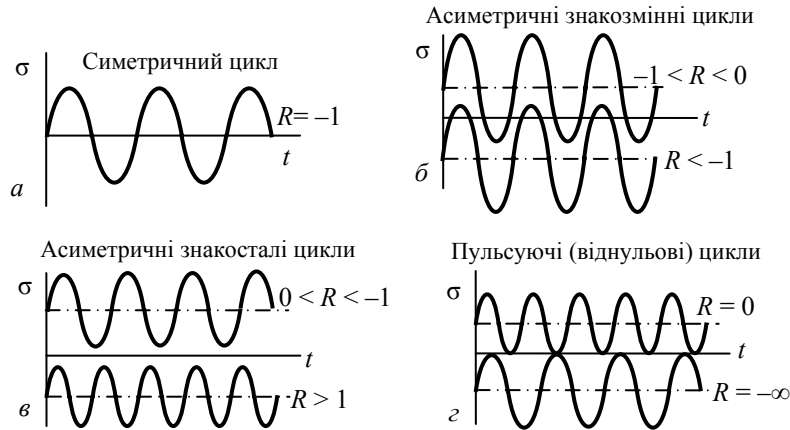


Рис. 11.2. Види циклів змінних напружень

Цикли, що мають однакові коефіцієнти асиметрії, називаються подібними. У цьому розділі йшлося про цикли зміни нормальних напружень. Усе сказане стосується й дотичних напружень.

### 11.3. Криві втомленості. Границя витривалості

Явище втомного руйнування дуже важко піддається теоретичному вивченню через складність самого процесу накопичення пошкоджень і багатьох чинників, що впливають на цей процес. Тому основними методами дослідження втомленості є експериментальні.

Утомні випробування беруть початок із середини XIX ст. У 1870 р. німецький дослідник А. Вьолер запропонував результати випробувань подавати у вигляді залежності кількості циклів до

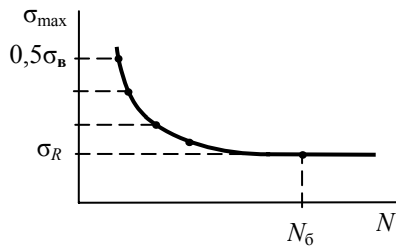


Рис. 11.3. Крива втомленості

руйнування зразка чи деталі від максимального напруження циклу (рис. 11.3).  
Такі графіки отримали назву *криві втомленості*, інакше криві витривалості чи криві Вьолера.  
Сам А. Вьолер був у той час службовцем залізничної компанії і передусім випробовував на згинання сталеві вагонні осі — деталі, що найчастіше руйнувались. Для них крива втомленості мала яскраво виражену горизонтальну асимптоту  $\sigma_R$ , яку А. Вьолер запропонував використовувати як характеристику втомного руйнування — *границю витривалості*.

Подальші дослідження показали, що не всі матеріали і не за всіх умов навантаження мають такі асимптоти, крім того, надійне визначення такого асимптотичного значення  $\sigma_{\max}$  потребує значних витрат часу. Згідно з чинними стандартами за границю витривалості береться максимальне напруження циклу навантаження, при якому зразок (деталь) витримує, не руйнуючись, наперед задану (базову) кількість циклів  $N_0$  (рис. 11.3).

База випробувань повинна бути не меншою від  $10^7$  циклів для чорних металів і сплавів, які мають горизонтальну ділянку на кривій втомленості, та  $10^8$  циклів для кольорових і легких сплавів, криві втомленості яких не мають горизонтальних ділянок.

Границя витривалості позначається як  $\sigma_R$ , де індекс  $R$  відповідає коефіцієнту асиметрії циклу. Для симетричного циклу границя витривалості позначається  $\sigma_{-1}$ , для пульсуючого  $\sigma_0$ . Якщо випробування відбувались при змінних навантаженнях розтягання—стискання чи кручення, додається ще індекс, який вказує на вид деформації. Наприклад:  $\sigma_0^p$  — границя витривалості за пульсуючого циклу розтягання,  $\tau_{-1}^k$  — границя витривалості за симетричного циклу кручення.

Для визначення границі витривалості на машині, що здатна реалізувати обраний режим навантаження, випробовують серію зразків (деталей), однакових за формою, розмірами та обробкою. Початкове навантаження обирається залежно від величини границі міцності матеріалу  $\sigma_{\max} \approx 0,5\sigma_B$ . Напруження від зразка до зразка

знижують, доки черговий зразок не витримає базове число циклів навантаження (рис. 11.3).

За *границю витривалості матеріалу* беруть границю витривалості стандартного лабораторного зразка. Так, за симетричного циклу згинання випробовують строго циліндричні, дзеркально поліровані зразки діаметром 7, ..., 10 мм.

#### 11.4. Фактори, що впливають на границю витривалості

На величину границі витривалості, крім характеру навантаження, впливає значна кількість різноманітних факторів: розміри і форма деталі, особливо наявність концентраторів напружень, якість обробки поверхні, частота навантаження, температура зовнішнього середовища, наявність у середовищі агресивних речовин тощо.

У курсі опору матеріалів зазвичай розглядається вплив трьох перших чинників, але для конкретних конструкцій визначальним може виявитись вплив, наприклад, температури для деталей теплових двигунів чи агресивності рідини для агрегатів трубопровідного транспорту тощо.

*Концентрація напружень.* Теоретичні й експериментальні дослідження розподілу напружень у деталях складної форми вказують на те, що в місцях різкої зміни перерізу спостерігається підвищення і перерозподіл напружень. Таке явище отримало назву *концентрація напружень* (рис. 11.4).

Для врахування концентрації напружень при статичних розрахунках на міцність використовується *теоретичний коефіцієнт концентрації напружень*

$$\alpha_T = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_H},$$

який являє собою відношення максимального напруження поблизу концентратора до номінального напруження  $\sigma_H = F/A_{\text{нетто}}$ , ( $A_{\text{нетто}}$  — площа перерізу в найбільш послабленому місці).

При статичних розрахунках концентрація напружень зазвичай не враховується тому, що, навіть при незначних пластичних влас-

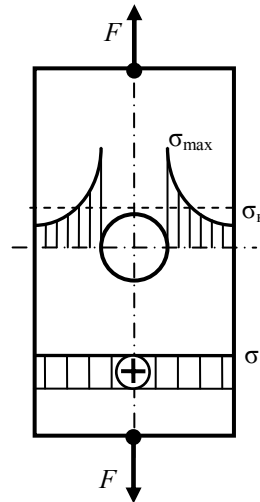


Рис. 11.4. Розподіл напружень у пластині з центральним отвором

тивостях матеріалу, у зоні концентратора утворюються залишкові деформації, які перешкоджають виникненню тріщин.

За циклічної дії навантажень, навпаки, зони підвищених напружень якраз і будуть осередками руйнування. При розрахунках на витривалість використовуються *ефективні коефіцієнти концентрації напружень*, які є відношенням границі витривалості деталі (зразка) без концентраторів напружень до границі витривалості деталі (зразка) із концентратором певної форми

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}} ; \quad K_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}} . \quad (11.1)$$

*Розміри перерізу.* Також експериментально встановлено, що опір утомленості залежить від розмірів поперечного перерізу деталі. Так для зразка діаметром 100 мм границя витривалості приблизно на 40 % нижча ніж для стандартного зразка діаметром 10 мм.

Ця залежність ураховується за допомогою *коефіцієнтів впливу абсолютних розмірів деталі*, які є відношенням границі витривалості деталі до границі витривалості лабораторного зразка подібної конфігурації діаметром 7, ..., 10 мм.

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{-1}} ; \quad \varepsilon_{\tau} = \frac{\tau_{-1д}}{\tau_{-1}} . \quad (11.2)$$

До зниження границі витривалості зі збільшенням розмірів перерізу деталі призводять декілька чинників, головним із яких є неоднорідність механічних властивостей різних зерен металу і наявність міжзеренних вкраплень, пустот та інших мікродефектів, які, по суті, є концентраторами напружень. Один із таких концентраторів може виявитись небезпечним — осередком розвитку руйнування, а ймовірність появи такої небезпеки в більшому перерізі, звісно, більша.

*Стан поверхні.* Поверхня деталі завжди зберігає сліди механічної обробки. Вони до того ж є осередками корозії, яка ще збільшує дефекти поверхні. Крім того, поверхневі шари в низці випадків навантаження (згинання, кручення) більш напружені. Все це призводить до того, що за циклічного навантаження тріщини часто починаються від поверхневих дефектів, які тим небезпечніші, чим гірша якість обробки поверхні деталі.

Вплив стану поверхні деталі на опір втомленості оцінюється за допомогою *коефіцієнтів якості поверхні*, що являють собою відношення границі витривалості зразка з певною обробкою поверхні до границі витривалості дзеркально полірованого зразка

$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}; \quad \beta_{\tau} = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}}. \quad (11.3)$$

Перелічені коефіцієнти визначаються, як видно із виразів (11.1)–(11.3), за результатами численних експериментів. Вони вводяться в довідковій літературі у вигляді таблиць та графіків.

Вплив інших чинників на величину границі витривалості за необхідності можна врахувати, вводючи додаткові коефіцієнти, аналогічні наведеним у виразах (11.1)–(11.3).

### 11.5. Розрахунки на міцність при повторно-змінних навантаженнях

Опір втомленості деталей машин залежить від умов експлуатації і низки конструктивно-технологічних чинників, про що йшлося в попередньому розділі. Тому розрахунки на міцність при циклічних напруженнях найчастіше мають перевірний характер. Попередньо зі статичних розрахунків з урахуванням призначення деталі обираються її форма і розміри, а потім проводиться розрахунок на витривалість, у результаті якого визначається фактичний коефіцієнт запасу і порівнюється з допустимим (потрібним)  $n \geq [n]$ .

У разі роботи деталі в умовах згинання із крученням *коефіцієнт запасу міцності відносно границі витривалості* визначається за емпіричною формулою

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}, \quad (11.4)$$

у яку входять *коефіцієнт запасу міцності відносно границі витривалості при згинанні*

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_c} \quad (11.5)$$

і *коефіцієнт запасу міцності відносно границі витривалості при крученні*

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \beta_{\tau}} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_c}. \quad (11.6)$$

У формули (11.5), (11.6), крім уже відомих, входять величини  $\psi_\sigma$  і  $\psi_\tau$  — коефіцієнти впливу асиметрії циклу.

Слід зазначити, що формула (11.4) спеціально обрана так, що  $n < n_\sigma$  і  $n < n_\tau$ . Тобто, якщо один зі складових коефіцієнтів  $n_\sigma$  чи  $n_\tau$ , у результаті розрахунків, вийшов менший ніж допустимий, то подальші обчислення слід припинити і розглянути можливі варіанти підвищення міцності.

Крім тих заходів, що застосовуються в статичних розрахунках: зміна матеріалу, збільшення розмірів чи зменшення навантаження, у розрахунках на витривалість можна ще зменшити концентрацію напружень (коефіцієнти  $K_\sigma$  і  $K_\tau$ ) за допомогою різних конструктивних рішень та зменшити вплив стану поверхні за допомогою додаткових технологічних методів обробки.

Ці методи поділяються на:

- механічні (наклеп поверхневого шару) — обкатка твердим роликом, обдування дробом чи сталевими кульками тощо;
- термічні — поверхнєве гартування струмом високої частоти;
- хіміко-термічні — азотування, цементація, ціанування.

Зазначені методи дозволяють збільшити коефіцієнти якості поверхні  $\beta_\sigma, \beta_\tau$  у 1,5, ..., 2,5 рази.



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називається втомленістю?
2. У чому полягає явище втомного руйнування?
3. Що таке витривалість?
4. Назвіть величини, якими характеризується цикл змінних напружень.
5. Які бувають цикли змінних напружень?
6. Як будується крива втомленості?
7. Що називається границею витривалості?
8. Як визначається границя витривалості?
9. Які фактори впливають на опір утомленості?
10. Як проводиться розрахунок на міцність при повторно-змінних навантаженнях?
11. Як можна підвищити опір утомленості?
12. Які технологічні методи обробки поверхні деталей застосовують для збільшення запасу міцності при повторно-змінних навантаженнях?



## ОСНОВИ ТЕОРІЇ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

### 12. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

#### 12.1. Поняття про ланку, кінематичну пару

До складу більшості машин і багатьох приладів входять механізми. Тверде тіло, що входить до складу механізму і рухомо з'єднане з іншими тілами, називається *ланкою*.

Розглянемо механізм двигуна внутрішнього згоряння (рис. 12.1), ланками якого є колінчастий вал (кривошип) *1*, шатун *2*, поршень (повзун) *3*, циліндр *4*. Кожна ланка має свій рух, але рух окремих ланок пов'язаний один з одним. Так, зворотно-поступальний рух ланки *3* (поршня) під дією сили тиску в циліндрі *4* перетворюється за допомогою шатуна *2* в обертальний рух ланки *1* (колінчастого вала).

Тверде тіло, що входить до складу ланки, називається *деталлю*. Деталь виготовляється без складальних операцій.

Ланка може складатись з однієї або кількох деталей. Наприклад, ланка *2* (шатун) складається з тіла шатуна, кришки шатуна, з'єднувальних болтів, гайок, шайб та інших деталей. Але всі ці деталі жорстко з'єднані між собою і рухаються як одне тверде тіло.

Ланки мають різне конструктивне оформлення залежно від призначення і технологічних умов. Усі рухомі тіла утворюють одну жорстку нерухому систему тіл, так звану нерухому ланку, або стоек. Отже, корпус двигуна та деталі, які жорстко з'єднані з ним,

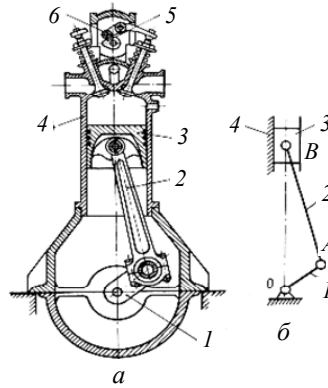


Рис. 12.1. Механізм двигуна внутрішнього згоряння

утворюють одну нерухому ланку (стояк). Усі інші ланки, що рухаються відносно стояка або одна відносно іншої, називаються *рухомими*. Отже, у будь-якому механізмі завжди є одна нерухома ланка і одна або кілька рухомих.

Рухома ланка, якій надається рух, що перетворюється механізмом у потрібний рух інших ланок, називається *вхідною*. *Вихідною* називається ланка, яка здійснює рух, для виконання якого призначений механізм. Решту рухомих ланок механізму називають *проміжними* або *з'єднувальними*.

У механізмах і машинах ланки з'єднуються між собою так, що завжди забезпечується можливість їхнього відносного руху. З'єднання двох ланок, що дотикаються і можуть рухатися одна відносно одної, називають *кінематичною парою*. Наприклад, колінчастий вал 1 і шатун 2 утворюють кінематичну пару, яка допускає лише один обертальний рух ланки 2 відносно ланки 1. Така пара називається *обертальною*, а поршень 3 та циліндр 4 утворюють *поступальну* кінематичну пару, бо вона допускає лише один поступальний рух.

Характер відносного руху ланок визначається формою елементів ланок, якими вони дотикаються. Точки, лінії, поверхні ланки, по яких вона може дотикатися до іншої, утворюючи кінематичну пару, називають *елементами кінематичної пари*.

Кінематичні пари значною мірою визначають працездатність та надійність машини, оскільки через них передаються зусилля від однієї ланки до іншої.

## 12.2. Класифікація кінематичних пар

Кінематичні пари класифікують за такими ознаками:

1) числом незалежних можливих рухів однієї ланки відносно іншої, тобто за числом степенів вільності у відносному русі ланок, які утворюють кінематичну пару (класифікація В. В. Добровольського);

2) числом втрачених степенів вільності у відносному русі ланок при утворенні кінематичної пари (класифікація І. І. Артоболевського);

3) характером достикання елементів ланок кінематичної пари (класифікація Ф. Рело).

За класифікацією В. В. Добровольського, залежно від числа можливих незалежних рухів однієї ланки відносно іншої (або умовно за числом рухомостей кінематичної пари) кінематичні пари ділять на п'ять родів: 1-го роду (однорухомі); 2-го роду (дворухомі);

3-го роду (трирухомі); 4-го роду (чотирирухомі); 5-го роду (п'ятирухо-мі). Як відомо, у загальному випадку кожне абсолютне тверде тіло, що вільно рухається в просторі, має шість степенів вільності (рис. 12.2).

Рух такого тіла (ланка 1 див. рис. 12.1) може бути представлений можливими незалежними найпростішими рухами у вигляді обертання навколо і ковзання вздовж трьох довільно взаємно перпендикулярних осей.

Коли ланка 1 утворює кінематичну пару з іншою ланкою, яка жорстко з'єднана із системою координат  $x, y, z$ , то вона не може мати шість рухів відносно іншої ланки, бо при цьому матимемо два тіла, що не стикаються і переміщуються в просторі незалежно одне від одного. Відповідно до характеру з'єднання ланка може мати один, два, три, чотири або п'ять незалежних можливих рухів відносно іншої ланки, утворюючи з нею однорухому, дворухому, трирухому, чотирирухому, п'ятирухому кінематичні пари.

Отже, якщо одна ланка 1 кінематичної пари (рис. 12.3, а, б) має відносно ланки 2 один степінь вільності (одну рухомість), то така пара називається *кінематичною парою 1-го роду*.

На рис. 12.3, б зображено кінематичну пару, кожна ланка якої має лише один можливий відносний поступальний рух уздовж осі  $x$ . Вона дістала назву поступальної пари. На рис. 12.3, а зображено кінематичну пару, кожна з ланок якої має лише один можливий відносний обертальний рух навколо осі  $x$  (обертальна кінематична пара).

Кінематичну пару 2-го роду, дворухому, подано у варіанті циліндричної пари (рис. 12.3, в), що допускає незалежні обертальний і поступальний відносні рухи її ланок уздовж осі  $x$ .

На рис. 12.3, г зображено сферичну кінематичну пару (кульовий шарнір) 3-го роду, де рух однієї ланки відносно іншої зводиться до трьох незалежних рухів — обертання навколо осей —  $x, y, z$ . Аналогічно чотирирухома пара 4-го роду (рис. 12.3, д) «циліндр-площина» має чотири степені вільності: ланка 1 може мати обертальні рухи навколо осей  $x$  і  $z$ , а також поступальні вздовж осей  $x$  і  $y$ .

На рис. 12.3, е зображено кінематичну пару 5-го роду — кулю 1, що перекочується з ковзанням по площині 2. Рух кулі 1 відносно

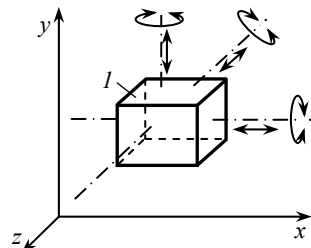


Рис. 12.2. Степені вільності твердого тіла, що вільно рухається в просторі

площини 2 або, навпаки, рух площини 2 відносно кулі 1 можна розкласти на три обертання навколо осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  і ковзання по площині 2, яке також можна розкласти на ковзання вздовж осей  $x$  і  $y$ .

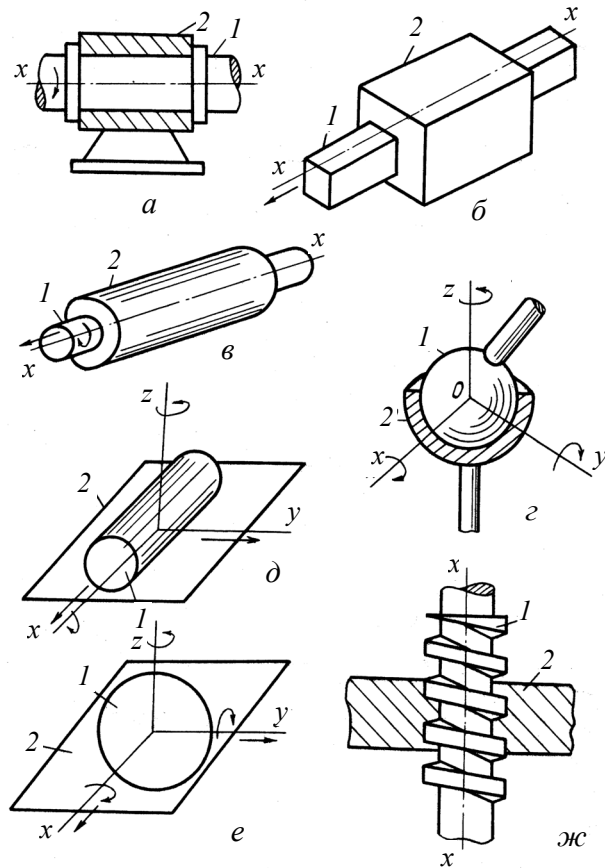


Рис. 12.3. Класифікація кінематичних пар

Переміщення кулі вздовж осі  $z$  неможливе без зруйнування кінематичної пари. Задані раніше кінематичні пари належали до пар, у яких тимчасові можливі рухи їх ланок не залежать одна від іншої. На рис. 12.3, *ж* зображено гвинтову пару, що допускає поворот гвинта (ланка 1) відносно гайки (ланка 2) на певний кут і викликає переміщення цієї самої ланки вздовж осі  $x$  на певну відстань, але це переміщення ланки є залежним від кута її повороту. А через те, що

ці рухи пов'язані між собою додатковими геометричними умовами, які встановлюють між ними функціональну залежність, гвинтову пару слід вважати однорухомою кінематичною парою 1-го роду.

За класифікацією І. І. Артоболовського, кінематичні пари ділять за числом обмежень, які накладено на рух однієї ланки пари відносно іншої. Ці обмеження називають *умовами зв'язку*. Умови зв'язку обмежують ті можливі відносні рухи, які мають ланки у вільному стані, і тому, що сума числа зв'язків і числа степенів вільності дорівнює числу степенів вільності твердого тіла, число  $S$  умов зв'язку, накладених на відносний рух кожної ланки кінематичної пари, може бути виражено залежністю

$$S = 6 - H, \quad (12.1)$$

де  $H$  — число рухомостей кінематичної пари.

З рівності (12.1) випливає, що число умов зв'язку змінюється в межах від 1 до 5.

Клас кінематичної пари характеризується кількістю обмежень (умов зв'язку), що накладені на відносний рух ланок, — відповідно до чого маємо кінематичні пари I, II, III, IV та V класів.

Із визначення роду та класу кінематичної пари випливає, що кінематична пара 1-го роду за В. В. Добровольським є парою V класу за І. І. Артоболовським; кінематична пара 2-го роду — кінематичною парою IV класу і т. д.

За класифікацією Ф. Рело, залежно від характеру стикання елементів ланок, кінематичні пари поділяються на нижчі та вищі. У нижчих кінематичних парах дві ланки торкаються між собою по верхніх. До нижчих пар належать: обертальна, поступальна, гвинтова, циліндрична, сферична, площинна. Кінематичні пари, у яких стикання їх елементів відтворюється по лінії або в точках, називають *вищими*. Вищі пари мають найрізноманітніші форми елементів: куля–площина, циліндр–площина.

У нижчих парах відбувається відносно ковзання елементів під час поступального, обертального та гвинтового рухів, а у вищих парах можливе ковзання та кочення елементів цих пар. Нижчі пари мають властивість обертальності, тобто відносні траєкторії збіжних точок ланок, з яких складається нижча пара, тотожні. Справді, в обертальній парі такими траєкторіями є кола однакових радіусів, у поступальній — збіжні відрізки прямих; у гвинтовій — збіжні гвин-

тові лінії. У вищих кінематичних парах, здебільшого, траєкторії збіжних точок у відносному русі різні. Тому вищі пари необертальні. Щоб елементи кінематичних пар перебували в постійному стиканні, вони мають бути замкнутими. За характером замикання кінематичні пари поділяють на пари з силовими і геометричними замиканнями. Силове замикання здійснюється за рахунок сили ваги, сили пружності пружин і т. п. Геометричне замикання здійснюється відповідними конструктивними формами елементів кінематичних пар.

Кінематичні пари, розглянуті раніше, можуть бути утворені ланками просторових механізмів, тобто таких механізмів, у яких точки ланок описують неплоскі траєкторії або траєкторії, розташовані в пересічних площинах. На практиці поширені механізми, у яких всі точки ланок описують траєкторії, що лежать у паралельних площинах. Такі механізми називаються плоскими. У плоских механізмів дві рухомо з'єднані ланки можуть утворювати кінематичні пари тільки 1-го та 2-го родів: пари 1-го роду завжди нижчі (обертальні, поступальні); пари 2-го роду — завжди вищі (обертальний та поступальний рух однієї ланки відносно іншої).

### **12.3. Умовне зображення кінематичних пар і ланок плоских механізмів**

За структурного, кінематичного та динамічного дослідження прийнято зображати механізми у вигляді схем.

*Структурною схемою механізму* називають його графічне зображення, виконане без масштабу за допомогою умовних позначень ланок та кінематичних пар. Структурна схема механізму дозволяє встановити кількість його ланок, кінематичних пар, їх вид і взаємне розміщення. Кінематична схема механізму відрізняється від структурної тим, що розміри ланок, необхідні для кінематичного дослідження механізмів, наведено в масштабі. На структурних і кінематичних схемах ланки, так само як і кінематичні пари, зображуються умовно, згідно з ГОСТ 2.7.70–68.

На рис. 12.4 подано умовні зображення кінематичних пар. За умовного зображення обертальних пар (рис. 12.4, *a*) їхні центри позначають великими літерами латинського алфавіту: *A*, *B*, *C* і т.д.; ланки — порядковими арабськими цифрами: *1*, *2*, *3* і т.д. Умовні зображення плоскої поступальної кінематичної пари показано на

рис. 12.4, б, в. Напряму поступальної пари позначають літерою  $H$  з подвійним індексом відповідно до номерів тих ланок, що утворюють цю поступальну пару.

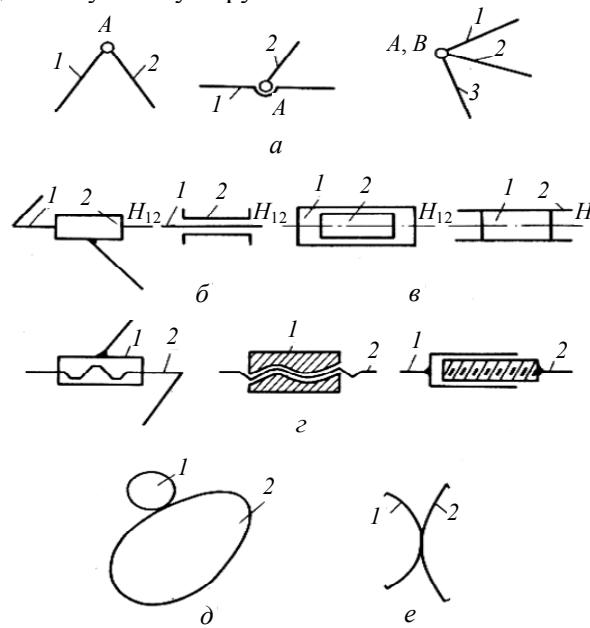


Рис. 12.4. Умовні зображення плоских кінематичних пар

На рис. 12.4, г наведено умовне зображення гвинтової пари.

Умовне зображення кінематичної пари 2-го роду показано на рис. 12.4, д, е. Рис. 12.4, д відповідає випадку, коли обидві ланки, що утворюють кінематичну пару при роботі механізму, послідовно стикаються одна з одною всіма своїми точками (наприклад, кулачок і ролик у кулачковому механізмі).

Позначення, показані на рис. 12.4, е, застосовують у тих випадках, коли стикання ланок відбувається лише на деякій ділянці (наприклад, зуби зубчастих коліс, що знаходяться в зачепленні).

Приклади умовного зображення ланок плоских механізмів наведено на рис. 12.5.

Ланка, що входить до складу двох обертальних кінематичних пар, зображається умовно у вигляді прямої лінії незалежно від її конструктивної форми (рис. 12.5, а).

Ланка, що входить до складу трьох і більше обертальних пар, зображається умовно у вигляді заштрихованого трикутника (рис. 12.5, б) або  $n$ -кутника (рис. 12.5, в).

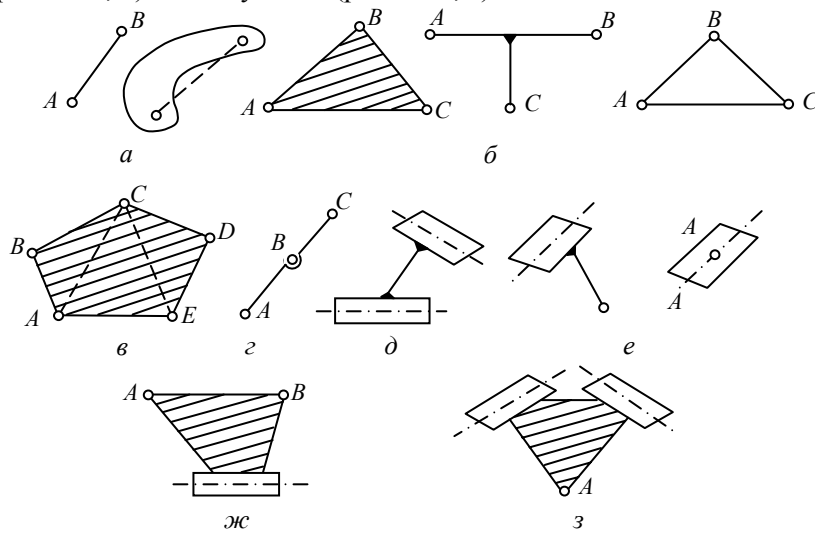


Рис. 12.5. Умовні зображення ланок плоских механізмів

Якщо центри обертальних кінематичних пар розташовані на одній прямій лінії, то ланка може умовно зображатися так, як це показано на рис. 12.5, г. На рис. 12.5, д, е, ж, з наведено умовне зображення ланки, що входить лише до складу поступальних пар або одночасно до складу обертальних та поступальних пар.

Нерухома ланка помічається підштриховкою в місцях утворення кінематичних пар з рухомими ланками (рис. 12.6).

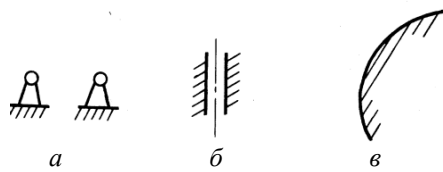


Рис. 12.6. Умовні зображення нерухомої ланки

Нерухома ланка, що входить до складу двох обертальних пар, зображена на рис. 12.6, а, однієї поступальної — на рис. 12.6, б, однієї пари 2-го роду — на рис. 12.6, в.



## 12.4. Кінематичні ланцюги

*Кінематичним ланцюгом* називають зв'язану систему ланок, які входять у кінематичні пари. Кінематичні ланцюги поділяють на прості та складні, замкнуті та незамкнуті.

*Простим* називають такий кінематичний ланцюг, у якого кожна ланка входить не більше як до двох кінематичних пар, складним — у якому є хоч одна ланка, що входить більше ніж до двох кінематичних пар.

Прості та складні кінематичні ланцюги поділяються на замкнуті та незамкнуті. У незамкнутому кінематичному ланцюгу є ланки, що входять тільки до однієї кінематичної пари, у замкнутому — кожна ланка входить не менше як у дві кінематичні пари. Кінематичні ланцюги поділяють на плоскі і просторові. Незамкнуті просторові кінематичні ланцюги використовуються при проектуванні механізмів маніпуляторів і роботів. У машинобудуванні використовують переважно замкнуті кінематичні ланцюги.

Кожний механізм являє собою деякий кінематичний ланцюг з однією рухомою ланкою. Тоді можна дати таке визначення механізму: *механізм — це кінематичний ланцюг, у якого задано рухи стількох ланок, скільки потрібно для того, щоб усі інші ланки мали цілком визначені рухи.*

## 12.5. Число степенів вільності механізму

Основними властивостями механізму є число степенів вільності  $W$  його рухомих ланок відносно стояка та визначеність (узгодженість) їхнього руху.

*Степенем вільності механізму*, або числом степенів вільності, називають число незалежних примусових рухів, які треба задати ланками механізму, щоб забезпечити цілком визначені рухи всіх інших ланок.

Щоб визначити число степенів вільності будь-якого механізму, треба визначити число степенів вільності всіх рухомих ланок, вважаючи їх вільними незв'язаними кінематичними парами, а потім від цього числа слід відняти число умов зв'язку, які накладаються на ланки кінематичними парами.

Виведемо формулу для визначення числа степенів вільності плоского механізму.

Нехай  $n$  — це число всіх ланок, з яких складається плоский механізм. Одна з цих ланок є нерухомою. Тоді кількість рухомих ланок становить  $(n - 1)$ . Кожна вільна ланка в площині має три вільні рухи, три степені вільності. Якщо б ланки механізму не були зв'язані між собою, то загальна кількість простих рухів усіх ланок механізму становила б  $3(n - 1)$ . Але ланки механізму зв'язані між собою кінематичними парами. При цьому кожна пара 1-го роду зменшує загальну кількість можливих рухів на два, тобто допускає один рух із трьох можливих. Кожна пара 2-го роду зменшує загальну кількість можливих рухів на один, тобто допускає два рухи із трьох можливих. Тоді:  $2p_1$  — число втрачених степенів вільності механізму при утворенні кінематичних пар 1-го роду;  $p_2$  — число втрачених степенів вільності механізму при утворенні кінематичних пар 2-го роду.

Якщо від загальної кількості можливих рухів механізму відняти втрачені ланками рухи при утворенні кінематичних пар, отримуємо число  $W$  степенів вільності механізму:

$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - p_2. \quad (12.2)$$

Отримана рівність називається *формулою П. Л. Чебишева*.

Формула для визначення числа степенів вільності просторового механізму має вигляд:

$$W = 6(n - 1) - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5, \quad (12.3)$$

де  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  — числа кінематичних пар 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го родів відповідно.

Ця рівність називається *формулою А. П. Малишева*.

На практиці степені вільності механізму визначають кількість його початкових ланок. Ланка, якій, досліджуючи механізм, задають закон руху, називається *початковою*. Цей термін пов'язаний з тим, що знаходження положень усіх ланок починають зі знаходження положень початкових ланок. Початкові ланки надалі будемо показувати коловими (або прямими) стрілками.

Розглянемо деякі приклади на визначення степенів вільності плоских механізмів.

**Приклад 12.1.** Визначимо степінь вільності механізму керування клапаном роздавального крана автопаливозаправника (рис. 12.7).

Цей механізм слугує для перетворення обертального руху рукоятки 1 у поступальний рух клапана 2 для відкриття зливної трубки крана при перекачуванні пального з цистерни автопаливозаправника в наливні баки літака. Механізм складається з трьох ланок: рукоятки (ланка 1), клапана зі штоком (ланка 2) і корпусу крана (ланка 3), який є нерухомою ланкою в цьому механізмі (стояком).

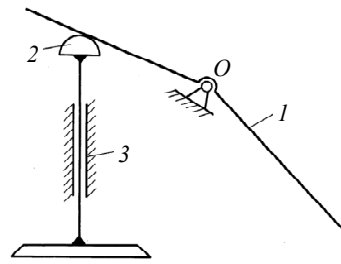


Рис. 12.7. Механізм керування клапаном роздаткового крана автопаливозаправника

Ланки, що входять до складу досліджуваного механізму, утворюють такі кінематичні пари: а) корпус крана (ланка 3) і рукоятка (ланка 1) утворюють кінематичну пару 1-го роду обертальну; б) рукоятка (ланка 1) і клапан зі штоком (ланка 2) утворюють пару 2-го роду; в) клапан із штоком (ланка 2) і корпус крана (ланка 3) утворюють кінематичну пару 1-го роду поступальну.

Отже, механізм керування клапаном роздавального крана автопаливозаправника за формулою П. Л. Чебишева має ( $n = 3$ ;  $p_1 = 2$ ;  $p_2 = 1$ ) ступінь вільності:

$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - 1p_2 = 3(3 - 1) - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Отже, механізм має одну початкову ланку, тобто досить задати рух одній ланці (рукоятці 1), щоб визначити рух усіх інших ланок (клапана 2).

**Приклад 12.2.** Визначимо ступінь вільності кулачкового механізму, який має поступальний рух (рис. 12.8).

Механізм складається з чотирьох ланок: кулачок 1, ролик 2, штовхач 3, стоек 4. Ланки 1 і 4, 2 і 3 утворюють обертальні кінематичні пари  $O$  і  $B$ ; ланки 3 і 4 — поступальну кінематичну пару, а ланки 1 і 2 — пару 2-го роду.

Число степенів вільності такого механізму дорівнює

$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - 1p_2 = 3(4 - 1) - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2.$$

Отже, всі ланки досліджуваного механізму матимуть цілком визначений рух, якщо двом ланкам задати незалежний примусовий рух.

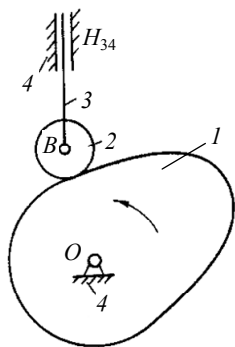


Рис. 12.8. Кулачковий механізм з роликом

Але якщо розглядати положення тільки ланки 3 (штовхача), то можна помітити, що воно цілком визначається положенням ланки 1 (кулачка) і будь-якому положенню ланки 1 відповідає цілком визначене положення ланки 3. Це пояснюється тим, що ролик 2 має круглу форму і центр обертальної пари  $B$  збігається з геометричним центром ролика. Тому ролик може вільно обертатися навколо своєї осі, не впливаючи на характер руху всього механізму. Однак положення самого ролика (його оберт) залишається невизначеним і його потрібно задати. Можливість обертання ролика є зайвим ступенем вільності, а ролик є пасивною ланкою. Він являє собою конструктивний елемент, який введено для зменшення опору сил тертя і зношування ланок. Ця особливість механізму зникає, якщо ролик має некруглу форму, або якщо центр обертальної пари  $B$  не збігається з геометричним центром ролика.

**Приклад 12.3.** Визначимо ступінь вільності механізму показчика вертикальної швидкості літака (варіометра) (рис. 12.9).

Механізм складається з шести ланок ( $n = 6$ ).

Позначимо центри обертальних пар.

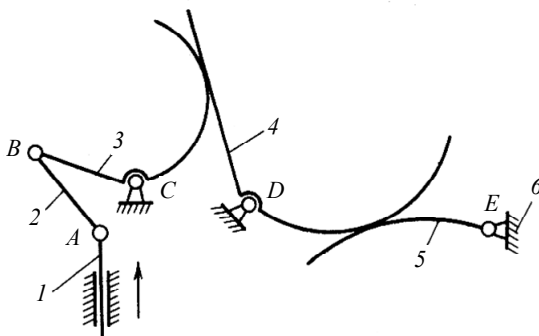


Рис. 12.9. Механізм показчика вертикальної швидкості літака (варіометра)

Ланки 1 і 2, 2 і 3, 3 і 6, 4 і 6, 5 і 6 утворюють обертальні кінематичні пари 1-го роду, 1 і 6 — поступальну кінематичну пару 1-го роду; 3 і 4, 4 і 5 — кінематичні пари 2-го роду.

Отже,  $p_1 = 6$ ,  $p_2 = 2$ .

Число степенів вільності такого механізму дорівнює

$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - 1p_2 = 3(6 - 1) - 2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 1.$$

Отже, механізм має один степінь вільності, або одну початкову ланку.

### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називається ланкою, деталлю?
2. Що називається кінематичною парою?
3. Що називається механізмом?
4. Які бувають кінематичні пари?
5. Скажіть, за якими ознаками класифікують кінематичні пари.
6. Що називається кінематичним ланцюгом? Назвіть види кінематичних ланцюгів.
7. Що називається степенем вільності механізму?

## 13. СТРУКТУРА ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

### 13.1. Поняття про структуру плоских важільних механізмів

*Плоскими важільними* називають механізми з кінематичними парами 1-го роду. В основу структурної класифікації таких механізмів покладено основний принцип аналізу та синтезу механізмів, сформульований російським ученим Л. В. Ассуром (1878–1920). Згідно з цим принципом будь-який плоский важільний механізм можна розділити на окремі частини — прості кінематичні ланцюги. Один з таких простих кінематичних ланцюгів, число степенів вільності якого дорівнює числу степенів вільності всього механізму, називається *групою початкових ланок*. Інші прості кінематичні ланцюги, число степенів вільності яких дорівнює нулю, називають

групами з нульовим ступенем вільності, структурними групами або групами Ассура. Отже, будь-який механізм можна вважати складеним з однієї групи початкових ланок і однієї чи кількох груп Ассура.

До складу груп початкових ланок обов'язково входить нерухома ланка (стояк) і одна чи кілька рухомих початкових ланок. Число початкових ланок дорівнює числу ступенів вільності механізму.



Рис. 13.1. Початкова ланка при  $W = 1$

Якщо степінь вільності механізму  $W = 1$ , то група початкових ланок цього механізму складається з нерухомої ланки (стояка) і однієї початкової ланки, яка утворює з нерухомою кінематичну пару 1-го роду. На рис. 13.1 зображено групу початкових ланок при  $W = 1$ . Початкова ланка 1 утворює зі стояком обертальну кінематичну пару. Якщо число ступенів вільності механізму  $W = 2$ , то група початкових ланок складається з нерухомої ланки (стояка) і двох початкових ланок, які утворюють зі стояком (рис. 13.2, а), а іноді одна з другою (рис. 13.2, б) кінематичні пари 1-го роду. Аналогічно можна скласти варіанти групи початкових ланок для будь-якого  $W$ .

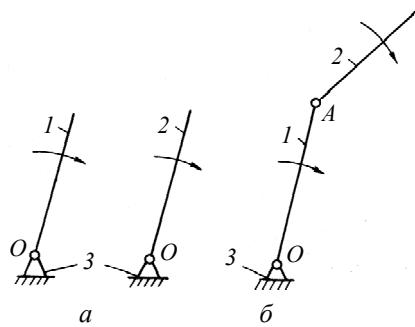


Рис. 13.2. Два варіанти групи початкових ланок при  $W = 2$

До складу групи Ассура входять тільки рухомі ланки, оскільки нерухома ланка вийшла до складу групи початкових ланок. Кінематичні пари 2-го роду в групі Ассура відсутні.

Нехай  $n'$  — число ланок у групі Ассура. Тоді степінь вільності групи Ассура  $W'$  за умови існування групи Ассура на підставі формули П. Л. Чебишева дорівнює

$$W' = 3n' - 2p_1 = 0. \quad (13.1)$$

Рівність виконується за умови, якщо

$$n' = 2k \quad \text{і} \quad p'_1 = 3k,$$

де  $k$  — будь-яке ціле число ( $k = 1, 2, 3$  і т. д.).

Отже, надаючи різні значення числу  $k$ , можна визначити число ланок і кількість кінематичних пар 1-го роду в різних групах Ассура.

При  $k = 1$  маємо найпростішу групу Ассура, яка складається з двох ланок і трьох кінематичних пар. Одна кінематична пара, яка утворюється ланками самої групи, називається *внутрішньою*. Дві інші кінематичні пари, якими група приєднується до ланок сусідніх груп Ассура, або групи початкових ланок, називаються *зовнішніми*. Ланка, яка входить до складу внутрішньої та зовнішньої кінематичних пар, називається *повідком*. Група Ассура при  $k = 1$  має два повідки і називається *двоповідковою групою*, або *діадою*. Вона має п'ять видів залежно від кількості обертальних і поступальних пар та їхнього взаємного розташування (рис. 13.3). Кожний вид діади домовились позначати відповідним номером і називати: діада № 1, діада № 2 і т. д.

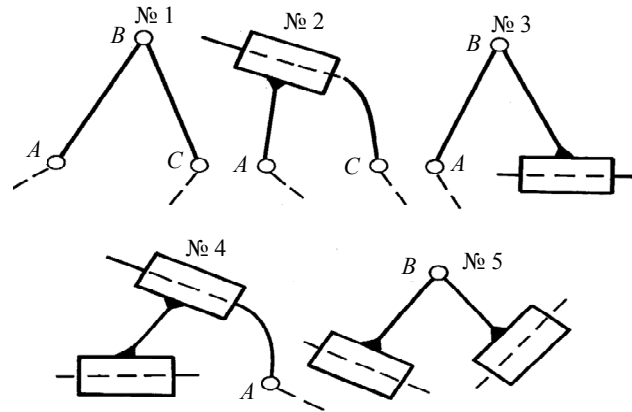


Рис. 13.3. Види двоповідкової групи — діади (групи Ассура I класу)

При  $k = 2$  отримуємо групу Ассура, яка складається із чотирьох ланок і шести кінематичних пар. На рис. 13.4 наведено два варіанти такої групи Ассура. Один з них (рис.13.4, *a*) називають *триповідковою групою*.

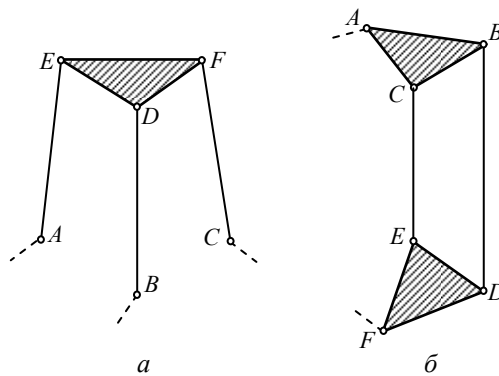


Рис. 13.4. Два варіанти групи Ассура II класу:  
*a* — триповідкова група; *б* — група із замкнутим контуром

Характерною особливістю другого варіанта групи (рис. 13.4, *б*) є наявність замкнутого контуру. Якщо одну або кілька обертальних пар замінити поступальними, то можна одержати значну кількість різних видів Ассура при  $k = 2$ . Так, тільки триповідкова група Ассура буде мати 20 видів.

При  $k = 3$  група Ассура має шість ланок і дев'ять кінематичних пар існує в десяти різних варіантах за наявності тільки обертальних кінематичних пар.

У більшості сучасних механізмів найчастіше є двовідкові групи (діади).

Г. Г. Баранов запропонував поділяти групи Ассура на класи залежно від числа  $k$ . Якщо  $k = 1$ , то така група ланок називається групою Ассура I класу; при  $k = 2$  — групою Ассура II класу і т.д.

І. І. Артоблевський запропонував за кількістю зовнішніх кінематичних пар визначити порядок групи Ассура. Тоді всі діади (див. рис. 13.3) (при  $k = 1$ ) являють групи Ассура I класу 2-го порядку. А зображені на рис. 13.4 групи ланок при  $k = 2$  будуть групами Ассура II класу 3-го порядку (рис.13.4, *a*) і II класу 2-го порядку (рис. 13.4, *б*).

Групи Ассура являють собою кінематичні ланцюги, які мають нульовий степінь вільності. Такі ланцюги називають *статично визначеними*. Тому ділення механізму на групи Ассура дозволяє звести його кінематичне і силове дослідження до дослідження окремих груп ланок.



Визначити структуру механізму означає встановити, з яких груп ланок складається цей механізм та в якому порядку ці групи ланок приєднуються одна до другої. Поділ механізму на структурні групи треба починати з групи Ассура, найвіддаленішої від початкової ланки. При цьому треба мати на увазі, що будь-яка складна група Ассура не ділиться на більш прості групи.

Розглянемо приклад структурного аналізу механізму керування клапаном насосного агрегату обприскувача АОД-СЗ (рис. 13.5). У цьому механізмі  $n = 6$ ;  $p_1 = 7$ ;  $p_2 = 0$ ; тоді число степенів вільності дорівнює

$$W = 3(n-1) - 2p_1 - p_2 = 3(6-1) - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Отже, досліджуваний механізм має степінь вільності  $W = 1$ , а група початкових ланок буде складатися з нерухомої ланки і однієї початкової ланки. Для визначення початкової ланки механізму треба в кожному конкретному випадку дослідити роботу механізму. При цьому слід пам'ятати, що структура механізму залежить від того, яка ланка в ньому буде визнана початковою. На схемі механізму початкову ланку  $1$  позначено стрілкою. Група початкових ланок складається з ланок  $1$  і  $6$ .

Найвіддаленішою від початкової ланки є група Ассура, яка складається з двох ланок  $4$  і  $5$  та трьох кінематичних пар (поступальної і двох обертальних  $E$  і  $C$ ). Ця група ланок являє собою діаду № 3 (група Ассура 1 класу 2-го порядку).

Далі відділяємо наступну групу Ассура, що складається з трьох ланок  $2$  і  $3$  та обертальних кінематичних пар  $D$ ,  $C$ ,  $B$ . Це буде діада № 1. Ланка  $1$  і ланка  $6$ , які утворюють обертальну кінематичну пару  $O$ , складають групу початкових ланок.

Запис структури механізму робимо в тій послідовності, у якій відділяємо від механізму групи Ассура. Для цього механізму запис його структури матиме такий вигляд:

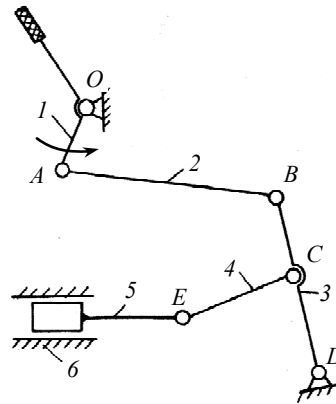


Рис. 13.5. Механізм керування клапаном насосного агрегату обприскувача АОД-СЗ

ланки 4 і 5 — діада № 3;  
ланки 2, 3 — діада № 1;  
ланки 1, 6 — група початкових ланок.

### 13.2. Синтез чотириланкових важільних механізмів

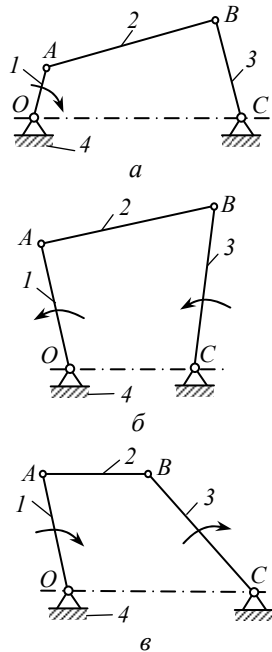


Рис. 13.6. Модифікації шарнірного чотириланкового механізму

Будь-який важільний механізм можна утворити шляхом послідовного приєднання груп Ассура 1 класу до групи початкових ланок.

Так, шарнірний чотириланковий механізм (рис. 13.6) утворюється приєднанням діади № 1 до групи початкових ланок. Цей механізм може бути кривошипнокоромисловим (рис. 13.6, а), двокривошипним (рис. 13.6, б), двокоромисловим (рис. 13.6, в).

Кривошипнокоромисловий механізм (рис. 13.6, а) є однокривошипним, у якому кривошипом може бути найменша ланка механізму за умови, що сума довжин найменшої та найбільшої ланок менша від суми довжин двох інших ланок. При цьому байдуже, де розміщена найбільша ланка, вона може бути стояком  $OC$ , шатуном  $AB$  або коромислом  $BC$ .

Під час обертання кривошипа 1 коромисло 3 здійснює коливальний рух на кут  $\beta_{\max}$  (кут розмаху). У крайніх положеннях коромисла  $BC$  кривошип 1 і шатун 2 витягуються в одну пряму лінію  $OA_1B_1$  або накладаються —  $OA_2B_2$ .

Якщо стояком шарнірного чотириланкового механізму зробити найкоротшу ланку або якщо ланки 1 і 3 однакової довжини, то механізм буде двокривошипним, оскільки ланка 3 так само, як і кривошип 1, має можливість обертатися на повний кут, а шатун 2 рухається поступально.

Якщо найкоротшою ланкою шарнірного чотириланкового механізму є шатун  $AB$ , то механізм буде двокоромисловим.

Приєднуючи до групи початкових ланок діаду № 2, отримаємо кулісний механізм (рис. 13.7), у якого ланка 3 є кулісною. Залежно від довжини кривошипа та відстані  $OC$  куліса може здійснювати зворотно-коливальний рух ( $OA > OC$ ) або обертальний ( $OA < OC$ ).

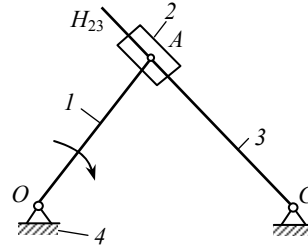


Рис. 13.7. Кулісний механізм

У разі приєднання до групи початкових ланок діаду № 3 отримаємо кривошипно-повзунковий механізм (рис. 13.8), у якому під час обертання кривошипа 1 повзун 3 здійснює зворотно-поступальний рух.

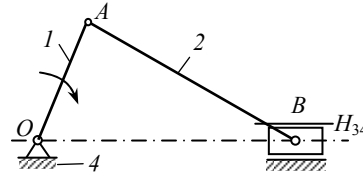
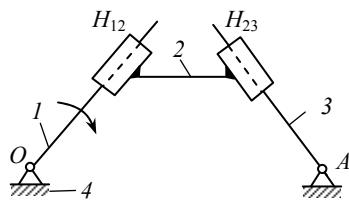


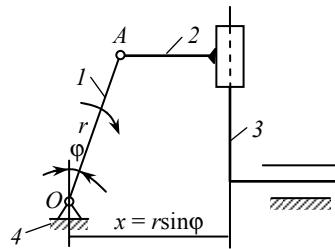
Рис. 13.8. Кривошипно-повзунковий механізм

Якщо приєднати до групи початкових ланок діаду № 4, то одержимо двокулісний механізм (рис. 13.9, а).

У двокулісному механізмі кутові швидкості ланок 1 і 3 однакові, а тому цей механізм може передавати рух між двома ексцентрично розташованими валами. У механізмі подвійного повзуна (рис. 13.9, б) обертальний рух кривошипа 1 перетворюється у зворотно-поступальний рух повзуна 3. При цьому переміщення повзуна пропорційне синусу кута повороту кривошипа ( $x = r \sin \varphi$ ).



а



б

Рис. 13.9. Двокулісний механізм (а) та механізм подвійного повзуна (б)

Приєднуючи до групи початкових ланок діаду № 5, одержимо кулісно-повзунковий механізм (рис. 13.10), у якому ланка 1 може повернутися тільки на кут, не більший ніж  $180^\circ$ .

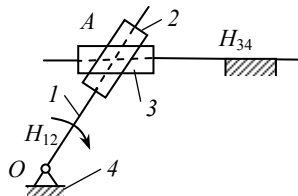


Рис. 13.10. Кулісно-повзунковий механізм

### 13.3. Заміна в плоских механізмах вищих пар нижчими

Поділити на структурні групи можна тільки механізми, до складу яких входять ланки, що утворюють кінематичні пари 1-го роду. Щоб визначити структуру механізму з парами 2-го роду, потрібно замінити його еквівалентним механізмом з кінематичними парами 1-го роду.

Якщо дві ланки, які утворюють кінематичну пару 2-го роду, дотикаються одна до одної в точці  $K$  криволінійними профілями (рис. 13.11, *а*) з центрами кривизни в точках  $M_1$  і  $M_2$ , то таку кінематичну пару 2-го роду можна замінити групою ланок з додатковою ланкою 3, до складу якої входять дві обертальні пари 1-го роду, розташовані в центрах кривизни криволінійних профілів (рис. 13.11, *б*).

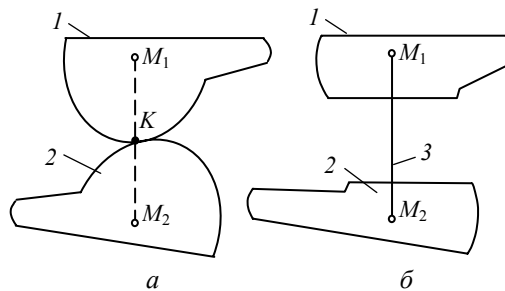


Рис. 13.11. Кінематична пара 2-го роду, яка утворена ланками з криволінійними профілями

За сталої кривизни профілів ланка 3 не вносить додаткових обмежень у відносний рух ланок 1 і 2. За змінної кривизни профілів така зміна справедлива в межах малого кута повороту.

Якщо дві ланки, які утворюють кінематичну пару 2-го роду, дотикаються одна до одної в точці  $K$  криволінійною і прямолінійною ділянками профілів (рис. 13.12), то в еквівалентному механізмі з'являється додаткова ланка 3, яка утворює з ланкою 1 обертальну пару, центр якої збігається з центром кривизни криволінійного профілю (точка  $M_1$ ), а з ланкою 2 (ланка з прямолінійним профілем) — поступальну пару.

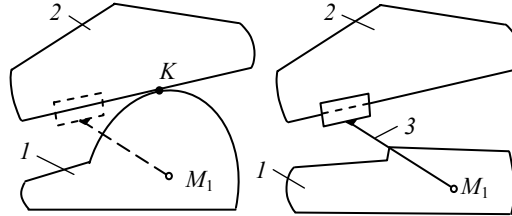


Рис. 13.12. Кінематична пара 2-го роду, утворена ланками з криволінійними та прямолінійними профілями

*Зображення механізму без масштабу за допомогою умовного позначення кінематичних пар і ланок із заміною кінематичних пар 2-го роду кінематичними парами 1-го роду називається структурною схемою механізму.*

Розглянемо приклад структурного аналізу кулачкового механізму діафрагмового паливного насоса (рис. 13.13), який має дві кінематичні пари 2-го роду, утворені ланками 1 і 2, 2 і 3.

**Приклад 13.1** розв'язуємо в такій послідовності:

- 1) намалюємо схему досліджуваного механізму (рис. 13.13);
- 2) намалюємо структурну схему механізму (рис. 13.14);
- 3) визначимо число степенів вільності механізму:

$$W = 3(n-1) - 2p_1 - 1p_2 = 3(6-1) - 2 \cdot 7 - 1 \cdot 0 = 1;$$

- 4) визначимо структуру механізму;
- 5) складемо запис структури механізму:
  - ланки 3 і 6 — діада № 4;
  - ланки 2 і 5 — діада № 1;
  - ланки 1 і 4 — група початкових ланок.

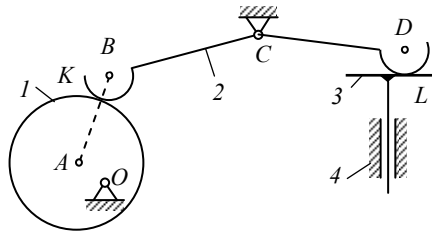


Рис. 13.13. Схема кулачкового механізму діафрагмового паливного насоса

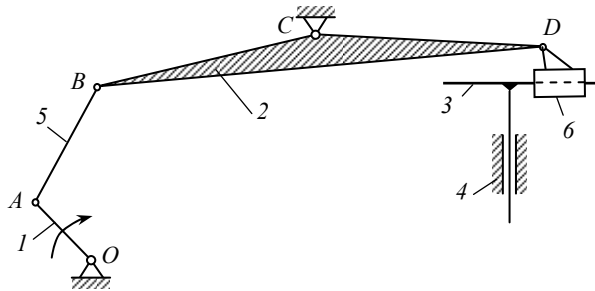


Рис. 13.14. Структурна схема кулачкового механізму діафрагмового паливного насоса

**Приклад 13.2.** Виконати дослідження структури механізму (рис. 13.15).

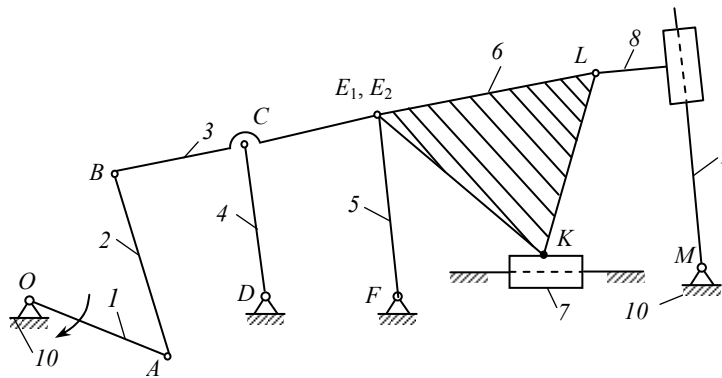


Рис. 13.15. Структура механізму

*Порядок дослідження:*

1. Пронумеруємо ланки механізму, починаючи з початкової ланки, яка позначена стрілкою ( $n = 10$ ).

2. Позначимо латинськими буквами центри обертальних пар. Ланки 3, 5 та 6 приєднуються до одної кінематичної пари.

У цьому випадку буде дві кінематичні пари  $E_1$  і  $E_2$ , отже, механізм має одинадцять обертальних кінематичних пар і дві поступальні. Взагалі число кінематичних пар першого роду буде  $p_1 = 13$ .

3. Визначимо степінь вільності механізму

$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - 1p_2 = 3(10 - 1) - 2 \cdot 13 = 1.$$

Це означає, що в групі початкових ланок, окрім нерухомої ланки, буде тільки одна рухома.

4. Дослідження починаємо з останньої рухомої ланки (ланка 9). Найпростіша група Ассура — це діада, що має дві ланки і три кінематичні пари. Тому для складання діади потрібна обертальна кінематична пара  $K$ .

*У складній ланки, яка має три і більше кінематичних пар, можна відокремити одну з кінематичних пар.*

Тоді одержимо діаду № 2 (рис. 13.16, а), а ланка 6 перетворюється в прямий відрізок. Механізм, який залишився після відокремлення діади (і в подальшому від інших груп Ассура) матиме степінь вільності, що дорівнює одиниці. Останньою рухомою ланкою залишилась ланка 6. Ланки 6 і 7 утворюють діаду № 3 (рис. 13.16, б), яка має дві обертальні кінематичні пари ( $E_1, L$ ) і поступальну.

Останньою рухомою ланкою стала ланка 5, яка зв'язана з ланками 3 і 4.

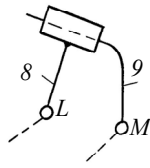
Якщо не можна відокремити діаду (дві ланки і три кінематичні пари), то відокремлюємо чотири ланки і шість кінематичних пар.

У нашому випадку — ланки 2, 3, 4 і 5 з обертальними кінематичними парами  $F, E_1, C, D, B, A$  утворюють групу Ассура II класу 3-го порядку (рис. 13.17, в).

Ланки 1 і 10, що залишились, утворюють групу початкових ланок (рис. 13.17, г).

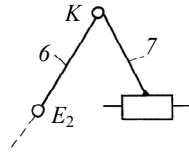
Запис груп Ассура за структурного дослідження має бути таким:

Ланки 8, 9  
діада № 2



a

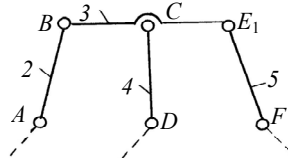
Ланки 6, 7  
діада № 3



б

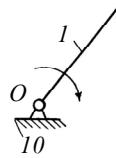
Рис. 13.16. Дослідження структури механізму

Ланки 2, 3, 4, 5  
група Ассура II кл. 3-го пор.



в

Ланки 1, 10  
група початкових ланок



г

Рис. 13.17. Порядок запису структурного дослідження механізму

**Приклад 13.3.** Провести структурне дослідження механізмів (рис. 13.18–13.21).

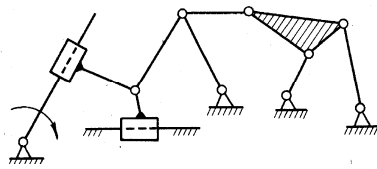


Рис. 13.18. Схема кулісно-повзунного механізму

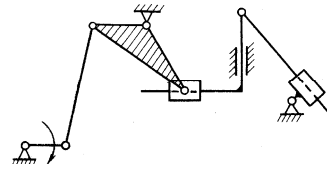


Рис. 13.19. Схема повзунно-кулісного механізму стругального верстата

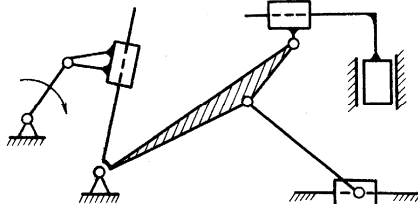


Рис. 13.20. Схема механізму авіаційного паливного насоса

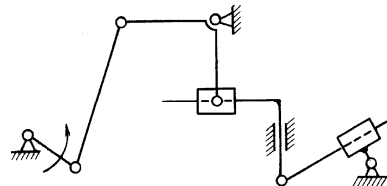


Рис. 13.21. Схема механізму подвійного повзуна



## Запитання і завдання для самоконтролю

1. Який механізм називають плоским?
2. Яку схему механізму називають структурною?
3. Які бувають групи Ассура? Наведіть класифікацію груп Ассура.
4. Як визначається група початкових ланок?
5. Як визначається порядок груп Ассура?
6. Як утворюються чотириланкові механізми?
7. Як відбувається заміна вищих кінематичних пар нижчими?

### **14. КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ**

#### **14.1. Основні задачі та методи кінематичного дослідження механізмів**

За кінематичного дослідження механізмів розглядається рух ланок незалежно від сил, які діють на них. При русі ланок механізму змінюється їх взаємне розташування, лінійні швидкості та прискорення точок механізму, а також кутові швидкості та прискорення ланок. Тому основними задачами кінематичного дослідження механізмів є:

- 1) побудова планів механізму і траєкторій окремих точок;
- 2) визначення крайніх положень механізму;
- 3) визначення лінійних швидкостей та прискорень будь-якої точки;
- 4) визначення кутових швидкостей та прискорень ланок;
- 5) знаходження радіуса кривизни в будь-якій точці траєкторії.

Унаслідок такого дослідження встановлюють відповідність кінематичних параметрів (переміщень, швидкостей і прискорень) заданим умовам роботи механізму, а також отримують вихідні дані для виконання подальших розрахунків. Знання кінематичних параметрів потрібне для визначення динамічних сил (сил інерції, моментів сил інерції), кінетичної енергії та потужності механізму. Траєкторії окремих точок допомагають встановити картину взаємного положення ланок під час руху, усунути можливість їх

співударів. Крім того, дані кінематичного дослідження часто використовуються для розв'язання оберненої задачі — синтезу механізмів.

Існують чотири методи кінематичного дослідження механізмів: графічний, графоаналітичний, аналітичний та експериментальний. Основними методами кінематичного дослідження є графічні і графоаналітичні. Вони дають достатню для інженерних розрахунків точність, прості у виконанні, наочні і дозволяють провести кінематичне дослідження будь-яких складних механізмів.

У разі використання графічного методу дослідження будують діаграми переміщень точок чи ланок механізму і методом графічного диференціювання будують діаграми швидкостей та прискорень окремих точок чи ланок у будь-якому положенні механізму.

Графоаналітичний метод ґрунтується на побудові планів швидкостей та прискорень будь-яких точок ланок механізму.

Аналітичні методи особливо поширилися останнім часом у зв'язку із застосуванням в інженерній практиці обчислювальної техніки. Вони дозволяють здійснювати багатоваріантні дослідження механізмів і тим самим обирають такі схеми механізмів і розміри їхніх ланок, що забезпечують найкращі умови роботи.

Експериментальні методи дослідження дозволяють провести перевірку теоретичних розрахунків, визначити уточнені значення параметрів, які необхідні для подальших розрахунків, а в деяких випадках вони дають єдину змогу отримати повноцінний розв'язок задачі.

#### 14.2. Поняття про масштабний коефіцієнт

При графічних побудовах на кресленнях довжину ланок, швидкості та прискорення окремих точок зазвичай зображають відрізками певної довжини. Для цього використовують масштабний коефіцієнт. Масштабним коефіцієнтом  $k$  називають відношення будь-якої дійсної величини  $D$  (довжини  $l$ , швидкості  $v$ , прискорення  $a$ ) до довжини відрізка  $B$ , який зображує цю величину на рисунку:  $k = \frac{D}{B}$ .

Масштабний коефіцієнт має індекс зображеної величини. Так, масштабний коефіцієнт довжини позначається  $k_l$ , масштабний коефіцієнт швидкостей —  $k_v$ , масштабний коефіцієнт прискорення —  $k_a$ .

рень —  $k_a$ . Масштабний коефіцієнт в одиницях Сі має позначення:  $k_l$  (м/мм);  $k_v$  (м·с<sup>-1</sup>/мм);  $k_a$  (м·с<sup>-2</sup>/мм). Якщо, наприклад,  $v = 10$  м/с зображена на рисунку відрізком довжиною 50 мм, то масштабний коефіцієнт швидкостей  $k_v = \frac{10}{50} = 0,2$  м·с<sup>-1</sup>/мм. На рисунку, де зображена ця швидкість, робиться напис:

1 мм = 0,2 м/с, що означає: 1 мм на рисунку відповідає 0,2 м/с.

### 14.3. Побудова планів механізму і траєкторій окремих точок

Під час руху механізму взаємне розташування його ланок постійно змінюється, але для кожного моменту часу залишається цілком визначеним. Графічне зображення, виконане в масштабі, взаємного розташування ланок, яке відповідає обраному часу, називають *планом механізму*.

Побудова планів механізму дозволяє прослідкувати за рухом як усього механізму, так і будь-якої його ланки, побудувати траєкторії точок ланок досліджуваного механізму, знайти крайні положення механізму, а також перевірити правильність вибору розмірів різних ланок. Побудову планів механізму починають, здебільшого, із зображення ланки, положення якої задано для обраного моменту часу.

Розглянемо побудову планів на прикладі кривошипно-повзункового механізму (рис. 14.1).

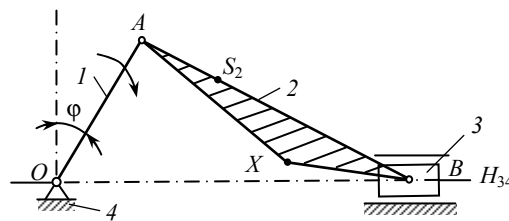


Рис. 14.1. Схема кривошипно-повзункового механізму

Заданими є величини:  $l_{OA}$  — довжина кривошипа  $OA$  (ланки 1);  $l_{AB}$  — довжина шатуна  $AB$  (ланки 2);  $l_{AS_2}$  — відстань між точками  $A$  і  $S_2$  на шатуні;  $l_{AX}$  і  $l_{BX}$  — положення точки  $X$  на шатуні.

Заданим є також рух початкової ланки  $I$  (кривошипа);  $L\varphi$ ;  $\omega_1 = \text{const}$  (нехай кривошип здійснює рівномірний обертальний рух навколо центра  $O$ ). Повзун  $3$  рухається вздовж напрямної  $H_{34}$ .

Задаємо довжину відрізка  $\overline{OA}$  в міліметрах, яким умовно на плані механізму буде зображуватись довжина кривошипа  $I$  ( $l_{OA}$ ).

Знаходимо масштабний коефіцієнт:  $k_l = \frac{l_{OA}}{OA}$  [м/мм]. Визначаємо довжини відрізків, якими зображуються інші ланки і точки ланок на плані механізму:  $\overline{AB} = \frac{l_{AB}}{k_l}$ ;  $\overline{AS_2} = \frac{l_{AS_2}}{k_l}$ ;  $\overline{AX} = \frac{l_{AX}}{k_l}$ ;  $\overline{BX} = \frac{l_{BX}}{k_l}$  [мм].

Вибираємо на рисунку положення центра обертальної кінематичної пари  $O$  і відкладаємо від неї під заданим кутом  $\varphi$  відрізок  $\overline{OA}$ . Через точку  $O$  проводимо напрямну  $H_{34}$ . Положення точки  $B$  знаходимо методом дугових засічок. Для цього радіусом  $\overline{AB}$  робимо дугову засічку на траєкторії точки  $B$  — напрямній  $H_{34}$ . Відкладаємо від точки  $A$  відрізок  $\overline{AS_2}$  і одержимо положення точки  $S_2$  на шатуні  $AB$ . Положення точки  $X$  також визначаємо методом дугових засічок. Для цього радіусами  $\overline{AX}$  і  $\overline{BX}$  робимо дугові засічки і в перетині отримуємо точку  $X$ .

Щоб визначити траєкторію точки  $S_2$ , будуємо план механізму для 12 положень (рис. 14.2). Для цього коло, яке описує точка  $A$ , поділимо на 12 частин і для кожного положення точки  $A$  побудуємо план механізму. Послідовно з'єднавши точки  $S_2$  плавною кривою, отримаємо траєкторію цієї точки.

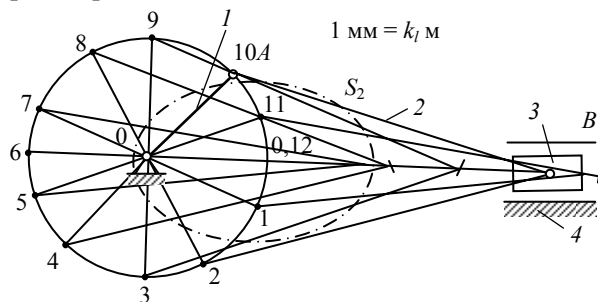


Рис. 14.2. План кривошипно-повзункового механізму (побудова траєкторії точки)

Щоб визначити крайні положення ланки 3 (точки  $B$ ), на напрямній  $H_{34}$  робимо засічки радіусами  $(l_{AB} + l_{OA})$  і  $(l_{AB} - l_{OA})$ .

#### 14.4. Основні рівняння для швидкостей і прискорень

За графоаналітичного методу кінематичного дослідження потрібно навчитися складати векторні рівняння швидкостей та прискорень для випадків, коли дві точки належать одній ланці і коли дві точки належать різним ланкам. Розглянемо кожний із цих випадків окремо.

1. Дві точки належать одній ланці і віддалені одна від одної на відстані  $l$ .

Нехай на деякій ланці (рис. 14.3) точки  $A$  і  $B$  віддалені на відстані  $l$ . Із теоретичної механіки відомо, що швидкість будь-якої точки абсолютно будь-якого тіла можна зобразити як геометричну суму швидкостей переносного і відносного рухів. Переносним рухом для цієї ланки будемо вважати поступальний рух зі швидкістю точки  $A$ , а відносним — обертальний рух ланки відносно точки  $A$ . Отже, для знаходження швидкості точки  $B$  можна записати таке векторне рівняння:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

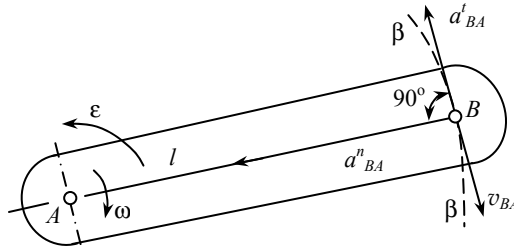


Рис. 14.3. Відносний рух двох точок ланки

Під час обертання ланки навколо точки  $A$  точка  $B$  рухається по дузі кола  $\beta$ — $\beta$ , яка описана з точки  $A$ . Тому швидкість  $\bar{v}_{AB}$  буде напрямлена перпендикулярно до лінії  $AB$ . Значення швидкості  $v_{AB}$  та кутові швидкості ланки  $\omega$  пов'язані між собою:

$$v_{BA} = \omega l,$$

де  $l$  — дійсна відстань між точками ланки  $A$  і  $B$ .

Напрямок швидкості —  $BA$  визначається залежно від напрямку кутової швидкості  $\omega$ .

Аналогічно можна записати векторне рівняння для визначення прискорення точки  $B$ :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$$

У разі руху точки  $B$  по колу  $\beta$ — $\beta$  прискорення  $a_{BA}$  складається з двох прискорень: нормального  $a_{BA}^n$ , яке напрямлене до центра обертання, тобто від точки  $B$  до точки  $A$ , і тангенціального  $a_{BA}^\tau$ , яке напрямлене перпендикулярно до лінії  $AB$ . Тоді для визначення прискорення точки  $B$  отримаємо таке рівняння:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

де  $a_{BA}^n = l\omega^2 = v_{BA}^2/l$ ,  $a_{BA}^\tau = l\varepsilon$  ( $\varepsilon$  — кутове прискорення ланки).

Напрямок  $\varepsilon$  визначається залежно від напрямку  $a_{BA}^\tau$ .

2. Дві точки належать двом ланкам, які утворюють поступальну пару і в цей момент часу збігаються.

Нехай точка  $A$  (рис. 14.4) належить ланці 1, а точка  $B$  — ланці 2. У певний момент часу точки  $A$  і  $B$  збігаються (наприклад, точка  $B$  лежить над точкою  $A$ ). Ланки 1 і 2 утворюють поступальну пару з напрямною  $H_{12}$ . Швидкість точки  $B$  складається з переносної і відносної.

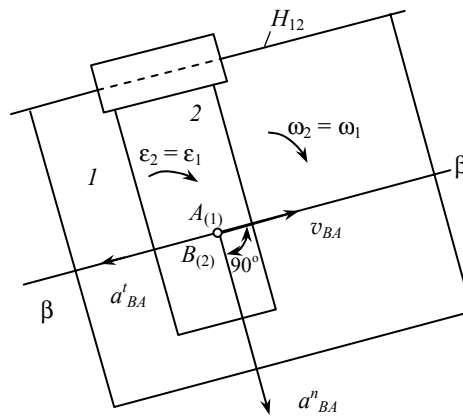


Рис. 14.4. Відносний рух точок, які належать двом ланкам і одночасно збігаються, утворюючи поступальну пару

Переносним рухом тут є рух ланки  $l$  і переносною швидкістю буде швидкість тієї точки ланки  $l$ , з якою в даний момент часу збігається точка  $B$  (тобто швидкість точки). Відносна швидкість точки  $B$  дорівнює швидкості руху ланки  $2$  відносно ланки  $1$ . Відносна швидкість  $v_{BA}$  напрямлена по лінії  $\beta\text{--}\beta$ , тобто паралельно  $H_{12}$ , тому що при русі ланки  $2$  відносно ланки  $1$  точка  $B$  рухається по прямій  $\beta\text{--}\beta$  паралельно  $H_{12}$ . Отже, для визначення швидкості точки  $B$  можна записати векторне рівняння:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Прискорення точки  $B$ , коли переносний рух не є поступальним, складається з трьох прискорень: переносного (прискорення точки  $A$ ), відносного і поворотного. Точка  $B$  у відносному русі рухається по прямій лінії  $\beta\text{--}\beta$  і має тільки тангенціальне прискорення  $a_{BA}^\tau$ , яке напрямлене паралельно  $H_{12}$ . Позначимо поворотне прискорення (прискорення Коріоліса) через  $a_{BA}^C$ . Тоді векторне рівняння для прискорення точки  $B$  матиме вигляд:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^C + \bar{a}_{BA}^\tau.$$

Ланки  $1$  і  $2$ , які утворюють поступальну пару, не мають відносного руху. Тому ці ланки мають однакові кутові швидкості і кутові прискорення, тобто:  $\omega_2 = \omega_1$ ;  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ . Поворотне прискорення  $a_{BA}^C$ , яке з'являється внаслідок взаємодії переносного і відносного рухів, визначається за формулою

$$a_{BA}^C = 2v_{BA}\omega_1.$$

Напрямок прискорення  $a_{BA}^C$  можна визначити за правилом векторного добутку: вектор прискорення  $\bar{a}_{BA}^C$  напрямлений у той бік, у який буде напрямлений вектор  $\bar{v}_{BA}$ , якщо його повернути на  $90^\circ$  у напрямку кутової швидкості  $\omega_1$ .

#### 14.5. Теорема подібності для швидкостей та прискорень

Нехай швидкості точок  $D$ ,  $F$  і  $G$  будь-якої ланки (рис. 14.5) відомі за величиною і напрямком. Зобразимо ці швидкості відрізками  $\overline{pd}$ ,  $\overline{pf}$  і  $\overline{pg}$ , відкладеними від однієї точки  $p$  (рис. 14.5, б).

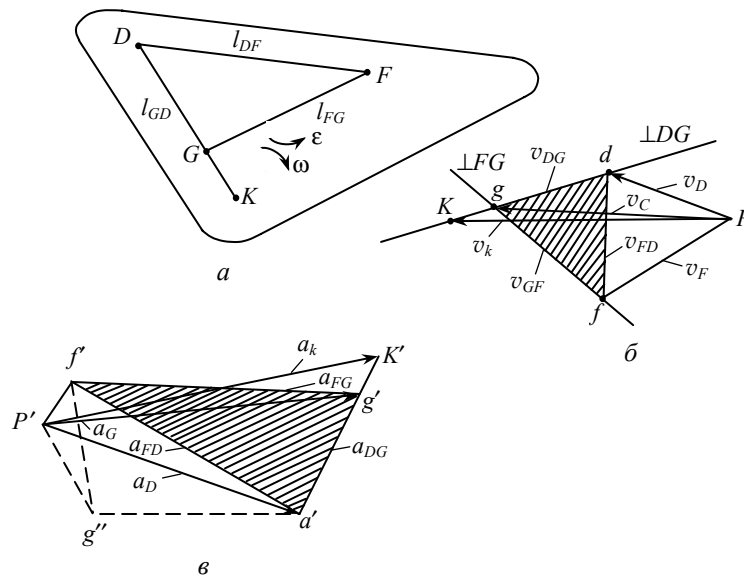


Рис. 14.5. Визначення швидкостей та прискорень точок однієї ланки:  
 а — план ланки; б — план швидкостей; в — план прискорень

З'єднаємо кінці векторів (точки  $d, f, g$ ) цих швидкостей прямими лініями. Відрізок  $\overline{df}$  зображає швидкість точки  $F$  відносно точки  $D$  (тобто швидкість  $v_{FD}$ ), відрізок  $\overline{fg}$  — відносну швидкість  $v_{GF}$  і відрізок  $\overline{gd}$  — відносну швидкість  $v_{DG}$ . Таке графічне зображення називається *планом швидкостей ланки*, а точка  $p$  — *полосом плану швидкостей*.

Через те, що розглянуті точки належать одній ланці, то  $\overline{v_{FD}} \perp DF$ ,  $\overline{v_{GF}} \perp FG$ ,  $\overline{v_{DG}} \perp GD$ . Отже, всі сторони трикутника  $dfg$  перпендикулярні до відповідних сторін трикутника  $DFG$ , а з цього випливає, що ці трикутники подібні.

Отже, *теорему подібності для швидкостей* можна сформулювати так: прямі лінії, які з'єднують точки на плані ланки, і прямі лінії, які з'єднують кінці векторів швидкостей цих точок на плані швидкостей, утворюють подібні фігури.

Фігура на плані швидкостей повернута відносно фігури на плані ланки на  $90^\circ$ .



На підставі цієї теореми можна записати

$$\frac{\overline{df}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{fg}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{gd}}{\overline{GD}}.$$

Якщо відомі швидкості точок  $D$  та  $G$ , то швидкість точки  $K$ , яка лежить на прямій  $DG$ , визначаємо з пропорції

$$\overline{gk} = \overline{GK} \frac{dg}{\overline{DG}}$$

і відкладаємо цей відрізок від точки  $g$  по лінії  $dg$ .

При цьому точки  $d$ ,  $g$  і  $k$  повинні бути розташовані в такій самій послідовності, що й точки  $D$ ,  $G$  і  $K$ .

**Теорема подібності для прискорень:** прямі лінії, які з'єднують точки на плані ланки, і прямі лінії, які з'єднують кінці векторів повних прискорень цих точок на плані прискорень, утворюють подібні фігури.

У всіх випадках, коли відомі прискорення двох точок ланки, прискорення будь-якої іншої точки цієї ланки потрібно визначити з пропорційності сторін подібних фігур. Так, знайдемо прискорення точки  $G$ , вважаючи відомими повні прискорення точок  $D$  і  $F$ . За *теоремою подібності* визначимо відрізки:

$$\overline{d'g'} = \overline{DG} \frac{\overline{d'f'}}{\overline{DF}}; \quad \overline{f'g'} = \overline{FG} \frac{\overline{d'f'}}{\overline{DF}}$$

й опишемо ними, як радіусами, кола навколо точок  $d'$  і  $f'$ .

Перетин цих кіл буде у двох точках  $g'$  та  $g''$ . Правильною є та точка, для якої справедливе правило обходу контура (точка  $g'$ ), напрямком обходу контура  $d'f'g'$  збігається з напрямком обходу контура  $DFG$ .

#### 14.6. Побудова плану швидкостей і прискорень кривошипно-повзункового механізму

Будемо вважати заданими довжину ланок, кут  $\varphi$ ,  $\omega_1 = \text{const}$ . Побудову плану швидкостей та прискорень для цього механізму проводимо в такій послідовності:

- 1) побудуємо план механізму в обраному масштабі (рис. 14.6, а);
- 2) визначимо число степенів вільності та структуру механізму.

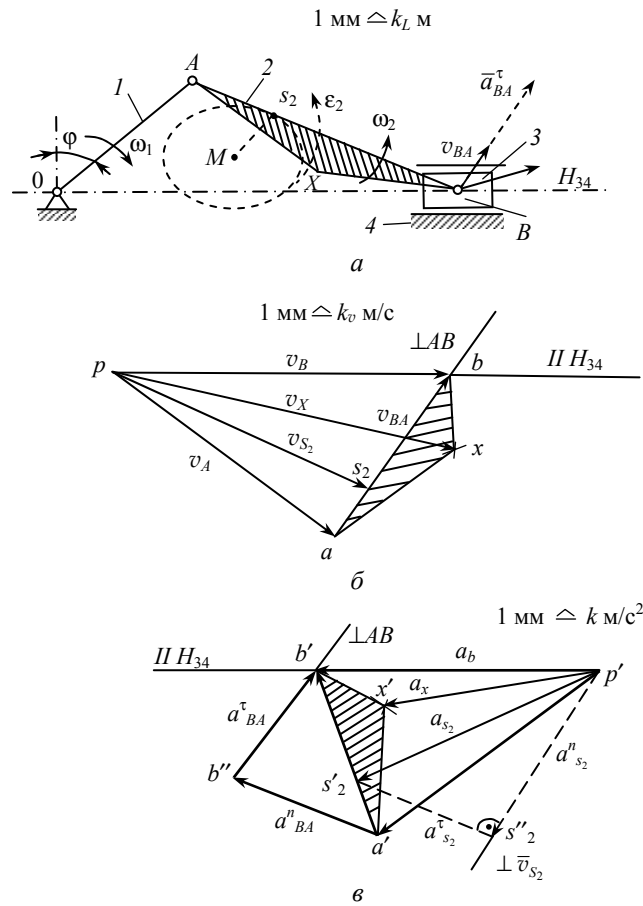


Рис. 14.6. Побудова плану кривошипно-повзункового механізму, плану швидкостей і плану прискорень

Даний механізм складається з чотирьох ланок ( $n = 4$ ) і має дві кінематичні пари 1-го роду ( $p_1 = 2$ ) ( $p_2 = 0$ ).

Число степенів вільності його за формулою Чебишева дорівнює:

$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - 1p_2 = 3(4 - 1) - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 0 = 1.$$

Запис структури механізму має вигляд: ланки 2, 3 — діада № 3; ланки 1, 4 — група початкових ланок.

Кінематичне дослідження проводиться у зворотному порядку запису структури, тобто починаючи з групи початкових ланок;

3) побудуємо план швидкостей механізму (рис.14.6, б).

Визначимо швидкість точки  $A$ , яка належить початковій ланці:  $v_A = \omega_1 l_{OA}$ ;  $v_A \perp OA$  і напрямлена в напрямку обертання ланки  $I$ .

Вибираємо полюс плану швидкостей і відкладаємо відрізок довільної довжини. Визначаємо масштабний коефіцієнт плану швидкостей:  $k_v = \frac{v_A}{pa} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм}]$ .

Для визначення швидкості точки  $B$  складаємо векторне рівняння:

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + \overline{v_{BA}},$$

де  $\overline{v_B} \perp BH_{34}$ ;  $\overline{v_{BA}} \perp AB$  і розв'язуємо його графічно.

Відрізок  $\overline{pb}$  зображає швидкість точки  $B$  ( $v_B$ ) у вибраному масштабі, а відрізок  $\overline{ab}$  — швидкість точки  $B$  відносно точки  $A$  ( $v_{BA}$ ). Вектор  $\overline{v_B}$  напрямлений від точки  $p$  до точки  $B$ , вектор  $\overline{v_{BA}}$  — від точки  $a$  до точки  $B$ . Значення цих швидкостей дорівнюють:  $v_B = k_v \overline{pb}$ ;  $v_{BA} = k_v \overline{ab}$ . Швидкість точки  $x$  можна визначити із системи векторних рівнянь:

$$\begin{cases} \overline{v_x} = \overline{v_A} + \overline{v_{xA}}; \\ \overline{v_x} = \overline{v_B} + \overline{v_{xB}}, \end{cases}$$

де  $\overline{v_{xB}} \perp \overline{xB}$ ;  $\overline{v_{xA}} \perp \overline{xA}$ , тоді  $v_x = k_v \overline{px}$ .

Точка  $s_2$  на плані швидкостей буде знаходитись на прямій  $\overline{ab}$  і розташована в тій самій послідовності, що й точка  $s_2$  на ланці  $AB$  плану механізму. Положення точки  $s_2$  на плані швидкостей визначаємо з такої пропорції:

$$\frac{\overline{As_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{as_2}}{\overline{aB}}; \quad \overline{as_2} = \overline{ab} \frac{\overline{As_2}}{\overline{AB}}, \quad \text{тоді } v_{s_2} = k_v \overline{ps_2}.$$

Щоб визначити напрямку кутової швидкості ланки 2 ( $\omega_2$ ), розглянемо рух точки  $B$  відносно точки  $A$ . Для цього потрібно вектор швидкості  $\overline{v_{BA}}$  перенести з плану швидкостей (не міняючи його напрямку) у точку  $B$  на плані механізму;  $\omega_2$  буде напрямлена в той бік, у який рухається точка  $B$  відносно точки  $A$ .

У даному прикладі  $\omega_2$  напрямлена проти годинникової стрілки; її значення визначаємо за формулою

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}};$$

4) побудуємо план прискорень механізму (рис. 14.6, в).

Визначаємо прискорення точки  $A$ :

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau.$$

Так, якщо  $\omega_1 = \text{const}$ , то  $\varepsilon_1 = 0$  і тоді  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n = \omega_1^2 l_{OA}$ ;  $\bar{a}_A \parallel \overline{OA}$  (від точки  $A$  до точки  $O$ ).

Визначаємо масштабний коефіцієнт плану прискорень:

$k_a = \frac{a_A}{\rho a}$  [м · с<sup>-2</sup> / мм]. Щоб знайти прискорення точки  $B$ , складаємо

векторне рівняння:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

де  $\bar{a}_B \parallel H_{34}$ ;  $\bar{a}_{BA}^\tau \perp AB$ ;  $\bar{a}_{BA}^n \parallel AB$  (від точки  $B$  до точки  $A$ ).

Визначаємо величину нормального прискорення точки  $B$  відносно точки  $A$  і відрізок, яким вона зображується:

$$a_{BA}^n = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB}}; \quad a_{BA}^\tau = \frac{a_{BA}^n}{k_a}.$$

За теоремою подібності знайдемо прискорення точки  $x$ :

$$\frac{\overline{a'x'}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{Ax}}{\overline{AB}}; \quad \overline{a'x'} = \frac{\overline{a'b'} \cdot \overline{AX}}{\overline{AB}};$$

$$\frac{\overline{b'x'}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{Bx}}{\overline{AB}}; \quad \overline{b'x'} = \frac{\overline{a'b'} \cdot \overline{BX}}{\overline{AB}}.$$

Методом дугових засічок визначаємо положення точки  $x$  і перевіряємо його за правилом обходу контура.

Значення прискорень дорівнюють:

$$a_B = k_a \overline{p'b'}; \quad a_{BA}^\tau = k_a \overline{b''b'};$$

$$a_{BA} = k_a \overline{a'b''}; \quad a_x = k_a \overline{p'x'}.$$

Положення точки  $s'_2$  на плані прискорень визначаємо з пропорції:

$$\frac{\overline{a's'_2}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{As_2}}{\overline{AB}}; \quad \overline{a's'_2} = \overline{a'b'} \frac{\overline{As_2}}{\overline{AB}}.$$

Тоді  $as_2 = k_a \overline{p's'_2}$ .

Для визначення напрямку кутового прискорення ланки 2 ( $\epsilon_2$ ) слід перенести з плану прискорень величину  $\overline{a_{BA}^\tau}$  в точку  $B$  на плані механізму. У даному прикладі  $\epsilon_2$  напрямлене проти годинникової стрілки. Порівняння напрямків  $\omega_2$  та  $\epsilon_2$  показує, що ланка 2 рухається прискорено.

#### 14.7. Визначення радіуса кривизни траєкторії

Кінематичний аналіз дозволяє визначити радіус кривизни траєкторії в будь-якій її точці.

Наприклад, щоб знайти радіус кривизни траєкторії точки  $s_2$  кривошипно-повзункового механізму (рис. 14.6, *a*) в заданому положенні, треба побудувати плани швидкостей і прискорень для цього положення:

$$\rho_{s_2} = \frac{v_{s_2}^2}{a_{s_2}^n}.$$

Далі потрібно розкласти повне прискорення точки  $s_2$  на дві складові:  $\overline{a_{s_2}^n} \perp \overline{v_{s_2}}$  і  $\overline{a_{s_2}^\tau} \parallel \overline{v_{s_2}}$ . Для цього через точку  $p'$  на плані прискорень (рис. 14.6, *в*) проводимо пряму, перпендикулярну до  $\overline{v_{s_2}}$ , а з точки  $s'_2$  — пряму, паралельну  $\overline{v_{s_2}}$ . У перетині цих прямих отримаємо точку  $s''_2$ . Тоді

$$a_{s_2}^n = k_a \overline{p's''_2}.$$

Визначаємо положення центра кривизни траєкторії точки  $s_2$ . Для цього через точку  $s_2$  на плані механізму (рис. 14.6, *a*) проводимо пряму, паралельну вектору  $\overline{a_{s_2}^n}$ , і відкладаємо на цій прямій відрізок  $\overline{s_2M}$ , який зображає в обраному масштабі радіус кривизни.

Довжину відрізка визначаємо за формулою  $\overline{s_2M} = \frac{\rho_{s_2}}{k_l}$ . Точка  $M$  являє собою центр кривизни траєкторії точки  $s_2$ . Опишемо навколо точки  $M$  коло радіусом  $\overline{s_2M}$ . Це коло називається *колом кривизни*.

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Назвіть основні задачі кінематичного дослідження механізмів.
2. Які існують методи кінематичного аналізу механізмів?
3. Що називають масштабним коефіцієнтом?
4. Для чого виконують кінематичне дослідження?
5. Що називають планом механізму?
6. У чому полягає суть теореми подібності для швидкостей та прискорень? Для чого її використовують?
7. Як визначають величину та напрям кутової швидкості ланки?
8. Як визначають величину та напрям кутового прискорення ланки?
9. На побудованих планах швидкостей (прискорень) показати, яка з двох довільно обраних точок на одній ланці має більшу швидкість (прискорення).
10. Як визначають із планів швидкостей та прискорень відповідно їх величини?

## 15. СИЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

### 15.1. Основні задачі динамічного дослідження механізмів

При динамічному дослідженні механізмів розглядається рух ланок з урахуванням сил, що на них діють. Своєю дією прикладені сили надають ланкам механізму того чи того закону руху.

Розрізняють дві основні задачі динаміки механізмів і машин:

- 1) за заданим законом руху початкової ланки механізму визначити зовнішні сили, які забезпечують цей рух;
- 2) за заданими зовнішніми силами, які діють на ланки механізму, визначити закон руху початкової ланки.

Перша задача має назву *силового аналізу механізмів*, а друга — *динаміки механізмів* (машин).

Усі діючі в машинах сили поділяють на дві основні групи:

- 1) рушійні сили, які діють у бік руху тіла, тобто намагаються прискорити його рух;
- 2) сили опору, які діють проти руху тіла, тобто намагаються сповільнити рух тіла.

Так само сили опору поділяють на сили корисного (або виробничого) опору та сили шкідливого (або невиробничого) опору.

Рушійні сили приводять механізм або машину в рух. Рушійними силами можуть бути тиск пари або газу, тиск води, повітря, електромагнітні сили, сили пружності пружини, сили тяжіння тощо.

Напрями рушійної сили та швидкості точки, у якій прикладена ця сила, або збігаються, або утворюють гострий кут. Тому проекція вектора сили на напрям руху тіла завжди додатна, що й визначає додатну роботу рушійних сил.

До сил корисного опору належать технологічні опори руху, для здійснення якого і служить машина або механізм. Прикладом може бути опір різанню металів, сили аеродинамічного опору або вага вантажу, який треба підняти. Тут доречно зазначити, що при опусканні вантажу його вага буде вже рушійною силою. Отже, у деяких механізмах одну і ту саму силу не завжди можна відносити до якої-небудь однієї категорії. Сила корисного опору напрямлена в протилежний бік швидкості руху або утворює з напрямом швидкості тупий кут. Тому ця робота завжди від'ємна.

До сил шкідливого опору належать сили тертя в кінематичних парах, сили опору середовища. Але в деяких механізмах, наприклад, у гальмах, у місці стику ведучих коліс локомотива з рейсами, автомобіля з поверхнею дороги силу тертя можна віднести до корисного опору.

Розрізняють також сили тяжіння (ваги) ланок, сили інерції та сили реакцій у кінематичних парах. Залежно від їхнього напрямку ці сили можна віднести до рушійних сил або сил опору.

Сили тяжіння є наслідком взаємодії ланок із землею. Робота цих сил за період руху механізму дорівнює нулю. У середині періоду руху ця робота відрізняється від нуля. Сили інерції з'являються в разі зміни швидкості за величиною або напрямом. Швидкості та прискорення кожного періоду набувають початкових значень. Тому при періодичному русі робота сил інерції за період руху також дорівнює нулю.

Розглянемо визначення сил інерції. Як відомо з теоретичної механіки, у загальному випадку всі сили інерції будь-якої ланки  $AB$  (рис. 15.1), яка здійснює плоскопаралельний рух і має площину симетрії, паралельну площині руху, можуть бути зведені до сили інерції  $P_{ин}$ , яку прикладено в центрі мас (ваги)  $S$ , і до пари сил інерції, момент яких дорівнює  $M_{ин}$ .

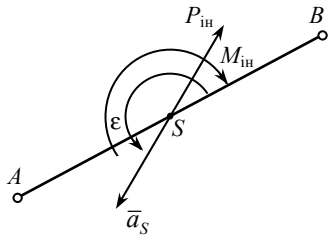


Рис. 15.1. Схема визначення сил інерції

Сила інерції  $P_{\text{ін}}$  визначається за формулою

$$\bar{P}_{\text{ін}} = -m\bar{a}_s,$$

де  $m$  — маса ланки;  $a_s$  — прискорення центра мас.

Сила інерції  $\bar{P}_{\text{ін}}$  напрямлена протилежно до вектора прискорення центра мас  $\bar{a}_s$ .

Момент пари сил інерції  $\bar{M}_{\text{ін}}$  напрямлений протилежно до кутового прискорення  $\bar{\epsilon}$  і може бути визначений як

$$\bar{M}_{\text{ін}} = -J_s \bar{\epsilon},$$

де  $J_s$  — момент інерції ланки відносно осі, яка проходить через центр мас і перпендикулярна до площини руху ланки;  $\epsilon$  — кутове прискорення ланки.

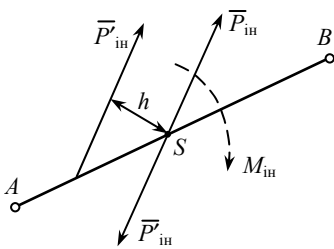


Рис. 15.2. Зведення сил інерції ланки до однієї рівнодійної

Іноді зручно результуючу  $\bar{P}_{\text{ін}}$  і пару сил з моментом  $\bar{M}_{\text{ін}}$  замінити однією рівнодійною силою  $\bar{P}'_{\text{ін}}$ , що дорівнює силі інерції  $\bar{P}_{\text{ін}}$  (рис. 15.2), лінія дії якої зміщена відносно центра мас  $S$  на відстань  $h = \frac{M_{\text{ін}}}{P_{\text{ін}}}$ , тобто момент пар сил інерції ( $M_{\text{ін}} = P_{\text{ін}} h$ ) замінюємо парою сил.

Розрізняють сили реакцій, які виникають при взаємодії ланок у місцях стикання, тобто в кінематичних парах.

Такі сили є внутрішніми силами для всього механізму в цілому, хоча для кожної окремо взятої ланки вони будуть зовнішніми. Робота сил реакцій ніколи не дорівнює нулю, оскільки не дорівнюють нулю сили тертя в кінематичних парах.

Все раніше викладене про сили стосується й моментів пар сил, тому що вони характеризують дію сил при обертанні.



Рушійні сили та сили корисного опору залежно від їхніх механічних, фізичних і технологічних характеристик можуть бути сталими або функціями різних кінематичних параметрів — переміщень, швидкостей, прискорень і часу.

Рушійні сили та сили опору, здебільшого, визначають експериментально. Результати подають як аналітичні залежності або діаграми сил, робіт чи потужностей. Ці функціональні залежності називають *механічними характеристиками*.

Визначення сил, що діють на ланки механізмів, має велике практичне значення для розрахунків ланок на міцність, жорсткість, вібростійкість, зносостійкість, довговічність, для визначення втрат енергії на тертя, а також для підрахунку енергетичного балансу машини на виконання інших подібних розрахунків.

Основними задачами силового розрахунку механізмів є: визначення зовнішніх невідомих сил, що діють на ланки механізмів; визначення повних зусиль (реакцій) у всіх кінематичних парах; визначення зрівноважувальної сили або зрівноважувального моменту на початковій ланці механізму.

При силовому дослідженні механізму часто одна із зовнішніх сил (рушійна або сила корисного опору) невідома і її треба визначити. Визначається вона за умови рівноваги початкової ланки механізму і тому має назву *зрівноважувальної*.

Якщо за початкову взято вхідну ланку, то зрівноважувальна сила (або момент) становить рушійну силу (або момент) механізму. Якщо за початкову взято вихідну ланку, то зрівноважувальна сила становить силу корисного опору механізму.

При силовому дослідженні механізмів припускають, що закон руху початкової ланки задано, а маси і моменти інерції ланок відомі. Силовий розрахунок проводять без урахування сил тертя у кінематичних парах.

Найпростішим випадком силового розрахунку механізмів є рівновага, тобто коли ланки механізму знаходяться в стані спокою або в поступальному рівномірному прямолінійному русі. У цих випадках не виникають динамічні сили (сили інерції) і для дослідження механізмів досить звичайних рівнянь статички. У загальному випадку, якщо є прискорення, використовують принцип Даламбера, згідно з яким рухома система тіл перебуває в кожний момент часу в рівновазі під дією зовнішніх сил, зокрема й сил інерції. Тобто, як-

що до ланок механізму поруч із заданими зовнішніми силами додати сили інерції, то механізм у цілому, а також окремі групи ланок і кожен ланку окремо можна розглядати в стані рівноваги і невідомі сили визначити за допомогою рівнянь статки. Такий метод силового дослідження, коли до числа заданих сил входять і сили інерції ланок, називається *кінестатичним*.

У тихохідних машинах і механізмах сили інерції, які виникають під час руху ланок з прискоренням, незначні порівняно з іншими зовнішніми силами. Тому ними здебільшого можна нехтувати. Разом з тим механізм у цілому, групи ланок і кожен ланку окремо можна розглядати в стані рівноваги і зусилля в кінематичних парах визначити методами статки. Такий метод силового дослідження, коли сили інерції не задані, називається *статичним*.

## 15.2. Силове дослідження шарнірного чотириланкового механізму

Розглянемо силове дослідження графічним методом на прикладі шарнірного чотириланкового механізму, кінематичну схему якого зображено на рис. 15.3.

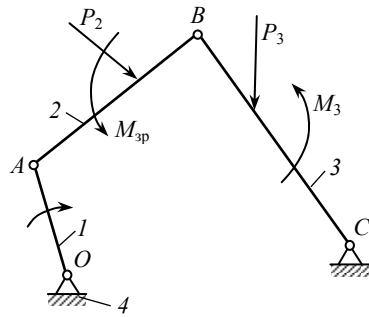


Рис.15.3. Схема силового навантаження шарнірного чотириланкового механізму

Силове дослідження механізму починається з визначення його структури. Плоский важільний механізм розбивається на статично визначені групи ланок — групи Ассура і групи початкових ланок (при цьому число невідомих дорівнює числу рівнянь статки). Силове дослідження проводиться у порядку, зворотному до порядку кінематичного дослідження, тобто починається з останньої, рахуючи від початкової ланки, групи Ассура і закінчується дослідженням групи початкових ланок.

Силове дослідження механізму можна виконувати графічними або аналітичними методами. Найзручнішим методом є графічний, що передбачає побудову планів сил для кожної групи Ассура або для кожної ланки окремо. Плани сил є графічним рішенням вектор-

них рівнянь рівноваги і зображуються в масштабі у вигляді замкненого багатокутника сил. Одне векторне рівняння рівнозначне двом алгебричним і тому дозволяє визначити дві невідомі величини. Аналітичний метод силового дослідження передбачає кожне векторне рівняння замінювати двома алгебричними рівняннями проекцій сил на осі координат.

Будемо вважати, що всі зовнішні сили (сили опору, ваги, інерції), які діють на ланки 2, 3 групи, відомі і для кожної ланки зведені до рівнодійних сил  $\bar{P}_2, \bar{P}_3$  та рівнодійних моментів  $\bar{M}_2, \bar{M}_3$ . Таке спрощення не впливає на методику силового дослідження структурної групи, яка не залежить від кількості сил, що діють на ланки групи, їх значення.

1. Будуємо план механізму в обраному масштабі і прикладаємо до ланок всі зовнішні сили.

2. Запишемо структуру шарнірного чотириланкового механізму:

— ланки 2, 3 — діада № 1;

— ланки 1, 4 — група початкових ланок.

Силове дослідження механізму виконують у порядку запису структури механізму: спочатку визначають реакції в кінематичних парах групи Ассура, яка утворена ланками 2 і 3, далі — реакції в кінематичній парі групи початкових ланок і зрівноважувальний момент на початковій ланці 1. Реакції в кінематичних парах механізму визначаємо без урахування зусиль тертя і ваги ланок. Сили ваги ланок у механізмі, який досліджуємо, незначні (менше 2 %) порівняно із зовнішніми силами, і ними можна нехтувати.

3. Накреслимо в масштабі довжин  $k_1$  групу Ассура (ланки 2 і 3) у заданому положенні і докладемо всі сили, що діють на них (рис. 15.4). Діада № 1 має у своєму складі три обертальні кінематичні пари  $A, B$  і  $C$ . Обертальна пара  $A$  утворена ланками 1 і 2, пара  $B$  — ланками 2 і 3, пара  $C$  — ланками 3 і 4. Позначимо реакції в цих кінематичних парах відповідно  $N_{12}, N_{23}, N_{43}$  ( $N_{14} = -N_{41}$ ;  $N_{23} = -N_{32}$ ;  $N_{43} = -N_{34}$ ). Реакції  $N_{12}$  та  $N_{43}$  є зовнішніми стосовно групи Ассура, а  $N_{23}$  — внутрішньою: з якою силою ланка 2 діє на ланку 3, з такою ж силою ланка 3 діє на ланку 2.

Невідому силу  $N_{14}$  розкладаємо на дві складові: нормальну  $\bar{N}_{14}^n$ , яка напрямлена вздовж ланки  $AC$ , і тангенціальну  $\bar{N}_{14}^t$ , напрямлену перпендикулярно до  $AC$ .

Напряг  $\bar{N}_{14}^{\tau}$  задаємо довільно. Після обчислення  $\bar{N}_{14}^{\tau}$  знак «плюс» означає, що її напрям задали правильно, а знак «мінус» — неправильно. Аналогічно невідому силу  $N_{43}$ , яка напрямлена вздовж ланки  $BC$ , і тангенціальну  $\bar{N}_{14}^{\tau}$ , напрямлену перпендикулярно до  $BC$ .

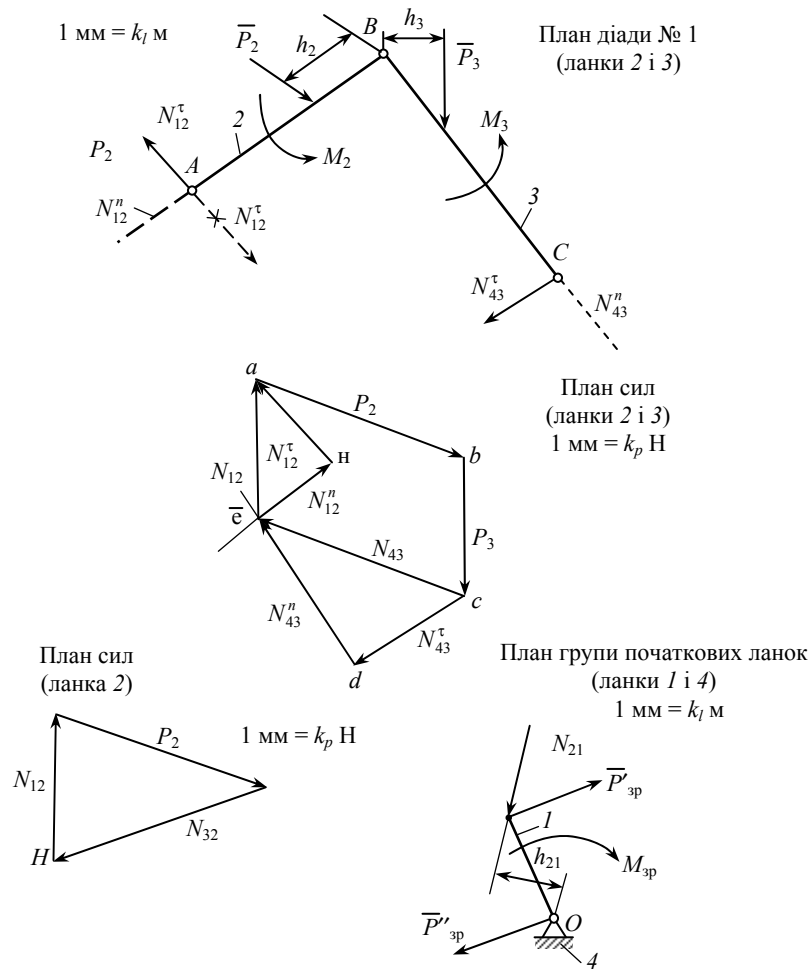


Рис. 15.4. Силове дослідження шарнірного чотириланкового механізму

4. Розглянемо рівновагу ланки 2. Сума моментів усіх сил, які діють на неї, щодо будь-якої точки має дорівнювати нулю. Складаємо рівняння моментів, які діють на ланку 2 відносно точки  $B$ :

$$\text{Ланка 2: } \Sigma M_B = 0;$$

$$N_{12}^{\tau} l_{AB} + P_2 h_2 + M_2 = 0.$$

Позитивним вважаємо моменти сил і пар сил, які діють проти годинникової стрілки. Сили  $N_{14}^n$  і  $N_{32}$  не утворюють моментів, оскільки їхні плечі відносно точки  $B$  дорівнюють нулю. Плече  $h_2$  легко визначити з рисунка, якщо помножити величину відрізка (у міліметрах) на масштабний коефіцієнт  $k_l$ .

Тоді

$$N_{12} = - \left( \frac{P_2 h_2 + M_2}{l_{AB}} \right).$$

Знак «мінус» показує, що напрям  $\bar{N}_{14}^{\tau}$  обрано неправильно. Правильний напрям  $\bar{N}_{14}^{\tau}$  позначено на рис. 15.4 суцільною стрілкою. Аналогічно розглянемо ланку 3 у рівновазі. Складаємо рівняння моментів відносно точки  $B$  для ланки 3.

$$\text{Ланка 3: } \Sigma M_B = 0;$$

$$-N_{43}^{\tau} l_{AB} + P_3 h_3 + M_3 = 0.$$

Тоді

$$N_{43}^{\tau} = \frac{M_3 - P_3 h_3}{l_{BC}}.$$

5. Визначаємо нормальні складові реакцій у кінематичних парах  $A$  і  $C$ . Для цього розглянемо рівновагу групи Ассура. Оскільки ланки 2 і 3 знаходяться в стані рівноваги, то векторна сума всіх сил, що діють на них, має дорівнювати нулю.

Ланки 2 і 3:

$$\Sigma P_i = 0;$$

$$\underline{\bar{N}_{12}^{\tau}} + \underline{\bar{P}_2} + \underline{\bar{P}_3} + \underline{\bar{N}_{43}^{\tau}} + \underline{\bar{N}_{43}^n} + \underline{\bar{N}_{12}^n} = 0.$$

Двома лініями підкреслені сили, які відомі за величиною і напрямом, однією — які відомі лише за напрямом. Векторне рівняння має два невідомих і легко розв'язується графічним методом побудови плану сил.

Визначивши масштабний коефіцієнт сил  $k_p$ , відкладаємо з довільної точки  $H$  (полюса плану сил) послідовно сили  $N_{12}^t, P_2, P_3, N_{43}^t$  в обраному масштабі. Кінці векторів відповідно позначаємо літерами  $a, b, c, d$ .

Через точку  $d$  проведемо лінію, яка напрямлена паралельно до  $N_{43}^n$ , а через полюс  $H$  — лінію, паралельну  $N_{12}^n$ , і місце перетину цих ліній позначимо точкою  $e$ . Відрізки  $\overline{de}$  і  $\overline{en}$  зображують у масштабі  $k_p$  відповідно сили  $N_{43}^n$  і  $N_{12}^n$ .

Відрізки  $\overline{ea}$  і  $\overline{ce}$  на плані сил і є повними реакціями (у масштабі  $k_p$ ) у кінематичних парах  $A$  і  $C$ .

6. Для визначення реакції в кінематичній парі  $B$  треба розглянути рівновагу ланки 2 або ланки 3. Розглянемо, наприклад, рівновагу ланки 2. Векторна сума всіх сил, які діють на неї, має дорівнювати нулю.

Ланка 2:

$$\begin{aligned}\Sigma \bar{P}_i &= 0; \\ \underline{\bar{N}}_{12} + \underline{\bar{P}}_2 + \underline{\bar{N}}_{32} &= 0.\end{aligned}$$

З полюса  $H$  плану сил відкладаємо в обраному масштабі  $k_p$  сили  $\bar{N}_{12}$  і  $\bar{P}_2$ , позначивши кінці векторів відповідно літерами  $a$  і  $b$ . Точку  $b$  з'єднуємо з полюсом  $H$ . Відрізок  $\overline{bH}$  зображує в масштабі вектор  $\bar{N}_{32}$  (реакцію в кінематичній парі  $C$ ). Напрямок  $\bar{N}_{32}$  визначаємо відповідно до записаного векторного рівняння.

7. Накреслимо в масштабі  $k_l$  групу початкових ланок (ланки 1 і 4) у заданому положенні і прикладемо до ланок усі сили, які діють на них (рис. 15.4).

На ланку 1 діє зрівноважувальний момент  $M_{3p}$  і дві сили:  $N_{21}$  — з боку ланки 2,  $N_{41}$  — з боку нерухомої ланки 4 (на рисунку не показана).

Розглянемо ланку 1 у рівновазі.

Ланка 1:  $\Sigma \bar{P}_i = 0$ ;

$$\underline{\bar{N}}_{21} + \underline{\bar{N}}_{41} = 0; \quad \bar{N}_{21} = -\bar{N}_{41}.$$

Тобто, реакція в кінематичній парі  $O$  дорівнює за величиною реакції в кінематичній парі  $A$ , але має протилежний напрямок.

Напрямок зрівноважувального моменту  $M_{зр}$  задаємо довільно. Складаємо рівняння моментів усіх сил, які діють на ланку  $l$ , відносно точки  $O$ :

$$\Sigma \bar{M}_O = 0; N_{21} h_{21} - M_{зр} = 0.$$

Тоді

$$M_{зр} = N_{21} h_{21}.$$

Знак «плюс» показує, що напрямок  $M_{зр}$  обрано правильно. Зрівноважувальну силу  $P_{зр}$  можна визначити за формулою

$$P_{зр} = \frac{M_{зр}}{l_{OA}} = \frac{N_{21} h_{21}}{l_{OA}}.$$

Для цього потрібно момент  $M_{зр}$  розкласти на пару сил  $P'_{зр}$  і  $P''_{зр}$  так, щоб зберегти обраний напрямок  $M_{зр}$ .

### Запитання для самоконтролю

1. Які основні задачі силового дослідження?
2. Які сили діють на механізм?
3. Що називають кінетостатичним розрахунком?
4. З якою метою виконують силове дослідження плоских механізмів?
5. Яку силу називають зрівноважувальною?
6. Які функціональні залежності називають механічними характеристиками?
7. Як визначають величини і напрямки сил та моментів інерції ланок механізму?

## ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ДЕТАЛЕЙ І ВУЗЛІВ ЗАГАЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

### 16. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ РОЗРАХУНКУ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

#### 16.1. Основні поняття та визначення

Будь-яка машина чи механізм складається з деталей і вузлів.

*Деталь* — частина машини, яку виготовляють без застосування монтажних і складальних операцій. *Деталі* можуть бути *простими* (гайка, болт, шпонка тощо) або *складними* (колінчастий вал, корпус редуктора, станина верстата тощо).

*Вузол* — закінчена складальна одиниця, що містить низку деталей загального призначення (муфта, редуктор, підшипник кочення тощо).

У машинобудуванні застосовують багато різних деталей. Усю різноманітність деталей машин можна умовно поділити на дві групи: *деталі загального призначення* (болти, вали, зубчасті колеса тощо) і *деталі спеціального призначення* (поршні, лопатки турбін, колінчасті вали тощо). Ми будемо розглядати деталі першої групи.

#### 16.2. Основні критерії працездатності деталей машин

*Працездатність* деталей оцінюють за низкою критеріїв, які визначають умови їх роботи.

*Головним критерієм* працездатності для більшості деталей є *міцність*. *Міцність* — здатність деталі чинити опір руйнуванню або виникненню пластичних деформацій протягом гарантованого строку служби. Міцність деталі визначають розрахунком небезпечного



перерізу, у якому виникають найбільші нормальні або дотичні напруження. Розрізняють *статичні поломки* та *поломки від втоми*. Перші виникають, коли робочі напруження перевищують границі статичної міцності матеріалу. Це пов'язане з випадковими переваженнями, не врахованими при розрахунках, або із прихованими дефектами деталей (виразки, тріщини тощо). Поломки від втоми викликані довготривалою дією змінних напружень, величина яких перевищує характеристики міцності від втоми матеріалу. Міцність від втоми значно знижується за наявності концентраторів напруги, пов'язаних з конструктивною формою деталі (галтелі, канавки, нарізка тощо) або дефектами виробництва (тріщини, подряпини тощо).

*Жорсткість* — це здатність деталі зберегти форму та розміри під дією зовнішніх сил. Розрахунок на жорсткість передбачає обмеження пружних переміщень деталей у границях, допустимих для конкретних умов роботи. Такими умовами можуть бути, наприклад, умови роботи спряжених деталей (зубчастих коліс, валів тощо). Норми жорсткості деталей встановлюють на основі практики експлуатації та розрахунків. Ці норми наводяться в довідковій літературі.

*Зносостійкість*. Зношування — процес поступової зміни розмірів деталей унаслідок тертя. При цьому збільшуються зазори в підшипниках, напрямних, зубчастих зачепленнях, у циліндрах поршневих машин. Збільшення зазорів знижує якісні характеристики механізмів — потужність, коефіцієнт корисної дії (ККД), надійність, міцність тощо. Деталі, зношені понад норми, бракують і замінюють під час ремонту. Несвоєчасний ремонт призводить до поломки машин, а в деяких випадках і до аварії. Встановлено, що за сучасного рівня техніки 85...90 % машин виходять із ладу через зношування і лише 10...15 % з інших причин.

*Теплостійкість*. Нагрівання деталей машин може спричинити шкідливі наслідки: зниження міцності матеріалу та появу повзучості, зниження захисної здатності мастильних плівок, а звідси й підвищене зношування деталей; зміну зазорів у спряжених деталях, що може призвести до заклинювання чи заїдання; зниження точності роботи машин (наприклад, прецизійні верстати). Щоб не допустити шкідливих наслідків перегріву на роботу машин, виконують теплові розрахунки і за потреби вносять необхідні конструктивні зміни (наприклад, штучне охолодження).

*Вібраційна стійкість.* Вібрації викликають змінні напруження і, здебільшого, ведуть до руйнування від втоми. У деяких випадках вібрації знижують якість роботи машин. Наприклад, у металорізальних верстатах вони знижують точність обробки й погіршують якість поверхні оброблюваних деталей. Особливо небезпечними є резонансні коливання. Шкідливий вплив вібрацій проявляється також і в підвищенні шумових характеристик механізмів. Через підвищення швидкостей руху машин небезпека вібрацій зростає, тому розрахунки на коливання набувають усе більшого значення.

### **16.3. Проектний і перевірний розрахунки**

В інженерній практиці використовують два типи розрахунків — *проектний і перевірний*.

*Проектний розрахунок* — попередній, спрощений розрахунок, його виконують у процесі розробки конструкції деталі (машини), щоб визначити її розміри за відомими або призначеними навантаженнями, матеріалом і допустимими напруженнями.

*Перевірний розрахунок* — уточнений розрахунок відомої деталі, який виконується, щоб перевірити її міцність або визначити норми навантаження. При цьому оцінюються міцність за допомогою порівняння розрахункових напружень з допустимими для сконструйованої деталі або розрахункового коефіцієнта безпеки з допустимим. Дуже чітко при цьому враховується концентрація напружень, масштабний чинник.

### **16.4. Допустимий коефіцієнт запасу міцності та методи його визначення**

Традиційно коефіцієнт запасу міцності  $[s]$  визначають двома методами: *табличним (нормативним)* та *диференціальним*.

У наш час табличний метод застосовують для конструкцій, руйнування яких особливо небезпечне для життя людей (вантажопідйомні машини, парові котли тощо). Для цих конструкцій коефіцієнти запасу міцності й методи розрахунків регламентуються нормами Держстандарту.

Коефіцієнт запасу міцності (загальний) у разі визначення диференціальним методом

$$[s] = s_1 s_2 s_3,$$

де  $s_1$  — коефіцієнт, що враховує надійність матеріалу (однорідність механічних властивостей, наявність дефектів  $s_1 = 1, 2 \dots 2,5$ );  $s_2$  — коефіцієнт, що враховує точність розрахункових схем ( $s_2 = 1,0 \dots 1,5$ );  $s_3$  — коефіцієнт, що враховує умови безпеки ( $s_3 = 1,0 \dots 1,5$ ).

При сталому режимі змінних напружень забезпечують потрібний запас міцності відносно границі витривалості. Наприклад, при одновісному розтяганні–стисканні чи згинанні запас міцності

$$s_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\beta \epsilon_{\sigma}} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m};$$

та при крученні

$$s_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}}{\beta \epsilon_{\tau}} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m},$$

де  $\sigma_m, \tau_m$  — середні значення напружень згинання і кручення;  $\sigma_a, \tau_a$  — амплітуди циклів нормальних і дотичних напружень;  $\sigma_{-1}, \tau_{-1}$  — границі витривалості матеріалу вала при симетричних циклах згинання та кручення;  $K_{\sigma}, K_{\tau}$  — ефективні коефіцієнти концентрації напружень;  $\epsilon$  — коефіцієнт масштабного чинника;  $\beta$  — коефіцієнт впливу шорсткості поверхні;  $\psi_{\sigma}, \psi_{\tau}$  — коефіцієнти, що характеризують чутливість матеріалу до асиметрії циклу.

При спільній дії нормальних та дотичних напружень коефіцієнт запасу міцності знаходять за формулою

$$s = \frac{s_{\sigma} s_{\tau}}{\sqrt{s_{\sigma}^2 + s_{\tau}^2}} \geq [s].$$

Коли використовують наведені формули, то вважають, що дія змінних напруг переважає дію постійних і несуча здатність обмежується втомою матеріалу, а не появою пластичних деформацій.

### 16.5. Основні відомості про матеріали для виготовлення деталей машин

Для виготовлення деталей машин застосовують сталі, чавуни, сплави кольорових металів, порошкові матеріали, пластмаси.

Залежно від хімічного складу та технології виробництва якісні показники одного й того самого матеріалу значно різняться.

*Сталь* — сплав заліза з вуглецем та іншими елементами. Чим більше вуглецю у сталі, тим вища її твердість і статична міцність, але менша пластичність. Усі сталі розрізняють за марками. Сталі звичайної якості — марки від Ст.0 до Ст.6. Конструкційні якісні сталі розрізняють за вмістом вуглецю та марганцю. Їхні позначення: сталь 40, 45, 50 Г та ін. Літера Г після цифри у наведеному позначенні марки вказує на підвищений вміст марганцю. Леговані конструкційні сталі поділяють на якісні та високоякісні. Залежно від вмісту основних легувальних елементів сталі бувають хромисті (20Х, 40Х), хромо-нікелеві (20ХН, 12ХНЗА) та ін. У марках цифри перед літерами вказують на вміст вуглецю в сотих частках відсотка, а цифри після літер — приблизний відсотковий вміст легувальних елементів. Високоякісні сталі в кінці позначення марки мають літеру А.

*Легована сталь* — матеріал дуже дорогий, тому застосовується для відповідальних деталей.

*Чавун* являє собою залізовуглецевий сплав із вмістом вуглецю понад 2 % і наявністю незначної кількості інших елементів. За структурою розрізняють сірі або білі чавуни, за призначенням — антифрикційні, високоміцні та ін. Найбільш поширений у машинобудуванні сірий чавун. Він має добрі ливарні властивості, добре обробляється різанням. Найбільш поширені марки СЧ10, СЧ15, СЧ20, СЧ25, СЧ30, СЧ35, СЧ40, СЧ45. Літери СЧ означають сірий чавун, а цифри — границю міцності при розтяганні.

*Сплави кольорових металів.* У машинобудуванні найчастіше використовують сплави міді, легкі сплави та бабіти.

*Бронзи* — сплави міді з оловом, свинцем, алюмінієм, залізом, кремнієм, марганцем та іншими металами (крім цинку). Позначення марки бронзи починається з літер Бр, за якими слідом ідуть великі літери легувальних елементів та їхній склад у відсотках.

Наприклад, Бр 010-Ф1 — бронза, що містить 10 % олова та 1 % фосфору, решта — мідь. Бронзи мають добрі антифрикційні, антикорозійні, ливарні та механічні властивості.

Через високу вартість олов'яних бронз часто застосовують безолов'яні бронзи, наприклад, БрА39-4 (алюмінієво-залізна), для вінців черв'ячних коліс, гайок ходових механізмів тощо.

*Латуні* — сплави міді з цинком. За хімічним складом латуні поділяються на прості та спеціальні, за технологічним призначен-

ням — на ливарні та деформівні. Позначення латуней аналогічне позначенням бронз, де замість літер Бр ставлять літеру Л (наприклад, ЛЦ23АЖ3 Мц2, ЛЦ38 Мц202).

*Бабіти* — антифрикційні сплави на основі олова та свинцю, які використовують для виготовлення вкладишів підшипників ковзання. Кращими, але й найдорожчими є бабіти Б83, Б89. Бабіти мають найнижчий коефіцієнт тертя по сталі та чавуну, а також низьку твердість.

*Композиційні матеріали на основі металевої матриці* одержують просочуванням високоміцних волокон (вольфраму, молібдену тощо) розплавленими металами (алюмінієм, кобальтом тощо).

*Композиційні матеріали на основі полімерної матриці* одержують просочуванням волокон (бору, вуглецю, скла, органічного походження тощо) розправленими синтетичними високомолекулярними полімерними смолами. Процеси отримання композиційних матеріалів дуже дорогі.

*Пластмаси* — це матеріали на основі синтетичних або природних високомолекулярних смол — полімерів. Перевагою пластмас є мала густина, висока питома міцність, хімічна стійкість, високі антикорозійні, антифрикційні та електроізоляційні властивості, порівняна простота формоутворення багатьох виробів при мінімальних відходах, добра оброблюваність різанням. До недоліків виробів із пластмас можна віднести низьку міцність порівняно з металами, низьку твердість, жорсткість і теплопровідність і невисоку теплостійкість. Під час проектування необхідно враховувати повзучість під навантаженням і старіння, що суттєво знижують властивості деталей із пластмас.



#### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що розуміють під деталлю машини? Які бувають деталі?
2. Які деталі відносять до деталей загального призначення?
3. Назвіть основні критерії працездатності деталей машин.
4. Яка різниця між проектним і перевірним розрахунками?
5. Якими методами визначають коефіцієнт запасу міцності?
6. Назвіть основні матеріали для виготовлення деталей машин.
7. Які марки сталей належать до звичайних та якісних конструкційних?
8. Що являє собою чавун? Назвіть основні марки чавунів.
9. Які матеріали виготовляються зі сплавів кольорових металів?

## 17. МЕХАНІЧНІ ПЕРЕДАЧІ

### 17.1. Призначення та класифікація передач

Більшість сучасних машин і приладів складають за схемою: двигун–передача–робочий орган машини (рис. 17.1). Необхідність введення передачі як проміжної ланки між двигунами і робочим органом машини пов'язана з розв'язанням низки задач.



Рис. 17.1. Структурна схема машини

Наприклад, в автомобілях та інших транспортних засобах треба змінювати швидкість і напрям руху, а на підйомах і при зрушенні з місця — у декілька разів збільшувати крутний момент на ведучих колесах. Сам автомобільний двигун не в змозі виконати ці вимоги, тому він стало працює лише у вузькому діапазоні зміни крутного моменту та кутової швидкості. При виході за межі цього діапазону двигун зупиняється. Подібно до автомобільного двигуна погано регулюється багато інших двигунів, зокрема більшість електричних. У деяких випадках регулювання двигуна можливе, але не доцільне з економічних міркувань, оскільки за межами номінального режиму роботи ККД двигуна суттєво змінюється.

Узагальнюючи функції, які виконують передачі, можна так сформулювати необхідність їх застосування: для вибору оптимальної швидкості руху; для регулювання швидкості руху (підвищення або зниження), для перетворення виду руху, обертального в поступальний (рейкові та передачі гвинт-гайка) і навпаки; для зміни напрямку руху (реверсування); для зміни крутних моментів і сил руху; для передачі потужності на значні відстані.

Отже, під *передачами* розуміють механізми, що служать для передачі механічної енергії на відстані, здебільшого, з перетворенням швидкостей й крутних моментів.

У практиці приладо- та машинобудування використовують механічні, електричні, пневматичні, гідравлічні та комбіновані передачі.

У курсі «Деталі машин» вивчають лише механічні передачі, оскільки вони найбільш поширені в техніці.

За принципом дії передачі поділяються на дві групи: передачі тертям — фрикційні та пасові; передачі зачепленням — зубчасті, черв'ячні, гвинтові, ланцюгові (рис. 17.2).

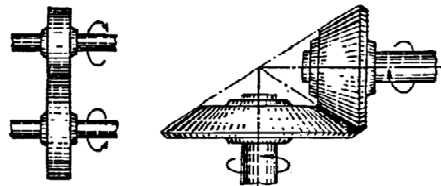
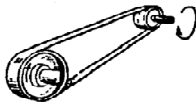
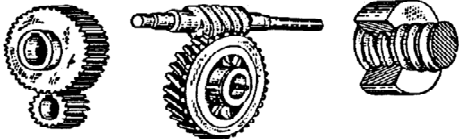
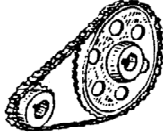
Групи передач	Передачі з безпосереднім дотиканням	Передачі гнучким зв'язком
Передачі тертям	<p>Фрикційна</p> 	<p>Пасова</p> 
Передачі зачепленням	<p>Зубчаста      Черв'ячна      Гвинт-гайка</p> 	<p>Ланцюгова</p> 

Рис. 17.2. Основні групи механічних передач

Передачі тертям ґрунтуються на використанні сил тертя між елементами передачі.

Передачі зачепленням працюють завдяки виникненню тиску між зубами на деталях, що взаємодіють. За характером зміни швидкості передачі поділяються на знижувальні та підвищувальні.

### 17.2. Основні кінематичні та силові співвідношення

У всіх механічних передачах є дві основні ланки: вхідна (ведуча) та вихідна (ведена). Ланки, що передають крутний момент, називаються ведучими, а ті що приводять у рух від ведучих — веденими. Параметри передачі, що належать до ведучих ланок, позначають індексом 1, а ті, що належать до ведених — індексом 2. Будь-яка механічна передача може бути визначена такими основними параметрами (рис. 17.3): потужність  $P_1$  на вході,  $P_2$  на виході (кВт, Вт), кутовою швидкістю ведучого  $\omega_1$  і веденого валів  $\omega_2$  ( $\text{с}^{-1}$ ),

або частотою обертання на вході  $n_1$  і виході  $n_2$  ( $\text{хв}^{-1}$ ). Це основні характеристики, що необхідні і достатні для проектного розрахунку будь-якої передачі. Крім основних, розрізняють похідні характеристики, які часто використовуюють при розрахунках.

До них належать:

- коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{P_2}{P_1},$$

де  $P_1$  і  $P_2$  — потужності на валах редуктора, Вт, кВт.

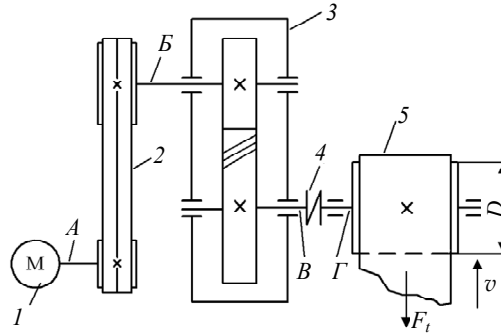


Рис. 17.3. Схема приводу стрічкового транспортера:  
 1 — електродвигун; 2 — клинопасова передача;  
 3 — редуктор циліндричний косозубий одноступінчастий;  
 4 — муфта; 5 — стрічковий транспортер

Для багатоступінчастої передачі, що складається з кількох окремих послідовно з'єднаних передач, загальний ККД визначають за залежністю

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n,$$

де  $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$  — ККД кожної кінематичної пари, а також інших ланок приводу, де є витрати потужності (підшипники, муфти);

- колова швидкість (у метрах за секунду) ведучої або веденої ланок

$$v = \frac{\omega d}{2},$$

де  $d$  — діаметр колеса, шківів, зірочки тощо;



- колова сила передачі (у Ньютонах)

$$F_t = \frac{P}{v} = \frac{2T}{d};$$

- крутний (крутний) момент (у Ньютонах на метр)

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{F_t d}{2}.$$

Крутний момент ведучого вала  $T_1$  є моментом рушійних сил, його напрям збігається з напрямом обертання вала. Момент веденого вала  $T_2$  є моментом сил опору, тому його напрям протилежний до напрямку обертання вала.

*Передаточне відношення* механічної передачі є відношенням кутової швидкості ведучої ланки до кутової швидкості веденої ланки.

Передаточне відношення, що визначається напрямом потоку потужності від ведучої ланки до веденої, позначають  $u_{12}$ .

Розрахункова залежність має вигляд

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Для багатоступінчастої передачі

$$u_{\text{заг}} = u_1 u_2, \dots, u_n.$$

При  $u_{12} > 1$ ,  $\omega_1 > \omega_2$  — передача знижувальна; її називають *редуктором*.

При  $u_{12} < \omega_1 < \omega_2$  — передача підвищувальна, її називають *мультиплікатором*. В інженерній практиці часто застосовують термін «передаточне число».

*Передаточним числом* називають відношення кількості зубів більшого колеса до кількості зубів меншого колеса, його позначають також літерою  $u$ , але без індексів:

$$u = \frac{z_2}{z_1},$$

де  $z_2$  — кількість зубів колеса (більшого);  $z_1$  — кількість зубів шестірні (меншого із коліс).

Передаточне число на відміну від передаточного відношення завжди додатне і не може бути меншим від одиниці. Передаточне число та передаточне відношення можуть збігатися тільки в передачі внутрішнього зачеплення.

У передач зовнішнього зачеплення вони не збігаються, тому що мають різні знаки: передаточне відношення — від'ємний, передаточне число — додатний. Передаточне число характеризує передачу тільки кількісно. Найбільш поширені знижувальні передачі, тому що частота обертання виконавчого механізму здебільшого менша від частоти обертання вала двигуна.

Якщо ведуче та ведене колеса обертаються в один бік (наприклад, у зубчастій передачі з внутрішнім зачепленням), то передаточне відношення вважається додатним. Якщо ведене та ведуче колеса обертаються в різні боки (наприклад, у зубчастій передачі зовнішнього зачеплення), то передаточне відношення вважається від'ємним.

**Приклад 17.1.** Виконати кінематичний розрахунок приводу, схема якого показана на рис. 17.3.

*Вихідні дані:* колова сила на стрічці транспортера  $F_t = 8$  кН, колова швидкість  $v = 1,2$  м/с, діаметр барабана  $D = 0,3$  м.

*Розв'язання*

1. Визначаємо потужність на виході приводу (на валу барабана стрічкового транспортера):

$$P_{\text{вих}} = F_t v = 8 \cdot 1,2 = 9,6 \text{ кВт.}$$

2. Загальний ККД приводу

$$\eta_{\text{заг}} = \eta_{\text{пас.п}} \eta_{\text{з.п}} \eta_{\text{м}} \eta_0,$$

де  $\eta_{\text{пас.п}}$  — ККД пасової передачі;  $\eta_{\text{з.п}}$  — ККД циліндричної косозубої зубчастої передачі;  $\eta_{\text{м}}$  — ККД муфти;  $\eta_0$  — пари підшипників.

Числові значення ККД окремих передач наведено в табл. 17.1. Приймаємо  $\eta_{\text{пас.п}} = 0,96$ ;  $\eta_{\text{з.п}} = 0,98$ ;  $\eta_{\text{м}} = 0,99$ ;  $\eta_0 = 0,99$ .

Підставляючи вихідні дані, отримаємо

$$\eta_{\text{заг}} = 0,96 \cdot 0,98 \cdot 0,99 \cdot 0,99^3 = 0,90.$$

3. Визначаємо потрібну потужність електродвигуна

$$P_{\text{потр.дв}} = \frac{P_{\text{вих}}}{\eta_{\text{заг}}} = \frac{9,6}{0,9} = 10,66 \text{ кВт.}$$

4. Знаходимо частоту обертання вихідного вала приводу

$$n = \frac{v60}{\pi D} = \frac{1,2 \cdot 60}{3,14 \cdot 0,3} = 76,43 \text{ хв}^{-1}.$$

Таблиця 17.1

## Значення коефіцієнтів корисної дії механічних передач

Тип передачі	Значення ККД
Зубчаста передача: циліндрична прямозуба циліндрична косозуба конічна	0,98...0,99 0,97...0,98 0,96...0,98
Черв'ячна передача: однозахідна двозахідна чотиризахідна	0,7...0,75 0,75...0,82 0,86...0,92
Пасова передача: плоскопасова клинопасова зубчастопасова	0,96...0,98 0,95...0,97 0,94...0,97 0,94...0,97
Ланцюгова передача: Муфти: зубчаста, пружна втулково-пальцева	0,99 0,97...0,99
Підшипники: кочення ковзання	0,99 0,98

## 5. Загальне передаточне відношення приводу

$$u_{\text{заг}} = u_{\text{пас.п}} u_{\text{з.п}}$$

де  $u_{\text{пас.п}}$  — передаточне відношення пасової передачі;  $u_{\text{з.п}}$  — передаточне відношення зубчастої передачі.

Підставляючи у формулу для  $u_{\text{заг}}$  дані із середніх рекомендованих передаточних відношень, які наведені в табл. 17.2, отримаємо:  $u_{\text{заг}} = 3 \cdot 4 = 12$ .

## 6. Визначаємо орієнтовну частоту обертання електродвигуна

$$n_{\text{дв}} = n_{\text{вих}} u_{\text{заг}} = 76,43 \cdot 12 = 917,16 \text{ хв}^{-1}$$

## 7. Добираємо електродвигун за отриманими даними із табл. 17.3.

$$4A160 M8, P_{\text{дв}} = 11 \text{ кВт}, n_{\text{дв}} = 973 \text{ хв}^{-1}$$

Таблиця 17.2

**Рекомендовані значення передаточних відношень  
для різних передач**

Тип передачі	Передаточні відношення	
	середні рекомендовані	найбільші
Зубчаста передача редуктора:		
циліндрична прямозуба	3...4	12,5
циліндрична косозуба	3...5	12,5
конічна	2...4	6,3
Зубчаста відкрита	3...6,3	16
Черв'ячна передача	8...50	80
Пасова передача:		
плоскопасова	2...4	8
клинопасова	2...5	10
зубчастопасова	2...12	20
Ланцюгова передача	2...6	8

Таблиця 17.3

**Електродвигуни серії 4А (закриті з обдувом)**

Потужність, кВт	Тип двигуна	Частота обертання, об/хв	Тип двигуна	Частота обертання, об/хв
0,55	71А4	1390	71В6	900
0,75	71В4	1390	80А6	915
1,1	80А4	1420	80В6	920
1,5	80В4	1415	90L6	935
2,2	90 L4	1425	100L6	950
3,0	100S4	1435	112МА6	955
4,0	100L4	1430	112МВ6	950
5,5	112М4	1445	132S6	965
7,5	132S4	1455	132М6	970
11,0	132М4	1460	160S6	975
15,0	160S4	1465	160М6	975
18,5	160М4	1465	180М6	975
22,0	180S4	1470	200М6	972
30,0	180М4	1470	200L6	979

**Примітка.** У таблиці наведено дані для двигунів із синхронною частотою обертання 1500 та 1000 об/хв.

8. Уточнюємо загальне передаточне відношення приводу

$$u_{\text{заг}} = \frac{n_{\text{дв}}}{n_{\text{вих}}} = \frac{973}{76,43} = 12,73.$$

9. Розбиваємо загальне передаточне відношення приводу на передаточні відношення окремих передач, користуючись формулою:

$$u_{\text{заг}} = u_{\text{пас.п}} u_{\text{з.п}}.$$

Приймаємо  $u_{\text{з.п}} = 4$ , тоді  $u_{\text{пас.п}} = \frac{u}{u_{\text{з.п}}} = \frac{12,73}{4} = 3,18$ .

10. Визначаємо частоти обертання валів приводу. Позначимо вали: вал електродвигуна  $A$ , ведучий вал редуктора  $B$ , ведений вал редуктора  $B$ , вал барабана  $\Gamma$ :

$$n_A = n_{\text{дв}} = 973 \text{ хв}^{-1}; n_B = \frac{n_A}{u_{\text{пас.п}}} = \frac{973}{3,18} = 305,97 \text{ хв}^{-1};$$

$$n_B = \frac{n_B}{u_{\text{з.п}}} = \frac{305,97}{4} = 76,49 \text{ хв}^{-1}; n_{\Gamma} = n_B = 76,49 \text{ хв}^{-1}.$$

11. Визначаємо кутові швидкості обертання валів приводу:

$$\omega_A = \omega_{\text{дв}} = \frac{\pi n_{\text{дв}}}{30} = \frac{3,14 \cdot 973}{30} = 101,84 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_B = \frac{\omega_A}{u_{\text{пас.п}}} = \frac{101,84}{3,18} = 32,03 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_B = \frac{\omega_B}{u_{\text{з.п}}} = \frac{32,03}{4} = 8,0 \text{ с}^{-1}; \omega_{\Gamma} = \omega_B = 8,0 \text{ с}^{-1}.$$

12. Визначаємо потужності на валах приводу:

$$P_A = P_{\text{потр.дв}} = 10,66 \text{ кВт};$$

$$P_B = P_A \eta_{\text{пас.п}} \eta_0 = 10,66 \cdot 0,96 \cdot 0,99 = 10,13 \text{ кВт}.$$

$$P_B = P_B \eta_{\text{зп}} \eta_0 = 9,82 \cdot 0,99 \cdot 0,99 = 9,82 \text{ кВт};$$

$$P_{\Gamma} = P_B \eta_{\text{м}} \eta_0 = 9,82 \cdot 0,99 \cdot 0,99 = 9,62 \text{ кВт}.$$

13. Визначаємо крутні моменти на валах приводу:

$$T_A = \frac{P_A}{\omega_A} = \frac{10,66 \cdot 10^3}{101,84} = 104,67 \text{ Н} \cdot \text{м} = 104,67 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм};$$

$$T_B = \frac{P_B}{\omega_B} = \frac{10,13 \cdot 10^3}{32,03} = 316,26 \text{ Н} \cdot \text{м} = 316,26 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм};$$

$$T_B = \frac{P_B}{\omega_B} = \frac{9,83 \cdot 10^3}{8,0} = 1228,75 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1228,75 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм};$$

$$T_G = \frac{P_G}{\omega_G} = \frac{9,62 \cdot 10^3}{8,0} = 1203 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1203 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

*Перевірка.* Знаходимо крутний момент на виході за іншою формулою  $T_{\text{вих}} = \frac{F_t D}{2} = \frac{8 \cdot 0,3 \cdot 10^3}{2} = 1200 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

### ? Запитання для самоконтролю

1. Що розуміють під механічними передачами?
2. Чим пояснюється необхідність застосування передачі як проміжної ланки між двигуном і робочими органами машини?
3. Які основні функції можуть виконувати механічні передачі?
4. Що розуміють під передаточним відношенням механізму?
5. Що називається передаточним числом механізму?
6. Яка залежність між потужністю, крутним моментом і кутовою швидкістю на ведучому і веденому валах передачі?

## 18. ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ

### 18.1. Загальні відомості та класифікація передач

Механізм, призначений для передавання обертального руху від одного вала до іншого за допомогою зубчастих коліс, що перебувають у зачепленні, називають *зубчастою передачею* (рис. 18.1).

Менше із двох зубчастих коліс називають *шестірнею* (позначається індексом 1), а більше — *колесом* (позначається індексом 2). Термін «зубчасте колесо» стосується як шестірні, так і колеса. Зубчасті передачі більш поширені порівняно з іншими механічними передачами і здатні працювати в різних умовах, передаючи потужності від сотих до десятків тисяч кіловат при колових швидкостях

до  $v = 150$  м/с. Вони застосовуються в механізмах приладів, де розміри коліс вимірюються кількома міліметрами, і в найпотужніших машинах з розмірами коліс до 10 м.

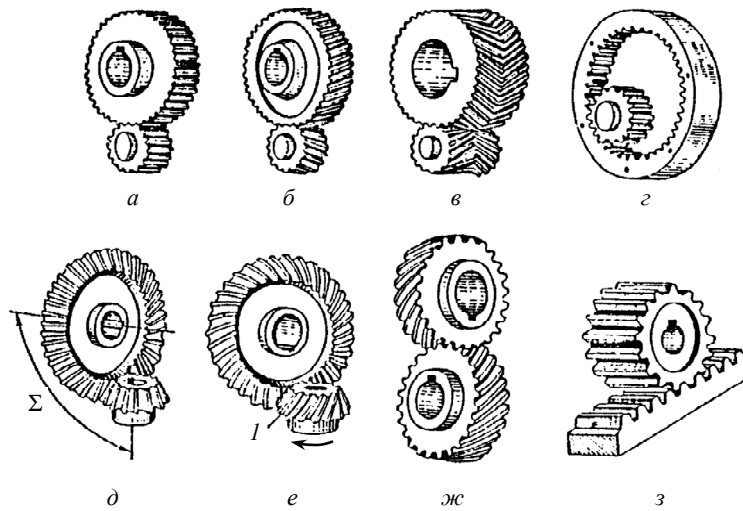


Рис. 18.1. Зубчасті передачі:  
*a, б, в* — циліндричні зовнішнього зачеплення  
 (відповідно — прямозубі, косозубі і шевронні);  
*г* — прямозубі внутрішнього зачеплення;  
*д* — конічні з прямими зубами;  
*е* — конічні з коловими зубами;  
*ж* — гвинтові; *з* — типу колесо-рейка

**Переваги** зубчастих передач:

- 1) висока надійність роботи в широкому діапазоні навантажень та швидкостей; 2) малі габарити; 3) велика довговічність; 4) високий ККД; 5) порівняно малі навантаження на вали та опори; 6) сталість передаточного числа; 7) простота обслуговування.

**Недоліки** зубчастих передач:

- 1) відносно високі вимоги до точності виготовлення та монтажу;
- 2) шум під час роботи з високими швидкостями;
- 3) потреба в постійному змащенні.

**Класифікація передач.** Залежно від взаємного розміщення осей валів зубчасті передачі бувають:

1) із паралельними осями валів — *циліндричні* передачі зовнішнього зачеплення (рис. 18.1, *а, б, в*); циліндричні передачі внутрішнього зачеплення (рис. 18.1, *г*) та передачі типу зубчасте колесо-рейка (рис. 18.1, *з*);

2) із валами, осі яких перетинаються — *конічні зубчасті* передачі (рис. 18.1, *д, е*);

3) із мимобіжними осями валів — *гвинтові* (рис. 18.1, *ж*).

Залежно від розміщення зубів на ободі колеса розрізняють передачі: *прямозубі* (рис. 18.1, *а*), *косозубі* (рис. 18.1, *б*), *шевронні* (рис. 18.1, *в*) та з *круговими* зубами (рис. 18.1, *е*).

Залежно від форми профіля зуба передачі бувають: *евольвентні, із зачепленням Новикова, циклоїдні*.

У сучасному машинобудуванні найбільш широко застосовується евольвентне зачеплення (запропоноване Л. Ейлером у 1760 р.). У 1954 р. М. Л. Новиков запропонував зачеплення, у якому профіль зуба окреслений дугами кіл, яке можливе тільки при косих зубах. Циклоїдне зачеплення збереглося лише в годинникових механізмах і приладах.

За конструктивним оформленням зубчасті передачі бувають: *закриті* (розміщені у спеціальному корпусі та забезпечені постійним змащенням; редуктори, коробки передач тощо) і *відкриті* (працюють без мастил або змащуються періодично).

За коловою швидкістю  $v$  зубчастих коліс передачі поділяються на *тихохідні* ( $v \leq 3$  м/с), *середньошвидкісні* ( $v = 3 \dots 15$  м/с), *високошвидкісні* ( $v > 15$  м/с).

## 18.2. Елементи теорії зубчастого зачеплення

Для забезпечення сталого передаточного числа профіль зубів потрібно окреслити такими кривими, які б задовольняли вимогам основної теореми зачеплення.

*Основна теорема зачеплення.* Розглянемо пару спряжених зубів у зачепленні (рис. 18.2). Профілі зубів шестірні і колеса дотикаються в точці  $S$ , яка називається *точкою зачеплення*. Центри обертання  $O_1$  і  $O_2$  знаходяться на  $a_w$  один від одного. Зуб шестірні, обертаючись із кутовою швидкістю  $\omega_1$ , тисне на зуб колеса, передаючи останньому кутову швидкість  $\omega_2$ . Проведемо через точку  $S$  спільну для обох профілів дотичну  $TT$  і нормаль  $NN$ .



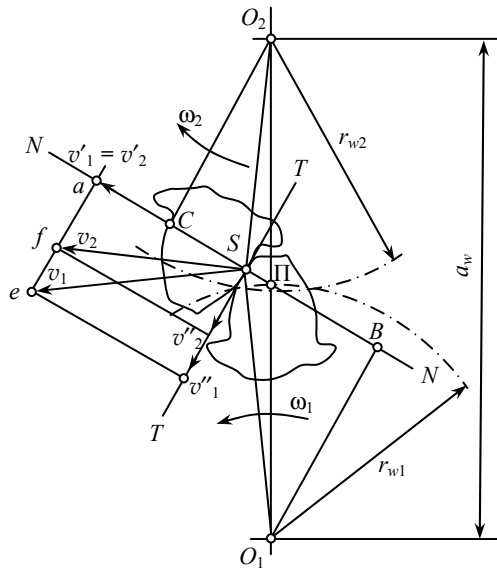


Рис. 18.2. Схема для розгляду основної теореми зачеплення

Колові швидкості точки  $S$  відносно центрів обертання  $O_1$  і  $O_2$

$$v_1 = O_1 S \omega_1 \quad \text{і} \quad v_2 = O_2 S \omega_2.$$

Розкладемо  $v_1$  і  $v_2$  на складові  $v'_1$  і  $v'_2$  за напрямком нормалі  $NN$  і складові  $v''_1$  і  $v''_2$  за напрямком дотичної  $TT$ . Для забезпечення сталого дотику профілів необхідне виконання умови.  $v'_1 = v'_2$ , в іншому разі при  $v'_1 < v'_2$  зуб шестірні відстане від зуба колеса, а при  $v'_1 > v'_2$  відбудеться вривання зубів. Опустимо із центрів  $O_1$  і  $O_2$  перпендикуляри  $O_1B$  і  $O_2C$  на нормаль  $NN$ .

Із подібності трикутників  $aeS$  і  $BSO_1$   $v'_1/v_1 = O_1B/O_1S$ , звідки  $v'_1 = (v_1/O_1S)O_1B = \omega_1 O_1B$ .

Із подібності трикутників  $afS$  і  $CSO_2$   $v'_2/v_2 = O_2C/O_2S$ , звідки  $v'_2 = (v_2/O_2S)O_2C = \omega_2 O_2C$ . Але  $v'_1 = v'_2$ , відповідно  $\omega_1 O_1B = \omega_2 O_2C$ .

Передаточне число

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2C}{O_1B}. \quad (18.1)$$

Нормаль  $NN$  перетинає лінію центрів  $O_1O_2$  в точці  $\Pi$ , яка називається *полюсом зачеплення*. Із подібності трикутників  $O_2PC$  і  $O_1PB$

$$\frac{O_2C}{O_1B} = \frac{O_2\Pi}{O_1\Pi} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}. \quad (18.2)$$

Порівнюючи відношення [вирази (18.1) і (18.2)], маємо

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \text{const}. \quad (18.3)$$

Отже, основна теорема зачеплення формулюється так: для забезпечення сталого передаточного числа зубчастих коліс профілі їхніх зубів повинні окреслюватись кривими, у яких спільна нормаль  $NN$ , проведена через точку дотику профілів, ділить відстань між центрами  $O_1O_2$  на відрізки, обернено пропорційні кутовим швидкостям зубчастих коліс.

Полюс зачеплення  $\Pi$  зберігає незмінне положення на лінії центрів  $O_1O_2$ , а відповідно радіуси  $r_{w1}$  і  $r_{w2}$  також незмінні.

Кола радіусів  $r_{w1}$  і  $r_{w2}$  називаються *початковими*. При обертанні зубчастих коліс початкові кола перекочуються одне по одному без ковзання, про що свідчить рівність їх колових швидкостей  $\omega_1 r_{w1} = \omega_2 r_{w2}$ , яка випливає із формули (18.3).

Із множини кривих, що задовольняють вимоги основної теореми зачеплення, практичне застосування в машинобудуванні отримала *евольвента кола*, яка:

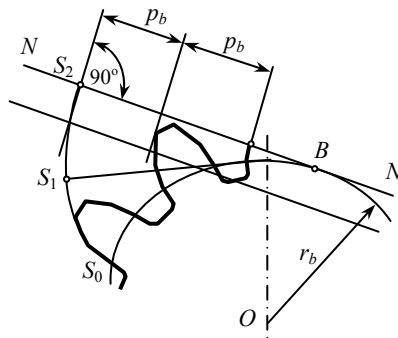


Рис. 18.3. Основне коло та евольвента

а) дозволяє порівняно просто і точно отримати профіль зуба в процесі нарізування;

б) без порушень правильності зачеплення допускає деяку зміну міжосьової відстані  $a_w$  (така зміна міжосьової відстані може виникнути внаслідок неточності виготовлення зубчастих коліс та їх монтажу).

*Евольвента кола*. Евольвентою називають криву (рис. 18.3), яку описує точка  $S$  прямої  $NN$  при

перекочуванні її без ковзання по колу радіусом  $r_b$ . Це коло називається *основним*, а перекочувана пряма  $NN$  — *твірною*.

Характер евольвентного зачеплення визначається *властивостями евольвенти*:

- утворююча пряма  $NN$  є одночасно дотичною до основного кола і нормаллю до всіх евольвент, що утворюються нею;
- дві евольвенти одного і того самого основного кола еквідистантні;
- зі збільшенням радіуса  $r_b$  основного кола евольвента стає більш пологою і при  $r_b \rightarrow \infty$  перетворюється в пряму. У цьому разі зубчасте колесо перетворюється в зубчасту рейку, яка має прямолінійний профіль зубів;
- радіус кривизни евольвенти в точці  $S$  дорівнює довжині дуги  $S_{OB}$  основного кола. Центр кривизни евольвенти в даній точці знаходиться на основному колі.

*Евольвентне зачеплення.* Утворення евольвентного зачеплення розглянемо при заданій міжосьовій відстані  $a_w$  і передаточному числі  $u$  зубчастої передачі (рис. 18.4).

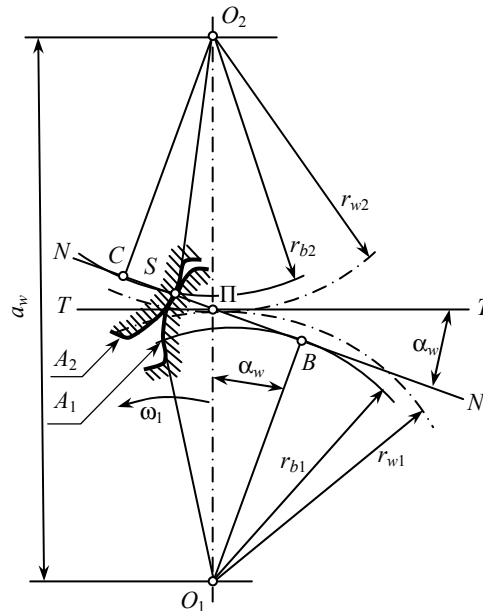


Рис. 18.4. Схема утворення евольвентного зачеплення

За відомих  $a_w = r_{w1} + r_{w2}$  і  $u = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}$  визначимо радіуси початкових

кіл  $r_{w1} = \frac{a_w}{u+1}$  і  $r_{w2} = ur_{w1}$  та позначимо на лінії центрів  $O_1O_2$  поло-

ження полюса зачеплення П. Із центра  $O_1$  опишемо деяким радіусом  $r_{b1}$  основне коло і зробимо його розгортку.

Отримаємо евольвентний профіль  $A_1$  зуба шестірні. На підставі основної теореми зачеплення і першої властивості евольвенти проведемо через полюс П нормаль  $NN$ , яка визначить точку зачеплення  $S$  спряжених профілів. Опустимо із центра  $O_2$  перпендикуляр  $O_2C$  на нормаль  $NN$  і радіусом  $r_{b2} = O_2C$  опишемо основне коло, розгорткою якого є евольвентний профіль  $A_2$  зуба колеса. Побудовані профілі спряжені, тому що вони мають спільну нормаль  $NN$ . Ця нормаль дотикається до обох основних кіл і є твірною прямою евольвент обох профілів.

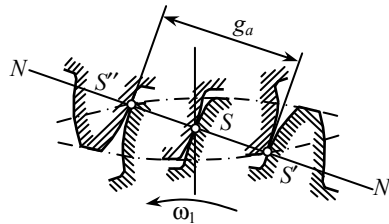


Рис. 18.5. Положення спряжених профілів зубів на початку і в кінці зачеплення

Коли колеса обертаються, точка зачеплення  $S$  евольвентних профілів переміщується по спільній нормалі  $NN$  (рис. 18.5) — геометричному місці точок зачеплення спряжених профілів і називається *лінією зачеплення*.

Лінія зачеплення  $NN$  є одночасно лінією тиску, тому що сила тиску профіля зуба шестірні на профіль зуба колеса діє по спільній

нормалі  $NN$  до обох профілів.

Кут  $\alpha_w$  між лінією зачеплення і спільною дотичною  $TT$  до початкових кіл називається *кутом зачеплення* (див. рис. 18.4). Із подібностей трикутників  $O_2CP$  і  $O_1BP$

$$\frac{O_2P}{O_1P} = \frac{O_2C}{O_1B} \quad \text{або} \quad \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}.$$

Із формули (18.3) випливає, що

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \text{const},$$

тобто відношення кутових швидкостей двох спряжених евольвентних профілів обернено пропорційне радіусам основних кіл і не залежить від відстані  $a_w$  між центрами цих кіл.

Отже, правильність евольвентного зачеплення не порушиться під час зміни міжосьової відстані  $a_w$ . Ця властивість є важливою перевагою евольвентного зачеплення перед циклоїдним, яке дуже чутливе до зміни відстані  $a_w$ .

### 18.3. Основні елементи і геометричні характеристики евольвентного зачеплення

Геометрію евольвентного зачеплення розглянемо за допомогою рис. 18.6.

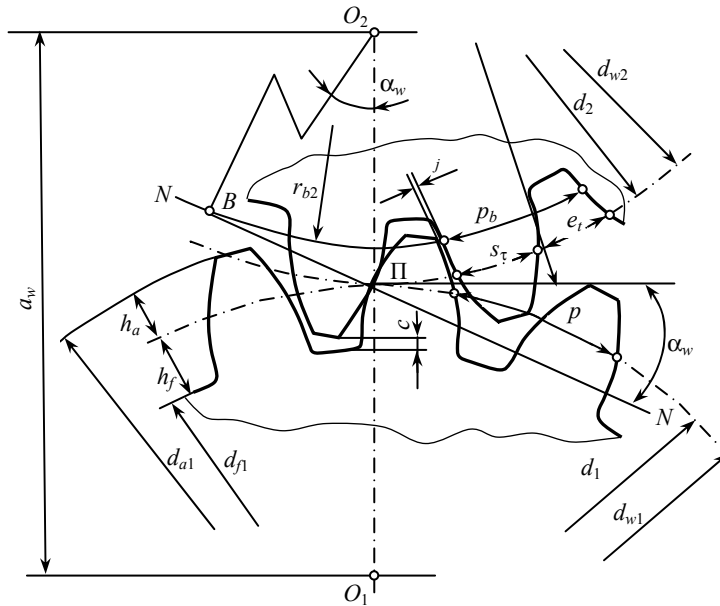


Рис. 18.6. Основні геометричні параметри евольвентного зачеплення

*Початкові кола.* При роботі зубчастої передачі з постійним передаточним відношенням, кола, що дотикаються одне до одного в полюсі зачеплення П, котяться одне по одному з рівними коловими швидкостями без ковзання. Ці кола називають *початковими*.

Якщо змінюється міжосьова відстань  $a_w$ , змінюються і діаметри початкових кіл шестірні і колеса. Отже, пара зубчастих коліс може мати безліч початкових кіл. В окремо взятого колеса початкового кола не існує. Діаметри початкових кіл  $d_{w1}$  і  $d_{w2}$ . Згідно з рис. 18.6 міжосьова відстань

$$a_w = \frac{d_{w1}}{2} + \frac{d_{w2}}{2} = \frac{d_{w1}(u+1)}{2}.$$

*Ділильне коло ( $d$ )*. Коло, на якому крок  $p$  і кут зачеплення  $\alpha_w$  відповідно рівні кроку і куту профілю  $\alpha$  інструментальної рейки, називається *ділильним*. Це коло належить окремо взятому колесу. При зміні міжосьової відстані діаметр ділильного кола залишається не змінним. Ділильні кола збігаються з початковими, якщо міжосьова відстань  $a_w$  пари зубчастих коліс дорівнює сумі радіусів ділильних кіл, тобто

$$a_w = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{d_1(u+1)}{2}.$$

У більшості зубчастих передач діаметри ділильних і початкових кіл збігаються, тобто  $d_1 = d_{w1}$  і  $d_2 = d_{w2}$ . Винятками є лише передачі з кутовою корекцією. Оскільки в кожного зубчастого колеса є тільки одне ділильне коло, то воно й покладене в основу визначення основних параметрів зубчастої передачі. Коло, яке обмежує висоту зубів, називається *колом вершин зубчастого колеса*, його діаметр позначають  $d_a$ .

Коло, яке обмежує западини зубів, називають *колом западин зубчастого колеса*, його діаметр позначають  $d_f$ . Між діаметрами основного  $d_b$  і ділильного  $d$  кіл є залежність

$$d_b = d \cos \alpha_w,$$

де  $\alpha_w$  — кут зачеплення, утворений лінією зачеплення і спільною дотичною, проведеною через полюс зачеплення до ділильних (початкових) кіл шестірні і колеса.

Для некоригованих коліс  $\alpha_w = 20^\circ$ .

*Коловий крок зубів  $p$*  (рис. 18.6).

Відстань між однойменними профілями двох сусідніх зубів по дузі ділильного кола називається *коловим кроком* зубів по ділильному колу.

Основний крок  $p_b$  вимірюють по основному колу. На основі другої і четвертої властивостей евольвенти відстань по нормалі між однойменними сторонами двох сусідніх зубів дорівнює кроку  $p_b$ . Із трикутника  $O_2BP$  (рис. 18.6) діаметр основного кола  $d_{b2} = 2r_{b2} = d_2 \cos \alpha_w$ , звідки

$$p_b = p \cos \alpha_w.$$

Товщина зуба  $s_i$  і ширина западин  $l_i$  по дузі ділильного кола для нормального колеса теоретично рівні. На практиці між зубами, що знаходяться в зачепленні, є невеликий зазор  $j$ , необхідний для нормального зачеплення, що компенсує можливі похибки при виготовленні коліс. По ділильному колу завжди

$$s_i + e_i = p.$$

Частина профілю зуба, обмежена ділильним колом і колом виступів, називається *головкою зуба*; її позначають  $h_a$ . Частина профілю зуба, обмежена ділильним колом і колом западин, називається *ніжкою зуба*; її позначають  $h_f$ .

Висота зуба  $h = h_a + h_f$ .

*Коловий модуль зубів.* Із визначення кроку випливає, що довжина ділильного кола дорівнює добутку колового кроку  $p$  на кількість зубів  $z$ :  $\pi d = pz$ , тоді

$$d = \frac{p}{\pi} z = mz,$$

де

$$m = \frac{p}{\pi}$$

або

$$m = \frac{d}{z}.$$

Отже,  $m = \frac{p}{\pi} = \frac{d}{z}$  — *коловий модуль зубів*, який є *основним параметром зубчастої передачі*. Отже, модуль зубів  $m$  є число міліметрів діаметра ділильного кола, що припадають на один зуб. Модуль вимірюють у міліметрах. Він використовується для розрахунків коліс. Щоб забезпечити уніфікацію інструменту, необхідно для виготовлення зубчастих коліс, а також для їх взаємозаміни,

значення модуля стандартизовані. Наведемо деякі зі значень модулів, що найчастіше використовують у силових передачах:

1-й ряд: 0,8; 1,0; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; і 8; 10; 12; ...; 80;

2-й ряд: 0,9; 1,125; 1,375; 1,75; 2,25; 2,75; 3,5; і 4,5; 5,5; 7,0; ...; 90.

Значенням першого ряду слід віддавати перевагу. Відрізок  $q_\alpha$  лінії зачеплення (див. рис. 18.5), обмежений колами виступів шестірни і колеса, називається *активною частиною лінії зачеплення*. Довжина зачеплення визначає початок і кінець зачеплення пари спряжених зубів.

Шлях, що проходить точка профілю зуба по ділильному (початковому) колу за час його фактичного зачеплення, називається *дугою зачеплення*.

Відношення довжини зачеплення  $q_\alpha$  до колового кроку  $p_b$  по основному колу називається *коефіцієнтом торцевого перекриття*  $\epsilon_\alpha$ :

$$\epsilon_\alpha = \frac{q_\alpha}{r_b} = \frac{q_\alpha}{p \cos \alpha}.$$

Для безперервної нормальної роботи зубчастої передачі потрібно, щоб довжина зачеплення була більшою від колового кроку  $p_b$ .

$$q_\alpha > p_\alpha \quad \text{і} \quad \epsilon_\alpha = \frac{q_\alpha}{p \cos \alpha} > 1.$$

Значення коефіцієнта перекриття показує, скільки пар зубів у середньому одночасно перебуває в зачепленні. При  $1 < \epsilon_\alpha < 2$  одна пара зубів безперервно перебуває в зачепленні, причому на початку і на кінці зачеплення будь-якої пари зубів на лінію зачеплення підходить друга пара зубів; отже, у зачепленні вже перебуває дві пари зубів.

Мінімально допустимі значення коефіцієнта перекриття залежать від точності виготовлення і складання зубчастих коліс.

Так, для зубчастих коліс, виготовлених за 6-м ступенем точності —  $\epsilon_\alpha^{\min} = 1,05$ , за 7-м ступенем точності —  $\epsilon_\alpha^{\min} = 1,08$ , за 8-м ступенем точності —  $\epsilon_\alpha^{\min} = 1,15$ , за 9-м ступенем точності —  $\epsilon_\alpha^{\min} = 1,35$ .

Чим більше коефіцієнт перекриття, тим більша кількість пар зубів одночасно перебуває в зачепленні і тим плавніше робота передачі. У прямозубих коліс  $1 < \epsilon_\alpha < 2$ ; у непрямозубих  $\epsilon_\alpha$  може бути значно більшим.



#### 18.4. Виготовлення зубчастих коліс

Зуби коліс нарізають на фрезерних або спеціальних верстатах. Існують два основні способи нарізування зубів:

1) *копіювання*, здійснюване на фрезерних верстатах за допомогою дискової (рис. 18.7, *а*) або пальцевої (рис. 18.7, *б*) фрез, різальні кромки яких мають профіль, що відповідає профілю западини зуба;

2) *обкатка*, що здійснюється на зубо-фрезерних або зубо-стругальних верстатах за допомогою відповідного різального інструменту, черв'ячної фрези (рис. 18.7, *в*), довбача (рис. 18.7, *г*), інструментальної рейки (рис. 18.7, *д*), які перебувають у безперервному зачепленні з заготовкою на всій стадії нарізування зубів. Спосіб обкатки забезпечує високу продуктивність і достатню точність виготовлення зубчастих коліс.

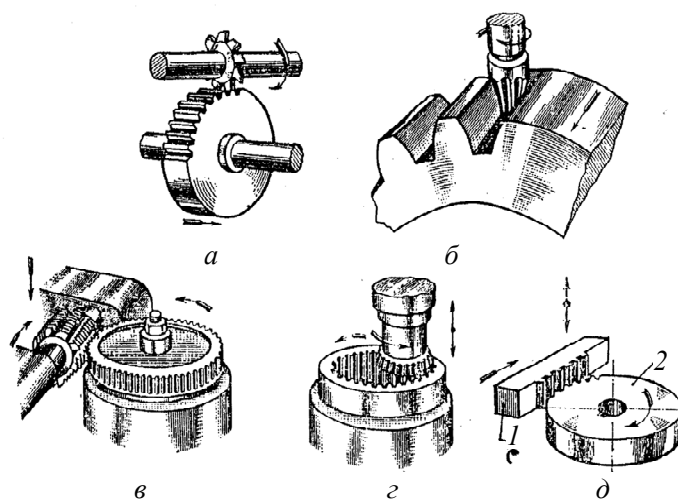


Рис. 18.7. Методи виготовлення зубчастих коліс:  
*а, б, в* — копіювання за допомогою дискової і пальцевої фрез відповідно;  
*в, г, д* — обкаткою відповідно за допомогою черв'ячної фрези,  
довбача, інструментальної рейки-гребінки

Крім нарізання зубів зубчастих коліс, останніми роками застосовують метод *гарячої накатки зубів*, яка проводиться на спеціальному зубонакатному верстаті (особливо з дрібним модулем).

Після нарізування зуби підлягають остаточній обробці: шліфуванню, шевінгуванню або притиранню, які забезпечують необхідні точність і шорсткість активних поверхонь зубів. Заготовки для виготовлення зубчастих коліс виробляють литтям, куванням або штампуванням.

### 18.5. Види руйнування і пошкодження зубів

Головними елементами, що визначають працездатність зубчастих передач, є зуби коліс. У разі неточного розрахунку, великих перевантажень, недбалого монтажу або порушення правил нормальної експлуатації передачі можливі поломки зубів, втомне викришування, абразивне спрацювання та заїдання робочих поверхонь зубів.

*Поломки зубів* пов'язані з напруженнями згину. Найчастіше спостерігається виламування кутів зубів (рис. 18.8, *a*) унаслідок концентрації напружень.

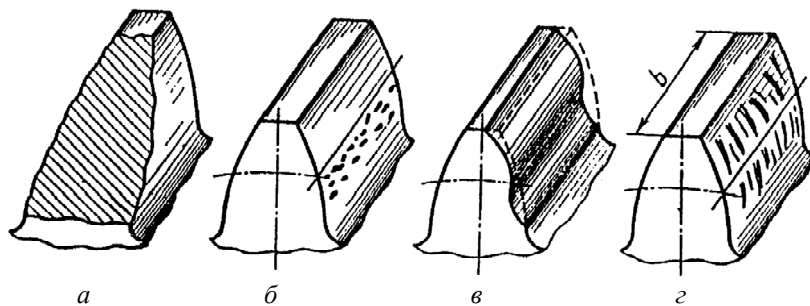


Рис. 18.8. Види руйнування зубів:  
*a* — виламування кутів; *b* — втомне викришування;  
*v* — абразивне спрацювання; *z* — заїдання

Причини поломки зубів: великі перевантаження ударної і навіть статичної дії, повторні перевантаження, які спричиняють малоциклового втомленість. Ці поломки можна попередити розрахунком на згинання, застосуванням корекції, збільшенням модуля, підвищенням точності виготовлення та монтажу передачі.

*Втомне викришування* від контактних напружень є основним видом пошкодження зубів для більшості закритих добре змащуваних і надійно захищених від забруднень зубчастих коліс. Викришу-

вання полягає в появі на активних поверхнях невеликих заглиблень, що нагадують віспинки, які з часом збільшуються і згодом перетворюються на раковини (рис. 18.8, б). Викришування починається поблизу полюсної лінії на ніжках зубів, де у зв'язку з малими швидкостями ковзання виникають великі сили тертя. Згодом воно поширюється на всю поверхню ніжок, а мастило запресовується в тріщини і сприяє викришуванню частинок металу. Щоб запобігти викришуванню, зуби розраховують на контактну витривалість, підвищують твердість матеріалу шляхом термообробки та ступінь точності.

*Абразивне спрацювання* є основною причиною виходу з ладу відкритих або закритих передач при недостатньому захисті від забруднень абразивними частинками та при недостатньому їх змащуванні (рис. 18.8, в). Наслідком цього явища є збільшення зазорів у зачепленні і поява шуму, зростання динамічних навантажень. Основні заходи попередження спрацювання: підвищення твердості поверхонь зубів, захист від забруднення, застосування спеціальних мастил.

*Заїдання* переважно спостерігаються у швидкісних, високонавантажених передачах (рис. 18.8, г) і є наслідком розриву масляної плівки в зоні контакту зубів, утворення молекулярного зчеплення (зварювання) поверхневих частинок матеріалу шестірні і колеса та утворення на поверхні менш міцного зуба ямок, борозенок при відносному русі зубів.

Основні заходи запобігання заїданню: підвищення міцності поверхонь зубів за рахунок хіміко-термічної обробки, застосування в мастилі присадок проти задирок, охолодження мастила в процесі роботи передачі.

## 18.6. Матеріали зубчастих коліс

Вибір матеріалів зубчастих коліс залежить від призначення передачі та умов її роботи. Зубчасті колеса виготовляють зі сталей, чавуну та неметалевих матеріалів.

Основними матеріалами для виготовлення зубчастих коліс є термічно оброблені сталі. Залежно від твердості (або термообробки) сталеві зубчасті колеса поділяють на дві основні групи.

*Перша група* — колеса твердістю  $HV \leq 350$  (нормалізовані або поліпшені), застосовують у слабо- і середньонавантажених переда-

ках. Матеріалами для коліс цієї групи слугують вуглецеві сталі 35, 40, 45, 50, 50Г, леговані сталі 40Х, 45Х, 40ХН та ін. Термообробку заготовок проводять до нарізання зубів.

Колеса твердістю  $HB \leq 350$  добре припрацьовуються і не схильні до крихкого руйнування при динамічних навантаженнях. Для рівномірного зношування зубів і кращого їх припрацювання твердість шестірні прямозубої передачі повинна бути більшою не менше ніж на 10...15 одиниць за Брінеллем:

$$H_1 \geq H_2 + (10...15) HB,$$

де  $H_1$  — твердість шестірні;  $H_2$  — твердість колеса.

Для косозубих передач твердість  $HB$  робочих поверхонь зубів шестірні бажано мати більшу.

*Друга група* — колеса твердістю  $HB > 350$ . При  $HB > 350$  твердість матеріалу визначають за шкалою Роквелла ( $10 HB \approx 1 HRC$ ). Висока твердість робочих поверхонь зубів досягається об'ємним і поверхневим загартуванням, цементацією, азотуванням, ціануванням. Ці види термообробки дозволяють у декілька разів підвищити навантажувальну здатність порівняно з поліпшеними сталями.

Колеса з твердістю  $HB > 350$  не припрацьовуються. Для таких зубчастих передач забезпечувати різницю міцностей зубів шестірні і колеса не потрібно.

Колеса з твердістю  $HB > 350$  нарізають до термообробки. Наступна термообробка (особливо об'ємне загартовування, цементація) спричиняє значне жолоблення зубів, яке доводиться виправляти операціями, що дорого коштують: шліфуванням, притиранням, обкатуванням.

Основні види термічної обробки зубчастих коліс такі.

*Нормалізація* — нагрівання матеріалу до температури, яка трохи перевищує температуру верхньої критичної точки сталі; витримання і поступове охолодження при цьому проводиться на повітрі разом з піччю. Вона знімає ливарні напруження і наклеп (після кування або штампування) й забезпечує рівномірну структуру матеріалу по всьому об'єму заготовки.

*Загартування* (об'ємне і поверхневе) створює високу твердість і міцність матеріалу. Істотним недоліком об'ємного загартування є те, що матеріал при цьому не зберігає в'язкої серцевини. У результаті поверхневого загартування зубчастих коліс малих і середніх

розмірів струмами високої частоти (СВЧ) та зубчастих коліс великих розмірів в ацетиленовому полум'ї зберігається в'язка серцевина при високій твердості ( $HRC = 45 \dots 55$ ) і міцності поверхневих шарів матеріалу. Загартовують якісні вуглецеві або леговані сталі. Вуглецеві сталі звичайної якості не загартовують.

*Поліпшення* — загартування з наступним високотемпературним відпусканням. Нормалізовані і поліпшені сталі (якісні вуглецеві і леговані) зазвичай застосовують для виготовлення зубчастих коліс індивідуального або малосерійного виробництва.

*Цементация* — насичення поверхневого шару вуглецем з наступним загартуванням (процес тривалий і дорогий). Цементация істотно підвищує ( $HRC = 56 \dots 63$ ) несучу здатність поверхневого шару зубів, забезпечує високу міцність на згинання. Цементации зазвичай підлягають низьковуглецеві сталі: хромисті (15X, 20X), хромонікелеві (12XН3А, 18X2Н4МА, 20X2Н2А) для відповідальних зубчастих коліс (авіація, транспорт), які працюють з переваженням або ударними навантаженнями, і безнікелеві (18ХГТ, 25ХГТ, 15ХФ). Глибина цементации 1,5...2 мм.

*Азотування* — насичення поверхневого шару азотом, забезпечує особливо високу твердість і зносостійкість поверхневих шарів зубів. Для азотованих коліс зазвичай застосовують молібденову сталь 38X2МЮА або сталі 38X2Ю і 35ХЮА, які не містять молібдену. Розширюється застосування м'якого азотування як більш продуктивного процесу з використанням сталей 40X2НМА, 40ХФА. У зв'язку з мінімальним жолобленням зуби після азотування не шліфують. Недоліками азотованих коліс є мала товщина зміцненого шару (0,2...0,5 мм), що не дає змоги застосовувати їх при ударних навантаженнях і при роботі з інтенсивним спрацюванням.

*Ціанування* — насичення поверхневого шару вуглецем і азотом для підвищення його механічних властивостей. Ціанований шар має малу товщину і порівняно легко руйнується при ударних навантаженнях.

*Ливарні сталі* застосовують для виготовлення великих зубчастих коліс ( $d_a \geq 500$  мм). Матеріалами слугують сталі 35Л...55Л. Ливарні колеса нормалізують. Механічні характеристики сталей наведено в довідковій літературі [12–15; 17].

*Чавуни* — застосовують для виготовлення зубчастих коліс тихідних відкритих передач. Рекомендуються чавуни СЧ18...СЧ35.

Зуби чавунних коліс добре припрацьовуються, але мають низьку міцність на згинання. *Неметалеві матеріали* застосовують у швидкохідних слабонавантажених передачах для шестерень, які працюють у парі з металевими колесами. Зубчасті колеса з пластмас характеризуються безшумністю і плавністю ходу. Найбільш поширеними пластмасами є текстоліт ( $E = 6000 \dots 8000$  МПа) та лінг-нофоль ( $E = 10\,000 \dots 12\,000$  МПа), а також поліаміди типу капрон.

### 18.7. Допустимі напруження

Розрахунки на контактну і згинальну міцність виконуються за допустимими напруженнями відповідно  $[\sigma_H]$  і  $[\sigma_F]$ . Ці напруження визначають з кривих утомленості, які будуються за результатами експериментальних досліджень.

*Допустимі контактні напруження*  $[\sigma_H]$ . Експериментально визначено, що контактна міцність робочих поверхонь зубів визначається в основному твердістю їх поверхонь. При тривалій роботі

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{H0}}{s_H} K_{HL},$$

де  $\sigma_{H0}$  — контактне напруження, що відповідає границі контактної витривалості на базі випробувань  $N_{H0}$  і залежить від твердості матеріалу;  $s_H$  — коефіцієнт безпеки.

Експериментальні значення  $\sigma_{H0}$ , що відповідають кількості циклів  $N_{H0}$ , наведено в табл. 18.1. Коефіцієнт циклічної довговічності, що враховує вплив терміну служби та режиму навантаження передачі

$$K_{HL} = \sqrt[6]{\frac{N_{H0}}{N_{HE}}} \geq 1 \leq K_{HLmax}. \quad (18.4)$$

Тут  $N_{H0}$  — база випробувань, що відповідає тривалій границі витривалості;  $N_{HE}$  — відносна еквівалентна кількість циклів напруження.

Для нормалізованих або поліпшених коліс  $K_{HLmax} = 2,6$ , для коліс з поверхневим загартуванням, азотуванням, цементацією  $K_{HLmax} = 1,8$ .

Таблиця 18.1

Експериментальні значення  $\sigma_{H0}$ 

Термообробка	Група сталі	$[\sigma_{H0}]$ , МПа	$[\sigma_{F0}]$ , МПа
Поліпшення	Вуглецева або легована	$1,8 HB_{сер} + 67$	$1,03 HB_{сер}$
Загартування СВЧ по контуру зубів ( $m \geq 3$ мм)	Легована	$14 HRC_{сер} + 170$	370
Загартування СВЧ наскрізне ( $m < 3$ мм)	Легована	$14 HRC_{сер} + 170$	310
Цементация і загартування	Легована	$19 HRC_{сер}$	480

**Примітка.**  $HB_{сер}$  і  $HRC_{сер}$  — середні значення з двох граничних твердостей.

У зубчастій передачі кількість циклів напружень зазвичай пов'язана з частотою обертання  $n$  ( $хв^{-1}$ ). Тоді при сталому навантаженні і зачепленні з одним колесом

$$N_{HE} = N_{FE} = N_{\Sigma} = 60tn, \quad (18.5)$$

де  $N_{\Sigma}$  — кількість циклів напружень зубів за весь термін служби;  $t$  — ресурс передачі, тобто сумарна кількість годин її роботи за розрахунковий термін служби (напрацювання передачі в годинах).

Кількість циклів напружень  $N_{H0}$ , що відповідає границі витривалості, визначається твердістю робочих поверхонь зубів (табл. 18.2) при сталому режимі навантаження.

Таблиця 18.2

## Твердість робочих поверхонь зубів при сталому режимі навантаження

Середня твердість поверхонь зубів	$HB_{сер}$	$\leq 200$	250	300	350	400	450	500	550	600
	$HRC_{сер}$	–	25	32	38	43	47	52	56	60
$N_{H0}$ , млн циклів		10	16,5	25	36,4	50	68	87	114	143

У більшості випадків  $N_{HE} > N_{H0}$ , тоді при постійному режимі навантаження  $K_{HL} = 1$ , що і враховує перший знак нерівності у формулі (18.4). Другий знак нерівності обмежує  $[\sigma_H]$  за умови відсутності пластичних деформацій на поверхні зубів або крихкого руйнування.

Циліндричні і конічні зубчасті передачі з прямими і непрямыми зубами розраховують за меншим значенням  $[\sigma_H]$  із отриманих для шестірні  $[\sigma_{H1}]$  і колеса  $[\sigma_{H2}]$ . Винятком є зубчасті передачі з непрямыми зубами при різниці середніх твердостей робочих поверхонь зубів шестерні і колеса  $HB_{1сер} - HB_{2сер} \geq 70$  і  $HB_{2сер} \leq 350$ . У цьому випадку передачі розраховують за середнім допустимим контактом напруження

$$[\sigma_H] = 0,45([\sigma_{H1}] + [\sigma_{H2}]),$$

при цьому  $[\sigma_H]$  має бути не більше за  $1,23 [\sigma_{H2}]$  для циліндричних косозубих і шевронних коліс та за  $1,15 [\sigma_{H2}]$  для конічних коліс з непрямыми зубами.

Допустимі напруження згинання  $[\sigma_F]$  для розрахунку на міцність при тривалій роботі визначають за залежністю

$$[\sigma_F] = \frac{\sigma_{F0}}{s_F} K_{FL}, \quad (18.6)$$

де  $\sigma_{F0}$  — напруження, що відповідає границі згинальної витривалості при кількості циклів напружень  $N_{F0} = 4 \cdot 10^6$  для всіх сталей (експериментальні значення  $\sigma_{F0}$  наведено в табл. 18.1;  $s_F$  — коефіцієнт безпеки (рекомендують  $s_F = 1,55 \dots 1,75$ );  $K_{FL}$  — коефіцієнт довговічності. При твердості  $HB \leq 350$

$$K_{FL} = \sqrt[6]{\frac{N_{F0}}{N_{\Sigma}}} \geq 1, \text{ але } \leq 2,08.$$

При твердості  $HB > 350$

$$K_{FL} = \sqrt[6]{\frac{N_{F0}}{N_{\Sigma}}} \geq 1, \text{ але } \leq 1,63.$$

$N_{\Sigma}$  визначають за формулою (18.5).

Для передач, що працюють при постійному навантаженні, приймають  $K_{FL} = 1$ .



## Запитання для самоконтролю

1. Які основні переваги і недоліки зубчастих передач порівняно з іншими передачами?
2. За якими ознаками класифікують зубчасті передачі?
3. У чому суть основної теореми зачеплення?
4. Що таке евольвента кола і якими властивостями вона визначається?
5. Що називають полюсом зачеплення, лінією зачеплення і кутом зачеплення?
6. Які кола зубчастих передач називаються початковими, а які ділильними? У яких зубчастих передачах вони збігаються?
7. Що називається кроком і модулем зубчастого зачеплення?
8. Які методи нарізання зубів застосовуються в машинобудуванні? Їх порівняльна характеристика.
9. У чому суть утомної поломки зубів? Які заходи допомагають запобігти поломці?
10. Чому в закритих передачах утомне викришування є основним видом руйнування поверхні зубів?
11. Які матеріали застосовуються для виготовлення зубчастих коліс?
12. Чому всі зубчасті колеса залежно від твердості зубів поділяють на дві групи?
13. Які основні види термічної обробки застосовують для зубчастих коліс?
14. Як визначають допустимі контактні і згинальні напруження?

## 19. ПРЯМОЗУБІ ЦИЛІНДРИЧНІ ПЕРЕДАЧІ

### 19.1. Основні геометричні співвідношення

Прямозубі передачі застосовують при невеликих і середніх ковлових швидкостях. Згідно з основною теоремою зачеплення для знижувальних передач передаточне число

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Для зубчастих передач відношення кількості зубів колеса  $z_2$  до кількості зубів шестірні  $z_1$  також називається *передаточним числом*  $u$  і використовують при розрахунку передач на міцність:

$$u = \frac{z_2}{z_1}.$$

Розміри зубчастого колеса виражають через модуль і кількість зубів (див. рис. 18.6). Діаметри ділильного і початкового кіл

$$d = d_w = mz,$$

діаметр вершин зубчастого колеса або шестірни

$$d_a = d + 2h_a = d + 2m,$$

діаметр западин зубчастого колеса або шестірни

$$d_f = d - 2h_f = d - 2,5m,$$

міжосьова відстань передачі

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{d_1(u+1)}{2} = \frac{mz_1(u+1)}{2} = \frac{mz_\Sigma}{2},$$

де  $z_\Sigma = z_1 + z_2$  — сумарна кількість зубів, знаючи яку знаходять

кількість зубів шестірни:  $z_1 = \frac{z_\Sigma}{u+1}$  і колеса  $z_2 = z_\Sigma - z_1$ .

## 19.2. Сили в зачепленні прямозубих передач

Сили взаємодії між зубами прийнято визначати в полюсі зачеплення П (рис. 19.1). Розподілене по контактній лінії навантаження замінюють рівнодійною силою  $F_n$ , яка напрямлена по лінії тиску (зачеплення) NN. Силами тертя в зачепленні нехтують, оскільки вони дуже малі.

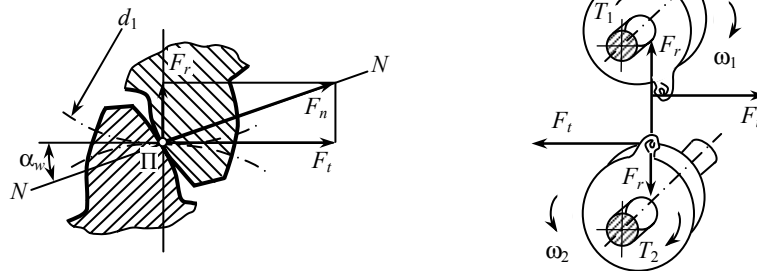


Рис. 19.1. Схема сил у прямозубій циліндричній передачі

Для розрахунків зубів, валів і підшипників силу  $F_n$  розкладають на *колову*  $F_t$  та *радіальну*  $F_r$ . Якщо значення крутного моменту  $T_1$  або  $T_2$  та ділильних діаметрів  $d_1$  або  $d_2$  визначені, діючі в зачепленні сили:

$$\text{колова } F_{t1} = \frac{2T_1}{d_1}, \text{ або } F_{t2} = \frac{2T_2}{d_2},$$

$$\text{але } F_{t1} = F_{t2} = F_t;$$

$$\text{радіальна } F_{r1} = F_{r2} = F_t \operatorname{tg} \alpha,$$

де  $\alpha = 20^\circ$  — кут зачеплення.

Напрямок дії колової сили ведучого колеса протилежний напрямку його обертання, а для веденого колеса збігається з напрямком його обертання. Вектори радіальних сил для коліс із зовнішнім зачепленням завжди напрямлені від центра зубчастого колеса, а для коліс із внутрішнім зачепленням до центра зубчастого колеса.

### 19.3. Розрахунок на контактну міцність циліндричних прямозубих зубчастих передач

*Контактна міцність* є основним критерієм працездатності переважної більшості зубчастих передач.

*Контактні напруження* виникають у місцях дотику двох тіл у тих випадках, коли розміри площі дотику малі порівняно з розмірами тіл (стик двох куль, двох циліндрів, кулі та площини).

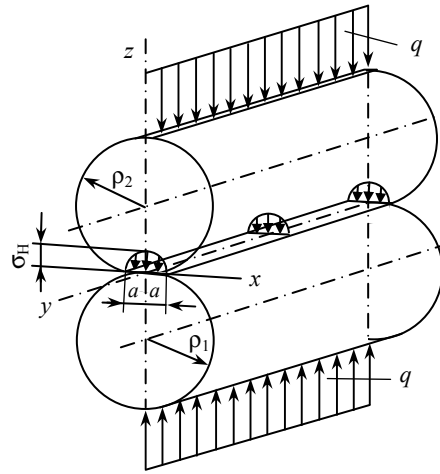
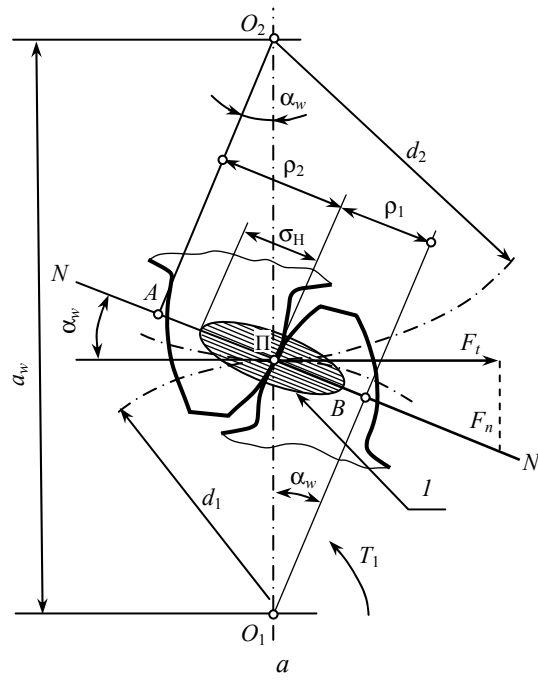
Виводячи розрахункову формулу контактної міцності, розглядають дотик зубів у полюсі зачеплення П (рис. 19.2), де відбувається однопарне зачеплення; при цьому контакт зубів розглядають як контакт двох циліндрів з радіусами, рівними радіусам кривизни евольвент зубів у полюсі зачеплення  $\rho_1$  і  $\rho_2$ . Контактні напруження в зоні зачеплення знаходять за формулою Герца

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{qE_{зв}}{\rho_{зв}}}, \quad (19.1)$$

де

$$E_{зв} = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}; \quad \frac{1}{\rho_{зв}} = \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2},$$

де  $q$  — нормальне навантаження на одиницю довжини лінії контакту зуба;  $E_{зв}$  та  $\rho_{зв}$  — зведені модуль пружності і радіус кривизни;  $E_1, E_2$  — модулі пружності відповідно шестірні та колеса (для сталей  $E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^5$ , МПа);  $\rho_1, \rho_2$  — радіуси кривизни евольвент зубів у точці контакту відповідно шестірні та колеса.



б

Рис. 19.2. Схема для розрахунку зубів на контактну міцність:  
 а — контакт двох зубів; б — контакт двох циліндрів

Знак «плюс» береться для зовнішнього зачеплення, знак «мінус» — для внутрішнього.

Для прямозубих передач

$$q = \frac{F_n}{b} K_H = \frac{F_t}{b \cos \alpha_w} K_H = \frac{2T_1}{d_1 b \cos \alpha_w} K_H,$$

де  $K_H$  — коефіцієнт навантаження, що дорівнює

$$K_H = K_{H\beta} K_{H\alpha},$$

тут  $K_{H\beta}$ ,  $K_{H\alpha}$  — коефіцієнти, які враховують відповідно нерівномірність розподілу навантаження за довжиною контактних ліній і додаткові динамічні навантаження.

Із трикутника  $O_1BP$

$$\rho_1 = \frac{d_1}{2} \sin \alpha_w.$$

Із трикутника  $O_2AP$

$$\rho_2 = \frac{d_2}{2} \sin \alpha_w.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{зв}} &= \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{d_1 \sin \alpha} \pm \frac{2}{d_2 \sin \alpha} = \\ &= \frac{2}{d_1 \sin \alpha} \pm \frac{2}{d_1 u \sin \alpha} = \frac{2}{d_1 \sin \alpha} \left( \frac{u \pm 1}{u} \right). \end{aligned}$$

Підставляючи у формулу (19.1) значення  $q$  та  $\rho_{зв}$  і замінюючи

$$\cos \alpha \sin \alpha_w = \frac{\sin 2\alpha_w}{2},$$

отримаємо

$$\sigma_H = 1,18 \sqrt{\frac{E_{зв} T_1 K_H}{d_1^2 b \sin 2\alpha_w} \left( \frac{u+1}{u} \right)} \leq [\sigma_H]. \quad (19.2)$$

Формулу (19.2) використовують для перевірного розрахунку, коли всі необхідні розміри й інші параметри передачі відомі.

При проектному розрахунку потрібно визначити розміри передачі за відомими основними характеристиками: крутним моментом  $T_1$  або  $T_2$ ; передаточним числом  $u$ . Для цього формулу (19.2) розв'язують відносно  $d_1$  або  $a_w$ .

Інші параметри оцінюють приблизно або приймають на основі рекомендацій із накопиченого досвіду.

У нашому випадку беремо:

$$d_{w1} = d_1, \alpha_w = \alpha = 20^\circ \quad (\sin 2\alpha \approx 0,6428),$$

де  $K_{H\alpha} \approx 1,15$  (середнє значення коефіцієнта).

При цьому зі складових коефіцієнта  $K_H$  залишається тільки  $K_{H\beta}$ .

Уведемо позначення  $\psi_b = b/d_1$  — коефіцієнт ширини шестірні відносно діаметра.

Підставляючи у формулу значення  $\psi_b$  і розв'язуючи відносно  $d_1$ , отримаємо

$$d_1 = 1,35 \sqrt[3]{\frac{E_{зв} T_1 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2} \psi_b \left( \frac{u \pm 1}{u} \right)}. \quad (19.3)$$

Розв'язуючи (19.3) відносно міжосьової відстані  $a_w$  і замінивши  $T_1 = \frac{T_2}{u}$ ;  $d_1 = \frac{2a_w}{(u \pm 1)}$  та позначивши  $\psi_a = \frac{b}{a_w}$  — коефіцієнт ширини колеса відносно міжосьової відстані. Після перетворень з урахуванням залежності

$$\psi_b = 0,5\psi_a(u \pm 1)$$

отримаємо формулу проектного розрахунку

$$a_w = 0,85(u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{E_{зв} T_2 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2} u^2 \psi_a}. \quad (19.4)$$

У формулі (19.4) винесемо з під знака радикала  $E_{зв}$  й отримаємо формулу, яка наведена в стандарті для сталених зубчастих коліс

$$a_w = K_a (u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2} u^2 \psi_a},$$

де  $K_a$  — допоміжний коефіцієнт (для сталених прямозубих коліс  $K_a = 49,5$ );  $T_2$  — крутний момент на валу колеса, Н·мм;  $[\sigma_H]$  — допустиме контактне напруження для менш міцного з пари зубчастих коліс, МПа.

Значення розрахункових коефіцієнтів  $\psi_a$ ,  $K_{H\beta}$  наведено в літературі [7; 8; 15–17].

## 19.4. Розрахунок на згин зубів циліндричних прямозубих передач

Одним із основних критеріїв працездатності зубчастих передач є міцність зубів на згин. Виводячи розрахункову формулу, роблять такі припущення:

1. Усе навантаження в зачепленні передається однією парою зубів і прикладене до вершини зуба (рис. 19.3).

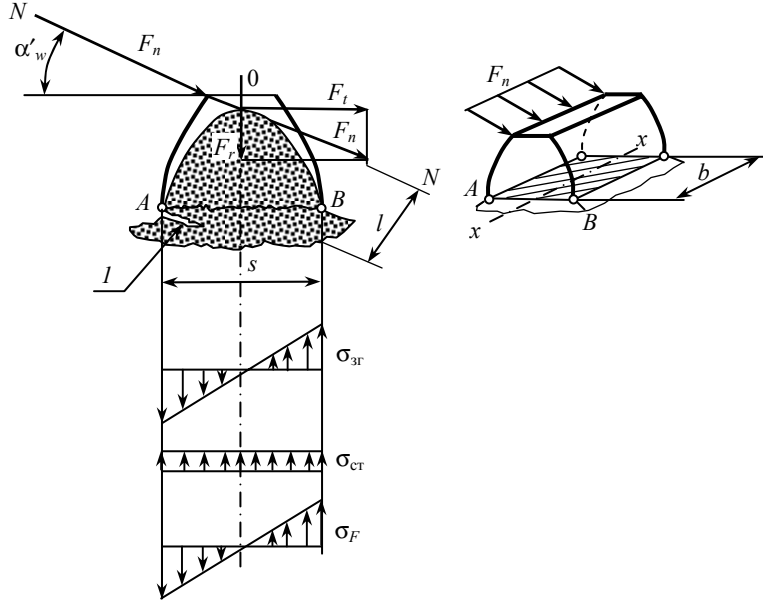


Рис. 19.3. Схема до розрахунку зубів на згин

2. Зуб розглядають як консольну балку, навантажену нормальною силою  $F_n$ , для якої справедлива гіпотеза плоских перерізів. Ця сила діє під кутом  $\alpha_w$  до осі зуба, викликаючи в його перерізах напруження згину і стиску. Силу  $F_n$  переносять по лінії зачеплення до лінії симетрії зуба і отриману точку  $O$  беруть за вершину параболи, яка визначає контур балки згину, рівного опору. Точки  $A$  і  $B$  дотику віток параболи та профіля зуба визначають положення небезпечного перерізу зуба на згин, тобто найбільші напруження згину з'являються біля кореня зуба в зоні переходу евольвенти в галтель. Перенесемо силу  $F_n$  на лінію симетрії зуба і розкладемо її на дві

складові: колову  $F_t = F_n \cos \alpha_w = \frac{2T}{d}$ , яка згинає зуб, і радіальну силу  $F_r = F_n \sin \alpha_w$ , яка стискає зуб. У цьому випадку  $\alpha_w$  — кут, що визначає напрям нормальної сили  $F_n$  до осі симетрії зуба. Кут  $\alpha'_w$  дещо більший за кут зачеплення  $\alpha_w$ . З невеликою похибкою візьмемо, що  $\alpha'_w \approx \alpha_w$ . За цих допущень найбільші сумарні напруження згину в небезпечному перерізі зуба  $AB$  визначаються:

$$\sigma_F = \sigma_{зг} - \sigma_{ст} = \left( \frac{F_t l}{W_x} - \frac{F_r}{A} \right) K_T \leq [\sigma_F], \quad (19.5)$$

де  $W_x = \frac{bs^2}{6}$  — осьовий момент опору на згин небезпечного перерізу ніжки зуба;  $A = bs$  — площа ніжки зуба;  $K_T$  — теоретичний коефіцієнт концентрації напруження (введемо для підвищення точності розрахунку).

Знак «мінус» у формулі (19.5) показує, що за розрахункові напруження беруть напруження на розтягнутій стороні зуба. На практиці переважно в цьому місці виникають тріщини утомного руйнування. Використовуючи геометричну подібність зубів різних модулів, параметри  $l$  і  $s$  виразимо через безрозмірні коефіцієнти:  $l = \mu m$ ;  $s = \nu m$ , де  $\mu$  і  $\nu$  — коефіцієнти, які враховують форму зуба;  $m$  — модуль зубів. Тоді після підстановки отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_F &= \left( \frac{6F_t \mu m}{b\nu^2 m^2} - \frac{F_r}{bs} \right) K_T = \left( \frac{6F_t \mu m}{b\nu^2 m^2} - \frac{F_t \operatorname{tg} \alpha}{b\nu m} \right) K_T = \\ &= \frac{F_t}{bm} \left( \frac{6\mu}{\nu^2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\nu} \right) K_T = \frac{F_t}{bm} Y_F, \end{aligned}$$

де  $Y_F = \left( \frac{6\mu}{\nu^2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\nu} \right) K_T$  — коефіцієнт форми зуба.

Ураховуючи нерівномірність розподілу навантаження по довжині зуба поправковим коефіцієнтом  $K_{F\beta}$  та додаткові динамічні навантаження в зачепленні коефіцієнтом  $K_{Fv}$ , отримаємо формулу для перевірного розрахунку прямозубих передач:

$$\sigma_F = \frac{F_t}{bm} Y_F K_{F\beta} K_{Fv} \leq [\sigma_F], \quad (19.6)$$



де  $b = b_2$  — ширина вінця колеса;  $K_{F\beta}$  — коефіцієнт нерівномірності навантаження по довжині зуба;  $K_{Fv}$  — коефіцієнт динамічного навантаження;  $[\sigma_F]$  — допустиме напруження згину.

Для проектних розрахунків щодо напружень згину формулу (19.6) розв'язують відносно модуля шляхом заміни

$$F_t = \frac{2T_2}{d_2} \text{ і } K_m = Y_F K_{F\beta} K_{Fv},$$

отримаємо

$$m \geq \frac{2T_2 K_m}{d_2 b_2 [\sigma_F]}, \quad (19.7)$$

де  $K_m$  — допоміжний коефіцієнт при середніх значеннях  $K_{F\beta}$ ;  $K_{Fv}$  та  $Y_F$ .

Для прямозубих передач  $K_m = 6,8$ ; для косозубих  $K_m = 5,8$ . Замість  $[\sigma_F]$  у формулу (19.7) підставляють менше із  $[\sigma_{F1}]$  та  $[\sigma_{F2}]$ . Отримане значення модуля закругляють у більший бік згідно зі стандартом.

### 19.5. Вибір основних параметрів і розрахункових коефіцієнтів

Розрахунок зубчастих передач на міцність починають із визначення розрахункового навантаження.

За розрахункове навантаження беруть максимальне значення питомого навантаження, яке розподілене по лінії контакту зубів:

$$q = \frac{F_n K}{l_\Sigma},$$

де  $F_n$  — нормальна сила в зачепленні;  $K = K_\beta K_v$  — коефіцієнт розрахункового навантаження;  $K_\beta$  — коефіцієнт концентрації навантаження;  $K_v$  — коефіцієнт динамічного навантаження;  $l_\Sigma$  — сумарна довжина контактних ліній зубів.

Модуль  $m$  закритих циліндричних прямозубих передач визначають за формулою (19.7). Але при такому розрахунку здебільшо-

го отримують зачеплення з дуже дрібними зубами. У зв'язку із цим значення  $m$  вибирають, спираючись на практичні рекомендації, а потім перевіряють на згин.

Істотним недоліком маломодульних коліс є значне підвищення вимог до точності і жорсткості передачі внаслідок концентрації навантаження, коли виникає реальна небезпека поломки зубів. Тому в силових передачах рекомендується брати  $m \geq 1,5$  мм;

Контактна витривалість зубів за такої міжосьової відстані  $a_w$  від модуля не залежить. Для зменшення шуму у швидкохідних передачах рекомендують брати  $z_1 \geq 25$ .

Для коефіцієнтів ширини зубчастого колеса  $\psi_a$  і  $\psi_d$  рекомендовані такі значення:  $\psi_a = \frac{b}{a_w}$  для швидкохідних ступенів циліндричних багатоступінчастих редукторів за симетричного розташування зубчастих коліс відносно опор  $\psi_a = 0,315 \dots 0,5$ ; за несиметричного  $\psi_a = 0,25 \dots 0,4$  і консольного розташування одного або обох коліс  $\psi_a = 0,20 \dots 0,25$ . Менші значення  $\psi_a$  беруть для передач з підвищеною твердістю активних поверхонь зубів ( $HRC > 45$ ).

$\psi_d = \frac{b}{d_1}$  — відношення ширини вінця до діаметра початкового (ділильного) кола шестірні рекомендується брати при  $HB \leq 350$  залежно від ступеня точності виготовлення:  $\psi_d = 1 \dots 1,5$  при 6 – 7-му ступенях точності,  $\psi_d = 0,75 \dots 1$  при 8-му і  $\psi_d = 0,75$  – 9-му і 10-му. Ступінь точності обирають залежно від призначення, умов роботи та колової швидкості передачі. При твердості робочих поверхонь зубів  $HRC > 45$  значення  $\psi_d$  беруть на 20...30 % меншим від значення для твердості  $HB \leq 350$ . У разі консольного розташування  $\psi_d = 0,4 \dots 0,7$ .

Вибір значень  $\psi_a$ ,  $\psi_d$  визначає якість роботи передачі, її ККД, габаритні розміри і вимоги до технології виготовлення, точності монтажу і жорсткості конструкції. Коефіцієнти  $\psi_a$  і  $\psi_d$  пов'язані залежністю

$$\psi_d = 0,5\psi_a(u \pm 1).$$

Коефіцієнти навантаження  $K_H = K_{H\beta}K_{Hv}$  і  $K_F = K_{F\beta}K_{Fv}$  враховують нерівномірність розподілу навантаження по ширині вінця при розрахунку на контактну і згинальну витривалість зубів.

Нерівномірність розподілу навантаження збільшує напруження  $\sigma_H$  і  $\sigma_F$  біля країв кутів зубів.

Застосування коліс зі зрізаними кутами зменшує цю небезпеку.

### ? Запитання для самоконтролю

1. У яких випадках застосовують циліндричні прямозубі передачі?
2. Як визначають геометричні розміри зубчастих коліс через модуль і кількість зубів?
3. Які сили діють у зачепленні прямозубих передач?
4. Як із формули Герца виводиться формула для розрахунку на контактну міцність робочих поверхонь зубів?
5. Як впливає на розміри передачі величина коефіцієнта ширини вінця колеса  $\psi_a$ ?
6. Які припущення роблять, виводячи розрахункову формулу на міцність при згині, та який порядок її виведення?
7. Чому вінця шестірні роблять більшими від ширини вінця колеса?

## 20. КОСОЗУБИ ЦИЛІНДРИЧНІ ПЕРЕДАЧІ

### 20.1. Загальні відомості

Циліндричні колеса, зуби яких розташовані по гвинтових лініях на ділільному циліндрі, називають *косозубими*. На відміну від прямозубої в косозубій передачі зуби входять у зачеплення не відразу всією довжиною, а поступово.

У косозубих передачах у зачепленні завжди знаходяться як мінімум дві пари зубів, причому зуби навантажуються поступово в міру заходу зубів у зачеплення. Це сприяє плавній роботі косозубої передачі, що зменшує шум і додаткові динамічні навантаження. Чим більший кут нахилу зуба  $\beta$  (рис. 20.1), тим вища плавність зачеплення. Недоліком косозубої передачі є наявність осьової сили  $F_a$ , яка намагається зсунути колесо вздовж осі вала.

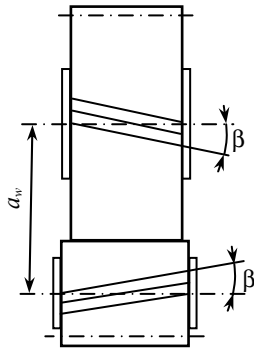


Рис. 20.1. Косозуба передача

Косозубі передачі застосовують у відповідальних механізмах при середніх і високих швидкостях. Не рекомендують їх застосовувати в тихохідних передачах, оскільки простіші і порівняно дешеві прямозубі циліндричні передачі досить добре працюють при низьких колових швидкостях.

## 20.2. Основні геометричні співвідношення косозубих передач

У косозубого колеса відстань між зубами може бути виміряна в торцевому або коловому ( $t-t$ ) та нормальному ( $n-n$ ) напрямках (рис. 20.2).

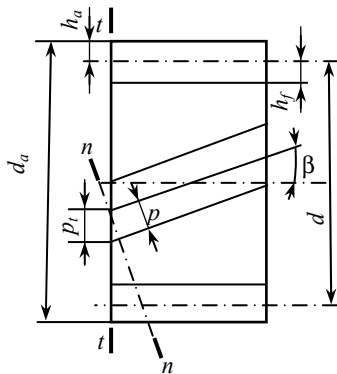


Рис. 20.2. Геометричні розміри косозубого колеса

У першому випадку отримаємо коловий крок  $p_t$ , у другому нормальний крок  $p$ . Різними в цих напрямках будуть і модулі зачеплення:

$$m_t = \frac{p_t}{\pi}; \quad m = \frac{p}{\pi},$$

де  $m_t$  і  $m$  — коловий і нормальний модулі зубів.

Згідно з рис. 20.2

$$p_t = \frac{p}{\cos \beta},$$

відповідно

$$m_t = \frac{m}{\cos \beta},$$

де  $\beta$  — кут нахилу зуба на ділільному циліндрі.

Для косозубих коліс  $\beta = 8 \dots 18^\circ$  (інколи до  $20^\circ$ ). За стандартний модуль у косозубих колесах беруть нормальний модуль  $m$ . Нормальний модуль  $m$  повинен відповідати стандартному значенню і є вихідною величиною при геометричних розрахунках.

Діаметри ділільного та початкового кіл

$$d = d_w = m_t z = \frac{mz}{\cos \beta}.$$

Косозубі колеса нарізують тим самим інструментом, що й прямозубі. Нахил зуба отримують поворотом нарізного інструмента на кут  $\beta$ . Профіль косоного зуба в нормальному перерізі відповідає вихідному контуру зубчастої інструментальної рейки, а відповідно, збігається з профілем прямого зуба модуля  $m$ .

Висота головки  $h_a$  та ніжки  $h_f$  дорівнюють:

$$h_a = m;$$

$$h_f = 1,25m.$$

Відповідно діаметри вершин зубів і западин зубчастих коліс:

$$d_a = d + 2m,$$

$$d_f = d - 2,5m.$$

Міжосьова відстань

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2 \cos \beta} = \frac{mz_{\Sigma}}{2 \cos \beta} = \frac{d_2(u+1)}{2u}.$$

Прямозубу передачу можна розглядати як косозубу, у якій  $\beta = 0$  і відповідно  $m = m_t$ .

### 20.3. Еквівалентне колесо

Профіль косоного зуба в нормальному перерізі  $A-A$  (рис. 20.3) відповідає вихідному контуру інструментальної рейки і збігається з профілем прямозубого колеса. Розрахунок косозубих коліс проводять, використовуючи параметри еквівалентного прямозубого колеса. Ділильне коло косозубого колеса в нормальному перерізі ( $A-A$ ) утворює еліпс з півосями  $c = r$  і  $l = \frac{r}{\cos \beta}$ , де  $r = \frac{d}{2}$  і відповідно  $c$  і  $l$  мала і велика півосі еліпса.

У зачепленні знаходяться зуби, які розташовані на малій осі еліпса, тому що друге колесо знаходиться на відстані

$$c = \frac{d}{2}.$$

Із геометрії еліпса

$$\rho_v = \frac{l^2}{c} = \frac{r}{\cos^2 \beta} = \frac{d}{2 \cos^2 \beta}.$$

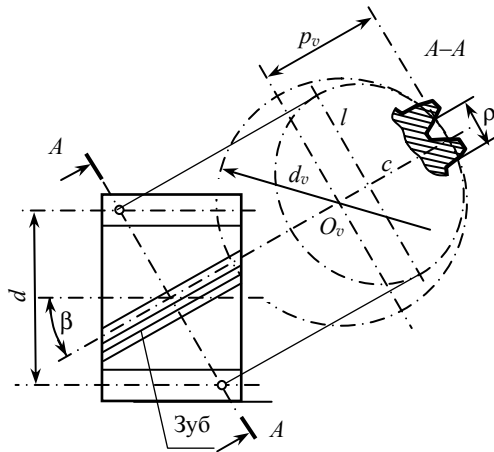


Рис. 20.3. Схема для визначення кількості зубів еквівалентного косозубого колеса

Відповідно до цього профіль зуба в нормальному перерізі збігається з профілем умовного прямозубого колеса, що називається *еквівалентним*, ділительний діаметр якого

$$d_v = 2\rho_v = \frac{d}{\cos^2 \beta} = \frac{m_t z}{\cos^2 \beta} = \frac{mz}{\cos^3 \beta} = mz_v,$$

звідси еквівалентна кількість зубів

$$z_v = \frac{z}{\cos^3 \beta}, \quad (20.1)$$

де  $z$  — дійсна кількість зубів косозубого колеса.

Із формули (20.1) видно, що зі збільшенням  $\beta$  зростає  $z_v$ .

Збільшення еквівалентних параметрів ( $d_v$  і  $z_v$ ) зі збільшенням кута  $\beta$  є однією з основних причин підвищення міцності косозубих передач.

#### 20.4. Сили в зачепленні

У косозубій циліндричній передачі нормальну силу  $F_n$  розкладають на три складові (рис. 20.4), які обчислюють за залежностями:

колову  $F_t = \frac{2T_1}{d_1}$ , або  $F_t = \frac{2T_2}{d_2}$ ;

радіальну

$$F_r = \frac{F_t \operatorname{tg} \alpha_w}{\cos \beta};$$

осьову

$$F_a = F_t \operatorname{tg} \beta.$$

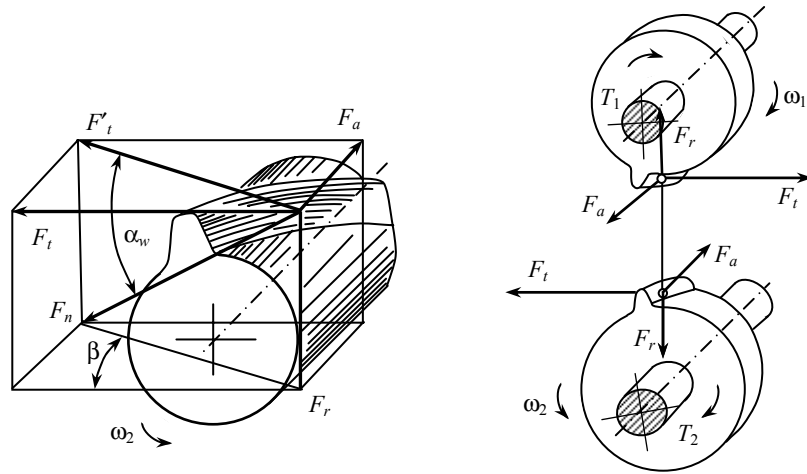


Рис. 20.4. Схема сил, що діють у косозубій передачі

Напрями колової та радіальної сил косозубої передачі такі самі, як і в прямозубій передачі. Осьова сила паралельна осі колеса, а напрям її вектора залежить від напрямку обертання колеса і напрямку лінії зуба. Осьова сила  $F_a$  додатково навантажує опори валів, тому її слід розцінювати як недолік косозубих передач. Зі зростанням кута  $\beta$  значення осьової сили  $F_a$  зростає, у зв'язку з чим для косозубих передач беруть  $\beta = 8 \dots 18^\circ$ .

### 20.5. Особливості розрахунку на контактну міцність косозубих передач

Унаслідок похилого розташування зубів у косозубому зачепленні одночасно знаходиться декілька (не менше двох) пар зубів, що значно зменшує навантаження на зуб. Похиле розташування зубів зменшує динамічні навантаження. Всі ці особливості важко врахувати, виводячи розрахункові формули. У зв'язку із чим розрахунок на міцність косозубих передач виконують за формулами еквівалентних прямозубих передач із включенням у них поправко-

вих коефіцієнтів. За умов міцності габаритні розміри косозубих передач виходять меншими порівняно з прямозубими.

Для косозубих передач з урахуванням залежності

$$l_{\Sigma} = \frac{b_w \varepsilon_{\alpha}}{\cos \beta}$$

нормальне навантаження на одиницю довжини контактних ліній

$$q = \frac{F_n K_H}{l_{\Sigma}},$$

де  $K_H = K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv}$ ;  $K_{H\alpha}$  — коефіцієнт нерівномірності навантаження пар зубів, які одночасно знаходяться в зачепленні.

За аналогією з прямозубим колесом, виражаючи значення  $d_1$  через діаметр еквівалентного колеса  $d_{v1}$ , отримуємо

$$\frac{1}{\rho_{зв}} = \frac{2 \cos^2 \beta}{d_1 \sin \alpha_w} \left( \frac{u \pm 1}{u} \right).$$

Підставляючи у формулу Герца значення  $q$  і  $\rho_{зв}$ , дістанемо

$$\sigma_H = 1,18 z_{H\beta} \sqrt{\frac{E_{зв} T_1 K_H}{d_1^2 b \sin 2\alpha_w} \left( \frac{u \pm 1}{u} \right)} \leq [\sigma_H], \quad (20.2)$$

де  $z_{H\beta} = \sqrt{\frac{K_{H\alpha} \cos^2 \beta}{\varepsilon_a}}$  — коефіцієнт підвищення міцності косозубих

передач порівняно з прямозубими.

При проектному розрахунку значення  $\beta$  і  $\varepsilon_a$ , колдової швидкості і ступеня точності ще невідоме. У зв'язку з цим значення  $z_{H\beta}$  у формулі (20.2) оцінюють приблизно.

За деяких середніх значень  $\beta = 12^\circ$ ,  $\varepsilon_a = 1,5$  і  $K_{H\alpha} = 1,1$  отримаємо  $z_{H\beta} \approx 0,85$ . Розв'язуючи формулу (20.2) відносно  $d_{v1}$  і  $a_w$ , одержимо:

$$d_1 \approx 1,2 \sqrt[3]{\frac{E_{зв} T_1 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2 \psi_b} \left( \frac{u \pm 1}{u} \right)},$$

$$a_w \approx 0,75 (u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{E_{зв} T_2 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2 u^2 \psi_a}}.$$



Виводячи із-під знака радикала  $E_{зв}$ , отримаємо формулу, яку наведено в стандарті:

$$a_w = K_a (u \pm 1)^3 \sqrt{\frac{T_2 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2 u^2 \psi_a}},$$

де  $K_a = 43$ .

## 20.6. Розрахунок на згин косозубих передач

Виконується аналогічно до розрахунку прямозубої передачі і визначається з умови міцності на згин зубів колеса і шестірні косозубої передачі

$$\sigma_{F2} = Y_{F2} Y_{\beta} \frac{F_t}{b_2 m} K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{Fv} \leq [\sigma_F]_2;$$

$$\sigma_{F1} = \sigma_{F2} \frac{Y_{F1}}{Y_{F2}} \leq [\sigma_F]_1,$$

де  $Y_{F1}$  і  $Y_{F2}$  — коефіцієнти форми зуба, які вибирають за еквівалентною кількістю зубів  $z_v$ ;  $Y_{\beta} = 1 - \frac{\beta}{140^\circ}$  — коефіцієнт, що враховує нахил зуба;

$K_{F\alpha}$  — коефіцієнт, який урахує розподіл навантаження між зубами, для косозубих коліс при  $v \leq 10$  м/с і 7...8-му ступені точності  $K_{F\alpha} = 0,81 \dots 0,91$ ;  $K_{F\beta}$  — коефіцієнт, який урахує розподіл навантаження по ширині вінця;  $K_{Fv}$  — коефіцієнт, який урахує динамічне навантаження в зачепленні.

Для косозубих передач при  $v \leq 10$  м/с  $K_{Fv} = 1,2$  при твердості зубів колеса  $HВ \leq 350$ ;  $K_{Fv} = 1,1$  при  $HВ > 350$ .

### Приклад 20.1

*Задача:* Розрахувати косозубу циліндричну зубчасту передачу редуктора за такими даними: потужність на ведучому валу  $P_1 = 15$  кВт; кутова швидкість  $\omega_1 = 150$  рад/с; передаточне відношення  $u = 5$ ; передача нереверсивна; строк служби передачі  $h = 20 \cdot 10^3$  год.

*Розв'язання*

1. *Матеріали зубчастих коліс.*

Для виготовлення шестірні та колеса обираємо відносно дешеву леговану сталь 40X із термообробкою — поліпшення (дод. 6). Беремо для шестірні твердість поверхні зубів  $H_1 = 269 \dots 302$  НВ (найбільш імовірна твердість  $H_1 = 280$  НВ); для колеса твердість поверхні зубів  $H_2 = 235 \dots 262$  НВ (найбільш імовірна твердість  $H_2 = 245$  НВ).

2. Допустимі напруження для зубів коліс

2.1. Допустимі контактні напруження визначаємо за формулою

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{H0} K_{HL}}{s_H},$$

де  $\sigma_{H0}$  — границя контактної витривалості зубів шестірні та колеса;  $K_{HL}$  — коефіцієнт довговічності;  $s_H$  — коефіцієнт запасу міцності (коефіцієнт безпеки).

Границі контактної витривалості зубів шестірні та колеса будуть такими:

$$\sigma_{H01} = 2H_1 + 70 = 2 \cdot 280 + 70 = 730 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{H02} = 2H_2 + 70 = 2 \cdot 245 + 70 = 560 \text{ МПа}.$$

Коефіцієнт довговічності визначаємо за формулою

$$K_{HL} = \sqrt[6]{\frac{N_{H0}}{N_{HE}}},$$

де  $N_{H0}$  — база випробувань для матеріалу шестірні та колеса;  $N_{HE}$  — еквівалентне число циклів навантаження зубів шестірні та колеса.

Бази випробувань для матеріалу шестірні та колеса будуть такими:

$$N_{H01} = 30H_1^{2.4} = 30 \cdot 280^{2.4} = 2,24 \cdot 10^7;$$

$$N_{H02} = 30H_2^{2.4} = 30 \cdot 245^{2.4} = 1,63 \cdot 10^7.$$

Сумарне число циклів навантаження зубів шестірні та колеса за строк служби передачі

$$N_{\Sigma 1} = 573 w_1 h = 573 \cdot 153 \cdot 20 \cdot 10^3 = 17,5 \cdot 10^8;$$

$$N_{\Sigma 2} = 573 w_2 h = 573 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 10^3 = 3,5 \cdot 10^8.$$

Визначаємо еквівалентне число циклів навантаження зубів коліс за формулами

$$N_{HE1} = K_{HE} N_{\Sigma 1} = 0,18 \cdot 17,5 \cdot 10^8 = 3,15 \cdot 10^8;$$

$$N_{HE2} = K_{HE} N_{\Sigma 2} = 0,18 \cdot 3,5 \cdot 10^8 = 0,63 \cdot 10^8,$$

де  $K_{HE}$  — коефіцієнт інтенсивності навантаження.

Для середнього режиму навантаження  $K_{HE} = 0,18$ ; для важкого режиму —  $K_{HE} = 0,5$  та для легкого режиму —  $K_{HE} = 0,06$ .

Якщо кількість еквівалентного числа циклів навантаження більша від базової, то беруть  $K_{HL} = 1,0$ .

Допустимі контактні напруження для зубів шестірні та колеса при коефіцієнті запасу міцності  $s_H = 1,1$  знаходимо за формулами

$$[\sigma_H]_1 = \frac{\sigma_{H01} K_{HL}}{s_H} = \frac{730 \cdot 1,0}{1,1} = 664 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_H]_2 = \frac{\sigma_{H02} K_{HL}}{S_H} = \frac{560 \cdot 1,0}{1,1} = 509 \text{ МПа}.$$

Для зубів косозубої передачі розрахункове допустиме контактне напруження приймають як

$$[\sigma_H] = 0,45([\sigma_H]_1 + [\sigma_H]_2) = 0,45(664 + 509) = 528 \text{ МПа}.$$

2.2. Допустимі напруження при згині для бази випробувань  $N_{F0} = 4 \cdot 10^6$

Визначаємо базове число циклів напружень при згині:

$$\sigma_{F01} = 1,03 HB_{cp1} = 1,03 \cdot 285,5 = 294,07 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{F02} = 1,03 HB_{cp2} = 1,03 \cdot 248,5 = 256 \text{ МПа}.$$

Еквівалентні числа циклів навантаження зубів коліс для розрахунків на втомну міцність при згині

$$N_{FE1} = K_{FE} N_{\Sigma 1} = 0,07 \cdot 17,5 \cdot 10^8 = 12,25 \cdot 10^7;$$

$$N_{FE2} = K_{FE} N_{\Sigma 2} = 0,07 \cdot 3,5 \cdot 10^8 = 2,45 \cdot 10^7,$$

де  $K_{FE}$  — коефіцієнт інтенсивності навантаження для відповідного режиму навантаження; для середнього нормального режиму  $K_{FE} = 0,07$ ; для важкого режиму  $K_{FE} = 0,3$ , для легкого режиму  $K_{FE} = 0,02$ .

Оскільки  $N_{F0} < N_{FE1}$  і  $N_{F0} < N_{FE2}$ , то коефіцієнт довговічності для зубів шестірні та колеса  $K_{FL} = 1,0$ . Допустимі напруження на згин для зубів шестірні та колеса при коефіцієнті запасу  $S_F = 1,75$

$$[\sigma_F]_1 = \frac{\sigma_{F01} K_{FL}}{S_F} = \frac{294,07 \cdot 1,0}{1,75} = 168,04 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_F]_2 = \frac{\sigma_{F02} K_{FL}}{S_F} = \frac{256 \cdot 1,0}{1,75} = 146,3 \text{ МПа}.$$

### 3. Проектний розрахунок передачі

3.1. Визначаємо міжосьову відстань з умови контактної міцності робочих поверхонь зубів за формулою:

$$a_w \geq K_a (u + 1) \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2 u^2 \psi_a}} \text{ мм},$$

де  $a_w$  — міжосьова відстань;  $K_a$  — числовий коефіцієнт, який дорівнює для косозубих передач —  $K_a = 43$ ;  $T_2$  — номінальний крутний момент на веденому валу;  $K_{H\beta}$  — коефіцієнт концентрації навантаження;  $u$  — передаточне відношення зубчастої передачі;  $[\sigma_H]$  — допустиме контактне напруження;  $\psi_a$  — коефіцієнт ширини вінця зубчастого колеса.

3.2. Визначаємо номінальний крутний момент на ведучому та веденому валах

$$T_1 = \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{15 \cdot 10^3}{150} = 100 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_2 = T_1 \eta = 100 \cdot 5 \cdot 0,97 = 485 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

де  $\eta = 0,97$  — коефіцієнт корисної дії зубчастої передачі.

Для проектного розрахунку попередньо беремо  $\psi_a = 0,4$  і відповідно  $\psi_a = 0,5$ ,  $\psi_a (u + 1) = 0,5 \cdot 0,4(5 + 1) = 1,2$ .

Із табл. дод. 7 знаходимо значення коефіцієнта  $K_{H\beta} = 1,07$ .

### 3.3. Визначаємо міжосьову відстань передачі

$$a_w = 43(5 + 1) \sqrt[3]{\frac{485 \cdot 10^3 \cdot 1,07}{528^2 \cdot 5^2 \cdot 0,4}} = 147,3 \text{ мм}.$$

Беремо значення міжосьової відстані  $a_w = 160$  мм зі стандартного ряду: 40, 50, 63, 71, 80, 90, 100, 112, 125, 140, 160, 180, 200, 220, 250, 280, 315 мм.

3.4. Знаходимо попередні розміри колеса: ділительний діаметр  $d_2$  та ширину вінця колеса  $b_2$ :

$$d_2 = \frac{2a_w u}{u+1} = \frac{2 \cdot 160 \cdot 5}{5+1} = 266,7 \text{ мм}, \quad b_2 = \psi_a a_w = 0,4 \cdot 160 = 64 \text{ мм}.$$

3.5. Визначаємо модуль зачеплення з умови міцності зубів коліс на згинання

$$m \geq \frac{2T_2 K_m}{d_2 b_2 [\sigma]_F} \text{ мм},$$

де  $K_m = 5,8$  для косозубої передачі;

$$m \geq \frac{2 \cdot 485 \cdot 10^3 \cdot 5,8}{266,7 \cdot 64 \cdot 252} = 1,3 \text{ мм}.$$

Для циліндричних зубчастих передач нормальний модуль вибирають в інтервалі  $m = (0,01 \dots 0,02)a_w$ ,  $m = (0,01 \dots 0,02)160 = 1,6 \dots 3,2$  мм.

Потім його вирівнюють до стандартного значення:

1-й ряд: 1; 1,25; 2; 2,5; 3; 4; 6; 8; 10; 12; 16; 20.

2-й ряд: 1,375; 1,75; 2,25; 2,75; 3,5; 4,5; 7; 9; 11; 14; 18; 22.

Першому ряду слід надати перевагу перед другим. Остаточно беремо значення модуля  $m = 3$  мм.

3.6. Попередньо визначаємо кут нахилу лінії зубів коліс

$$\beta_{\min} = \arcsin \frac{4m}{b_2} = \arcsin \frac{4 \cdot 3}{64} = 10^\circ 48'.$$

3.7. Визначаємо сумарну кількість зубів коліс

$$z_\Sigma = \frac{2a_w \cos \beta_{\min}}{m} = \frac{2 \cdot 160 \cdot 0,982}{3} = 104,77.$$

Беремо  $z_\Sigma = 105$ .

3.8. Визначаємо фактичне значення кута нахилу лінії зубів коліс:

$$\beta = \arccos \frac{z_\Sigma m}{2a_w} = \arccos \frac{105 \cdot 3}{2 \cdot 160} = 10^\circ 8'.$$

Кут нахилу зубів у косозубій передачі приймають з інтервалу  $\beta = 8 \dots 18^\circ$ .

3.9. Знаходимо кількість зубів шестірні та колеса

$$z_1 = \frac{z_\Sigma}{u+1} = \frac{105}{5+1} = 17,5,$$

округлюємо до цілого числа  $z_1 = 17$  і виконуємо перевірку

$$z_1 \geq 17 \cos^3 \beta = 17 \cdot 0,984^3 = 16,19 ;$$

$$z_2 = z_\Sigma - z_1 = 105 - 17 = 88 .$$

$$3.10. \text{ Фактичне передаточне відношення } u_\phi = \frac{z_2}{z_1} = \frac{88}{17} = 5,17$$

Визначаємо похибку передаточного відношення

$$\Delta u = \frac{u_\phi - u}{u} 100 \% = \frac{5,17 - 5}{5} 100 \% = 3,4 \% < [\Delta u] = 4 \% .$$

Після визначення кількості зубів потрібно перевірити міжосьову відстань за формулою

$$a_w = \frac{m(z_1 + z_2)}{2 \cos \beta} = \frac{3(17 + 88)}{2 \cdot 0,984} = 160,06 \text{ мм} .$$

3.11. Визначаємо геометричні параметри зубчастих кіл:

– діаметри ділільних кіл:

$$d_1 = \frac{mz_1}{\cos \beta} = \frac{3 \cdot 17}{0,984} = 51,8 \text{ мм} ;$$

$$d_2 = 2a_w - d_1 = 2 \cdot 160 - 51,8 = 268,2 \text{ мм} ;$$

– діаметри кіл вершин зубів:

$$d_{a1} = d_1 + 2m = 51,8 + 2 \cdot 3 = 57,8 \text{ мм} ;$$

$$d_{a2} = d_2 + 2m = 268,2 + 2 \cdot 3 = 274,2 \text{ мм} ;$$

– діаметри кіл западин зубів:

$$d_{f1} = d_1 - 2,5m = 51,8 - 2,5 \cdot 3 = 44,3 \text{ мм} ;$$

$$d_{f2} = d_2 - 2,5m = 268,2 - 2,5 \cdot 3 = 260,7 \text{ мм} ;$$

– ширину вінця колеса:

$$b_2 = \Psi_a a_w = 0,4 \cdot 160 = 64 \text{ мм} ;$$

– ширину вінця шестірни:

$$b_1 = 1,12 \cdot b_2 = 1,12 \cdot 64 = 71,68 \text{ мм} .$$

Отримані значення  $b_1$  і  $b_2$  округляють до стандартного значення з ряду: 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 55; 60; 63; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100.

Остаточню беремо:  $b_1 = 75$  мм і  $b_2 = 65$  мм.

### 3.12. Визначаємо сили, що діють у зачепленні зубів

Для циліндричної передачі знаходять:

$$\text{колову силу: } F_t = \frac{2T_2}{d_2},$$

де  $T_2$  — крутний момент, який передається зубчастим колесом;

$d_2$  — діаметр ділительного кола колеса

$$F_t = \frac{2 \cdot 485 \cdot 10^3}{268,2} = 3616,7 \text{ Н};$$

радіальну силу:

$$F_r = \frac{F_t \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} = \frac{3616,7 \cdot 0,364}{0,984} = 1337,88 \text{ Н},$$

де  $\alpha = 20^\circ$  — кут зачеплення;

осьову силу:

$$F_a = F_t \operatorname{tg} \beta = 3616,7 \cdot 0,1835 = 663,66 \text{ Н}.$$

3.13. Виконуємо перевірний розрахунок зубів коліс за контактними напруженнями:

$$\sigma_H = \frac{K_a}{a_w u_\phi} \sqrt{\frac{T_2 K_H (u_\phi + 1)^3}{b_2}} \leq [\sigma_H],$$

де числовий коефіцієнт:  $K_a = 310$  — для циліндричних прямозубих передач;  $K_a = 270$  — для циліндричних косозубих передач.

Коефіцієнт навантаження  $K_H$  визначають як добуток трьох коефіцієнтів:  $K_H = K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv}$ , де  $K_{H\alpha}$  — коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу навантаження між зубами: для прямозубої передачі —  $K_{H\alpha} = 1,0$ ; для косозубої передачі  $K_{H\alpha}$  залежить від ступеня точності й колової швидкості зубчастих коліс, визначають із таблиці дод. 8;  $K_{Hv}$  — динамічний коефіцієнт.

Колову швидкість зубчастого колеса визначають за формулою:

$$v = \frac{\pi d_2 n_2}{60} = \frac{3,14 \cdot 268,2 \cdot 10^{-3} \cdot 286,6}{60} = 4,02 \text{ м/с},$$

де  $n_2$  — частота обертання вала колеса, об/хв;

$$n_2 = \frac{30 \cdot \omega_2}{\pi} = \frac{30 \cdot 30}{3,14} = 286,6 \text{ об/хв}.$$

Кутова швидкість зубчастого колеса

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{u} = \frac{150}{5} = 30 \text{ р/с.}$$

Ступінь точності виготовлення зубчастих коліс визначасмо з таблиці дод. 9. При  $v = 4,02$  м/с отримуємо 8-й ступінь точності і маємо:  $K_{H\alpha} = 1,09$ .

Коефіцієнт  $K_{Hv}$  враховує динамічні навантаження, що виникають у зачепленні, його визначають із таблиці дод. 11  $K_{Hv} = 1,0$

$$K_H = 1,09 \cdot 1,07 \cdot 1,0 = 1,166.$$

Знаходимо величину діючих контактних напружень

$$\sigma_H = \frac{270}{160 \cdot 5,17} \sqrt{\frac{485 \cdot 10^3 \cdot 1,166(5,17+1)^3}{65}} = 466,6 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_H = 466,6 \text{ МПа} < [\sigma_H] = 528 \text{ МПа.}$$

3.14. Виконуємо перевірний розрахунок зубів коліс на згин:

$$\sigma_F = \frac{F_t K_F Y_F Y_\beta}{bm} \leq [\sigma]_F,$$

де  $K_F$  — коефіцієнт навантаження;  $Y_F$  — коефіцієнт форми зубів;  $Y_\beta$  — коефіцієнт нахилу зубів.

Коефіцієнт навантаження  $K_F$  визначають за формулою

$$K_F = K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{Fv},$$

де  $K_{F\alpha}$  — коефіцієнт, що враховує розподіл навантаження між зубами.

Для косозубих коліс  $K_{F\alpha} = 0,92$ ; для прямозубих  $K_{F\alpha} = 1,0$ .

$K_{F\beta}$  — коефіцієнт концентрації навантаження знаходять із таблиці дод. 13  $K_{F\beta} = 1,14$ .

$K_{Fv}$  — коефіцієнт, що враховує динамічну дію навантаження визначають із таблиці дод. 14  $K_{Fv} = 1,2$

$$K_F = 0,92 \cdot 1,14 \cdot 1,2 = 1,258.$$

Для косозубих циліндричних коліс коефіцієнт  $Y_F$  отримують за еквівалентною кількістю зубів коліс, які знаходять за формулами:



$$z_{E1} = \frac{z_1}{\cos^3 \beta} = \frac{17}{0,984^3} = 17,88; \quad z_{E2} = \frac{z_2}{\cos^3 \beta} = \frac{88}{0,984^3} = 92,36.$$

Значення коефіцієнтів  $Y_F$  знаходять із таблиці дод. 12:

$$Y_{F1} = 4,2; \quad Y_{F2} = 3,6.$$

Перевірний розрахунок виконують для зубів одного з коліс, для якого відношення  $[\sigma_F]/Y_F$  менше:

$$\text{для шестірні } \frac{[\sigma_F]_1}{Y_{F1}} = \frac{168,04}{4,2} = 40,01;$$

$$\text{для колеса } \frac{[\sigma_F]_2}{Y_{F2}} = \frac{146,3}{3,6} = 40,64.$$

Коефіцієнт нахилу зубів  $Y_\beta$  визначаємо за формулою

$$Y_\beta = 1 - \frac{\beta^0}{140} = 1 - \frac{10,14}{140} = 0,928,$$

знаходимо діючі напруження згину

$$\sigma_{F1} = \frac{3616,7 \cdot 1,258 \cdot 4,2 \cdot 0,928}{75 \cdot 3} = 78,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{F1} = 78,8 \text{ МПа} < [\sigma_F]_1 = 168,04 \text{ МПа}.$$

### Запитання для самоконтролю

1. Які переваги косозубих передач порівняно з прямозубими?
2. Які модулі зачеплення розрізняють для косозубих коліс і яка залежність між ними? Який модуль стандартизований і чому?
3. Які сили діють у зачепленні косозубої передачі?
4. Яке колесо називають еквівалентним? Для чого використовується еквівалентне колесо?
5. Як впливає на роботу косозубої передачі зміна кута нахилу зубів? Які значення цих кутів рекомендують?
6. Як впливає зміна діаметра зубчастих коліс на їх контактну міцність?

## 21. КОНІЧНІ ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ

### 21.1. Загальні відомості

*Зубчаста передача*, осі валів якої перетинаються під деяким кутом, називається *конічною* (див. рис. 18.1, *д*, *е*). На практиці найпоширеніші передачі з кутом  $\Sigma = 90^\circ$ .

*Основною перевагою* конічних передач є можливість передачі крутного моменту під кутом.

*Недоліки*: Для нарізання коліс потрібні спеціальні верстати та інструменти. Крім допусків на розміри зубів у цих передачах потрібно витримувати допуски на кути  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , а при монтажі забезпечувати збіг вершин конусів. Конічні зубчасті передачі складніше виготовляти і складати, ніж циліндричні. Оскільки осі валів перетинаються в просторі, одне з конічних коліс доводиться встановлювати консольно, здебільшого — шестірню. Це призводить до збільшення нерівномірності розподілення навантаження за довжиною зуба. За рахунок дії осьових сил конічні зубчасті колеса доводиться ускладнювати конструкцію опорних вузлів. Підшипники вала шестірні, переважно, розташовують у спеціальному стакані, щоб забезпечити можливість осьового регулювання зачеплення коліс при складанні.

За дослідними даними навантажувальна здатність конічної прямозубої передачі становить 85 % від циліндричної.

Незважаючи на недоліки, конічні передачі широко застосовують у машинобудуванні там, де виникає потреба передавати момент від одного вала до іншого з пересічними осями (привід заднього моста автомобіля, диференціал, редуктори, приводи пересування підйомних кранів і т. ін.).

Конічні зубчасті колеса виготовляють з прямими, косими і коловими зубами. Прямозубі конічні колеса рекомендують використовувати при невисоких колових швидкостях ( $v \leq 3 \dots 4$  м/с) як найбільш прості в монтажі. При більших швидкостях застосовують колеса з косими і коловими зубами, оскільки вони забезпечують більш плавне зачеплення, менший шум, більшу навантажувальну здатність.

Конічні зубчасті передачі застосовують при передачі потужності не більшої за 100 кВт та передаточному числі  $u \leq 6,3$ .

## 21.2. Основні геометричні співвідношення

За аналогією з циліндричною передачею роль початкових і ділительних циліндрів у конічних передачах виконують початкові і ділительні конуси (рис. 21.1).

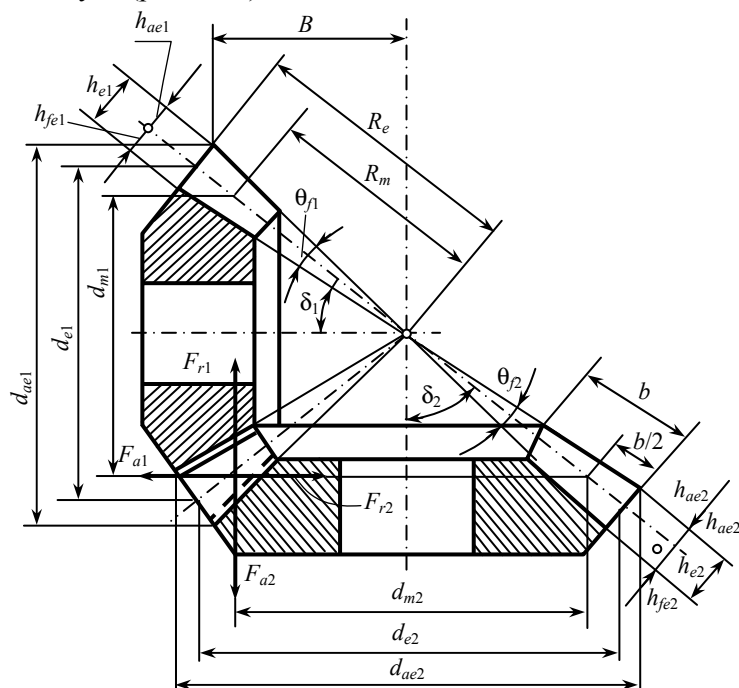


Рис. 21.1. Схема зачеплення конічних коліс та основні геометричні параметри

При обертанні коліс початкові конуси перекочуються один по одному без ковзання. Для конічних зубчастих коліс початкові та ділительні конуси збігаються, оскільки для конічних коліс кутова корекція не застосовується. Кути ділительних конусів позначають відповідно  $\delta_1$  і  $\delta_2$ . Евольвентні зуби конічного колеса профілюють по розгортці додаткового конуса, твірна якого перпендикулярна до твірної ділительного конуса. Додаткові конуси можна побудувати для зовнішнього, середнього і внутрішнього перерізів конічного колеса. Ширина вінця зубчастого колеса  $b$  обмежена двома додатковими конусами — зовнішнім і внутрішнім.

Геометричні параметри конічної передачі, що належать до зовнішнього торцевого перерізу, мають індекс «*e*». Розміри в середньому перерізі мають індекс «*m*», і використовують їх при розрахунках на міцність. Відповідно в конічних зубчастих колесах розрізняють ділильні діаметри (зовнішній  $d_e$ , середній  $d_m$ ), діаметри вершин зубів (зовнішній  $d_{ae}$ , середній  $d_{me}$ ), діаметри западин зубів (зовнішній  $d_{fe}$ , середній  $d_{me}$ ). Довжина відрізка твірної ділильного конуса конічного зубчастого колеса від його вершини до перетину з твірною ділильного додаткового конуса — це конусна відстань  $R$ . Розрізняють зовнішню  $R_e$  та середню  $R_m$  конусні відстані. Для конічних зубчастих коліс з прямими зубами за стандартний модуль беруть найбільший зовнішній модуль  $m_e$ . Для коліс з коловими та косими зубами  $m_{te}$  і  $m_{nm}$  відповідно. Розміри зубів, а також усі діаметри зубчастих коліс визначають на зовнішньому торці. Основні параметри зачеплення конічної передачі виражають через модуль:

для прямозубої передачі

$$d_e = m_e z \text{ і } d_m = m_m z; \quad (21.1)$$

для передачі з коловими зубами

$$d_e = m_{te} z \text{ і } d_m = m_{nm} z,$$

де  $m_m$ ,  $m_{nm}$  — середній (прямий зуб) і середній нормальний (коловий зуб) модуль;  $m_{te}$  — модуль у торцевому перерізі.

Зовнішня конусна відстань

$$R_e = \frac{b}{\psi_R} = \frac{d_e}{2 \sin \delta} = 0,5 m_e (m_{te}) \sqrt{z_1^2 + z_2^2},$$

де  $\psi_R = \frac{b}{R_e}$ ;  $b$  — ширина зубчастого вінця.

Зовнішню висоту головки  $h_{ae}$  і ніжки  $h_{fe}$  зуба, радіальний зазор  $c$  і кут вихідного контура  $\alpha$  беруть відповідно:

$$h_{ae} = m_e = m_{te};$$

$$h_{fe} = 1,2 m_e = 1,25 m_{te};$$

$$c = 0,2 m_e = 0,25 m_{te}.$$

Згідно з рис. 21.1, діаметри вершин зубів і западин конічного зубчастого колеса дорівнюють:

– для прямозубої передачі

$$d_{ae} = d_e + 2h_{ae} \cos \delta = d_e + 2m_e \cos \delta;$$

$$d_{fe} = d_e - 2h_{fe} \cos \delta = d_e - 2,4m_e \cos \delta,$$

– для передачі з коловими зубами

$$d_{ae} = d_e + 2m_{te} \cos \delta;$$

$$d_{fe} = d_e - 2,5m_{te} \cos \delta.$$

Середня конусна відстань

$$R_m = R_e - 0,5b.$$

Передаточне число при  $\Sigma = 90^\circ$

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_{e2}}{d_{e1}} = \frac{d_{m2}}{d_{m1}} = \operatorname{tg} \delta_2.$$

### 21.3. Еквівалентне колесо

Параметри еквівалентних коліс використовують при розрахунках на міцність. Форма зуба конічного колеса в нормальному перерізі додатковим конусом (рис. 21.2) така сама, як і циліндричного прямозубого колеса.

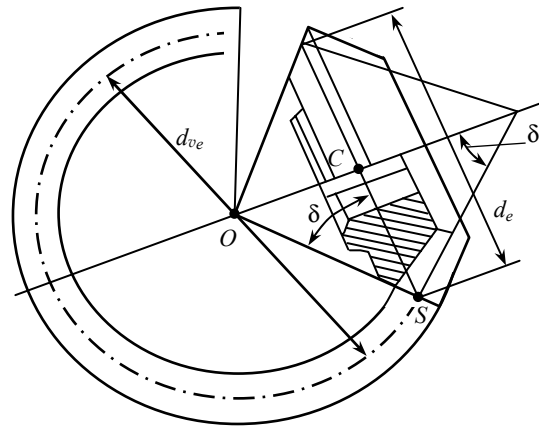


Рис. 21.2. Схема для визначення еквівалентної кількості зубів

Еквівалентне циліндричне колесо отримаємо за допомогою розгортки зовнішнього додаткового конуса на площину. Із трикутника  $OCS$  ділительний діаметр еквівалентного колеса

$$d_{ve} = \frac{d_e}{\cos \delta} = \frac{m_e z}{\cos \delta} = m_e z_v, \quad (21.2)$$

звідси еквівалентна кількість зубів

$$z_v = \frac{z}{\cos \delta}. \quad (21.3)$$

#### 21.4. Сили в зачепленні прямозубої конічної передачі

У зачепленні конічної передачі діють три сили: *колова*  $F_t$ , *радіальна*  $F_r$  і *осьова*  $F_a$ . Для визначення сил розглянемо рис. 21.3.

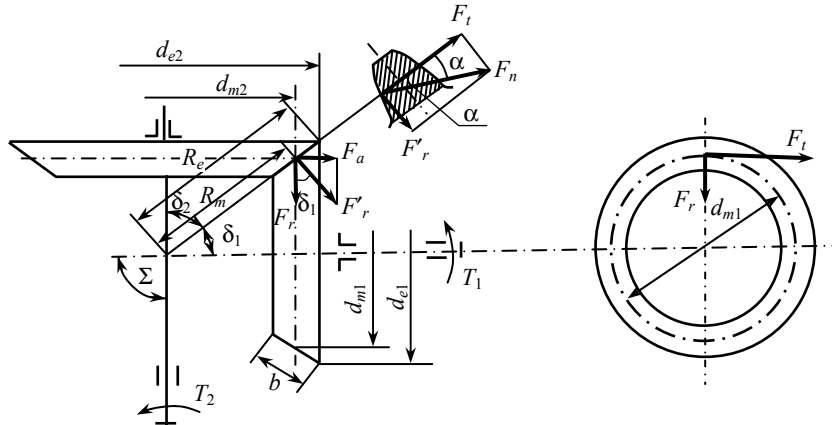


Рис. 21.3. Схема сил у конічній прямозубій передачі

По нормалі до зуба діє сила  $F_n$ , яку розкладають на  $F_t$  та  $F_r'$ . Так само силу  $F_r'$  розкладають на  $F_a$  та  $F_r$ .

На рис. 21.3 зображені сили, що прикладені до шестірни:

$$F_t = \frac{2T_1}{d_{m1}};$$

$$F_r' = F_t \operatorname{tg} \alpha;$$

$$F_r = F_r' \cos \delta_1 = F_t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1;$$

$$F_a = F_r' \sin \delta_1 = F_t \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_1;$$

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha}.$$

Для зубчастого колеса сили визначають за цими ж самими залежностями, а напрям сил — протилежний. При цьому  $F_{a1} = F_{r2}$ , а  $F_{r1} = F_{a2}$ , де  $F_r$  — радіальна,  $F_a$  — осьова сили.

### 21.5. Розрахунок на контактну міцність прямозубої конічної передачі

Формула Герца для визначення контактного напруження в зачепленні має вигляд

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{qE_{зв}}{\rho_{зв} v_H}}, \quad (21.4)$$

де  $v_H$  — коефіцієнт, що враховує навантажувальну здатність конічної передачі порівняно з циліндричною.

При розрахунку на контактну міцність конічні колеса замінюють циліндричними, початковий (ділильний) діаметр і модуль яких дорівнюють початковому діаметру і модулю в середньому перерізі зуба конічних коліс. Згідно з формулами (21.2) і (21.3) для середнього перерізу зуба отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{зв}} &= \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2 \cos \delta_1}{d_{m1} \sin \alpha} + \frac{2 \cos \delta_2}{d_{m2} \sin \alpha} = \\ &= \frac{2}{d_{m1} \sin \alpha} \left( \cos \delta_1 + \frac{\cos \delta_2}{u} \right). \end{aligned}$$

Ураховуючи зв'язок між тригонометричними функціями і замінюючи  $\cos \delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_1}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}$  і  $\cos \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}$ ,

знаходимо

$$\frac{1}{\rho_{зв}} = \frac{2}{d_{m1} \sin \alpha} \left( \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u} \right). \quad (21.5)$$

Питоме навантаження для конічної прямозубої передачі:

$$q = \frac{F_n K_H}{l_\Sigma} = \frac{F_t K_H}{b \cos \alpha} = \frac{2T_1 K_H}{bd_{m1} \cos \alpha}. \quad (21.6)$$

Підставивши у формулу Герца (21.4) вирази (21.5) і (21.6), отримаємо

$$\sigma_H = 1,18 \sqrt{\frac{E_{зв} T_1 K_H}{d_{m1}^2 v_H b \sin 2\alpha} \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u}} \leq [\sigma_H], \quad (21.7)$$

де  $v_H$  — 0,85 — дослідний коефіцієнт, що враховує зниження вантажної здатності конічної передачі порівняно з циліндричною.

Для проектного розрахунку формулу (21.7) перетворюють. При цьому враховують, що основними габаритними розмірами для конічних передач є  $d_{e2}$  і  $R_e$ , а навантаження характеризується моментом  $T_2$  на вихідному валу. Ввівши ці параметри у формулу (21.7), після перетворень отримаємо

$$d_{e2} = 1,7 \sqrt[3]{\frac{E_{зв} T_2 u K_{H\beta}}{v_H [\sigma_H]^2 (1 - \psi_R) \psi_R}},$$

де  $\psi_R = \frac{b}{R_e}$  — коефіцієнт ширини зубчастого вінця відносно зовнішньої конусної відстані, рекомендують брати  $\psi_R \leq 0,3$ . Найбільш поширене значення  $\psi_R = 0,285$ .

### 21.6. Розрахунок зубів прямозубої конічної передачі за напруженням згину

За аналогією з циліндричною прямозубою передачею [див. формулу (19.6)] розрахункові напруження при згині конічної передачі визначаються так:

$$\sigma_F = Y_F \frac{F_t}{v_F b m_m} K_{F\beta} K_{Fv} \leq [\sigma_F],$$

де  $v_F \approx 0,85$  — для прямозубої передачі;  $m_m$  — модуль у середньому перерізі зуба;  $Y_F$  — коефіцієнт форми зуба, залежить від еквівалентної кількості зубів  $z_v$ ;  $K_{F\beta}$  — коефіцієнт, що враховує розподіл навантаження за шириною вінця;  $K_{Fv}$  — коефіцієнт динамічного навантаження.

**Приклад 21.1.** Розрахувати прямозубу конічну передачу редуктора за такими даними: потужність на ведучому валу  $P_1 = 10$  кВт; кутова швидкість  $\omega_1 = 100$  рад/с; передаточне відношення передачі  $u = 3,15$ ; передача нереверсивна; строк служби передачі  $h = 20 \cdot 10^3$  год.



### Розв'язання

1. *Матеріали зубчастих коліс* вибираємо ті самі, що й у задачі з розрахунку циліндричної зубчастої передачі (див. приклад 20.1).

2. *Допустимі напруження* для розрахунку зубчастої передачі беремо ті самі:  $[\sigma_H]_1 = 664$  МПа;  $[\sigma_H]_2 = 509$  МПа. Розрахункове допустиме контактне напруження для прямозубої конічної передачі  $[\sigma_H] = 509$  МПа; допустимі напруження на згин:  $[\sigma_F]_1 = 168,04$  МПа;  $[\sigma_F]_2 = 146,3$  МПа.

3. *Проектний розрахунок передачі.*

3.1. *Зовнішній ділительний діаметр конічного колеса*

$$d_{e2} \geq K_d \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\beta} u}{[\sigma_H]^2 (1 - 0,5 \psi_R)^2 \psi_R}} \text{ мм.}$$

3.2. *Крутні моменти на валах передачі:*

$$\text{ведучий вал } T_1 = \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{10 \cdot 10^3}{100} = 100 \text{ Нм};$$

$$\text{ведений вал } T_2 = T_1 u \eta = 100 \cdot 3,15 \cdot 0,97 = 305,55 \text{ Нм},$$

де  $\eta = 0,97$  — коефіцієнт корисної дії зубчастої передачі.

Беремо коефіцієнт ширини зубчастих вінців  $\psi_R = 0,285$ ;  $K_{H\beta}$  — коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу навантаження за шириною зубчастих вінців.

При твердості поверхні зубів  $HВ \leq 350$  значення коефіцієнта беруть —  $K_{H\beta} = 1,2 \dots 1,35$  та при  $HВ > 350$   $K_{H\beta} = 1,25 \dots 1,45$ .

Остаточо беремо  $K_{H\beta} = 1,35$ . Для конічних прямозубих коліс допоміжний коефіцієнт  $K_d = 99$ .

3.3. *Знаходимо зовнішній ділительний діаметр колеса*

$$d_{e2} = 99 \sqrt[3]{\frac{305,55 \cdot 10^3 \cdot 1,35 \cdot 3,15}{509^2 (1 - 0,5 \cdot 0,285)^2 \cdot 0,285}} = 285,4 \text{ мм.}$$

Отримані значення  $d_{e2}$  округляють до найближчого стандартного значення: 50, (56), 63, (71), 80, (90), 100, (112), 125, (140), 160, (180), 200, (225), 250, 280, 315, 355, 400, 450, 500, 560, 630.

Кращими є значення без дужок. Фактичні значення  $d_{e2}$  не повинні відрізнятися від номінальних більш ніж на 2 %, у зв'язку з цим беремо  $d_{e2} = 280$  мм.

3.4. Зовнішній модуль зачеплення визначаємо за формулою:

$$m_e \geq \frac{14T_2 K_{F\beta}}{[\sigma_F] d_{e2} b v_F} \text{ мм.}$$

3.4.1. Попередньо знаходимо:  
кути при вершинах ділільних конусів

$$\delta_2 = \arctg u = \arctg 3,15 = 72,387^\circ;$$

$$\delta_1 = 90 - \delta_2 = 90 - 72,387 = 17,613^\circ;$$

$$\text{зовнішню конусну відстань } R_e = \frac{d_{e2}}{2 \sin \delta_2} = \frac{280}{2 \cdot 0,935} = 146,9 \text{ мм};$$

$$\text{ширину зубчастих вінців } b = \psi_b R_e = 0,285 \cdot 146,9 = 41,867 \text{ мм.}$$

Остаточню беремо  $b = 42$  мм.

Коефіцієнт  $K_{F\beta}$ , що враховує нерівномірність розподілу навантаження, визначаємо залежно від параметра  $\psi_d = 0,166\sqrt{u^2 + 1} = 0,166\sqrt{3,15^2 + 1} = 0,548$ , беремо із таблиці дод. 13.

Знаходимо значення коефіцієнта  $K_{F\beta} = 1,5$ . Коефіцієнт зниження навантажувальної здатності для конічної передачі  $v_F = 0,85$ .

Дістаємо зовнішній модуль

$$m_e \geq \frac{14 \cdot 305,55 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{146,3 \cdot 280 \cdot 42 \cdot 0,85} = 4,39 \text{ мм.}$$

Округляти отримане значення модуля до стандартного не потрібно.

3.5. Визначаємо кількість зубів коліс

$$z_2 = \frac{280}{4,39} = 63,78.$$

$$\text{Обираємо } z_2 = 64, \text{ знаходимо } z_1 = \frac{z_2}{u} = \frac{64}{3,15} = 20,3.$$

Беремо  $z_1 = 20$ .

$$3.6. \text{ Уточнюємо передаточне відношення } u_\phi = \frac{z_2}{z_1} = \frac{64}{20} = 3,2.$$

Визначаємо відхилення  $u_\phi$  від заданого

$$\Delta u = \left( \frac{u_\phi - u}{u} \right) 100\% = \left( \frac{3,2 - 3,15}{3,15} \right) 100\% = 1,59\%.$$

Фактичні значення не повинні відрізнятися від номінальних більш ніж на 4 %.

3.7. Розрахунок геометричних параметрів конічної передачі: зовнішні ділильні діаметри шестірні та колеса визначаємо за формулами:

$$d_{e1} = m_e z_1 = 4,39 \cdot 20 = 87,8 \text{ мм};$$

$$d_{e2} = m_e z_2 = 4,39 \cdot 64 = 280,96 \text{ мм};$$

зовнішню конусну відстань:

$$R_e = 0,5 m_e \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = 0,5 \cdot 4,39 \sqrt{20^2 + 64^2} = 147,18 \text{ мм};$$

середню конусну відстань:

$$R_m = R_e - 0,5b = 147,18 - 0,5 \cdot 42 = 126,18 \text{ мм},$$

де  $b = \psi_R R_e = 0,285 \cdot 147,18 = 41,94 \text{ мм}$  — беремо ширину зубчастих вінців  $b = 42 \text{ мм}$ ;

$$\text{середній модуль зубів } m_m = \frac{m_e R_m}{R_e} = \frac{4,39 \cdot 126,18}{147,18} = 3,76 \text{ мм};$$

середні ділильні діаметри шестірні та колеса:

$$d_{m1} = m_m z_1 = 3,76 \cdot 20 = 75,2 \text{ мм};$$

$$d_{m2} = m_m z_2 = 3,76 \cdot 64 = 240,64 \text{ мм};$$

зовнішні діаметри вершин зубів:

$$d_{ae1} = d_{e1} + 2m_e \cos \delta_1 = 87,8 + 2 \cdot 4,39 \cdot 0,953 = 96,17 \text{ мм};$$

$$d_{ae2} = d_{e2} + 2m_e \cos \delta_2 = 280,96 + 2 \cdot 4,39 \cdot 0,30258 = 283,62 \text{ мм};$$

зовнішні діаметри западин зубів:

$$d_{fe1} = d_{e1} - 2,5m_e \cos \delta_1 = 87,8 - 2,5 \cdot 4,39 \cdot 0,953 = 77,34 \text{ мм};$$

$$d_{fe2} = d_{e2} - 2,5m_e \cos \delta_2 = 280,96 - 2,5 \cdot 4,39 \cdot 0,30258 = 277,64 \text{ мм}.$$

3.8. Сили в зачепленні зубів конічної передачі:

радіальна сила на шестірні дорівнює осьовій силі на колесі;

$$\text{колова сила } F_{t1} = F_{a2} = \frac{2T_2}{dm_2} = \frac{2 \cdot 305,55 \cdot 10^3}{240,64} = 2539,48 \text{ Н};$$

радіальна сила на шестірні дорівнює осьовій силі на колесі:

$$F_{r1} = F_{a2} = F_t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1 = 2539,48 \cdot 0,364 \cdot 0,953 = 880,92 \text{ Н};$$

осьова сила на шестірні дорівнює радіальній силі на колесі

$$F_{a1} = F_{r2}.$$

3.9. Перевірка міцності зубів коліс за контактними напруженнями

$$\sigma_H = \frac{335}{R_e - 0,5b} \sqrt{\frac{T_2 K_H \sqrt{(u^2 + 1)^3}}{bu^2}} \leq [\sigma_H],$$

де  $K_H = K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv}$ ;  $K_{H\alpha} = 1,0$  — коефіцієнт, що враховує розподіл навантаження між зубами;  $K_{H\beta} = 1,35$ ;  $K_{Hv}$  — коефіцієнт динамічного навантаження.

Якщо твердість поверхні зубів  $HV \leq 350$ , то він дорівнює  $K_{Hv} = 1,15$ , а якщо твердість  $HV > 350$ , то  $K_{Hv} = 1,1$

$$K_H = 1,0 \cdot 1,25 \cdot 1,15 = 1,4375.$$

Знаходимо значення контактного напруження

$$\sigma_H = \frac{335}{147,18 - 0,5 \cdot 42} \sqrt{\frac{305,55 \cdot 10^3 \cdot 1,4375 \sqrt{(3,2^2 + 1)^3}}{42 \cdot 3,2^2}} = 520,84 \text{ МПа}.$$

Можна вважати, що міцність за контактним напруженням забезпечується, оскільки розрахункове контактне напруження  $\sigma_H = 520,84$  МПа перевищує допустиме  $[\sigma_H] = 509$  МПа, на 2,3 % (допускається до 5 %).

3.7. Перевірка міцності зубів колеса за напруженнями згину

$$\sigma_{F2} = \frac{F_t K_{F\beta} K_{Fv} Y_{F2}}{m_e b v_F} \leq [\sigma]_{F2}.$$

Колова швидкість зубчастих коліс

$$v = 0,5 \omega_1 d_{m1} = 0,5 \cdot 100 \cdot 75,2 \cdot 10^{-3} = 3,76 \text{ м/с}.$$

За даними таблиці дод. 14 виберемо 8-й ступінь точності.

Еквівалентні кількості зубів шестірні та колеса знаходимо за формулами  $z_{E2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2} = \frac{64}{0,30258} = 211,5$ ;  $z_{E1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1} = \frac{20}{0,953} = 21$ .

За таблицею дод. 12 знаходимо:  $Y_{F2} = 3,62$ ;  $Y_{F1} = 4,01$ .

Значення коефіцієнта беремо  $K_{Fv} = 1,4$ .

Визначаємо напруження згину для колеса

$$\sigma_{F2} = \frac{2539,48 \cdot 1,5 \cdot 1,4 \cdot 3,62}{4,39 \cdot 42 \cdot 0,85} = 123,18 \text{ МПа} .$$

Міцність за напруженням згину для шестірні

$$\sigma_{F1} = \sigma_{F2} \frac{Y_{F1}}{Y_{F2}} = 123,18 \frac{4,01}{3,62} = 136,45 \text{ МПа} .$$

Отже, міцність щодо напружень згину для колеса і шестірні забезпечується, оскільки розрахункові напруження згину не перевищують допустимі:  $[\sigma_F]_1 = 168,04 \text{ МПа}$ ;  $[\sigma_F]_2 = 146,3 \text{ МПа}$ .

### Запитання для самоконтролю

1. Які основні переваги та недоліки конічних передач порівняно із іншими зубчастими передачами?
2. Яким є модуль зачеплення в конічних зубчастих передачах (постійним чи змінним)?
3. За яким модулем виконують розрахунок геометричних параметрів конічної передачі?
4. Які сили виникають у зачепленні конічних передач?
5. Як напрямлені сили, що виникають у зачепленні конічних передач?
6. Яка мінімальна кількість зубів допускається для шестірні циліндричних і конічних передач?
7. Яке максимальне передаточне число рекомендується для однієї пари різних видів зубчастих передач?

## 22. ЧЕРВ'ЯЧНІ ПЕРЕДАЧІ

### 22.1. Загальні відомості

Черв'ячні передачі (рис. 22.1) застосовують для передачі руху між валами, геометричні осі яких перехрещуються в просторі, найчастіше під кутом  $90^\circ$ . У більшості випадків ведучим є черв'як. Параметрам черв'яка приписують індекс 1, а параметрам колеса — індекс 2.

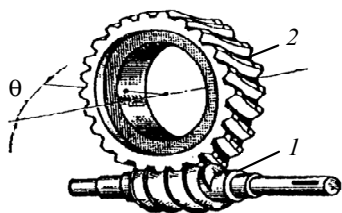


Рис. 22.1. Черв'ячна передача:  
1 — черв'як; 2 — вінець черв'ячного колеса

*Черв'ячна передача* — це зубчасто-гвинтова передача, рух у якій здійснюється за принципом гвинтової пари.

*Переваги:* плавність зачеплення і безшумність роботи; компактність і

відносно невелика маса конструкції; можливість здійснення передачі з великими передаточними числами (в кінематичних передачах  $u$  до 1000, а в силових передачах  $u = 8 \dots 80$ ); можливість здійснення самогальмівної передачі (у такої передачі ККД менший від 50 %); велика кінематична точність.

*Недоліки:* порівняно низький ККД ( $\eta = 0,7 \dots 0,92$ ); передавальна потужність не більше 50...60 кВт; сильне нагрівання передачі при тривалій безперервній роботі; висока вартість матеріалу вінців черв'ячних коліс (бронза); інтенсивне зношування та небезпека заїдання. Черв'ячні передачі широко застосовують у підйомно-транспортних механізмах і особливо там, де потрібна висока кінематична точність (ділильні верстати, механізми наведення і т. ін.). У приводах машин черв'ячну передачу слід виконувати швидкохідною, оскільки збільшення колової швидкості черв'яка поліпшує умови створення мастильного клина в зачепленні, що веде до зменшення втрат на тертя.

### 22.2. Класифікація черв'ячних передач

Черв'ячні передачі залежно від форми зовнішньої поверхні черв'яка поділяють на передачі з циліндричними (рис. 22.2, а) та глобoidними (рис. 22.2, б) черв'яками.

Глобоїдні передачі складніші у виготовленні, що обмежує їх застосування, але вони мають більший ККД, надійніші й довговічніші.

Залежно від напрямку лінії витка черв'яка черв'ячні передачі можуть бути з правим і лівим напрямком лінії витка. Залежно від числа (заходів) нарізки черв'яка передачі можуть бути з однозаходним або багатозаходним черв'яком ( $z_1 = 1, 2, 4$ ).

Залежно від розташування черв'яка відносно колеса передачі можуть бути з верхнім, нижнім і боковим черв'яком.

Розташування черв'яка під час проектування передачі регламентується умовами компоновання виробу. При верхньому розташуванні черв'яка менші втрати на розміщування мастила, що підвищує ККД. Нижнє розташування черв'яка застосовують при його колдовій швидкості  $v_1 \leq 5$  м/с. Залежно від форми гвинтової нарізки циліндричного черв'яка передачі бувають з архімедовим, конволютним та евольвентним черв'яками.

Архімедів черв'як (ZA) в осьовому перерізі (рис. 22.3, а) має прямолінійний профіль, аналогічний профілю інструментальної рейки. Кут між боковими сторонами профілю витка для стандартних черв'яків  $2\alpha = 40^\circ$ . У торцевому перерізі витки окреслені архімедовою спіраллю. Найбільш поширені передачі з архімедовим черв'яком.

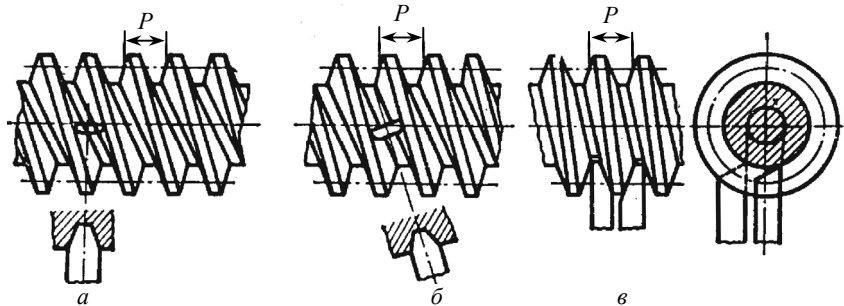


Рис. 22.3. Схема встановлення інструменту при нарізанні архімедового (а), конволютного (б) і евольвентного (в) черв'яків

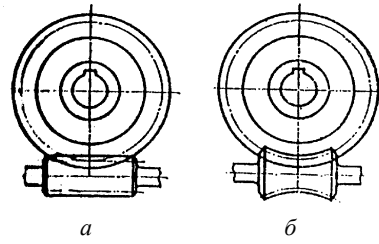


Рис. 22.2. Схеми черв'ячних передач:

а — з циліндричним черв'яком;  
б — з глобоїдним черв'яком

Конволютні черв'яки ( $ZN$ ) мають прямолінійний профіль у нормальному до витка перерізі (рис. 22.3, б). Евольвентні черв'яки ( $Z1$ ) мають евольвентний профіль у торцевому перерізі (рис. 22.3, в).

Основними способами виготовлення черв'яків є нарізання різцями на токарно-гвинторізному верстаті (спосіб досить точний, але малопродуктивний) та нарізання модульною фрезою на різьбофрезерному верстаті (спосіб більш продуктивний).

Надійність і довговічність черв'ячної передачі залежить від твердості та жорсткості гвинтової поверхні нарізки черв'яка, тому після нарізання витків черв'яка та їх термічної обробки, витки черв'яка шліфують, а в окремих випадках полірують.

Черв'ячні колеса найчастіше нарізають черв'ячними фрезами, причому черв'ячна фреза має бути копією черв'яка, з яким буде зачеплюватися черв'ячне колесо. При нарізанні заготовка колеса і фреза здійснюють такі самі взаємні рухи, які будуть мати черв'як і колесо під час роботи.

### 22.3. Основні геометричні співвідношення

Геометричні розміри черв'яка і колеса визначають за формулами, аналогічними формулам для зубчастих коліс.

У черв'ячній передачі розрахунковим є осьовий модуль черв'яка  $m$ , що дорівнює торцевому модулю черв'ячного колеса. Значення розрахункових модулів  $m$  вибирають згідно зі стандартом (витяг): 1,6; 2; 2,5; 3,15; 4; 5; 6,3; 8; 10; 12,5; 16; 20 мм. Основні геометричні розміри черв'яка наведено на рис. 22.4 і в табл. 22.1.

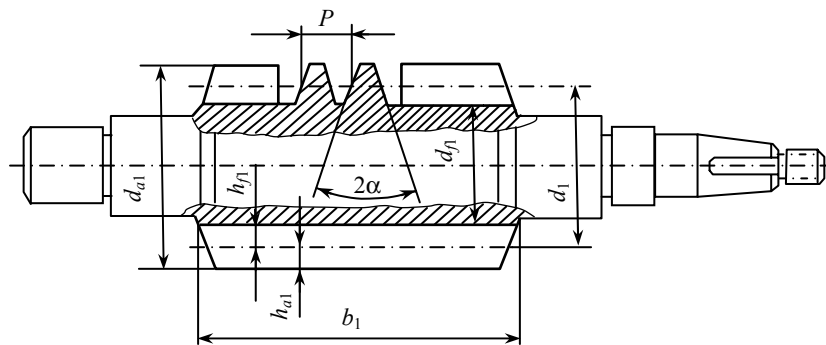


Рис. 22.4. Основні розміри циліндричного черв'яка



Таблиця 22.1

## Основні геометричні розміри черв'яка

Параметр	Формула
Кут профілю витка в осьовому перерізі	$2\alpha = 40^\circ$
Розрахунковий крок черв'яка	$p = \pi m$
Осьовий модуль черв'яка	$m = p/\pi$
Хід витка	$p_h = p z_1$
Кількість заходів черв'яка	$z_1$
Висота головки витка черв'яка (та черв'ячного колеса)	$h_{a1} = h_{a2} = m$
Висота ніжки витка черв'яка (та черв'ячного колеса)	$h_{f1} = h_{f2} = 1,2 m$
Ділильний діаметр черв'яка	$d_1 = qm$
Ділильний кут підйому лінії витка	$\operatorname{tg}\gamma = \frac{p_h}{\pi d_1} = \frac{p z_1}{\pi q m}$
Діаметр вершин витків черв'яка	$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1} = m(q + 2)$
Діаметр западин витків черв'яка	$d_{f1} = d_1 - 2h_{f1} = m(q - 2,4)$
Довжина нарізної частини черв'яка, при коефіцієнті зміщення, що дорівнює нулю	При $z_1 = 1,2$ , $b_1 = m(11 + 0,06 z_2)$ При $z_1 = 4$ , $b_1 = m(12,5 + 0,09 z_2)$

Основні геометричні розміри вінця черв'ячного колеса визначають у середньому перерізі (рис. 22.5), і наведені в табл. 22.2.

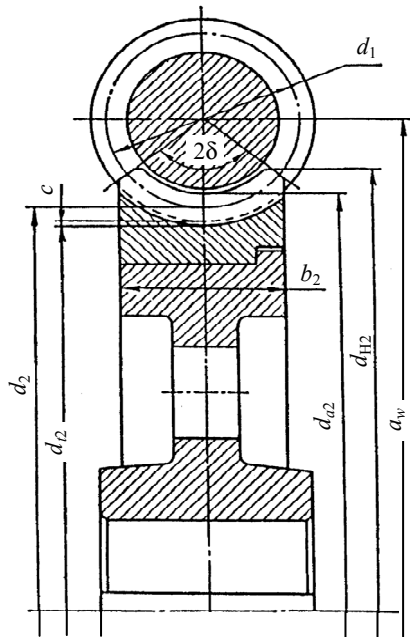


Рис. 22.5. Основні розміри вінця черв'ячного колеса

Таблиця 22.2

**Основні геометричні розміри вінця черв'ячного колеса**

Параметр	Формула
Ділильний діаметр	$d_2 = mz_2$
Діаметр вершин зубів	$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2} = m(z_2 + 2)$
Діаметр западин зубів	$d_{f2} = d_2 - 2h_{f2} = m(z_2 - 2,4)$
Міжосьова відстань	$a_w = 0,5(d_1 + d_2) = 0,5 m(q + z_2)$
Найбільший діаметр колеса	$d_{H2} \leq d_{a2} + \frac{6m}{z_1 + 2}$
Ширина вінця черв'ячного колеса	При $z_1 = 1,2$ , $b_2 \leq 0,75d_{a1}$ При $z_1 = 4$ , $b_2 < 0,67d_{a1}$
Умовний кут обхвату черв'яка колесом $2\delta$	$\sin \delta = \frac{b_2}{d_{a1} - 0,5m}$

## 22.4. Кінематичні параметри і ККД черв'ячної передачі

Передаточне відношення визначають за залежністю

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

де  $\omega_1$  і  $\omega_2$  — кутові швидкості черв'яка і колеса,  $\text{с}^{-1}$ ;  $n_1$  і  $n_2$  — частоти обертання черв'яка і колеса,  $\text{хв}^{-1}$ ;  $z_1$  і  $z_2$  — кількість витків черв'яка і кількість зубів колеса.

Число витків черв'яка  $z_1$  залежить від передаточного числа  $u$  так:

$u$	8...14	15...30	$\geq 30$
$z_1$	4	2	1

Щоб уникнути підрізання основи ножки зуба в процесі нарізання зубів, при розрахунках беруть  $z_2 \geq 28$ .

Оптимальним є  $z_2 = 40 \dots 60$ .

*Ковзання в зачепленні.* На відміну від зубчастої передачі колісні швидкості  $v_1$  та  $v_2$  не збігаються між собою за модулем, а їхні напрямки взаємно перпендикулярні (рис. 22.6). Під час роботи витки черв'яка ковзають по зубах колеса, як у гвинтовій парі.

Швидкість ковзання  $v_s$  спрямована по дотичній до гвинтової лінії черв'яка і визначається з паралелограма швидкостей (рис. 22.6, де  $v_1$  і  $v_2$  — колісні швидкості черв'яка і колеса):

$$v_s = \frac{v_1}{\cos \gamma} = \frac{\omega_1 d_1}{2 \cos \gamma} = \frac{u \omega_2 d_1}{2 \cos \gamma}, \quad (22.1)$$

$$v_1 = \frac{\omega_1 d_1}{2 \cdot 10^3} = \frac{\pi d_1 n_1}{60 \cdot 10^3},$$

де  $\gamma$  — кут підйому гвинтової лінії черв'яка.

Із формули (22.1) випливає, що завжди  $v_s > v_1$ .

Велике ковзання в черв'ячній передачі підвищує спрацювання зубів черв'ячного колеса, а також збільшує небезпеку заїдання.

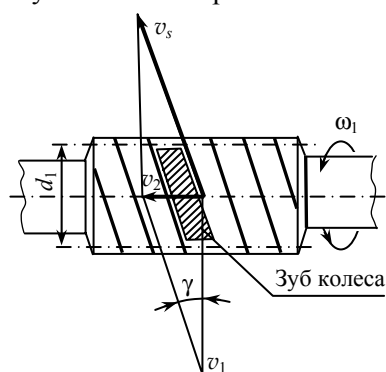


Рис. 22.6. Схема для визначення швидкості ковзання в черв'ячній передачі

Виконуючи проектний розрахунок, швидкість ковзання можна орієнтовно визначити зі співвідношення  $[n_1 \text{ (хв}^{-1}\text{)}; T_2 \text{ (Н}\cdot\text{м)}]$ :

$$v_s = 4,5 \cdot 10^{-4} n_1 \sqrt[3]{T_2}.$$

*ККД черв'ячних передач.*

Загальний ККД черв'ячної передачі знаходять за формулою

$$\eta_{\text{заг}} = \eta_1 \eta_2 \eta_3, \quad (22.2)$$

де  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  — ККД, що враховують втрати потужності відповідно в підшипниках, при перемішуванні та розбризуванні мастила, та в черв'ячному зачепленні.

Втрати потужності в опорах, на розбризування і перемішування мастила в картері враховують множником 0,95...0,96. Отже, ККД закритої черв'ячної передачі при ведучому черв'яку обчислюють за формулою

$$\eta = (0,95 \dots 0,96) \frac{\text{tg} \gamma}{\text{tg}(\gamma + \rho')}.$$

Значення зведеного кута тертя  $\rho'$  залежить не тільки від матеріалів черв'ячної пари, а й від швидкості ковзання. Його значення наведено у довідковій літературі [7; 8; 17].

У попередніх розрахунках, коли розміри черв'ячної передачі ще невідомі, ККД орієнтовно визначають залежно від кількості заходів черв'яка.

При  $z_1 = 1$ ;  $\eta = 0,7 \dots 0,75$ ; при  $z_2 = 2$ ;  $\eta = 0,75 \dots 0,82$ ; при  $z_1 = 4$ ;  $\eta = 0,87 \dots 0,92$ .

### 22.5. Сили в зачепленні

У черв'ячній передачі, як і в зубчастих, навантаження сприймається не одним, а кількома зубами колеса.

Для спрощення розрахунків силу взаємодії черв'яка та колеса  $F_n$  (рис. 22.7, а) можна вважати зосередженою та прикладеною в полюсі зачеплення П по нормалі до робочої поверхні витка.

За правилом паралелепіпеда розкладемо силу  $F_n$  на три взаємно перпендикулярні складові  $F_{t1}, F_{r1}, F_{a1}$ .

Для зручності зображення сил на рис. 22.7, б черв'ячне зачеплення рознесене.

Колова сила на черв'ячному колесі  $F_{t2}$  за модулем дорівнює осьовій силі на черв'яку  $F_{a1}$ :

$$F_{t2} = F_{a1} = \frac{2T_2}{d_2},$$

де  $T_2$  — крутний момент на колесі, Н·мм;  $d_2$  — ділильний діаметр, мм.

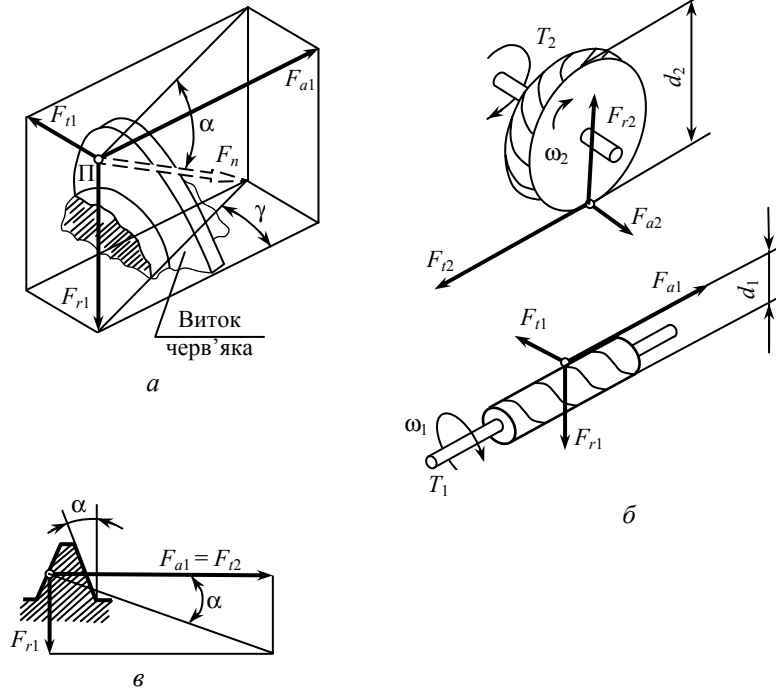


Рис. 22.7. Схема сил, що діють у черв'ячній передачі

Колова сила на черв'яку  $F_{t1}$  за модулем дорівнює осьовій силі на черв'ячному колесі  $F_{a2}$

$$F_{t1} = F_{a2} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_2}{d_1 u \eta} = \frac{F_{t2} z_1}{q \eta},$$

де  $T_1$  — крутний момент на черв'яку;  $\eta$  — ККД передачі.

Радіальна сила на черв'яку  $F_{r1}$  за модулем дорівнює радіальній силі на колесі  $F_{r2}$  (рис. 22.7, в):

$$F_{r1} = F_{r2} = F_{t2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Напрямок осевих сил черв'яка та черв'ячного колеса залежить від напрямків обертання черв'яка й ліній витка. Напрямок сили  $F_{t2}$  завжди збігається з напрямком обертання колеса, а сила  $F_{t1}$  напрямлена в бік, протилежний обертанню черв'яка (рис. 22.7, б).

## 22.6. Матеріали та види руйнування черв'ячних передач

Черв'яки виготовляють із вуглецевих (сталь 40; 45; 50) або легированих (20X; 40X; 40XH) сталей з відповідною термічною обробкою (твердістю HRC45...53) і наступним шліфуванням та поліруванням поверхонь зачеплення.

Вінці черв'ячних коліс виготовляють із матеріалів, що мають добрі протизадирні й антифрикційні властивості. Усі матеріали, що застосовують для вінців черв'ячних коліс, можна поділити на три групи залежно від схильності до заїдання.

Група 1: бронзи з границею міцності на розтягування не більш ніж 300 МПа. Кращими є олов'яні бронзи марок Бр0Ф10-1, Бр0НФ10-1-1. Їх застосовують при високих швидкостях ковзання ( $v_s = 5 \dots 25$  м/с).

Група 2: безолов'яні бронзи (БрА3 9-4 та ін.) та рідше латунні мають підвищені механічні характеристики, але знижені протизадирні властивості. Їх використовують при середніх швидкостях ковзання ( $v_s = 2 \dots 5$  м/с) з обов'язковим шліфуванням або поліруванням витків черв'яка.

Група 3: при малих швидкостях ковзання ( $v_s < 2$  м/с) застосовують сірі чавуни марок СЧ12, СЧ15, СЧ18.

## 22.7. Допустимі напруження для матеріалів черв'ячних коліс

Розрахункові значення допустимих напружень визначають за емпіричними формулами залежно від матеріалу зубів колеса, міцності витків черв'яка, швидкості ковзання і ресурсу.

Допустимі контактні напруження  $[\sigma_H]$  (в мегапаскалях):

для олов'яних бронз  $[\sigma_H]$  визначають з умови опору втомному зношуванню робочих поверхонь зубів:

$$[\sigma_H] = [\sigma_{H0}] K_{HL} C_v,$$

де  $K_{HL}$  — коефіцієнт довговічності при розрахунку на контактну міцність;

$$K_{HL} = \sqrt[8]{\frac{10^7}{N_{\Sigma}}},$$

де  $N_{\Sigma}$  — кількість циклів навантаження зубів черв'ячного колеса за весь строк служби передачі, при  $N > 25 \cdot 10^7$  беруть  $N_{\Sigma} = 25 \cdot 10^7$ ;  $C_v$  — коефіцієнт, що враховує інтенсивність зношування зубів колеса залежно від швидкості ковзання  $v_s$ :

$v_s, \text{ м/с}$	$\leq 1$	2	3	4	5	6	7	$\geq 8$
$C_v$	1,33	1,21	1,11	1,02	0,95	0,88	0,83	0,8

$$[\sigma_{H0}] = (0,75 \dots 0,9) \sigma_B,$$

де  $\sigma_B$  — границя міцності бронзи при розтяганні;  $[\sigma_{H0}]$  — допустиме контактне напруження при числі циклів зміни напружень  $10^7$ .

Для безолов'яних бронз та латуней  $[\sigma_H]$  визначають з умови опору заїданню:

$$[\sigma_H] = (250 \dots 300) - 25 v_s.$$

Більші значення  $[\sigma_H]$  беруть для черв'яків із твердістю витків  $HRC \geq 45$ ;

Для чавунів  $[\sigma_H]$  визначають з умови опору заїданню:

$$[\sigma_H] = 175 - 35 v_s.$$

Допустимі напруження згину  $[\sigma_F]$ . Експериментально встановлено, що міцність зубів колеса на згин залежить від матеріалу, ресурсу і характеру навантаження і визначається за формулою

$$[\sigma_F] = 0,25 \sigma_{пл} + 0,08 \sigma_B,$$

де  $\sigma_{пл}$  — границя плинності матеріалу.

## 22.8. Розрахунок на міцність черв'ячних передач

Для всіх черв'ячних передач розрахунок за контактним напруженням є *основним*, а розрахунок за напруженням згину — *перевірним*. В основу розрахунку за контактними напруженнями покладено формулу Герца:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{q E_{зв}}{\rho_{зв}}}, \quad (22.3)$$

де  $q$  — нормальне навантаження на одиницю довжини контактних ліній;  $E_{зв}$  — зведений модуль пружності матеріалу;  $\rho_{зв}$  — зведений радіус кривизни зуба черв'ячного колеса в полюсі зачеплення;

$$q = \frac{F_n K_H}{l_\Sigma} = \frac{F_{t2} K_H}{l_\Sigma \cos \gamma \cos \alpha} \approx \frac{F_{t2} K_H}{1,3 d_w \cos \alpha},$$

де  $F_{t2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot T_2}{d_2}$  — колова сила на колесі,  $H$ ;  $K_H$  — коефіцієнт розрахункового навантаження, що враховує нерівномірність розподілення навантаження внаслідок деформації деталей передачі, а також додаткове динамічне навантаження;  $l_\Sigma$  — сумарна довжина контактних ліній у зачепленні черв'ячної передачі (рис. 22.8), яка прямо пропорційна ділильному діаметру черв'яка  $d_{w1}$  і куту обхвату  $2\delta$  та обернено пропорційна  $\cos \gamma$ :

$$l_\Sigma = \frac{1,3 d_{w1}}{\cos \gamma},$$

де  $d_{w1}$  — початковий ділильний діаметр черв'яка;  $\gamma$  — кут підйому гвинтової лінії;  $\alpha$  — кут зачеплення ( $\alpha = 20^\circ$ ).

Зведений модуль пружності може бути визначений за залежністю

$$E_{зв} = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2},$$

де  $E_1$  — модуль пружності матеріалу черв'яка, МПа;  $E_2$  — модуль пружності матеріалу колеса, МПа.

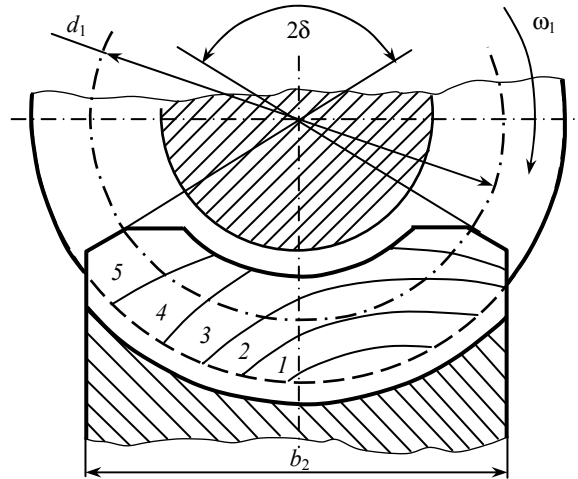


Рис. 22.8. Схема розміщення контактних ліній 1–5 у процесі зачеплення черв'ячної пари



Зведений радіус кривизни зуба черв'ячного колеса в полюсі зачеплення

$$\rho_{зв} = \rho_2 = \frac{d_2 \sin \alpha}{2 \cos^2 \gamma},$$

тому що для архімедових черв'яків  $\rho_1 \rightarrow \infty$ , де  $d_2 = m z_2$  — дільний діаметр колеса, мм.

Після підстановки у формулу (22.3) значень  $q$ ,  $E_{зв}$ ,  $\rho_{зв}$  з урахуванням залежностей

$$F_{t2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot T_2}{d_2}; \quad d_2 = m z_2; \quad d_{w1} = m(q + 2x); \quad m = \frac{2a_w}{z_2 + q + 2x}; \quad \alpha = 20^\circ;$$

$$\gamma = 10^\circ; \quad E_1 = 2,15 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad E_2 = 0,9 \cdot 10^5 \text{ МПа (бронза, чавун);}$$

$$T_2 \text{ — крутний момент, Н}\cdot\text{м.}$$

Після перетворень отримаємо залежність для  $\sigma_H$ , МПа:

$$\sigma_H = \frac{5300}{\frac{z_2}{q}} \sqrt{\left( \frac{\frac{z_2}{q} + 1}{a_w} \right)^3} T_2 K_H \leq [\sigma_H].$$

При проектному розрахунку визначають міжосьову відстань, мм

$$a_w = \left( \frac{z_2}{q} + 1 \right) \sqrt[3]{\left( \frac{5300}{[\sigma_H] \frac{z_2}{q}} \right)^2} T_2 K_H. \quad (22.4)$$

Якщо  $q = 0,25 z_2$  та  $x = 0$ , то формулу (22.4) можна спростити:

$$a_w \approx 610 \sqrt[3]{\frac{T_2 K_H}{[\sigma_H]^2}}.$$

*Розрахунок зубів на міцність за напруженнями згинання.*

Цей розрахунок аналогічний розрахунку косозубих циліндричних коліс. Напруження згину зубів колеса, як найменш міцних порівняно з витками черв'яка, враховується коефіцієнтом форми зуба, значення якого залежать від еквівалентної кількості зубів  $z_{v2}$ .

$$\text{При цьому } z_{v2} = \frac{z_2}{\cos^3 \gamma}.$$

Для черв'ячних передач, що добре припрацьовуються, можна брати  $K_{F\alpha} = 1$ ,  $Y_{\beta} = 1$ . Тоді коефіцієнт підвищення міцності черв'ячного колеса порівняно з косозубим визначається за формулою:

$$z_{F\beta} = \frac{K_{F\beta} Y_{\beta}}{\varepsilon_a \xi} = \frac{1}{\varepsilon_a \xi} = \frac{1}{1,9 \cdot 0,75} \approx 0,7,$$

де  $\varepsilon_a = 1,9$ ,  $\xi = 0,75$ .

У результаті отримаємо формулу для визначення напружень згину:

$$\sigma_F = 0,7 \frac{F_{t2} Y_F K_F}{b_2 m} \leq [\sigma_F].$$

Цей розрахунок ведуть як перевірний. Для черв'ячних передач беруть

$$K_F = K_{F\beta} K_{Fv},$$

де  $K_{F\beta}$  — коефіцієнт нерівномірності навантаження;  $K_{Fv}$  — коефіцієнт динамічного навантаження.

Ураховуючи, що динамічні навантаження незначні, беруть:  $K_{Fv} = K_{Hv} \approx 1$  при  $v_2 \leq 3$  м/с;  $K_{Fv} \approx K_{Hv} \approx 1 \dots 1,3$  при  $v_2 \geq 3$  м/с.

## 22.9. Тепловий розрахунок черв'ячних передач

Тепловий розрахунок черв'ячної передачі при сталому режимі роботи виконується на основі рівняння теплового балансу, тобто теплової рівноваги виділеної ( $Q_{\text{вид}}$ ) і відведеної ( $Q_{\text{відв}}$ ) теплоти

$$Q_{\text{вид}} = Q_{\text{відв}};$$

$$Q_{\text{вид}} = (1 - \eta) P_1, \quad (22.5)$$

де  $\eta$  — ККД черв'ячної передачі;  $P_1$  — потужність на черв'яку, Вт;

$$P_1 = \frac{T_2 \omega_2}{\eta}, \quad (22.6)$$

де  $T_2$  — крутний момент, Н·м;  $\omega_2$  — кутова швидкість, рад/с.

Кількість теплоти, що відводиться з поверхні редуктора за одну секунду при його охолодженні:

$$Q_{\text{відв}} = K_T (t_m - t_n),$$

де  $K_T$  — коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м<sup>2</sup>·°С);  $t_m$  і  $t_n$  — температура відповідно мастила в редукторі і навколишнього повітря, °С

(у цехових умовах  $t_{\text{п}} = 20^{\circ}\text{C}$ );  $A$  — площа поверхні корпусу редуктора без днища,  $\text{м}^2$ .

Для чавунних корпусів беруть  $K_{\text{T}} = 9 \dots 17 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$ . Тому, порівнявши праві частини формул (22.5) і (22.6), дістанемо:

$$t_{\text{м}} = \frac{t_{\text{п}} + (1 - \eta)P_1}{K_{\text{T}}A} \leq [t_{\text{м}}].$$

Значення  $[t_{\text{м}}]$  залежить від марки мастила і його беруть  $[t_{\text{м}}] = 80 \dots 95^{\circ}\text{C}$ .

Якщо при розрахунках виявиться, що  $t_{\text{м}} > [t_{\text{м}}]$ , то потрібно збільшити поверхню охолодження  $A$ , застосовуючи ребра охолодження.

Для підвищення коефіцієнта тепловіддачі застосовують:

- обдування корпусу повітрям за допомогою вентилятора, змонтованого на валу черв'яка, у цьому випадку  $K_{\text{T}} = 18 \dots 24 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$ ;
- охолодження мастила водою, що проходить крізь змішувик, у цьому випадку  $K_{\text{T}} = 80 \dots 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$ ;
- циркуляційну систему зі спеціальним холодильником, що дозволяє підвищити  $K_{\text{T}}$  до  $200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$ .

Рекомендована кількість мастила у ванні дорівнює  $0,35 \dots 0,7$  л на  $1$  кВт потужності за умови, що занурення коліс дорівнює висоті зуба або витка черв'яка для швидкохідних коліс та  $1/3$  радіуса тихохідних коліс.

#### **Приклад 22.1**

*Задача.* Розрахувати черв'ячну передачу редуктора за такими даними: потужність на валу черв'яка  $P_1 = 7,5$  кВт; кутова швидкість  $\omega_1 = 150$  рад/с; передаточне відношення  $u = 24$ ; передача нереверсивна; режим навантаження — легкий; строк служби передачі  $t = 10\,000$  год.

*Розв'язання*

*1. Визначаємо параметри навантаження черв'ячної передачі.*

Потужність на веденому валу передачі

$$P_1 = P_1 \eta = 7,5 \cdot 0,8 = 6 \text{ кВт},$$

де  $\eta = 0,8$  — ККД черв'ячної передачі; кутова швидкість веденого

$$\text{вала } \omega_2 = \frac{\omega_1}{u} = \frac{150}{24} = 6,25 \text{ рад/с}.$$

Крутні моменти на ведучому і веденому валах передачі

$$T_1 = \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{7,5 \cdot 10^3}{150} = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad T_2 = \frac{P_2}{\omega_2} = \frac{6 \cdot 10^3}{6,25} = 960 \text{ Н}.$$

Орієнтовна швидкість ковзання в зачепленні

$$v_s = 4,5\omega_1 \cdot 10^{-3} \sqrt[3]{T_2} = 4,5 \cdot 150 \cdot 10^{-3} \sqrt[3]{960} = 6,658 \text{ м/с}.$$

Сумарна кількість циклів навантаження зубів колеса

$$N_{\Sigma 2} = 1800\omega_2 \frac{n}{\pi} = 1800 \cdot 6,25 \frac{10000}{3,14} = 35,8 \cdot 10^6.$$

Для легкого режиму роботи при коефіцієнті інтенсивності  $K_{HE} = 0,01$  (дод. 27) еквівалентна кількість циклів навантаження зубів дорівнює

$$N_{HE2} = K_E N_{\Sigma 2} = 0,01 \cdot 35,8 \cdot 10^6 = 0,358 \cdot 10^6;$$

$$N_{FE} = N_{HE}.$$

2. *Матеріали для виготовлення черв'яка та черв'ячного колеса.*

Для виготовлення черв'яка беремо леговану сталь 40Х, термообробка — загартування, твердість  $H_1 = 45 \dots 55 \text{ HRC}$ ; робочі поверхні витків шліфовані.

Для вінця черв'ячного колеса зі швидкістю ковзання  $v_s = 6,658 \text{ м/с}$  можна брати олов'яну бронзу Бр010Ф1 (відливання в кокіль) за такими характеристиками (дод. 15): границя міцності  $\sigma_B = 245 \text{ МПа}$ , границя плинності  $\sigma_{пл} = 195 \text{ МПа}$ .

3. *Допустимі напруження.*

3.1. При розрахунку на контактну втому активних поверхонь зубів черв'ячних коліс, виготовлених із олов'яних бронз, допустиме контактне напруження визначають за формулою

$$[\sigma_H] = \sigma_{H0} C_v K_{HL},$$

де  $\sigma_{H0}$  — границя контактної витривалості для бази випробувань  $N_{H0} = 10^7$ ;  $K_{HL}$  — коефіцієнт довговічності;  $C_v$  — коефіцієнт інтенсивності спрацювання зубів;  $\sigma_{H0}$  — залежить від границі міцності  $\sigma_B$

$$\sigma_{H0} = (0,75 \dots 0,9) \sigma_B = (0,75 \dots 0,9) 245 = (183,75 \dots 220,5) \text{ МПа}.$$

Остаточню беремо  $\sigma_{H0} = 200 \text{ МПа}$ .

При швидкості ковзання  $v_s = 6,658 \text{ м/с}$  за таблицею дод. 16 значення коефіцієнта  $C_v = 0,88$ .

Коефіцієнт довговічності визначають за співвідношенням

$$K_{HL} = \sqrt[8]{\frac{10^7}{N_{HE}}} = \sqrt[8]{\frac{10^7}{0,0358 \cdot 10^7}} = 1,5.$$

Коефіцієнт довговічності обмежується значеннями  
 $0,67 \leq K_{HL} < 1,15$ , беремо  $K_{HL} = 1,0$ .

Тоді допустиме контактне напруження дорівнює  
 $[\sigma]_H = 200 \cdot 0,8 \cdot 1,0 = 160$  МПа.

3.2. Допустиме напруження на згин визначають за формулою  
 $[\sigma_F] = \sigma_{F0} K_{FL}$ ,

де  $\sigma_{F0}$  — границя витривалості на згин для бази випробувань  
 $N_{F0} = 10^6$ ;  $K_{FL}$  — коефіцієнт довговічності при розрахунку на згин.

Для нереверсивного навантаження визначаємо

$$\sigma_{F0} = 0,08\sigma_b + 0,25\sigma_{пл} = 0,08 \cdot 245 + 0,25 \cdot 195 = 68,35 \text{ МПа.}$$

Знаходимо коефіцієнт довговічності

$$K_{FL} = \sqrt[9]{\frac{10^6}{N_{FE}}} = \sqrt[9]{\frac{10^6}{0,358 \cdot 10^6}} = 1,12.$$

Ураховуючи обмеження  $0,54 \leq K_{FL} \leq 1$ , беремо  $K_{FL} = 1,0$ .

Тоді допустиме напруження на згин

$$[\sigma_F] = 68,35 \cdot 1,0 = 68,35 \text{ МПа.}$$

4. Визначаємо мінімальну міжосьову відстань черв'ячної передачі

$$a_w \geq \left( \frac{z_2}{q} + 1 \right) \sqrt[3]{ \left( \frac{170}{\frac{z_2}{q} [\sigma_H]} \right)^2 } T_2 K_H,$$

де  $z_2$  — кількість зубів колеса;  $q$  — коефіцієнт діаметра черв'яка, мінімальне значення якого  $q_{\min} = 0,212 z_2$ .

При передаточному відношенні  $u = 24$  кількість заходів нарізки черв'яка беремо  $z_1 = 2$ . Тоді кількість зубів черв'ячного колеса  $z_2 = uz_1 = 24 \cdot 2 = 48$ . Коефіцієнт діаметра черв'яка при  $q_{\min} = 0,212 z_2 = 0,212 \cdot 48 = 10,176$  беремо зі стандартного ряду  $q = 10$ .

$K_H$  — коефіцієнт навантаження визначаємо за формулою

$$K_H = K_{H\beta} K_{Hv},$$

де  $K_{H\beta}$  — коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу навантаження за довжиною контактної лінії;  $K_{Hv}$  — коефіцієнт, що враховує динамічне навантаження, що виникає в зачепленні.

Значення коефіцієнта  $K_{H\beta}$  розраховують за формулою

$$K_{H\beta} = 1 + \left( \frac{z_2}{\Theta} \right)^3 (1 - x),$$

де  $\Theta$  — коефіцієнт деформації черв'яка, що визначають за таблицею дод. 19  $\Theta = 86$ ;  $x$  — допоміжний коефіцієнт, який можна брати для легкого режиму навантаження передачі  $x = 0,6$

$$K_{H\beta} = 1 + \left( \frac{48}{86} \right)^3 (1 - 0,6) = 1,07.$$

Значення коефіцієнта  $K_{Hv}$  визначають за таблицею дод. 11.

Якщо ступінь точності — 6, беремо  $K_{Hv} = 1,1$ .

Знаходимо значення коефіцієнта навантаження

$$K_H = K_{H\beta} K_{Hv} = 1,07 \cdot 1,1 = 1,177.$$

Мінімальна міжосьова відстань черв'ячної передачі

$$a_{w2} \geq \left( \frac{48}{10} + 1 \right)^3 \sqrt[3]{\left( \frac{170}{\frac{48}{10} \cdot 160} \right)^2} 960 \cdot 10^3 \cdot 1,177 = 221,06 \text{ мм.}$$

Визначаємо модуль черв'ячної передачі за формулою

$$m = \frac{2a_w}{q + z_2} = \frac{2 \cdot 221,06}{10 + 48} = 7,62 \text{ мм.}$$

За стандартом вибираємо  $m = 8$  мм, якому відповідає  $q = 10$ . Після вибору стандартних значень  $m$  і  $q$  потрібно обчислити фактичне значення міжосьової відстані, що відповідає прийнятим параметрам:

$$a_w = \frac{m(q + z_2)}{2} = \frac{8(10 + 48)}{2} = 232 \text{ мм.}$$

5. *Визначаємо геометричні розміри черв'яка і черв'ячного колеса:*

ділительний діаметр черв'яка

$$d_1 = mq = 8 \cdot 10 = 80 \text{ мм};$$

діаметр вершин витків черв'яка

$$d_{a1} = d_1 + 2m = 80 + 2 \cdot 8 = 96 \text{ мм};$$

діаметр западин витків черв'яка

$$d_{f1} = d_1 - 2,4m = 80 - 2,4 \cdot 8 = 60,8 \text{ мм};$$

довжину нарізаної частини черв'яка

$$b_1 \geq (11 + 0,06z_2)m + 3m = (11 + 0,06 \cdot 48)8 + 3 \cdot 8 = 135 \text{ мм};$$

ділительний діаметр черв'ячного колеса

$$d_2 = mz_2 = 8 \cdot 48 = 384 \text{ мм};$$

діаметр вершин зубів черв'ячного колеса

$$d_{a2} = d_2 + 2m = 384 + 2 \cdot 8 = 400 \text{ мм};$$

діаметр западин зубів черв'ячного колеса

$$d_{f2} = d_2 - 2,4m = 384 - 2,4 \cdot 8 = 364,8 \text{ мм};$$

ширину вінця черв'ячного колеса

$$b_2 \leq 0,75d_{a1} = 0,75 \cdot 96 = 72 \text{ мм};$$

найбільший діаметр черв'ячного колеса

$$d_{aM2} \leq d_{a2} + \frac{6m}{z_1 + 2} = 400 + \frac{6 \cdot 8}{2 + 2} = 412 \text{ мм};$$

ділительний кут підйому витка черв'яка

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{z_1}{q} = \frac{2}{10} = 0,2; \quad \gamma = 11,3^\circ;$$

швидкість ковзання в зачепленні

$$v_s = \frac{0,5\omega_1 d_1}{\cos \gamma} = \frac{0,5 \cdot 150 \cdot 80 \cdot 10^{-3}}{0,98} = 6,122 \text{ м/с};$$

ККД черв'ячної передачі

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \rho')},$$

де  $\rho'$  — кут тертя, який обирають залежно від швидкості ковзання з таблиці дод. 23  $\rho' = 1^\circ$ .

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} 1,3^\circ}{\operatorname{tg}(11,3+1)} = 0,9.$$

6. *Визначаємо сили в черв'ячному зачепленні:*

колова сила на колесі дорівнює осьовій силі на черв'яку

$$F_{t2} = F_{a1} = \frac{2T_2}{d_2} = \frac{2 \cdot 960 \cdot 10^3}{384} = 5000 \text{ Н};$$

колова сила на черв'яку дорівнює осьовій силі на колесі

$$F_{t1} = F_{a2} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^3}{80} = 1250 \text{ Н};$$

радіальна сила на колесі дорівнює силі на черв'яку

$$F_{r2} = F_{r1} = F_{t2} \operatorname{tg} \alpha = 1819,8 \text{ Н}.$$

7. *Перевірка зубів колеса за контактними напруженнями*

Розрахункове контактне напруження визначаємо за формулою:

$$\sigma_H = 340 \sqrt{\frac{F_{t2} K_H}{d_1 d_2}} \leq [\sigma_H], \quad \sigma_H = 340 \sqrt{\frac{5000 \cdot 1,177}{80 \cdot 384}} = 148,81 \text{ МПа},$$

де  $[\sigma_H] = 160 \text{ МПа}$ .

Контактна міцність зубів колеса забезпечена.

8. *Перевірка зубів колеса за напруженнями згину.*

Розрахункове напруження при згині визначаємо за формулою:

$$\sigma_F = 0,7 \frac{F_{t2} K_F Y_{F2}}{b_2 m} \leq [\sigma_F],$$

де  $K_F$  — коефіцієнт навантаження, беруть  $K_F = K_H = 1,177$ ;  $Y_{F2}$  — коефіцієнт форми зубів, який беруть залежно від еквівалентної кількості зубів черв'ячного колеса

$$z_{E2} = \frac{z_2}{\cos^3 \gamma} = \frac{48}{0,98^3} = 50,9.$$

За таблицею (дод. 12) знаходять значення коефіцієнта  $Y_{F2} = 1,45$ .

$$\sigma_F = 0,7 \frac{5000 \cdot 1,177 \cdot 1,45}{72 \cdot 8} = 10,37 \text{ МПа},$$

що менше  $[\sigma_F] = 68,35 \text{ МПа}$ .

Розрахункові напруження згину виявляються значно нижчими від допустимих, тому навантажувальна здатність закритих черв'ячних передач обмежується контактною міцністю.



## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Назвіть переваги і недоліки черв'ячних передач порівняно із зубчастими.
2. Чому черв'ячні передачі не рекомендується застосовувати при великих потужностях?
3. Із яких міркувань обирають кількість витків черв'яка?
4. Чому в черв'ячній передачі виникає ковзання, як воно напрямлене і як впливає на роботу передачі?
5. Із яких матеріалів виготовляють черв'яки і вінці черв'ячних коліс? Які чинники впливають на вибір матеріалу?
6. Як обчислюються ККД черв'ячної передачі? Назвіть основні чинники, що впливають на ККД.
7. У чому суть теплового розрахунку черв'ячних передач? Назвіть способи охолодження черв'ячних передач.

## 23. ПЛАНЕТАРНІ ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ

### 23.1. Загальні відомості

Зубчасті механізми, у яких геометричні осі одного або кількох коліс переміщуються в просторі, називають *планетарними*.

Планетарні механізми застосовують як механізми з одним або двома степенями вільності. Механізми з одним ступенем вільності називають *планетарними передачами* (планетарними редукторами). Механізми з двома степенями вільності називають *диференціальними (диференціалами)*. Найбільш поширеною є однорядна планетарна передача (рис. 23.1), яка складається з центрального колеса  $1$  із зовнішніми зубами, нерухомого центрального колеса  $3$  із внутрішніми зубами і водила  $4$ , на якому знаходяться осі сателітів  $2$ .

Сателіти обертаються навколо своїх власних осей у рухомому підшипнику. Разом з водилом сателіти обертаються навколо центральної осі подібно до руху планет. Коли колесо  $3$  нерухоме, то рух передається від колеса  $1$  до водила  $4$  і навпаки. Якщо в планетарній передачі зробити рухомими всі ланки, тобто двоє коліс і водило, то така передача називається *диференціалом*.

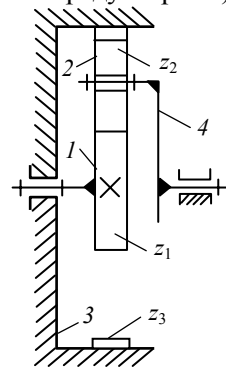


Рис. 23.1. Схема однорядної планетарної передачі

За допомогою диференціала один рух можливо розкласти на два або два скласти в один. Наприклад, рух від колеса 3 можна передати одночасно колесу 1 і водилу 4 або від коліс 1 і 3 водилу 4.

*Переваги:* незначні габарити і маса (передача вписується в розміри корончастого колеса 3); компактність передачі завдяки співвісності ведучих і ведених валів; значно менший шум при роботі порівняно зі звичайними зубчастими передачами; незначні навантаження на вали, що спрощує конструкцію опор; можливість отримати значні передаточні відношення за незначної кількості зубчастих коліс.

*Недоліки:* підвищені вимоги до точності виготовлення та монтажу передачі; різке зниження ККД передачі зі збільшенням передаточного відношення.

*Галузь застосування:* планетарні передачі застосовують як редуктор у силових передачах і приладах; коробку зміни передач; диференціал в автомобілях, тракторах, верстатах, приладах.

### 23.2. Передаточне відношення

Щоб визначити передаточне відношення планетарної передачі, використовують метод зупинки водила (метод Віліса). При цьому всім ланкам планетарної передачі умовно додається додаткове обертання з кутовою швидкістю водила у зворотному напрямі (тобто — «п<sub>4</sub>»). Тоді водило 4 стане нерухомою ланкою, а нерухоме колесо стане рухомим. Отримаємо так званий обернений механізм, що являє собою звичайну зубчасту передачу, у якій геометричні осі всіх коліс нерухомі. Сателіти при цьому стануть проміжними колесами.

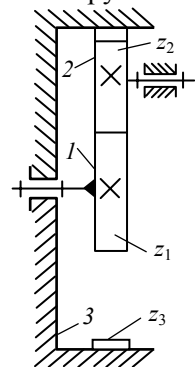


Рис. 23.2. Схема оберненого механізму

Розглянемо визначення передаточного відношення для однорядної планетарної передачі.

Передаточне відношення оберненого механізму (рис. 23.2) являє собою звичайну зубчасту передачу,

Передаточне відношення оберненого механізму (рис. 23.2) являє собою звичайну зубчасту передачу,

$$u' = u'_{12}u'_{23} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Знак «штрих» у передаточних відношеннях означає, що треба брати відношення частот обертання ланок оберненого механізму. В обернено-

му механізмі ланки 1, 2, 3 мають частоти обертання відповідно  $(n_1 - n_4)(n_2 - n_4)(n_3 - n_4)$ . Із урахуванням частот обертання передаточне відношення оберненого механізму

$$u'_{13} = \frac{n_1 - n_4}{n_3 - n_4}. \quad (23.1)$$

Формула (23.1) називається *основною формулою диференціального механізму*. Вона дозволяє при заданих частотах обертання двох будь-яких ланок визначити частоту обертання третьої ланки. Для планетарних передач справедлива основна формула диференціального механізму, якщо вважати, що  $n_3 = 0$ , при цьому будемо мати:

$$u'_{13} = \frac{n_1 - n_4}{-n_4} = -\frac{n_1}{n_4} + 1.$$

Відношення  $\frac{n_1}{n_4}$  є передаточним відношенням  $u_{14}$  планетарної передачі. З урахуванням цього отримаємо:

$$u'_{13} = -u_{14} + 1,$$

звідки

$$u_{14} = 1 - u'_{13}. \quad (23.2)$$

За формулою (23.2) визначається передаточне відношення і для інших видів планетарних передач. При цьому потрібно враховувати знаки передаточного відношення окремих ступенів передачі. Передаточне відношення береться зі знаком «плюс», якщо в оберненому механізмі ведуча і ведена ланки обертаються в один бік (внутрішнє зачеплення), і знаком «мінус», якщо обертаються в різні боки (зовнішнє зачеплення).

### 23.3. Різновидності планетарних передач

Існує велика кількість різних типів планетарних передач. Вибір типу передачі визначається її призначенням. Найбільш широко застосовується в машинобудуванні однорядна планетарна передача (див. рис. 23.1).

Ця передача має мінімальні габаритні розміри і застосовується в силових і допоміжних приводах. ККД цієї передачі становить  $\eta = 0,96 \dots 0,99$  при  $u = 3,15 \dots 12,5$ .

Для отримання великих передаточних відношень у силових приводах застосовують багатоступінчасті планетарні передачі. Типові схеми планетарних передач зображені на рис. 23.3.

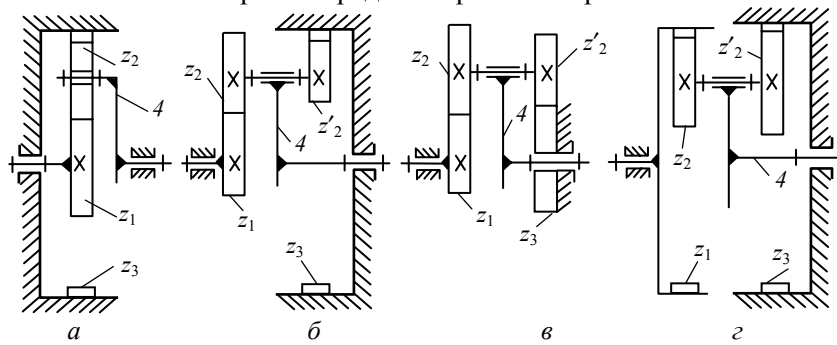


Рис. 23.3. Типові схеми планетарних передач:  
а — однорядна; б, в, г — дворядні

У цих передачах позначено:  $z_1$  — число зубів центрального рухомого колеса;  $z_2, z'_2$  — число зубів сателітів;  $z_3$  — число зубів центрального нерухомого колеса; 4 — водило.

#### 23.4. Вибір числа зубів планетарних передач

На практиці найбільше поширення отримала однорядна планетарна передача (рис. 23.3, а), розрахунок якої і розглянемо. Числом зубів центрального колеса 1 задаються із умови відсутності підризання ножки зуба, обираючи для неї  $z_1 \geq 17$ .

Число зубів нерухомого центрального колеса 3 визначається із заданого передаточного відношення із формули

$$z_3 = z_1(u - 1).$$

Число зубів сателітів знаходять із умови співвідності, тобто міжосьові відстані  $a_w$  зубчастих пар із зовнішнім і внутрішнім зачепленням повинні бути рівні:

$$a_w = 0,5(d_1 + d_2) = 0,5(d_3 - d_2), \quad (23.3)$$

де  $d = mz$  — ділительні діаметри.

Ураховуючи, що модулі зачеплення планетарної передачі однакові, формула (23.3) матиме вигляд

$$z_2 = 0,5(z_3 - z_1).$$

Отримані числа зубів  $z_1, z_2, i z_3$  перевіряють із умови складання і сусідства зубчастих коліс.

*Умова складання* передбачає, що в усіх зачепленнях центральних коліс із сателітами відбувається збіг зубів із западинами, в іншому випадку зібрати передачу неможливо. При симетричному розташуванні сателітів умова складання виконується, якщо сума зубів центральних коліс  $(z_1 + z_3)$  кратна числу сателітів  $c = 2 \dots 6$  (у більшості випадків  $c = 3$ ):

$$\frac{z_1 + z_3}{c} = \text{цілому числу.}$$

*Умова сусідства* потребує, щоб сателіти при обертанні не торкалися зубами один одного. Для цього необхідно, щоб сума радіусів вершин зубів сусідніх сателітів, що дорівнює  $d_{a2} = m(z_2 + 2)$ , була меншою ніж відстань між їх осями (див. рис. 23.1):

$$d_{a2} = 2a_w \frac{\sin \pi}{c}, \quad (23.4)$$

де  $a_w = 0,5m(z_1 + z_2)$  — міжосьова відстань.

Із формули (23.4) маємо, що *умова сусідства* виконується, якщо

$$z_2 + 2 < (z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{c}.$$

### 23.5. Розрахунок на міцність зубів планетарних передач

Розрахунок на міцність зубів планетарних передач ведуть за формулами, що і для звичайних зубчастих передач. Розрахунок виконують для кожного зачеплення. Оскільки модулі і сили в зачепленні однакові, а внутрішнє зачеплення за своїми властивостями міцніше зовнішнього, то при однакових матеріалах достатньо розрахувати тільки зовнішнє зачеплення.

При визначенні допустимих напружень коефіцієнти довговічності  $K_{HL}$  і  $K_{FL}$  знаходять із кількості циклів  $N'$  зміни напружень зубів за весь термін служби при обертанні коліс тільки відносно один одного.

Для центральної шестірні

$$N'_1 = 573 c \omega'_1 L_h,$$

де  $\omega'_1 = \omega_1 - \omega_4$  — відносна кутова швидкість центральної шестірні;  
 $\omega_1$  і  $\omega_4$  — швидкості центральної шестірні і водила.

Для сателітів

$$N'_2 = 573 \omega'_2 L_h,$$

де  $\omega'_2 = \omega'_1 \frac{z_1}{z_2}$  — відносна кутова швидкість сателіта.

Міжосьову відстань планетарної прямозубої передачі пари коліс зовнішнього зачеплення (центральної шестірні із сателітом) визначають за формулою

$$a_w \geq 49,5(u' + 1)^3 \sqrt{\frac{K_c T_1 K_{H\beta}}{c \psi_a u' [\sigma_H]^2}},$$

де  $u' = \frac{z_2}{z_1}$  — передаточне число пари коліс;  $K_c = 1,1 \dots 1,2$  — коефіцієнт нерівномірності розподілу навантаження між сателітами;  $T_1$  — крутний момент на валу центральної шестірні;  $\psi_a$  — коефіцієнт ширини вінця колеса.

При  $u' \leq 6,3$  беруть  $\psi_a = 0,5$ , а при  $u' > 6,3$ ,  $\psi_a = 0,4$ . Отримане значення  $a_w$  заокруглюють до стандартного значення.

Ширина центрального (корончастого колеса)

$$b_3 = \psi_a a_w.$$

Ширину вінців сателітів і центральної шестірні беруть на 2...4 мм більше значення  $b_3$ .

Дільний діаметр центральної шестірні

$$d_1 = \frac{2a_w}{u' + 1}.$$

Модуль зачеплення  $m = \frac{d_1}{z_1}$ .

Отримане значення модуля заокруглюють до найближчого стандартного значення, а потім уточнюють число зубів коліс за формулами:

$$z_1 = \frac{2a_w}{m(u' + 1)}, \quad z_2 = z_1 u', \quad z_3 = z_1 + 2z_2$$

із наступною перевіркою умов складання та сусідства.

Колову силу в зачепленні знаходять за формулою

$$F_t = \frac{2T_1 K_c}{d_1 c}$$

Радіальну силу визначають як і в звичайних прямозубих циліндричних передачах.

**Приклад 23.1.** Визначити число обертів водила  $n_4$  планетарної передачі, якщо відомі число обертів  $n_1 = 5400$  об/хв та кількість зубів зубчастих коліс:  $z_1 = 18$ ;  $z_2 = 36$ ;  $z'_2 = 96$  (рис. 23.4).

*Розв'язання*

1. Визначаємо передаточне відношення планетарної передачі:

$$u_{14} = 1 - u'_{13} = 1 - \left( -\frac{z_2 z_3}{z_1 z'_2} \right) = 1 + \frac{36 \cdot 96}{18 \cdot 24} = 9$$

2. Знаходимо число обертів водила  $n_4$ :

$$u_{14} = \frac{n_1}{n_4}$$

звідси частота обертання валу 4 (води́ла)

$$n_4 = \frac{n_1}{u_{14}} = \frac{5400}{9} = 600 \text{ об/хв}$$

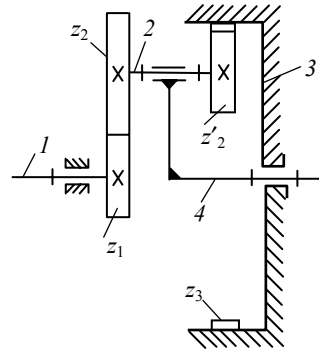


Рис. 23.4. Схема дворядної планетарної передачі

### ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Яку зубчасту передачу називають планетарною? Наведіть конструкцію та принцип роботи.
2. В якому випадку планетарну передачу називають диференціалом?
3. Які основні переваги і недоліки планетарних передач порівняно з простими зубчастими?
4. В яких галузях машинобудування планетарні передачі широко застосовуються?
5. Який принцип застосовують під час виведення формули для визначення передаточного відношення планетарної передачі?
6. Як визначають умови співвісності, складання і сусідства планетарних передач?

## 24. РЕДУКТОРИ

### 24.1. Загальні відомості

*Редуктором* називається механізм, який знижує кутову швидкість і збільшує крутний момент на вихідному валу.

Редуктори широко застосовують у приводах підйомно-транспортних і металургійних машин у суднобудуванні, авіабудуванні та ін.

Більшість редукторів виконують з передаточним відношенням  $u \leq 160$ . Біля 75 % редукторів виготовляють двоступінчастими з  $u = 8 \dots 40$ . Зубчасті редуктори випускають серійно в одно-, дво- і триступінчастому виконанні (рис. 24.1). Тип редуктора визначається складом передач, порядком їх розташування в напрямі від швидкохідного вала до тихохідного і розташуванням осей валів у просторі.

Для позначення передач використовують прописні літери алфавіту: *Ц* — циліндрична, *К* — конічна, *Ч* — черв'ячна, *Г* — глобоїдальна, *П* — планетарна, *М* — мотор-редуктор.

*Основною характеристикою редуктора* є номінальний обертальний момент *T* на тихохідному валу при постійному навантаженні.

### 24.2. Зубчасті редуктори

*Одноступінчасті* редуктори типу *Ц* (рис. 24.1) використовують при передаточному числі  $u \leq 8$ . Зачеплення здебільшого косозубе.

*Двоступінчасті* редуктори виконують за розгорнутою (рис. 24.1, б, в), роздвоєною (рис. 24.1, з) та співвісною (рис. 24.1, д) схемами.

Найбільш поширені *циліндричні двоступінчасті* горизонтальні редуктори типу *Ц2*, виконані за розгорнутою схемою (рис. 24.1, б). Вони технологічні, мають невелику ширину. Основним недоліком цих редукторів є підвищена нерівномірність навантаження за довжиною зуба через несиметричність розташування коліс відносно опор. Для поліпшення умов роботи зубчастих коліс застосовують редуктори з роздвоєним швидкохідним ступенем типу *Ц2Ш* (широкою) (рис. 24.1, з), які легші, але ширші.

*Співвісні редуктори* типу *Ц2С* (рис. 24.1, д) застосовують для зменшення довжини корпусу. Вони простіші за конструкцією і менш трудомісткі у виробництві.



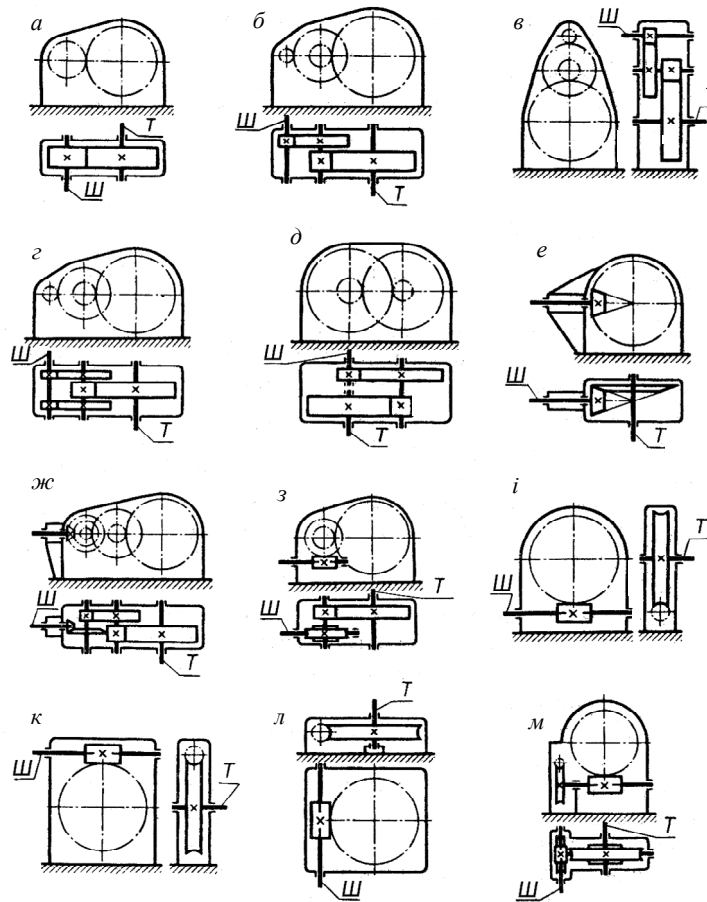


Рис. 24.1. Кінематичні схеми редукторів:  
 Ш — швидкохідний вал; Т — тихохідний вал

Конічні редуктори типу *K* (рис. 24.1, *e*) виконують з коловими зубами, передаточним відношенням  $u \leq 5$ . Конічно-циліндричні редуктори (рис. 24.1, *ж*) виконують завжди зі швидкохідною конічною передачею.

Планетарні редуктори — дозволяють отримати великі передаточні відношення при незначних габаритах. За конструкцією вони

складніші за інші редуктори. Найбільш розповсюджені прості одноступінчасті планетарні зубчасті редуктори. Послідовним з'єднанням декількох простих планетарних передач можна отримати редуктор з необхідним передаточним відношенням.

*Черв'ячні редуктори.* В основному розповсюджені одноступінчасті редуктори (рис. 24.1, *i, κ, л*) з передаточним відношенням  $u = 8 \dots 80$ .

Для приводів тихохідних машин застосовують черв'ячно-циліндричні (рис. 24.1, *з, м*) або двоступінчасті черв'ячні редуктори.

*Основними параметрами* всіх редукторів є *передаточне відношення, коефіцієнти ширини коліс, модулі зачеплення, кути нахилу зубів, коефіцієнти діаметрів черв'яка.*

Тип редуктора, параметри і конструкцію визначають залежно від його місця в силовому ланцюгу приводу машини, потужності і кутової швидкості призначення машин та умов експлуатації.

*Корпуси редукторів* повинні бути міцними і жорсткими. Їх відливають із сірого чавуну і виготовляють розбірними для спрощення монтажу.

Опорами валів редукторів, як правило, є підшипники кочення.

*Мащення* зубчастих та черв'ячних передач редукторів здебільшого здійснюється методом занурення зубів коліс, а підшипників — розбризкуванням або пластичним мастильним матеріалом. У корпус редуктора заливають мастило з розрахунку 0,4...0,7 л на 1 кВт потужності, але при цьому колесо або черв'як повинні занурюватися в мастило на глибину не менше висоти зуба або витка.

При коловій швидкості більше 3 м/с здійснюється інтенсивне розбризкування мастила в корпусі та утворення масляного туману, який забезпечує мащення усіх інших зачеплень і підшипників кочення.



#### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Який механізм називається редуктором?
2. Яке призначення редуктора в приводі машини?
3. Чому циліндричні зубчасті редуктори отримали широке застосування в машинобудуванні?
4. За якими схемами виконують циліндричні двоступінчасті редуктори?
5. Назвіть основні параметри редуктора.

## 25. ПАСОВІ ПЕРЕДАЧІ

### 25.1. Загальні відомості

Пасова передача (рис. 25.1) складається з двох шківів, закріплених на валах, і паса, що охоплює шківви. Передача потужності від ведучого до веденого шківви виконується за рахунок сил тертя між пасом та шківви.

Утворення необхідної сили тертя забезпечується попереднім натягом паса.

Розрізняють: *плоскопасову* (рис. 25.1, а), *клинопасову* (рис. 25.1, б), *круглопасову* (рис. 25.1, в) передачі.

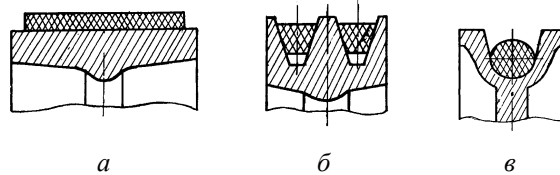


Рис. 25.1. Схеми пасових передач та перерізи пасів

*Переваги пасових передач:*

- простота конструкції та обслуговування;
- можливість передачі потужності на значні відстані (до 15 м);
- можливість компенсування перевантажень за рахунок ковзання паса;
- плавність та безшумність роботи.

*Недоліки пасових передач:*

- значні габарити;
- несталість передаточного відношення за рахунок ковзання паса;
- значне навантаження на вали та опори;
- низька довговічність паса.

*Галузь використання.*

Пасові передачі переважно використовують для передачі потужності від 0,3 до 50 кВт.

Швидкість плоских пасів — 5...30 м/с. Швидкість клинових пасів — 25...35 м/с.

Передаточні відношення пасових передач не перевищують 4...5.

## 25.2. Геометрія пасових передач

На схемі пасової передачі (рис. 25.2) позначено:  $2\gamma$  — кут між гілками паса;  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  — кути обхвату;  $d_1$  і  $d_2$  — діаметри шківів;  $a$  — міжосьова відстань;  $T_1, T_2$  — крутні моменти.

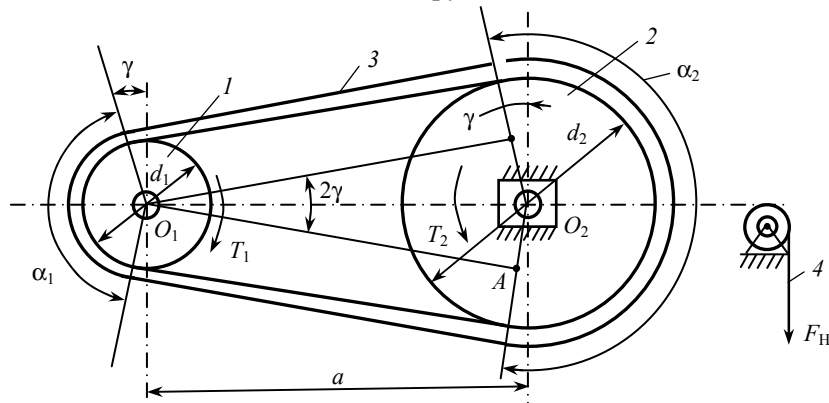


Рис. 25.2. Схема пасової передачі

Значення кута  $\gamma$  визначають із трикутника  $O_1AO_2$

$$\sin \gamma \approx \frac{AO_2}{O_1O_2} = \frac{d_2 - d_1}{2a}.$$

При рекомендованих міжосьових відстанях  $\gamma$  практично не більше  $\pi/6$ , а тому беруть  $\sin \gamma \approx \gamma$ ,

тоді

$$\gamma = \frac{d_2 - d_1}{2a} \text{ рад.}$$

Кути обхвату  $\alpha_1 = 180^\circ - 2\gamma$ ;  $\alpha_2 = 180^\circ + 2\gamma$ .

Міжосьову відстань у плоскостових передачах визначають як:

$$a = 2(d_1 + d_2).$$

Довжина паса 
$$L = 2a + \pi \frac{(d_2 + d_1)}{2} + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}.$$

## 25.3. Сили і силові залежності в пасових передачах

На рис. 25.3, а показано пасову передачу, навантажену тільки силами попереднього натягу паса  $F_H$ . У цьому випадку обидві гілки паса навантажені однаковою силою  $F_0$ . Якщо передача передає

крутний момент  $T_1$ , то зусилля в гілках паси (рис. 25.3, б) змінюються на  $F_1$  і  $F_2$  у ведучій і веденій гілках відповідно. При цьому  $F_1$  більше від  $F_2$ .

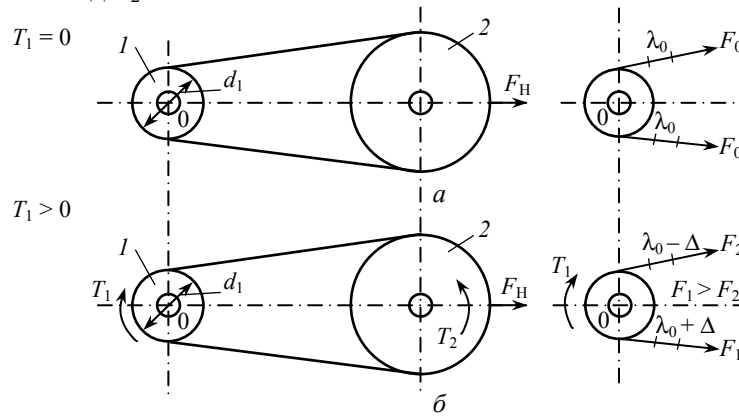


Рис. 25.3. Схема обчислення силових залежностей у пасових передачах

Розглянемо умову рівноваги шківів відносно точки  $O$ :

$$\Sigma M_0 = 0; \quad F_1 \frac{d_1}{2} - T_1 - F_2 \frac{d_1}{2} = 0;$$

$$T_1 = \frac{F_1 d_1}{2}; \quad F_t = F_1 - F_2; \quad (25.1)$$

$$F_1 = F_0 + \Delta F; \quad F_2 = F_0 - \Delta F; \quad F_1 + F_2 = 2F_0. \quad (25.2)$$

Рівняння (25.1) і (25.2) показують, як змінюється сила натягу в гілках при передачі колової сили  $F_t$ . Зв'язок між силами натягу  $F_1$  і  $F_2$  та параметрами тертя  $f$  і  $\alpha$  встановлюється за формулою Ейлера:

$$F_1/F_2 = e^{\alpha f}, \quad (25.3)$$

де  $e$  — основа натурального логарифму;  $\alpha$  — кут обхвату;  $f$  — коефіцієнт тертя.

Розв'язуючи сумісно рівняння (25.1), (25.2), (25.3), маємо:

$$F_2 = \frac{F_t}{e^{\alpha f} - 1}; \quad (25.4)$$

$$F_1 = \frac{F_t e^{\alpha f}}{e^{\alpha f} - 1}; \quad (25.5)$$

$$F_0 = \frac{F_t}{2} \left( \frac{e^{\alpha f} + 1}{e^{\alpha f} - 1} \right). \quad (25.6)$$

Формули (25.4), (25.5), (25.6) показують, як залежать сили  $F_1$ ,  $F_2$  та  $F_0$  від колової сили  $F_t$  та параметрів тертя  $f$  і  $\alpha$ .

Формула (25.6) встановлює необхідний натяг  $F_0$  для передачі колової сили  $F_t$ .

#### 25.4. Сили в пасі від дії відцентрових сил

При згинанні шківів на кожен його елемент діє відцентрова сила  $F_v$ . Розглянемо умову рівноваги елемента паса, виділеного кутом  $d\varphi$  (рис. 25.4):

$$dF_v - 2F_v \sin \frac{d\varphi}{2} = 0;$$

$$dF_v = \frac{dm v^2}{0,5d} = \rho \frac{(d\varphi 0,5d A)v^2}{0,5d},$$

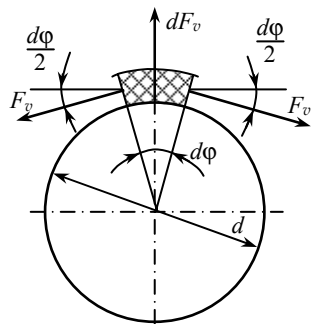


Рис. 25.4. Схема обчислення зусиль від дії відцентрових сил

де  $dF_v$  — елементарна відцентрова сила;  $dm$  — елемент маси паса;  $A$  — площа поперечного перерізу паса;  $\rho$  — густина матеріалу паса;  $v$  — колова швидкість:

$$dF_v = \rho d\varphi A v^2; \quad \sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2};$$

$$dF_v = 2F_v \frac{d\varphi}{2} = F_v d\varphi;$$

$$\rho d\varphi A v^2 = F_v d\varphi.$$

Тоді додатковий натяг  $F_v$  у кожному перерізі паса визначається за формулою

$$F_v = \rho A v^2.$$

Натяг  $F_v$  зменшує корисну дію попереднього натягу  $F_0$ , силу тертя і навантажувальну спроможність передачі.

#### 25.5. Навантаження на вали пасової передачі

Сили натягу гілок паса передаються на вали й опори. З трикутника  $OAB$  (рис. 25.5):

$$F_n = 2F_0 \sin \frac{\alpha_1}{2}.$$

Зусилля на підшипники прийнято визначати по лінії центрів шківів. Із розрахунків виходить, що сили, які діють на підшипники, приблизно у два-три рази більші за сили натягу паси.

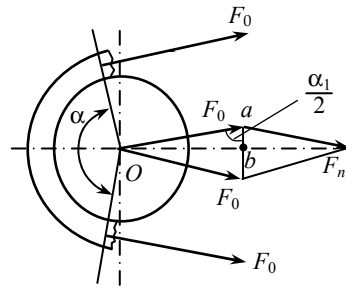


Рис. 25.5. Схема визначення навантаження валів

### 25.6. Ковзання паси

Ковзання паси буває двох видів:

- 1) *пружне ковзання*, обов'язкове при нормальній роботі пасової передачі й обумовлене пружністю паси;
- 2) *буксування* — виникає при перенавантаженнях.

Під час роботи пасової передачі без навантаження ковзання паси не відбувається. При навантаженні пасової передачі змінюється натяг гілок паси, який обумовлює пружне ковзання (рис. 25.6).

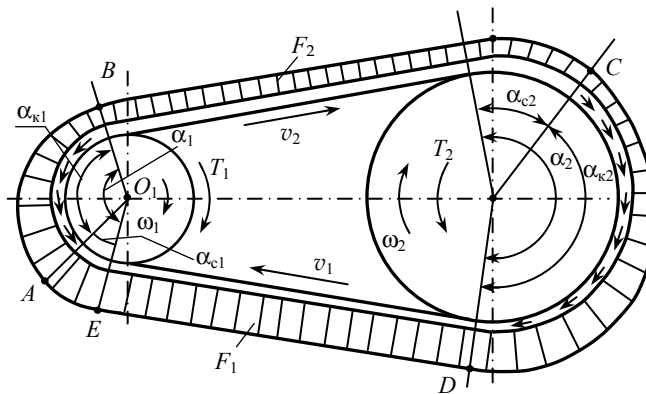


Рис. 25.6. Натяг у гілках паси при передачі навантаження

На ведучій і веденій гілках паси натяг зменшується від  $F_1$  до  $F_2$  на відріжку  $AB$  ведучого шківів. Тут пас скорочується. На веденому шківі на відріжку  $CD$  натяг збільшується від  $F_2$  до  $F_1$ , а пас при цьому видовжується. Ковзання паси по шківу відбувається по частині кута обхвату, який називається *кутом ковзання* —  $\alpha_k$ , а кут  $\alpha_c$  — *кутом спокою*. Їх сума дає кут обхвату.

Величина кута ковзання залежить від навантаження на пасову передачу. Чим менше навантаження, тим менше буде ковзання і навпаки. Може бути, що кут ковзання дорівнюватиме куту обхвату. При цьому ковзання буде відбуватись по всій дузі обхвату. Це початок буксування. За такої умови ведений шків може зупинитись, а коефіцієнт дії передачі впаде до нуля.

*Передаточне відношення пасової передачі.* Швидкість паса на ведучому шківі зменшується з  $v_1$  до  $v_2$ , а на веденому — зростає з  $v_2$  до  $v_1$ . Ця різниця у швидкостях оцінюється *коефіцієнтом пружного ковзання* —  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{v_1 - v_2}{v_1}.$$

Оскільки  $v_1 = \omega_1 d_1/2$  і  $v_2 = \omega_2 d_2/2$ , передаточне відношення пасової передачі знаходять як

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1(1-\epsilon)}.$$

Значення коефіцієнта пружного ковзання здебільшого не перевищує 0,015...0,02.

### 25.7. Напруження у гілках пасової передачі

У пасу виникають такі види напружень:

– напруження від попереднього навантаження

$$\sigma_0 = \frac{F_0}{A};$$

– напруження від робочого навантаження

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A};$$

– напруження ведучої  $\sigma_1$  та веденої  $\sigma_2$  гілок паса

$$\sigma_1 = \sigma_0 + 0,5\sigma_t; \quad \sigma_2 = \sigma_0 - 0,5\sigma_t;$$

– напруження від відцентрової сили

$$\sigma_v = \frac{F_v}{A} = \frac{\rho v^2 A}{A} = \rho v^2;$$

– напруження згинання виникають на відрізках паса, що обігають шківви.



За законом Гука

$$\sigma_F = \delta E,$$

де  $\delta$  — відносна деформація паса при згинанні:

$$\delta = Y_{\max} / r,$$

де  $Y_{\max}$  — максимальна відстань до нейтрального шару паса;  $r$  — радіус кривизни нейтрального шару паса;

$$r \approx \frac{d}{2}; \quad Y_{\max} = \frac{h}{2},$$

де  $d$  — діаметр шківів;  $h$  — висота паса;  $E$  — модуль пружності матеріалу паса;

$$\sigma_F = \delta E = \frac{h/2}{d/2} E = \frac{Eh}{d}. \quad (25.7)$$

З формули (25.7) виходить, що напруження згинання більші на ведучому шківі. Тому діаметр шківів повинен бути таким, щоб він не перевищував допустиме напруження паса на згин.

На рис. 25.7 побудовано діаграму розподілу напружень за довжиною паса для випадку, коли він передає робоче навантаження. З діаграмами виходить, що за один обіг у пасі відбувається зміна напружень. Максимальне напруження має місце у ведучій гілці в місці набігання паса на менший шків і дорівнює:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_v + \sigma_{F1}. \quad (25.8)$$

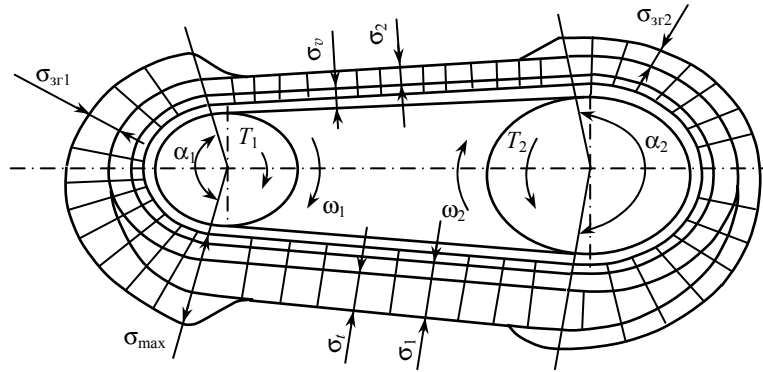
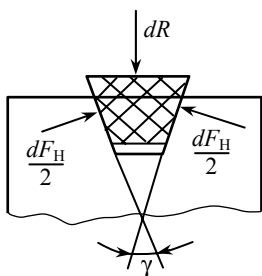


Рис. 25.7. Розподіл напружень у перерізах паса

### 25.8. Переваги і сфера застосування клинового паса

Клиновий пас дозволяє покращити тягову здатність передачі за рахунок збільшення сили тертя між пасом та шківом.

Елемент клинового паса притискується до шківів з силою  $dR$  (рис. 25.8). При цьому елементарна сила тертя дорівнює:



$$dF_t = f dF_n = f \frac{dR}{\sin \gamma/2} = dR f', \quad (25.9)$$

де  $f'$  — приведений коефіцієнт тертя.

За тих же умов для плоскостасової передачі

$$dF_t = dR f.$$

Різниця між формулами (25.8) і (25.9) тільки в коефіцієнті тертя. Якщо розглянути

приклад, коли  $\gamma = 40^\circ$ , то  $f' = \frac{f}{\sin 20^\circ} \approx 3f$ ,

Рис. 25.8. Клиновий пас

тобто тягова здатність клинового паса в даному випадку приблизно втричі більша, ніж у плоского. Клинопасові передачі компактніші за плоскостасові, мають більші передаточні числа і передають більші навантаження.

### 25.9. Тягова здатність пасових передач

До основних критеріїв працездатності пасових передач відносять *тягову здатність* та *довговічність паса*. Основним розрахунком пасової передачі є розрахунок на тягову здатність. Розрахунок на довговічність є перевірним.

Тягова здатність паса залежить від величини сил тертя між пасом та шківом. Досліджуючи тягову здатність, будують графіки залежності відносного ковзання паса та коефіцієнта корисної дії від коефіцієнта тяги (рис. 25.9).

*Коефіцієнт тяги*  $\varphi$  — це відношення корисного навантаження паса до суми сил натягу гілок передачі:

$$\varphi = \frac{F_t}{F_1 + F_2} = \frac{F_t}{2F_0} = \frac{\sigma_t}{2\sigma_0}.$$

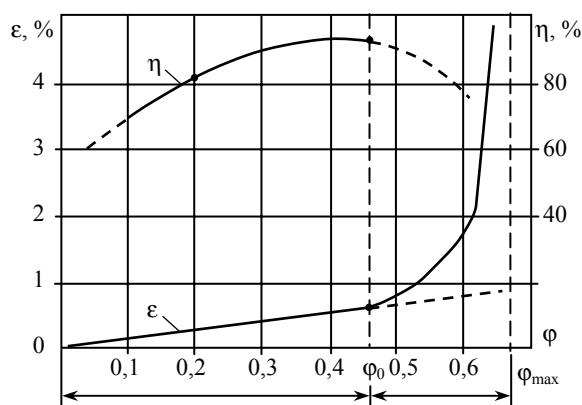


Рис. 25.9. Криві ковзання і ККД пасової передачі

На базі цих залежностей розроблено метод розрахунку пасових передач. По осі абсцис відкладають навантаження, виражене через коефіцієнт тяги.

По осі ординат — коефіцієнт відносного ковзання паса та корисної дії. Ці графіки називаються *кривими ковзання та ККД пасової передачі*.

Під час випробувань поступово збільшується корисне навантаження при постійному попередньому натягуванні паса. При цьому вимірюють ковзання та ККД.

При зростанні коефіцієнта тяги від 0 до  $\varphi_0$  відбувається пружне ковзання паса. Коли коефіцієнт тяги дорівнює  $\varphi_0$ , сила корисного навантаження досягає свого максимуму і дорівнює силі тертя між пасом та шківом.

Коефіцієнт корисної дії у цьому випадку теж максимальний. Дуга спокою зникає, а дуга ковзання дорівнює дузі обхвату.

У разі подальшого збільшення коефіцієнта тяги робота пасової передачі стає несталою. До пружного ковзання додається часткове буксування, яке потім переходить у повне буксування. При максимальному значенні коефіцієнта тяги ведений шків зупиняється, а ККД дорівнює нулю.

Значення  $\varphi_0$  встановлюється експериментально для кожного типу пасів. Його значення є критерієм раціональної роботи паса.

Визначивши його значення, знаходять допустиме корисне навантаження на пас

$$[F_t] = 2\varphi_0 F_0.$$

Середні значення коефіцієнта  $\varphi_0$  для плоских пасів 0,4...0,5, а для клинових — 0,6...0,7.

### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Укажіть переваги, недоліки та сферу застосування пасових передач із плоским пасом.
2. Якими перевагами і недоліками характеризується клинопасова передача порівняно з плоскопасовою?
3. Назвіть та охарактеризуйте основні типи клинових пасів.
4. Чому обмежують кількість пасів у комплекті клинопасової передачі?
5. Чому при огинанні шківів рівних діаметрів напруження в клиновому пасі значно більше, ніж у плоскому?

## 26. ВАЛИ ТА ОСІ

### 26.1. Загальні відомості

Зубчасті колеса, шківни та інші обертові деталі машин установлюють на валах або осях.

*Вісь* — деталь видовженої циліндричної форми, що підтримує елементи машин у їхньому обертовому русі, не передаючи корисного крутного моменту.

*Вал* — деталь, яка, на відміну від осей, призначена для передавання крутного моменту та підтримання елементів машин у їхньому обертовому русі.

Існують деякі види валів, наприклад, гнучкі дротяні та торсійні, які не підтримують деталей, а лише передають крутний момент. За призначенням розрізняють вали передач (зубчастих, пасових, ланцюгових тощо); корінні вали машин, які, крім деталей передач, несуть ще й робочі органи виробничих машин або машин-двигунів. Наприклад, вали турбін, токарних верстатів, електродвигунів.

За формою геометричної осі вали можуть бути прямолінійними або колінчастими. Колінчасті вали використовують у двигунах внутрішнього згорання, поршневих помпах. Їхні конструкції та розрахунок розглядаються у відповідних спеціальних дисциплінах.

Розглянемо вали передач. Вал завжди обертається і передає крутний момент. Він навантажений поперечними силами і згинальними моментами, а іноді й поздовжніми силами.

Найпоширеніші прямолінійні вали за конструкцією можуть бути циліндричними постійного діаметра (рис. 26.1, *a*), ступінчастими (рис. 26.1, *б*) і з нарізаними на них зубчастими вінцями або шліцями (рис. 26.1, *в*). Ступінчасті вали спрощують посадки деталей на окремих ділянках, забезпечують створення упорів та буртиків для осьової фіксації встановлених на валах деталей. За видом поперечного перерізу вали можуть бути суцільними, або порожнистими, а за обрисом перерізу — гладкими циліндричними, зі шпонковими пазами, шліцьовими або прямокутними (рис. 26.2).

Опорні частини валів та осей називаються *цапфами*. Проміжні цапфи називаються *шийками*, а кінцеві — *шипками*.

Для виготовлення валів і осей, як правило, застосовують сталі. Без термічної обробки застосовують вуглецеві сталі (Ст. 3, Ст. 4, Ст. 5). Для термічно оброблюваних валів беруть середньовуглецеві (Ст. 30, 40, 45, 50) і леговані (Ст. 40Х, 40ХН, 20ХГТ) сталі.

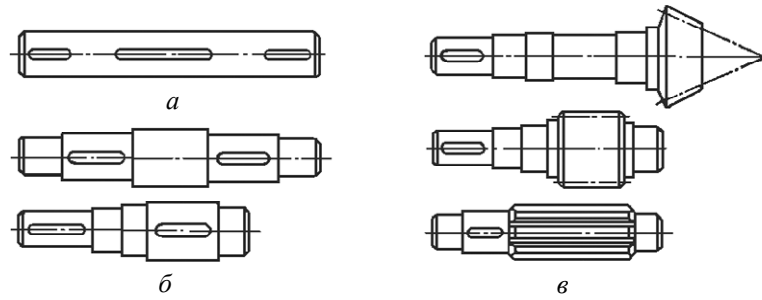


Рис. 26.1. Конструкції валів:  
*a* — циліндричний; *б* — ступінчасті; *в* — конічний  
і циліндричний вали — шестірні та шліцьовий вал

Для виготовлення валів і осей застосовують круглий прокат при діаметрі, що не перевищує 200 мм; кування при діаметрі понад 200 мм.

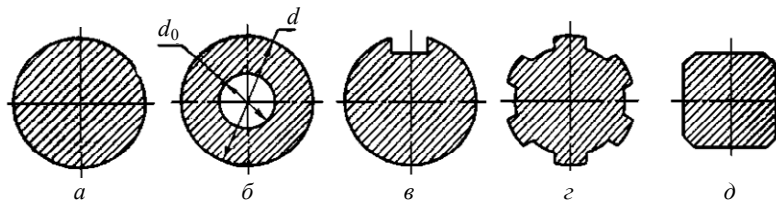


Рис. 26.2. Форми поперечних перерізів валів:  
*a* — суцільний; *б* — порожнистий; *в* — із шпонковим пазом;  
*г* — із прямокутними шліцями; *д* — прямокутного перерізу

## 26.2. Проектний розрахунок валів

Під час проектного розрахунку, як правило, відомі крутний момент  $T$  (Н·м) або потужність  $P$  (кВт); частота обертання  $n^{-1}$  (хв); навантаження і розміри основних деталей, розміщених на валу. Необхідно знайти розміри вала.

Для виконання розрахунку необхідно знати конструкцію вала (точки прикладання сил, розміщення опор вала тощо). Щоб її розробити, слід орієнтовно визначити діаметр вала.

Під час розрахунку вала додержуються такої послідовності.

Попередньо оцінюють діаметр вала з умови роботи його на кручення за заниженими допустимими напруженнями:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau]}}$$

де  $T$  — крутний момент, Н·мм;  $[\tau] = 20 \dots 40$  МПа — допустиме напруження на кручення для валів з вуглецевої сталі.

Попередньо оцінити діаметр вала можна також, орієнтуючись на діаметр того вала (якщо він відомий), з яким він з'єднується. Наприклад, якщо вал редуктора з'єднується з валом електродвигуна, то діаметр вхідного вала редуктора можна взяти таким, що дорівнює або наближується до діаметра вихідного вала електродвигуна

$$d_1 = (0,8 \dots 1,2) d_e,$$

де  $d_e$  — діаметр вихідного вала електродвигуна.

Знайшовши орієнтовний діаметр вала з урахуванням зручності складання та фіксації деталей на валу в осьовому напрямку, визначають діаметри решти ділянок вала. При цьому слід забезпечувати мінімальні перепади діаметрів сусідніх ділянок вала (2...8 мм), але достатні для створення упорних буртиків, потрібних для осьової фіксації деталей. Коли вал має шпонку, то добутий з розрахунку діаметр необхідно збільшити на 5...10 % для компенсації концентрації напружень. Якщо для вала передбачено кілька шпонкових пазів, то їх слід розміщувати на одній лінії. Остаточні значення діаметрів вала в місцях посадки спряжених деталей (зубчастих коліс, шківів, підшипників) округлюють до найближчих стандартних значень із нормальних лінійних розмірів згідно з рядом Ra 40: 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 53; 56; 60; 63; 67; 71; 75; 80; 85; 90; 95; 100.

У результаті попередньої розробки конструкції вала визначають розміри всіх його конструктивних елементів. Після розробки конструкції вала складають розрахункову схему. Розрахункові схеми валів та осей зображують у вигляді балок на шарнірних опорах, які навантажені поперечними та осьовими силами, що виникають у зачепленні встановлених на них зубчастих коліс від натягу гілок пасової чи ланцюгової передачі. Під час складання розрахункових схем валів та осей необхідно з певним наближенням визначити відстань між опорами, місця розміщення деталей, через які передаються на вали та осі зовнішні навантаження.

Розрахункові схеми валів та осей можуть бути надзвичайно різноманітними. Об'єктом нашого дослідження є двохопорні вали та

осі як статично визначені системи. Власну масу валів та встановлених на них деталей здебільшого в розрахунках не беруть до уваги за умови їхніх розмірів. Деякі найпоширеніші розрахункові схеми осей та валів зубчастих передач зображено на рис. 26.3.

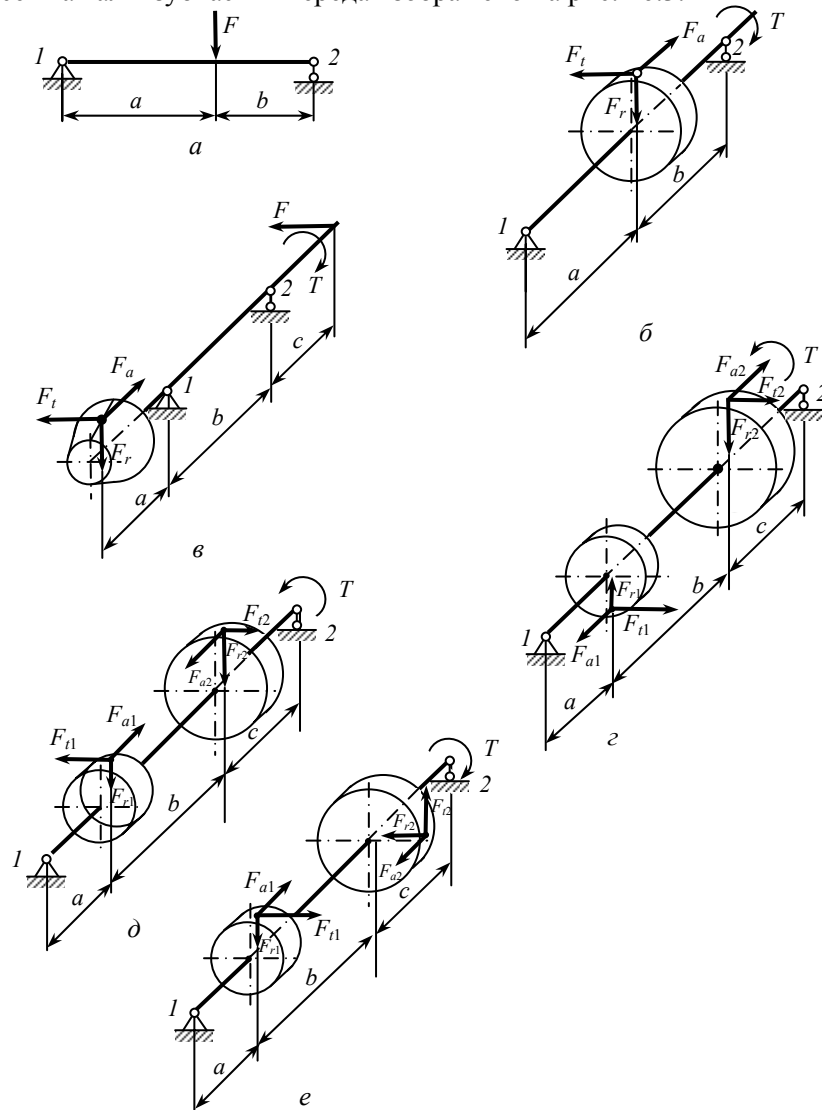


Рис. 26.3. Розрахункові схеми осей та валів



Найпростішою є розрахункова схема осі (рис. 26.3, *a*), навантаженої однією поперечною силою  $F$ . Більш складними є розрахункові схеми валів.

На рис. 26.3, *б, в* зображено розрахункові схеми валів відповідно циліндричної та конічної передач з розміщенням зубчастого колеса між опорами 1 і 2 вала та консольним розміщенням колеса.

У цих схемах вали навантажуються крутним моментом  $T$ , силами  $F_t$  (коловою),  $F_r$  (радіальною),  $F_a$  (осьовою), що виникають у зачепленні зубів відповідної передачі. Крім зазначених сил, у зачепленні на вал можуть діяти також сили від натягу гілок пасової чи ланцюгової передачі (рис. 26.3, *в*), сила  $F$  або сили від взаємодії деталей муфт, що з'єднують вали.

Розрахункові схеми проміжних валів багатоступінчастих зубчастих передач зображено на рис. 26.3, *г, д, е*. Ці схеми відрізняються між собою взаємним розміщенням місць прикладання сил, що виникають у зачепленні зубчастих коліс, розміщених на валу.

Під час аналізу таких схем навантаження валів слід розглядати окремо силові фактори в різних площинах, а відтак, підсумовувати геометрично.

Із розглянутих схем видно, що вали в процесі роботи зазнають деформацій згинання, розтягування або стискання і кручення. Сталість напрямку поперечних сил щодо поздовжньої осі вала спричиняє в обертових валах появу циклічно змінних напружень згинання, а для осьових сил — виникнення у перерізах валів напружень розтягання або стискання.

Характер зміни дотичних напружень кручення відповідає характеру зміни в часі крутного моменту  $T$ .

Отже, різні перерізи валів знаходяться під дією змінних у часі нормальних і дотичних напружень. Тому для більшості валів сучасних швидкохідних машин такий критерій міцності, як стійкість валів проти втомного руйнування, має вирішальне значення.

Для тихохідних валів або валів, що підпадають під дію короткочасних пікових перевантажень, основним розрахунковим критерієм є також статична міцність.

Вали, що мають значні (порівняно з діаметром) відстані між опорами, можуть бути недостатньо жорсткими в поперечному напрямку. Тому важливим критерієм розрахунку довгих валів є умова достатньої жорсткості.

### 26.3. Розрахунок валів на статичну міцність

Перевірку статичної міцності валів виконують з метою запобігання пластичним деформаціям під час дії короткочасних перевантажень. Щоб виконати розрахунок, слід мати всі розміри вала та його форму, які потрібні для правильного складання розрахункової схеми.

Умову статичної міцності вала беруть у вигляді

$$\sigma_{e \max} = \sigma_e K_H \leq [\sigma_e],$$

де  $\sigma_{e \max}$  — максимальне еквівалентне напруження в небезпечному перерізі вала;  $\sigma_e$  — еквівалентне напруження, яке обчислюють за номінальним розрахунковим навантаженням;  $K_H = \frac{T_{\max}}{T}$  — коефіцієнт, що враховує короткочасні перевантаження;  $[\sigma_e] = 0,8; \sigma_T$  — допустиме еквівалентне напруження.

Як приклад розглянемо розрахунок вала зубчастої передачі, конструкцію якого зображено на рис. 26.4, а, а розрахункову схему з епюрами згинального та крутного моментів — на рис. 26.4, б.

Вал має діаметри окремих ділянок  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ , а його опорні цапфи — діаметри  $d_1$  і  $d_5$ . Відстань від середнього перерізу вала під зубчастим колесом до центрів його опор 1 і 2 відповідно дорівнює  $a$  і  $b$ .

Сили  $F_t, F_r, F_a$ , які виникають у зачепленні колеса діаметром  $d$ , передаються на вал.

Вал навантажений зовнішнім крутним моментом  $T$  та силами. Для цієї схеми навантаження радіальні реакції опор вала (окремо від дії кожної із сил) визначаються за такими співвідношеннями:

$$R_{1t} = \frac{F_t b}{a+b}; R_{2t} = \frac{F_t a}{a+b};$$

$$R_{1r} = \frac{F_r b}{a+b}; R_{2r} = \frac{F_r a}{a+b}; R_{1a} = R_{2a} = \frac{0,5 F_a d}{a+b}.$$

Сумарні радіальні реакції опор вала знаходимо як результат геометричної суми окремих складових:

$$R_1 = \sqrt{(R_{1r} + R_{1a})^2 + R_{1t}^2};$$

$$R_2 = \sqrt{(R_{2r} + R_{2a})^2 + R_{2t}^2}.$$

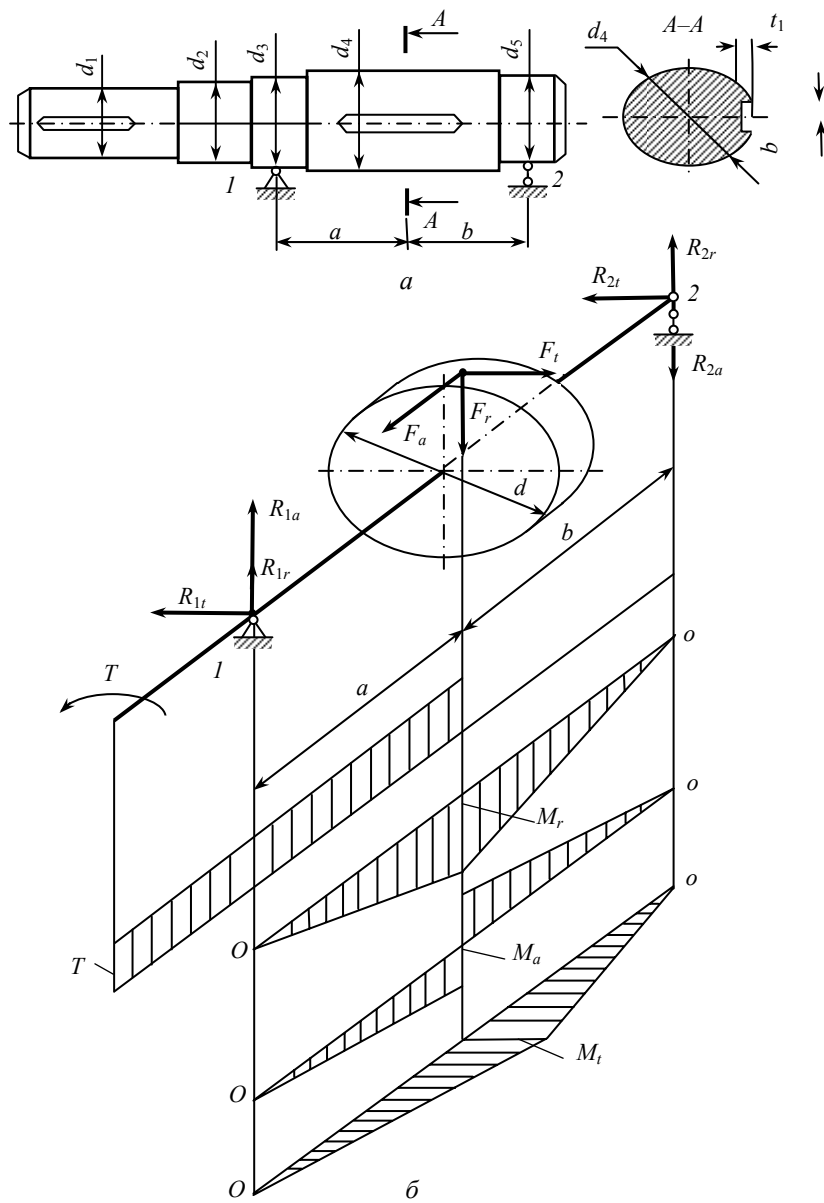


Рис. 26.4. Конструкція вала зубчастої передачі

Осьова реакція опори  $l$  дорівнює осьовій силі  $F_a$ , тобто  $R_{x1} = F_a$ .

Після побудови епюр згинальних моментів  $M$  (також окремо від дії сил  $F_t, F_r, F_a$ ) та крутного моменту  $T$  можна стверджувати, що найнебезпечнішим перерізом вала буде його переріз  $A-A$  (рис. 26.4,  $a$ ) під зубчастим колесом. У цьому перерізі діють крутний момент, який дорівнює зовнішньому обертовому моменту  $T$ , та максимальні згинальні моменти  $M_r, M_a$  і  $M_t$  відповідно до сил  $F_r, F_a$  і  $F_t$ :

$$M_r = R_{1r} a = R_{2r} b; \quad M_a = R_{1a} a; \quad M_t = R_{1t} a = R_{2t} b.$$

Результуючий максимальний згинальний момент  $M_{\max}$  визначається як геометрична сума окремих складових:

$$M_{\max} = \sqrt{(M_r + M_a)^2 + M_t^2}.$$

Згідно з наведеною схемою навантаження вала у перерізі  $A-A$  виникає нормальне напруження згину  $\sigma_{зг}$ , дотичне напруження кручення  $\tau$  та напруження стискання  $\sigma_c$ , обумовлене осьовою силою  $F_a$  та осьовою реакцією  $R_{x1}$  опори і вала. Тому еквівалентне напруження можна визначити за формулою

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_{зг} + \sigma_c)^2 + 4\tau^2},$$

де складові напруження

$$\sigma_{зг} = \frac{32M_{\max}}{\pi d_4^3}, \quad \sigma_c = \frac{4F_a}{\pi d_4^2}, \quad \tau = \frac{16T}{\pi d_4^3}.$$

Отже, визначивши еквівалентне напруження  $\sigma_e$  для небезпечно-го перерізу вала та маючи коефіцієнт  $K_n$  короткочасних перевантажень, можна перевірити статичну міцність вала при його перевантаженнях.

#### 26.4. Розрахунок валів на утомну міцність

Розрахунок валів на утомну міцність є основним і обов'язковим. У ньому враховується характер зміни напружень, характеристики витривалості матеріалів, фактори концентрації напружень тощо. Розрахунок на утомну міцність здебільшого виконують у вигляді перевірки коефіцієнтів запасу міцності в певних перерізах валів за умовою

$$s \geq [s] = 1,5 \dots 2,5.$$

Розрахунковий коефіцієнт запасу міцності визначають у загальному випадку за формулою

$$s = \frac{s_\sigma s_\tau}{\sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2}},$$

де коефіцієнти запасу міцності за нормальними  $s_\sigma$  і дотичними  $s_\tau$  напруженнями відповідно

$$s_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\beta \epsilon_\sigma} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m},$$

$$s_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\beta \epsilon_\tau} \tau_a + \psi_\tau \tau_m},$$

де  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$  — межі витривалості матеріалу;  $\sigma_a$ ,  $\tau_a$  — амплітудні значення напруження згину і кручення;  $\sigma_m$ ,  $\tau_m$  — середні значення напруження згину і кручення;  $K_\sigma$  і  $K_\tau$  — ефективні коефіцієнти концентрації напружень;  $\psi_\sigma$  і  $\psi_\tau$  — коефіцієнти, що характеризують чутливість матеріалу вала до асиметрії циклу напружень;  $\epsilon_\sigma$  і  $\epsilon_\tau$  — коефіцієнти, що враховують вплив абсолютних розмірів перерізу вала.

Межі витривалості матеріалу валів  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$  вуглецевих сталей можна брати:

при симетричному циклі згину

$$\sigma_{-1} = 0,43 \sigma_b;$$

при симетричному циклі кручення

$$\tau_{-1} = 0,58 \sigma_{-1},$$

де  $\sigma_b$  — межа міцності матеріалу вала.

Для вала, зображеного на рис. 26.4,  $a$ , у перерізі  $A-A$  нормальні напруження згину змінюються за симетричним циклом, а нормальні напруження стискання постійні. Тому для цього перерізу маємо амплітуду  $\sigma_a$  та середнє значення  $\sigma_m$  нормальних напружень:

$$\sigma_a = \frac{M_{\max}}{W_0}, \quad \sigma_m = \frac{F_a}{A},$$

де  $W_0$  — осьовий момент опору при згині;  $A$  — площа поперечного перерізу вала.

Щоб визначити амплітуду  $\tau_a$  та середнє значення  $\tau_m$  дотичних напружень, треба знати дійсний характер зміни крутного моменту  $T$  у реальних умовах експлуатації машини. Оскільки це важко встановити, у розрахунках беруть зміну дотичних напружень за пульсуючим циклом для валів, що обертаються тільки в один бік, і за симетричним циклом для валів зі змінним напрямком передачі навантаження (при реверсному режимі роботи).

Відповідно у першому випадку

$$\tau_a = \tau_m = 0,5\tau = \frac{T}{2W_\rho},$$

а в другому

$$\tau_a = \tau = \frac{T}{W_\rho}, \quad \tau_m = 0,$$

де  $W_\rho$  — полярний момент опору.

У виразах для визначення амплітуд та середніх напружень осьовий  $W_0$  і полярний  $W_\rho$  моменти опору перерізу, а також площу  $A$  перерізу треба брати за фактичними розмірами перерізів. Наприклад, якщо в перерізі є шпонковий паз, то

$$W_0 = \frac{\pi d_4^3}{16} - \frac{bt_1(d_4 - t_1)^2}{2d_4},$$

$$W_\rho = \frac{\pi d_4^3}{16} - \frac{bt_1(d_4 - t_1)^2}{2d_4},$$

$$A = \frac{\pi d_4^2}{4} - bt_1,$$

де  $t_1$  — глибина шпонкового паза на валу;  $b$  — ширина шпонки.

Ефективні коефіцієнти концентрації напружень  $K_\sigma$  і  $K_\tau$  вибирають залежно від механічних характеристик матеріалу вала та форми концентратора напружень у перерізі вала, де визначають коефіцієнт запасу міцності. Концентраторами напружень для валів можуть бути галтелі, проточки, поперечні отвори, різьба, шпонкові пази, напресовки на вал інших деталей тощо. Якщо в перерізі вала є кілька концентраторів напружень, то в розрахунках беруть той, для якого більші  $K_\sigma$  і  $K_\tau$ . Значення  $K_\sigma$  і  $K_\tau$  для деяких форм концентраторів напружень наведено в літературі [7; 15; 17].

Коефіцієнти, що характеризують чутливість матеріалу вала до асиметрії циклу напружень  $\psi_\sigma$  і  $\psi_\tau$ , можна брати для сталевих валів:

$$\psi_\sigma = 0,01 \dots 0,15 \text{ при } \sigma_b = 400 \dots 1000 \text{ МПа, } \psi_\tau = 0,5 \psi_\sigma.$$

Коефіцієнти, що враховують вплив абсолютних розмірів перерізу вала  $\epsilon_\sigma$  і  $\epsilon_\tau$ , залежать від його матеріалу та діаметра перерізу.

### Приклад 26.1

*Задача.* Виконати проектний розрахунок вала редуктора за такими даними: крутний момент, що передає вал  $T = 485 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ; ділительний діаметр косозубого зубчастого колеса  $d = 268 \text{ мм}$ ; кут нахилу зубів колеса  $\beta = 10^\circ$ ; коефіцієнт короткочасних перевантажень  $K_n = 2,2$ ; строк служби передачі  $h = 20 \cdot 10^3 \text{ год}$ .

*Розв'язання*

1. Для виготовлення вала призначаємо *нормалізовану сталь 45*, для якої  $\sigma_T = 363 \text{ МПа}$  і  $\sigma_b = 598 \text{ МПа}$  [7; 15; 17].

2. Розглянемо розрахунок вала, конструкцію якого зображено на рис. 26.4, а, розрахункову схему з епюрами напружень — на рис. 26.4, б.

Діаметр вала з умови міцності на кручення попередньо визначають для перерізів, у яких діє тільки крутний момент, до того ж із заниженим допустимим напруженням кручення  $[\tau]_{кр} = 15 \dots 30 \text{ МПа}$ . У конструкції редуктора вихідні ділянки валів зазнають деформації кручення, тому значення цього діаметра попередньо можна оцінити за умовами міцності на кручення

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau]_{кр}}} = \sqrt[3]{\frac{485 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 20}} = 49,49 \text{ мм}.$$

Остаточне значення діаметрів валів округлюють до найближчих стандартних значень, призначають діаметр вала  $d_1 = 50 \text{ мм}$ . Діаметр вала під ущільнення збільшуємо на  $2 \dots 5 \text{ мм}$  та округлюємо до стандартного значення  $d_2 = 55 \text{ мм}$ . Діаметр вала під підшипники збільшуємо також на  $2 \dots 5 \text{ мм}$ , але значення цього діаметра має закінчуватися цифрами 0 або 5 —  $d_3 = 60 \text{ мм}$ . Діаметр вала під зубчасте колесо збільшуємо ще на  $2 \dots 5 \text{ мм}$  та округлюємо до стандартного значення —  $d_4 = 63 \text{ мм}$ .

3. Визначаємо сили, які діють у зачепленні зубчастих коліс і передаються на вал. У зачепленні косозубого колеса діють три сили: колова —  $F_t$ , радіальна —  $F_r$ , осьова —  $F_a$ :

$$F_t = \frac{2T}{d} = \frac{2 \cdot 485 \cdot 10^3}{268} = 3619 \text{ Н}; \quad F_r = \frac{F_t \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} = \frac{3619 \cdot 0,364}{0,984} = 1338 \text{ Н};$$

$$F_a = F_t \operatorname{tg} \beta = 3619 \cdot 0,176 = 638 \text{ Н}.$$

4. *Визначаємо радіальні реакції опор 1 і 2 вала від сил.* Розрахункову схему зображено на рис. 26.4, де вказано напрями сил, що діють на вал.

Для цієї схеми навантаження радіальні реакції опор вала (окремо від дії кожної з сил) визначаються за такими співвідношеннями:

$$R_{1t} = \frac{F_t b}{a+b}; \quad R_{2t} = \frac{F_t a}{a+b}; \quad R_{1r} = \frac{F_r b}{a+b}; \quad R_{2r} = \frac{F_r a}{a+b};$$

$$R_{1a} = R_{2a} = \frac{0,5 \cdot F_a d_k}{a+b},$$

де  $a$  і  $b$  — відстань від середнього перерізу вала під зубчастим колесом до центрів його опор 1 і 2 відповідно.

Якщо взяти ширину вінця колеса  $b_2 = 64$  мм, а ширину дистанційних кілець між підшипниками та колесом  $\Delta = 8$  мм, то з урахуванням ширини підшипників  $B_{п} = 30$  мм дістанемо:

$$a = b_2 + \Delta + \frac{B_{п}}{2} = 64 + 8 + \frac{30}{2} = 87 \text{ мм}.$$

Беремо  $b = 100$  мм. Більш достовірно ці розміри визначають з компоновального креслення редуктора. Визначаємо радіальні реакції опор вала:

$$R_{1t} = \frac{3619 \cdot 100}{87+100} = 1935 \text{ Н}; \quad R_{2t} = \frac{3619 \cdot 87}{87+100} = 1684 \text{ Н};$$

$$R_{1r} = \frac{1338 \cdot 100}{87+100} = 715,5 \text{ Н}; \quad R_{2r} = \frac{1338 \cdot 87}{87+100} = 622,5 \text{ Н};$$

$$R_{1a} = R_{2a} = \frac{0,5 \cdot 638 \cdot 268}{87+100} = 457 \text{ Н}.$$

Сумарні радіальні реакції опор вала:

$$R_1 = \sqrt{R_{1t}^2 + (R_{1r} + R_{1a})^2} = \sqrt{1935^2 + (715,5 + 457)^2} = 2262 \text{ Н};$$

$$R_2 = \sqrt{R_{2t}^2 + (R_{2r} + R_{2a})^2} = \sqrt{1684^2 + (622,5 + 457)^2} = 2000 \text{ Н}.$$

5. *Будуємо епюри згинальних моментів  $M$  окремо від дії сил  $F_t$ ,  $F_r$ ,  $F_a$  та епюру крутного моменту  $T$ :*



$$M_r = R_{1r}a = 715,5 \cdot 87 = 62248,5 \text{ Н} \cdot \text{мм} \approx 62,25 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_a = R_{1a}a = 457 \cdot 87 = 39759 \text{ Н} \cdot \text{мм} \approx 39,76 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_t = R_{1t}a = 1935 \cdot 87 = 168345 \text{ Н} \cdot \text{мм} \approx 168,35 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_{\text{кр}} = 485 \text{ Нм.}$$

Результуючий максимальний згинальний момент  $M_{\text{max}}$  визначають як геометричну суму окремих складових:

$$M_{\text{max}} = \sqrt{(M_r + M_a)^2 + M_t^2} = \sqrt{(62,25 + 39,76)^2 + 168,35^2} = 196,8 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

6. *Перевірка статичної міцності вала.* Після побудови епюру можна стверджувати, що найнебезпечнішим перерізом вала буде його переріз  $A-A$  під зубчастим колесом.

Згідно з наведеною схемою навантаження вала у перерізі  $A-A$  діє нормальне напруження згину  $\sigma_{\text{зг}}$ , дотичне напруження кручення  $\tau_{\text{кр}}$  та напруження стиску  $\sigma_{\text{с}}$ , яке обумовлене осьюовою силою  $F_a$  та осьюовою реакцією  $R_{x1}$  опори вала. Осьова реакція опори  $I$  дорівнює осьюовій силі  $F_a$ , тобто  $R_{x1} = F_a$ .

Визначаємо еквівалентне напруження за формулою

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_{\text{зг}} + \sigma_{\text{с}})^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2},$$

$$\text{де } \sigma_{\text{зг}} = \frac{32M_{\text{max}}}{\pi d_4^3} = \frac{32 \cdot 196,8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 63^3} = 8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{с}} = \frac{4F_a}{\pi d_4^2} = \frac{4 \cdot 638}{3,14 \cdot 63^2} = 0,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{16T_{\text{кр}}}{\pi d_4^3} = \frac{16 \cdot 485 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 63^3} = 9,88 \text{ МПа};$$

$$\sigma_e = \sqrt{(8 + 0,2)^2 + 4 \cdot 9,88^2} = 21,39 \text{ МПа.}$$

Умову статичної міцності вала визначають за формулою

$$\sigma_{e\text{max}} = \sigma_e K_H \leq [\sigma_e],$$

де  $\sigma_{e\text{max}}$  — максимальне еквівалентне напруження в небезпечному перерізі вала;  $\sigma_e$  — еквівалентне напруження, яке обчислюють за номінальним розрахунковим напруженням;  $[\sigma_e]$  — допустиме еквівалентне напруження

$$[\sigma_e] \approx 0,8\sigma_T = 0,8 \cdot 363 = 290 \text{ МПа}; \quad \sigma_{e\text{max}} = 21,39 \cdot 2,2 = 47 \text{ МПа.}$$

Отже, статична міцність вала при його перевантаженнях значно менша за допустиму.

*7. Розрахунок вала на втомну міцність*

У найнебезпечнішому перерізі вала  $A-A$  концентратором напружень є шпонковий паз. Визначаємо розрахунковий коефіцієнт запасу міцності для цього перерізу. Спочатку визначаємо  $S_\sigma$  і  $S_\tau$ , а потім і загальний розрахунковий коефіцієнт запасу міцності  $S$ .

Границі втоми матеріалу вала:

$$\sigma_{-1} = 0,45\sigma_B = 0,45 \cdot 598 = 269 \text{ МПа};$$

$$\tau_{-1} = 0,25\sigma_B = 0,25 \cdot 598 = 150 \text{ МПа}.$$

Амплітуда нормальних і дотичних напружень:

$$\sigma_a = \frac{M_t}{W_0}; \quad \tau_a = \frac{T}{2W_p},$$

де  $W_0$  та  $W_p$  — осьовий та полярний моменти опору перерізу вала з урахуванням шпонкового паза

$$W_0 = \frac{\pi d_4^3}{32} - \frac{b_{ш} t_1 (d_4 - t_1)^2}{2d_4}; \quad W_p = \frac{\pi d_4^3}{16} - \frac{b_{ш} t_1 (d_4 - t_1)^2}{2d_4}.$$

Геометричні розміри шпонкового паза беремо залежно від діаметра вала  $d_4 = 63$  мм,  $b_{ш} = 18$  мм,  $t_1 = 7$  мм

$$W_0 = \frac{3,14 \cdot 63^3}{32} - \frac{18 \cdot 7 (63 - 7)^2}{2 \cdot 63} = 21,4 \cdot 10^3 \text{ мм}^3;$$

$$W_p = \frac{3,14 \cdot 63^3}{16} - \frac{18 \cdot 7 (63 - 7)^2}{2 \cdot 63} = 45,9 \cdot 10^3 \text{ мм}^3;$$

$$\sigma_a = \frac{168345}{21,4 \cdot 10^3} = 7,86 \text{ МПа}; \quad \tau_a = \frac{485 \cdot 10^3}{2 \cdot 45,9 \cdot 10^3} = 5,28 \text{ МПа}.$$

Середні значення нормальних і дотичних напружень:

$$\sigma_m = \frac{F_a}{\left( \frac{\pi d_4^2}{4} - b_{ш} t_1 \right)} = \frac{638}{\left( \frac{3,14 \cdot 63^2}{4} - 18 \cdot 7 \right)} = 0,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_m = \tau_a = 5,28 \text{ МПа}.$$

Ефективні коефіцієнти концентрації напружень від шпонкового паза  $K_\sigma = 1,76$ ;  $K_\tau = 1,54$  [15; 17].

Коефіцієнти, що характеризують чутливість матеріалу вала до асиметрії циклу напружень:

$$\psi_{\sigma} = 0,02 + 2 \cdot 10^{-4} \sigma_b = 0,02 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 598 = 0,14;$$

$$\psi_{\tau} = 0,5\psi_{\sigma} = 0,5 \cdot 0,14 = 0,07.$$

Коефіцієнт, що враховує вплив абсолютних розмірів перерізу вала,  $\varepsilon_{\sigma} = 0,8$  [15; 17]. Визначаємо коефіцієнт запасу міцності за нормальними та дотичними напруженнями:

$$s_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}\beta} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{269}{\frac{1,76}{0,8 \cdot 1} 7,86 + 0,14 \cdot 0,2} = 17,32;$$

$$s_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{\sigma}\beta} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m} = \frac{150}{\frac{1,54}{0,8 \cdot 1} 5,28 + 0,07 \cdot 5,28} = 10,5.$$

Визначаємо загальний розрахунковий коефіцієнт запасу міцності вала у перерізі  $A-A$

$$s = \frac{s_{\sigma}s_{\tau}}{\sqrt{s_{\sigma}^2 + s_{\tau}^2}} \geq [s] = 1,5 \dots 2,5; \quad s = \frac{17,32 \cdot 10,5}{\sqrt{17,32^2 + 10,5^2}} = 8,98.$$

Отже, утомна міцність вала забезпечується. Оскільки розрахунковий коефіцієнт запасу міцності вала значно більше допустимого, то необхідно провести коректування діаметра вала.



### Запитання для самоконтролю

1. Яка відмінність між валом і віссю та які деформації діють на вал і вісь під час роботи?
2. Що називається цапфою, шипом, шийкою і п'ятою?
3. Чому вали розраховують у два етапи: перший — проектний розрахунок, другий перевірний?
4. З якою метою виконується проектний розрахунок вала?
5. З якою метою і як виконується перевірний розрахунок вала?
6. Як розраховують вали на міцність та жорсткість?
7. Які конструктивні і технологічні методи підвищення витривалості валів?

## 27. ПІДШИПНИКИ

### 27.1. Призначення і класифікація

Підшипники служать опорами валів та обертальних осей. Вони сприймають радіальні та осьові навантаження, прикладені до вала. Щоб запобігти зниженню ККД механізму, втрати в підшипниках мають бути мінімальними. Від якості підшипників значною мірою залежать працездатність та довговічність машин. Підшипники класифікують за видом тертя та сприймаючим навантаженням.

За видом тертя розрізняють: *підшипники ковзання*, у яких опорна частина вала ковзає по поверхні підшипника; *підшипники кочення*, в яких тертя ковзання замінюють тертям кочення завдяки встановленню кульок і роликів між опорними поверхнями підшипника і вала.

За сприймаючим навантаженням розрізняють підшипники: *радіальні* — що сприймають радіальні навантаження; *упорні*, що сприймають осьові навантаження; *радіально-упорні*, що сприймають радіальні та осьові навантаження. Усі типи підшипників широко розповсюджені.

### 27.2. Загальні відомості про підшипники ковзання

Опорну ділянку вала називають цапфою. Форма робочої поверхні підшипника ковзання так, як і форма цапфи вала, може бути циліндричною, плоскою, конічною або кульковою. Цапфу, що передає радіальне навантаження, називають шипом, якщо вона розміщена на кінці вала, і шийкою, якщо вона розміщена в середині вала. Цапфу, що передає осьове навантаження, називають п'ятою, а опору (підшипник) — підп'ятником.

Підшипники працюють зазвичай у парі з радіальними підшипниками. Більшість радіальних підшипників можуть сприймати також і невеликі осьові навантаження (фіксують вал в осьовому напрямку). Для цього вал виготовляють ступінчастим з галтелями, а кромки підшипників заокруглюють. Підшипники з конічною поверхнею застосовують рідко. Їх застосовують під час невеликих навантажень у тих випадках, коли необхідно систематично захищати підшипник від зносу з метою збереження точності механізму. Для цього на валу встановлюють конічну втулку, положення якої регулюють гайками. Також рідко застосовують і кулькові підшип-

ники. Ці підшипники допускають перекиє осі вала, тобто мають здатність самовстановлення. Їх застосовують здебільшого як шарніри у важільних механізмах з періодичним поворотом у межах обмежень кутів.

Основним елементом підшипника є вкладиш з тонким шаром антифрикційного матеріалу на опорній поверхні. Вкладиш встановлюють у спеціальному корпусі підшипника або безпосередньо в корпусі машини (станини, рами тощо).

Область застосування підшипників ковзання в сучасному машинобудуванні зменшилась у зв'язку з розповсюдженням підшипників кочення. Але значення підшипників ковзання в сучасній техніці не зменшилось. Їх застосовують доволі широко, і в цілому ряді конструкцій вони незамінні. До таких підшипників належать:

- 1) роз'ємні підшипники, необхідні за умов складання, наприклад, для колінчастих валів;
- 2) високошвидкісні підшипники ( $v > 30$  м/с), під час роботи яких довговічність різко скорочується (вібрації, шум, великі інерційні навантаження на тіла кочення);
- 3) підшипники прецизійних машин, від яких потребується особливо точний напрямок валів і можливість регулювання зазорів;
- 4) підшипники, що працюють в особливих умовах (воді, агресивних середовищах тощо), в яких підшипники кочення недієздатні завдяки корозії;
- 5) підшипники дешевих тихохідних механізмів та деякі інші.

### 27.3. Практичний розрахунок підшипників ковзання

*Розрахунок підшипників, які працюють з напіврідким тертям*

До таких підшипників належать підшипники грубих механізмів, машин з частими пусками й зупинками, невстановленим режимом навантажень, поганими умовами підведення мастила та ін. Ці підшипники розраховують:

а) за умовним тиском — підшипники тихохідні, що працюють короткочасно з перервами:

$$P = \frac{F_r}{ld} \leq [P],$$

б) за добутком тиску на швидкість — підшипники середньої швидкохідності:

$$P v \leq [P v],$$

де  $F_r$  — радіальне навантаження на підшипник;  $d$  — діаметр цапфи вала;  $l$  — довжина підшипника;  $v$  — колова швидкість цапфи.

Розрахунок за  $[P v]$  у наближеній формі попереджує інтенсивне зношування, перегрівання та заїдання. Допустимі значення визначені з досвіду експлуатації подібних конструкцій.

#### **27.4. Загальні відомості та класифікація підшипників кочення**

Застосування підшипників кочення дозволило замінити тертя ковзання тертям кочення. Тертя кочення суттєво менше залежить від змащування. Умовний коефіцієнт тертя кочення малий і наближається до коефіцієнта рідинного тертя в підшипниках ковзання ( $f \approx 0,0015 \dots 0,006$ ). При цьому спрощуються система змащування та обслуговування підшипників, зменшується можливість руйнування під час короткострокових перебоїв у змащуванні (наприклад, у періоди пусків, при різких змінах навантажень та швидкостей).

Конструкція підшипників кочення дозволяє виготовляти їх у великих кількостях як стандартну продукцію, що значно знижує вартість виробництва. Наведені основні якості підшипників кочення забезпечили їм широке розповсюдження. Виробництво підшипників кочення провідними промисловими країнами обчислюється сотнями мільйонів штук на рік. До недоліків підшипників кочення належать відсутність роз'ємних конструкцій, порівняно більші радіальні габарити, обмежена швидкість, пов'язана з кінематикою й динамікою тіл кочення (відцентрові сили, гіроскопічні моменти та ін.), низька працездатність під час вібраційних та ударних навантажень та під час роботи в агресивних середовищах (наприклад, у воді).

За формою тіл кочення підшипники поділяються на кулькові та роликові; за напрямком сприйманого навантаження — на радіальні, упорні, радіально-упорні, упорно-радіальні (табл. 27.1).

Радіальні кулькові підшипники найбільш прості і дешеві. Вони припускають невеликі перекося валу (до  $1/4^\circ$ ) і можуть сприймати осьові навантаження. Ці підшипники широко розповсюджені в машинобудуванні. Радіальні роликові підшипники завдяки збільшеній контактній поверхні припускають значно більші навантаження, ніж кулькові. Але вони не сприймають осьові навантаження й погано працюють при перекосях вала.

## Основні типи підшипників кочення

Тип підшипників	Кульковий підшипник	Роликовий підшипник
Радіальний	<p>Тип 0000    Тип 1000</p>	<p>Тип 2000    Тип 82 000    Тип 3000    Тип 74 000</p>
Упорний	<p>Тип 8000</p> <p>Тип 38 000</p>	<p>Тип 9000</p>
Радіально-упорний	<p>Тип 36000, Тип 56 000 46 000</p>	<p>Тип 7000    Тип 97 000</p>
Упорно-радіальний	<p>Тип 68 000</p>	<p>Тип 39 000</p>

У роликівих циліндричних та конічних підшипниках з комбінованими (бочкоподібними) роликами концентрація навантаження від неминучого перекосу вала суттєво зменшується. Аналогічні порівняння можна провести й між радіально-упорними кульковими й роликівими підшипниками.

Самовстановлювані кулькові й роликіві підшипники застосовують у тих випадках, коли допускають значний перекіс вала (до 2...3°). Вони мають сферичну поверхню зовнішнього кільця і ролики бочкоподібної форми. Ці підшипники допускають невеликі осьові навантаження.

Застосування голчастих підшипників дозволяє зменшити габарити (діаметр) під час значних навантажень. Упорний підшипник сприймає тільки осьове навантаження і погано працює під час перекосу осі.

За навантажувальною здатністю (або габаритними розмірами) підшипники поділяються на сім серій: надлегку, особливо легку, легку, легку широку, середню, середню широку і важку. За класами точності: 0 (нормального класу); 6 (підвищеного); 5 (високого); 4 (особливо високого); 2 (надвисокого).

Від точності виготовлення значною мірою залежить працездатність підшипника, але водночас зростає його вартість.

Клас точності	0	6	5	4	2
Відносна вартість	1	1,3	2	4	10

Усі підшипники кочення виготовляють із високоміцних підшипникових сталей з термічною обробкою, що забезпечує високу твердість.

Великий вплив на працездатність підшипника має якість сепаратора. Сепаратори розділяють і спрямовують тіла кочення.

У підшипниках без сепаратора тіла кочення набігають одне на одне. При цьому крім тертя кочення, виникає тертя ковзання, збільшуються втрати і знос підшипника.

Установлення сепаратора значно зменшує втрати на тертя, через те що сепаратор є вільноплаваючим і обертовим елементом. Більшість сепараторів виконують штампованими зі сталевих стрічки.

Для високошвидкісних підшипників (колова швидкість більше 10...15 м/с) застосовують масивні сепаратори з латуні, бронзи, дюралюмінію або пластмаси.



## 27.5. Практичний розрахунок (вибір) підшипників кочення

### *Основні критерії працездатності і розрахунку*

Можна відмітити такі основні чинники втрат працездатності підшипників кочення.

*Викришування від утомленості* спостерігаються у підшипниках після тривалого часу їх роботи в нормальних умовах.

*Зношування* спостерігається під час недостатнього захисту від абразивних часток (пилу і бруду). Зношування є основним видом руйнування підшипників автомобільних, тракторних, гірничих, будівельних та багатьох подібних машин.

*Руйнування сепараторів* дає значний відсоток виходу з ладу підшипників і особливо швидкохідних.

*Розколювання кілець і тіл кочення* пов'язане з ударними та вібраційними перевантаженнями, неправильним монтажем, що викликає перекося кілець, заклинювання тощо. Під час нормальної експлуатації цей вид руйнування не спостерігається.

*Залишкові деформації на бігових доріжках* у вигляді лунок та вм'ятин спостерігаються у навантажених тихохідних підшипників.

Сучасний розрахунок підшипників кочення базується на двох критеріях:

- 1) розрахунок на статичну вантажопідйомність за залишковими деформаціями;
- 2) розрахунок на ресурс (довговічність) за викришуванням від утомленості.

Розрахунки за іншими критеріями не опрацьовані, через те, що ці критерії пов'язані з цілим ланцюгом випадкових чинників, які важко підлягають обліку. Кількість типів та розмірів підшипників обмежені стандартом. Це дозволило розрахувати й експериментально встановити вантажопідйомність (працездатність) кожного типорозміру підшипників.

При проектуванні машин підшипники кочення не конструюють і не розраховують, а вибирають зі стандартних за умовними формулами. Методика вибору стандартних підшипників також стандартизована — ГОСТ 18854-73 та ГОСТ 18855-73.

Розрізняють вибір підшипників: за динамічною вантажопідйомністю для попередження руйнування від утомленості (викришування); за статичною вантажопідйомністю для попередження залишкових деформацій.

Вибір підшипників за динамічною вантажопідійомністю  $C$  (за заданим ресурсом чи довговічністю) здійснюють за  $n \geq 10 \text{ хв}^{-1}$  і  $P \leq 0,5 C$ . Умови вибору:

$$C (\text{потрібна}) \leq C (\text{паспортна}).$$

Паспортна динамічна вантажопідійомність  $C$  — це таке стале навантаження, яке підшипник може витримати впродовж одного мільйона обертів без появи ознак втоми не менш ніж 90 % визначеної кількості випробовуваних підшипників. При цьому під навантаженням розуміють радіальне для радіальних та радіально-упорних підшипників (з нерухомим зовнішнім кільцем); осьове для упорних та упорно-радіальних (під час обертання одного з кілець).

Отже, розрахунок (вибір) підшипників за  $C$  (вантажопідійомністю) є розрахунком з урахуванням вірогідності неруйнування, що дорівнює 0,9. Поправки розрахунку для інших значень вірогідності наведені нижче.

Динамічна вантажопідійомність і ресурс зв'язані емпіричною залежністю

$$L = \left( \frac{C}{F_e} \right)^m \quad \text{або} \quad C = F_e \sqrt[m]{L}, \quad (27.1)$$

де  $L$  — ресурс, млн об.;  $F_e$  — еквівалентне навантаження;  $m = 3$  для кулькових і  $m = 10 / 3 \approx 3,33$  — для роликкових підшипників.

За малих ресурсів обмежуються  $F_e \leq 0,5 C$ , інакше може бути статичне навантаження. Формула (27.1) отримана за результатом випробування на втомленість підшипників кочення (як вузла, а не матеріалу).

На основі випробувань будують криву втоми із заданою вірогідністю неруйнування. Ця крива відрізняється тим, що практично не має горизонтальної асимптоти, а за координати взяті: по осі абсцис —  $L$  (довговічність) у млн обертів замість кількості циклів  $N_n$ ; по осі ординат — навантаження  $F$  замість напруження  $\sigma_n$ .

Крива апроксимується залежністю  $F^m L = \text{const}$ .

Константу визначають, узявши  $L = 1$ , і позначають  $C^m$ .

Тоді  $F^m L = C^m$  і далі записують у вигляді формули (27.1). Значення  $C$  залежить не тільки від міцності матеріалу, але також від конструктивних та технологічних характеристик підшипника.

На практиці для розрахунків вантажопідійомності  $C$  інших подібних типорозмірів підшипників використовують напівемпіричні

залежності. Наприклад, для кулькових радіальних і радіально-упорних підшипників

$$C = f_c (i \cos \alpha)^{0,7} Z^{2/3} D_0^{1,8},$$

де  $f_c$  — коефіцієнт, що залежить від типу підшипника;  $i$  — кількість рядів кульок;  $Z$  — кількість кульок у ряді;  $D_0$  — діаметр кульки;  $\alpha$  — кут контакту.

*Ресурс у годинах* визначається за формулою

$$L_h = \frac{L10^6}{60n},$$

де  $n$  — частота обертання,  $\text{хв}^{-1}$ .

*Еквівалентне динамічне навантаження*  $F_e$  для радіальних та радіально-упорних підшипників є таке умовне стале радіальне навантаження  $F_r$ , котре під час прикладання його до підшипника з обертотним внутрішнім кільцем та з нерухомим зовнішнім забезпечує таку саму довговічність, яку підшипник має під час дійсних умов навантаження й обертання. Для упорних та упорно-радіальних підшипників відповідною буде  $F_a$  — стале осьове навантаження під час обертання одного з кілець:

$$F_{er} = (X V F_r + Y F_a) K_6 K_T;$$

$$F_{ea} = (X F_r + Y F_a) K_6 K_T,$$

де  $F_r$  та  $F_a$  — радіальне й осьове навантаження;  $X$ ,  $Y$  — коефіцієнти радіального й осьового навантажень визначають за табл. 27.2;  $V$  — коефіцієнт обертання, що залежить від того, яке кільце підшипника обертається (під час обертання внутрішнього кільця  $V = 1$ , зовнішнього —  $V = 1,2$ );  $K_6$  — коефіцієнт безпеки, що враховує характер навантаження ( $K_6 = 1,8 \dots 2,0$ );  $K_T$  — температурний коефіцієнт (для сталі ШХ15 за температури до  $100^\circ\text{C}$   $K_T = 1$ , за  $t = 125 \dots 250^\circ\text{C}$   $K_T = 1,05 \dots 1,4$  відповідно).

У табл. 27.2  $X$  та  $Y$  мають різні значення залежно від відношення  $\frac{F_a}{VF_r}$ . Пояснюється це тим, що до певних меж, які дорівнюють кое-

фіцієнтові цього відношення  $e$ , додаткове осьове навантаження не погіршує умов роботи підшипника. Воно зменшує радіальний зазор у підшипнику й вирівнює розподіл навантажень (у тому числі радіальних) по тілах кочення.

Таблиця 27.2

## Коефіцієнти радіальних та осьових навантажень

Тип підшипника	$\alpha^\circ$	$F_a/C_o$	$F_a/(VF_r) \leq e$		$F_a/(VF_r) > e$		$e$
			X	Y	X	Y	
Радіальний кульковий однорядний, тип 0000	0	0,014	1	0	0,56	8,30	0,19
		0,028				1,99	0,22
		0,056				1,71	0,26
		0,084				1,55	0,28
		0,11				1,45	1,30
		0,17				1,31	0,34
		0,28				1,15	0,38
		0,42				1,04	0,42
		0,56				1,00	0,44
Радіально-упорний кульковий однорядний, тип 36 000, 46 000, 66 000	12	0,014	1	0	0,45	1,81	0,30
		0,029				1,62	0,34
		0,057				1,46	0,37
		0,086				1,34	0,41
		0,11				1,22	0,45
		0,17				1,13	0,48
		0,29				1,14	0,52
		0,43				1,01	0,54
		0,57				1,00	0,54
	26	–	1	0	0,41	0,87	0,68
	36	–	1	0	0,37	0,66	0,95
	Роликовий конічний однорядний, тип 7000		–	1	0	0,4	$0,4\text{ctg}\alpha$ (див, каталог)

*Перевірка і вибір підшипників за статичною вантажопідйомністю*

За рівнянням навантаження  $F$  зростає зі зменшенням ресурсу і теоретично не має обмеження. Практично ж навантаження обмежується втратою статичної міцності, або так званої статичної ван-

тажопідйомності. Статичну вантажопідйомність використовують для вибору підшипників з малими частотами обертання  $n < 10 \text{ хв}^{-1}$ , коли кількість циклів навантажень мала й не викликає руйнувань від утомленості, а також для перевірки підшипників, розрахованих за динамічною вантажопідйомністю. Умова перевірки має вигляд

$$F_0 \leq C_0,$$

де  $F_0$  — еквівалентне статичне навантаження;  $C_0$  — статична вантажопідйомність.

Під статичною вантажопідйомністю розуміють таке статичне навантаження, котре відповідає загальній залишковій деформації тіл кочення і кілець у найбільш навантаженій точці контакту, що дорівнює 0,0001 діаметра тіла кочення. При цьому під навантаженням розуміють радіальне для радіальних та радіально-упорних підшипників, осьове для упорних та упорно-радіальних.

Значення  $C_0$  подаються в каталогах для кожного типорозміру підшипника.

Еквівалентне статичне навантаження визначається за формулою

$$F_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a, \text{ але не менше ніж } F_0 = F_r,$$

де  $F_r$  та  $F_a$  — радіальне та осьове навантаження;  $X_0$  та  $Y_0$  — коефіцієнти радіального та осьового статичних навантажень.

Наприклад:

$X_0 = 0,6$  та  $Y_0 = 0,5$  — для радіальних кулькових підшипників однорядних й дворядних;

$X_0 = 0,5$  та  $Y_0 = 0,47 \dots 0,28$  (при  $\alpha = 12 \dots 36^\circ$  відповідно) — для радіально-упорних кулькових підшипників;

$X_0 = 0,5$  та  $Y_0 = 0,22 \text{ ctg } \alpha$  — для конічних та самовстановлююваних кульково- та роликотпідшипників.

#### Приклад 27.1

*Задача.* Підібрати підшипники кочення для вала редуктора за даними розв'язування задачі 26.1. Діаметр цапф вала для підшипників  $d_n = 60 \text{ мм}$  і радіальні навантаження на опори вала  $R_1 = 2262 \text{ Н}$ ; осьове навантаження вала  $F_a = 638 \text{ Н}$ ; частота обертання вала  $n = 400 \text{ хв}^{-1}$ ; потрібна довговічність підшипників  $L_n$  — 10 000 год.

*Розв'язання*

1. Вибір типорозміру підшипників.

Згідно зі схемою до розрахунку вала (рис. 26.4) найбільш навантаженою опорою у цій схемі є опора 1, оскільки вона навантажена

найбільшою радіальною силою  $R_1$  і сприймає осьову силу  $F_a$ . Якщо  $F_a/R_1 = 638/2262 = 0,28 < 0,35$ , то для опор вала доцільно застосувати кулькові радіальні підшипники.

Маємо діаметр цапф під підшипники  $d_n = 60$  мм, будемо орієнтуватись на підшипники легкої серії 212, для яких із довідника маємо: базова статична вантажність  $C_0 = 31\ 000$  Н; базова динамічна вантажопідйомність  $C_r = 52\ 900$  Н.

2. *Визначення розрахункового еквівалентного навантаження на підшипник.*

Розрахункове еквівалентне навантаження знаходимо за формулою

$$F_e = (XVR_r + YF_a)K_6K_T,$$

де  $R_r$  та  $F_a$  — радіальне та осьове навантаження;  $X, Y$  — коефіцієнти радіального та осьового навантаження;  $V$  — коефіцієнт обертання ( $V = 1$  під час обертання внутрішнього кільця);  $K_T$  — температурний коефіцієнт (за температури до  $100\ ^\circ\text{C}$   $K_T = 1$ );  $K_6$  — коефіцієнт безпеки, що враховує характер навантаження ( $K_6 = 1,5$ ).

Для визначення коефіцієнтів  $X$  і  $Y$  знаходимо відношення  $F_a/C_0 = 638/31\ 000 = 0,02$ .

Із табл. 27.2 беремо параметр осьового навантаження  $e = 0,2$ .

Оскільки відношення  $F_a/R_1 = 638/2262 = 0,28 > e = 0,2$ , за табл. 27.2 маємо  $X = 0,56$ , а  $Y = 2,1$ .

Визначаємо еквівалентне навантаження на підшипник

$$F_{\text{з}} = (0,56 \cdot 1 \cdot 2262 + 2,1 \cdot 638)1,5 \cdot 1 = 3909 \text{ Н.}$$

3. *Розрахункова довговічність підшипника, млн об.*

$$L = \left( \frac{C}{F_e} \right)^m = \left( \frac{52\ 900}{1564} \right)^3 = 38 \cdot 10^3 \text{ млн об.}$$

4. *Розрахункова довговічність підшипника, год*

$$L_h = \frac{10^6 L}{60n} = \frac{10^6 38 \cdot 10^3}{60 \cdot 400} = 1610 \cdot 10^3 \text{ год.}$$

Попередньо вибраний підшипник 212 для опори 1 вала має довговічність більшу від заданої.

## Запитання і завдання для самоконтролю

1. Назвіть основний елемент підшипників ковзання.
2. Назвіть галузь застосування підшипників ковзання.
3. Із яких деталей складається підшипник кочення?
4. Яка роль сепараторів у підшипниках?
5. Які переваги та недоліки підшипників кочення порівняно з підшипниками ковзання?
6. Які види підшипників кочення виділяють за напрямом сприйняття навантаження, за формою тіл кочення, за габаритними розмірами?
7. Які особливості конструкції і роботи сферичних і голчастих підшипників? Де вони застосовуються?
8. Як маркуються підшипники кочення? Визначіть тип і розмір внутрішнього діаметра підшипників, що мають умовне позначення: 305, 2307, 3206?
9. Із яких матеріалів виготовляють тіла кочення, кільця і сепаратори?

## 28. МУФТИ

### 28.1. Призначення та класифікація муфт

Пристрої для з'єднання двох валів між собою або з деталями, насадженими на вал, з метою передачі крутного моменту без зміни його напрямку, називають *муфтами*.

Муфти приводів виконують водночас і низку інших функцій: компенсують у певних межах похибки монтажу валів; дають змогу з'єднувати чи роз'єднувати вали; запобігають перевантаженню робочої машини; зменшують поштовхи та вібрації у процесі роботи.

За характером роботи розрізняють такі види муфт:

- некеровані, що не допускають роз'єднання валів у процесі роботи машин;
- керовані муфти, що дозволяють з'єднувати і роз'єднувати вали під час роботи машини за допомогою системи управління;
- самокеровані муфти автоматично роз'єднують вали при зміні заданого режиму роботи машини.

Основною характеристикою муфт є крутний момент  $T$ . Конкретний типорозмір муфти обирається залежно від умов експлуатації за таблицями згідно із залежністю

$$T_p = KT_{\text{ном}}, \quad (28.1)$$

де  $T_p$  — розрахунковий крутний момент, Н·м;  $T_{\text{ном}}$  — номінальний крутний момент на валу, Н·м;  $K$  — коефіцієнт режиму роботи.

## 28.2. Некеровані муфти

До некерованих муфт відносять муфти, що не допускають роз'єднання деталей у процесі роботи машини. Наведемо деякі з них.

*Глухі жорсткі муфти* застосовують для з'єднання строго співвісних валів. Вали, з'єднані глухою муфтою, працюють як єдине ціле, тому поряд із крутним моментом муфта сприймає згинальний момент, поперечне та осьове навантаження.

Найпростішу конструкцію при мінімальних габаритах по діаметру має втулкова муфта (рис. 28.1).

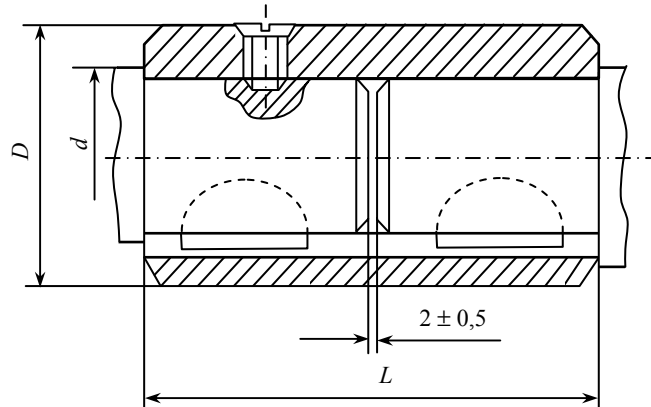


Рис. 28.1. Втулкова муфта

Крутний момент від одного вала до іншого через втулку передається шпонками або штифтами (рис. 28.2). Основним недоліком цієї муфти є необхідність точного суміщення осей валів.

Із глухих муфт найбільш поширені фланцеві муфти (рис. 28.3), що містять дві півмуфти, з'єднані болтами. На відміну від інших видів муфт, глухі муфти можуть передавати не тільки крутний момент, а й згинальні моменти та осьові сили. Фланцеві муфти використовують для з'єднання валів з діаметром до 200 мм і більше. До переваг цих муфт відносять простоту конструкції та порівняно незначні габарити.



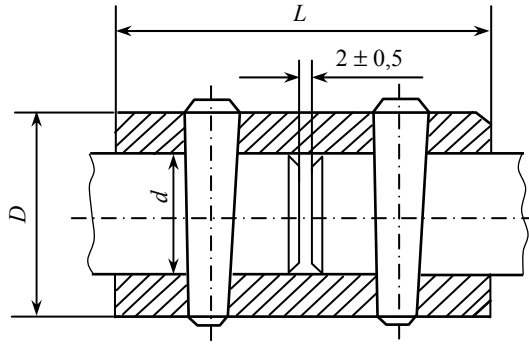


Рис. 28.2. Втулкова муфта зі штифтами

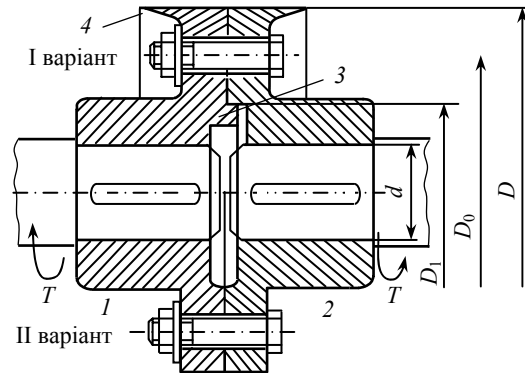


Рис. 28.3. Глуха фланцева муфта

Розрахунок на міцність для фланцевих муфт виконують на зріз болтів за залежністю:

$$\tau_{зр} = \frac{F_{зр}}{A_{зр}} \leq [\tau]_{зр}, \quad (28.2)$$

де  $F_{зр} = \frac{2T}{D_0}$  — сила зрізу, Н;  $A_{зр} = \frac{\pi d^2}{4}$  — площа перерізу, мм<sup>2</sup>;

$d$  — діаметр стержня болта, мм;  $D_0$  — діаметр кола, на якому розташовані болти, мм.

Тоді 
$$\tau_{зр} = \frac{2T}{D_0 z \pi d^2 / 4} \leq [\tau_{зр}], \quad (28.3)$$

де  $z$  — кількість болтів.

*Пружні муфти.* У пружних муфтах крутний момент передається за допомогою пружних елементів. Ці елементи визначають основні властивості муфт: здатність амортизувати поштовхи й удари, компенсувати неточності взаємного розташування валів. Найбільш поширена втулково-пальцева муфта.

*Втулково-пальцева муфта* типу МПВП (рис. 28.4) набула широкого поширення, наприклад, у приводах від електродвигуна.

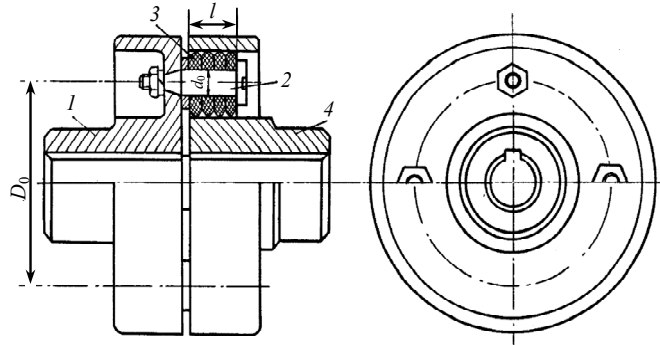


Рис. 28.4. Муфта пружна втулково-пальцева:  
1 і 4 — півмуфти; 2 — палець; 3 — гумові втулки

Муфта складається із двох фланцевих півмуфт 1 та 4, пальців 2 з конічним хвостовиком та гумових втулок 3. Пальці вставляють у конічні отвори однієї з півмуфт і затягують гайками, що забезпечує жорстке з'єднання цих деталей. Крутний момент на другу півмуфту передається від пальців через гумові втулки 3. Перевагою цих муфт є простота конструкції та можливість заміни пружних елементів, малі габарити і маса. Муфти стандартизовані в діапазоні діаметрів валів 10...160 мм і моментів 63...16 000 Н·м. Муфти допускають осьові зміщення в межах осьового монтажного зазору, що змінюється в межах 1...5 мм, а радіальні не більше 0,1 мм на кожні 100 мм діаметра муфти. Допустимі кутові зміщення  $\alpha \leq 1^\circ$ .

Критерієм працездатності муфт є міцність гумових втулок. Гумові втулки розраховують за допустимими напруженнями на зминання, а пальці — за умовою міцності на згинання:

$$\sigma_{зм} = \frac{2T}{zD_0d_0l} \leq [\sigma_{зм}],$$

де  $T$  — крутний момент, Н·м;  $z$  — число пальців;  $D_0$  — діаметр кола розташування центрів пальців, мм;  $d_0$  — діаметр пальців, мм;  $l$  — довжина гумового елемента, мм.

Допустиме напруження для гумових втулок  $[\sigma_{зм}] = 2 \dots 4$  МПа.  
Пальці муфт розраховують на згинання за формулою:

$$\sigma_F = \frac{2T0,5l + c}{zD_00,1d_0^3} \leq [\sigma_F],$$

де  $c = 3 \dots 5$  мм — зазор між півмуфтами.

### 28.3. Керовані муфти

Керовані муфти дозволяють з'єднувати і роз'єднувати вали під час роботи і зупинки. Ці муфти широко використовують за необхідності зміни режиму роботи, а також реверсування, що характерне для трансмісій транспортних машин, металообробних верстатів та ін. За принципом роботи муфти поділяють на кулачкові і фрикційні.

*Кулачкові (зубчасті) муфти* (рис. 28.5) складаються з двох муфт, що мають на торцевих поверхнях виступи — кулачки, або зовнішні та внутрішні евольвентні зуби.

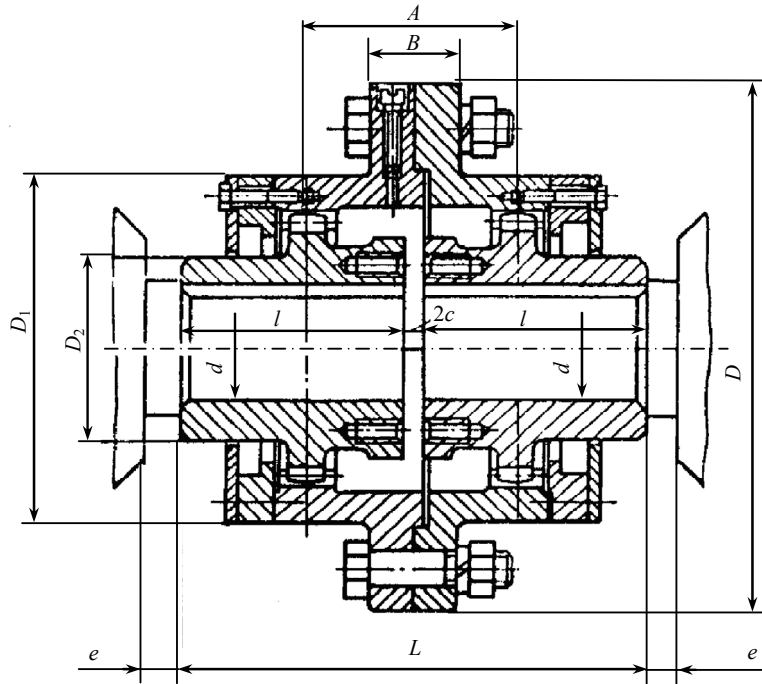


Рис. 28.5. Зубчаста муфта

У робочому положенні кулачки однієї півмуфти входять у западини другої. Для вмикання та вимикання муфти одна з півмуфт, частіше ведена, улаштовується на валу рухомо в осьовому напрямі.

*Фрикційні муфти* передають крутний момент завдяки силам тертя, що створюються на поверхнях тертя деталей муфти. Тиск на деталі тертя створюється за допомогою різноманітних механізмів вмикання. Найбільш поширені пружинно-важельні механізми. Для дистанційного управління муфтою застосовуються гідравлічні, пневматичні, електромагнітні пристрої.

#### 28.4. Самокеровані муфти

У процесі роботи деяких машин можуть виникати перенавантаження: у машинах ударної дії через труднощі точного розрахунку сили удару на наявність великих інерційних мас; у машинах, що працюють із неоднорідним середовищем (бурильні, дробильні); у машинах-автоматах за браком безперервного контролю за їхньою роботою та для запобігання поломкам машин влаштовують запобіжні муфти, які забезпечують умикання механізму при збільшенні крутного моменту вище допустимого значення.

Будь-яка фрикційна муфта, відрегульована на передачу граничного крутного моменту, виконує функції запобіжної. У таких муфтах сила зчеплення на поверхнях тертя створюється за допомогою

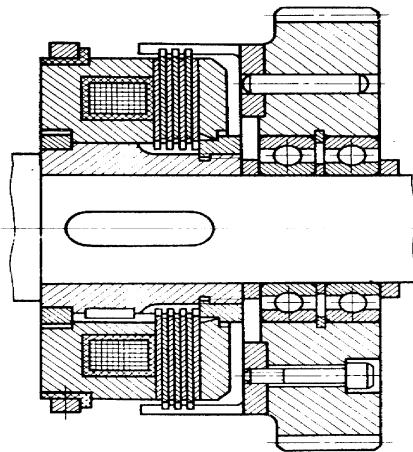


Рис. 28.6. Запобіжна муфта

постійно замкнутих циліндричних витих пружин. Найбільш поширені багатодискові запобіжні муфти (рис. 28.6).

При перевантаженні муфта не повністю припиняє передачу моменту, а автоматично передає корисне навантаження після зняття перевантаження. Фрикційні муфти використовують, як правило, тільки за короткочасних навантажень, оскільки при тривалому ковзанні сила притискання, що витрачається на тертя, викликає інтенсивне виділення теплоти.

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Яку роль виконують муфти в приводах?
2. Назвіть основні типи муфт за принципом дії.
3. Назвіть будову та сферу застосування фланцевої муфти.
4. Назвіть основні види та галузь застосування пружних муфт.
5. Чому пружна втулково-пальцева муфта широко вживається в приводах від електродвигунів?
6. Чому із муфт зчеплення найбільш розповсюджені фрикційні муфти?
7. Назвіть будову та принцип роботи обгінних і відцентрових муфт.
8. З'ясуйте будову та принцип роботи запобіжних кулачкових і фрикційних муфт, а також муфт зі зрізним штифтом.

## 29. РІЗЬБОВІ З'ЄДНАННЯ

### 29.1. Загальні відомості

Різьбові з'єднання належать до розбірних з'єднань і найбільш поширені в машинобудуванні.

*Переваги:* висока надійність, простота складання і розбирання, низька собівартість, можливість застосування однотипних стандартизованих деталей у різноманітних машинах і механізмах.

*Недоліки:* значна концентрація напружень у різьбі, що знижує їх міцність, особливо при циклічному навантаженні. Основними деталями різьбових з'єднань є болти, гвинти, шпильки, гайки та шайби.

*Болт* (рис. 29.1, *a*) — це циліндричний стержень із нарізною різьбою та головкою. Різьбу на болтах накатують або нарізають. Болти застосовують у з'єднаннях, в яких з'єднувані деталі мають відносно невелику товщину.

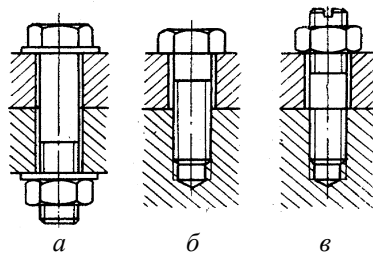


Рис. 29.1. Різьбові з'єднання:  
*a* — болт; *б* — гвинт; *в* — шпилька

*Гвинт* (рис. 29.1, б) — це болт, гайкою якого є одна зі скріплюваних деталей.

За формою головки гвинти бувають (рис. 29.2): із шестигранною, квадратною, з круглою, напівкруглою, напівпотайною та спеціальною головкою, з шестигранним отвором.

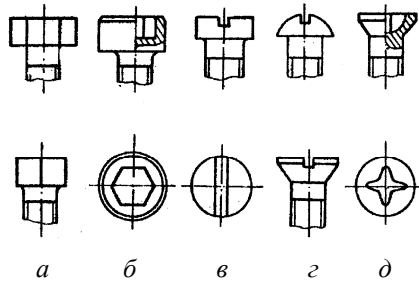


Рис. 29.2. Форми головок гвинтів:  
а — квадратна; б — шестигранна; в — кругла;  
г — напівпотайна та потайна; д — спеціальна

*Шпилька* (див. рис. 29.1, в) — циліндричний стержень із нарізною різьбою з обох кінців. Шпильки застосовують у тих випадках, коли з'єднання за допомогою болтів є недоцільними.

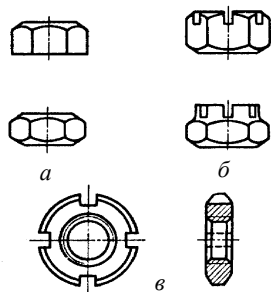


Рис. 29.3. Гайки різьбових з'єднань:  
а — шестигранні;  
б — круглі; в — прорізні і корончасті

*Гайка* — деталь із різьбовим отвором. Гайка є замикаючим елементом різьбового з'єднання. Залежності від призначення гайки мають різну конструктивну форму: шестигранні, круглі, прорізні і корончасті (рис. 29.3).

*Шайба* — стальне кільце невеликої товщини, що підкладається під гайку та головки болтів. За призначенням шайби поділяються на стопорні та підкладні.

Кріпильні вироби виготовляють із вуглецевих сталей: Ст. 2 – Ст. 5; 30, 40, 45, 50.

Для відповідальних або спеціальних з'єднань кріпильні вироби виготовляють із легваної сталі, наприклад, 40Х; 30ХН; 40ХН, а також зі сплавів кольорових металів і пластмас.

## 29.2. Основні параметри різьби

Основним елементом різьбового з'єднання є різьба. За формою профіля розпізнають: трикутну, упорну, трапецеїдальну, прямокутну та круглу (29.4, *a*, *б*, *в*, *г*, *д*).

Відстань між однойменними сторонами двох сусідніх профілів називається *кроком* різьби *p*.

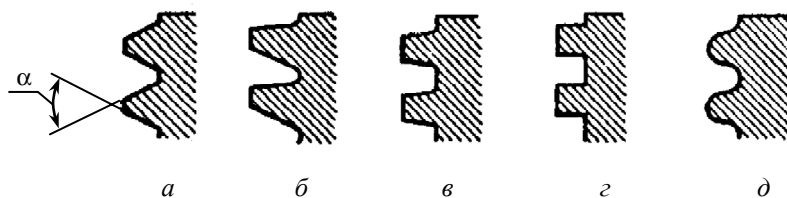


Рис. 29.4. Профіль різьби:

*a* — трикутна; *б* — упорна; *в* — трапецеїдальна; *г* — прямокутна; *д* — кругла

У багатозаходних гвинтових лініях слід розрізняти крок і хід (рис. 29.5). Ходом гвинтової лінії  $p_h$  називають відстань, на яку переміститься точка гвинтової лінії за один повний оберт.

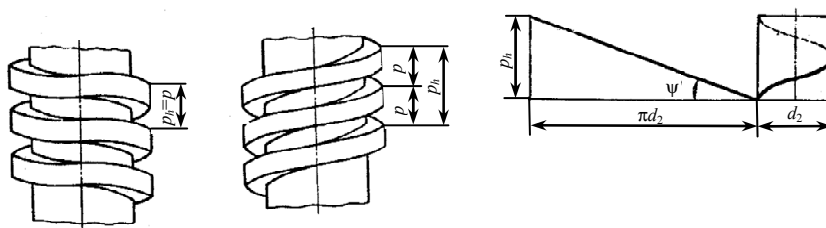


Рис. 29.5. Крок і хід гвинтової лінії прямокутної різьби

Основними геометричними параметрами різьби є (рис. 29.6):  $d$  — зовнішній діаметр різьби;  $d_1$  — внутрішній діаметр різьби;  $d_2$  — середній діаметр різьби.

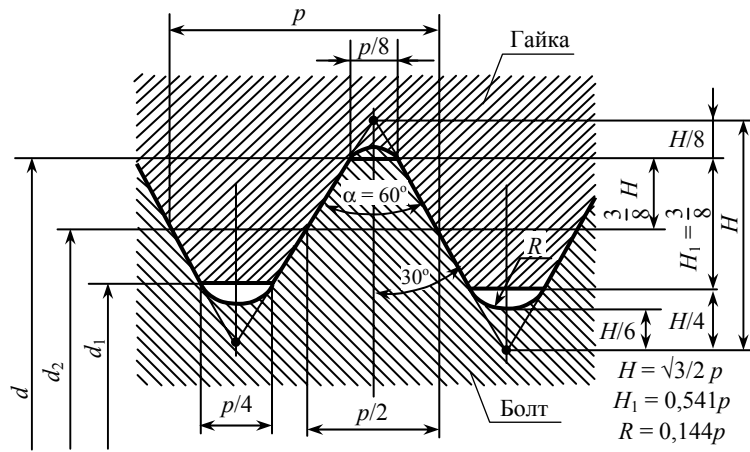


Рис. 29.6. Геометричні параметри різьби

### 29.3. Силкові співвідношення, умови самогальмування і коефіцієнт корисної дії гвинтової пари

Розглянемо співвідношення між силами, які діють у гвинтовій парі з прямокутною різьбою. Розвернемо виток прямокутної різьби гвинта по середньому діаметру  $d_2$  в похилу площину, а гайку замінимо повзуном (рис. 29.7).

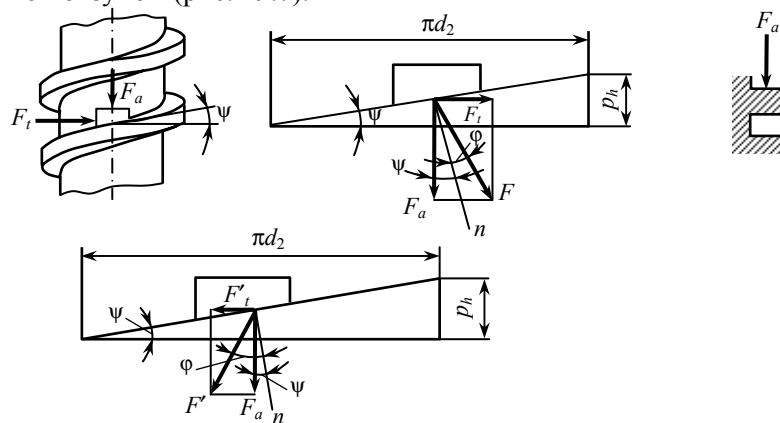


Рис. 29.7. Силкові співвідношення у прямокутній різьбі гвинтової пари



Підйому повзуна по похилій площині відповідає загвинчування гайки на гвинт. Як відомо з теоретичної механіки, сила взаємодії  $F$  між похилою площиною та повзуном, яка виникає у разі його руху по похилій площині, є рівнодіючою нормальної сили та сили тертя і нахилена до нормалі під кутом тертя  $\varphi$ .

Розкладемо силу  $F$  на дві складові: осьову силу  $F_a$ , яка діє на гвинтову пару та колову силу  $F_t$ , що обертає гайку при її загвинчуванні. Рушійна сила із розкладання сил (рис. 29.7) визначається за формулою:

$$F_t = F_a \operatorname{tg}(\psi + \varphi),$$

де  $\psi$  — кут гвинтової лінії різьби;  $\varphi$  — кут тертя.

Очевидно, що крутний момент  $T$  у різьбі, який створює сила  $F_t$  при загвинчуванні гайки:

$$T = 0,5d_2F_t$$

або

$$T = 0,5d_2F_a \operatorname{tg}(\psi + \varphi).$$

Спускання повзуна по похилій площині відповідає відгвинчуванню гайки. У цьому випадку при розкладанні сили взаємодії  $F$  між похилою площиною та повзуном на осьову силу  $F_a$  і колову  $F_t$  маємо:

$$F_t' = F_a \operatorname{tg}(\varphi - \psi). \quad (29.1)$$

Із виразу (29.1) маємо, що  $F_t \geq 0$  (це відповідає умові  $\operatorname{tg}(\varphi - \psi) \geq 0$ ). При цьому виникає явище самогальмування.

Умова самогальмування у прямокутній різьбі математично визначається  $\psi \leq \varphi$ . При підйомі повзуна по похилій площині силою  $F$ , яка рухає його на висоту, що дорівнює ходу різьби  $P_h$  рухомих сил, дорівнює:  $W_{p.c} = F_t \pi d_2$ , а робота корисних сил опору:

$$W_{к.с.о} = F_a P_h = F_a \pi d_2 \operatorname{tg} \psi.$$

Коефіцієнт корисної дії (ККД)  $\eta$  гвинтової пари з прямокутною різьбою при загвинчуванні гайки:

$$\eta = \frac{W_{к.с.о}}{W_{p.c}} = F_a \pi d_2 \operatorname{tg} \psi / F_t \pi d_2 = F_a \operatorname{tg} \psi [F_a \operatorname{tg}(\psi + \varphi)]$$

або

$$\eta = \operatorname{tg} \psi / [\operatorname{tg}(\psi + \varphi)].$$

## 29.4. Розрахунки різьбових з'єднань

*Розрахунок болтового з'єднання, навантаженого осьовою силою*

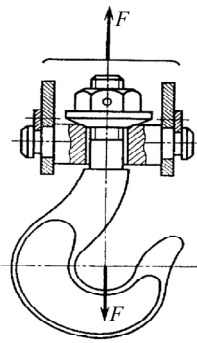


Рис. 29.8. Вантажна скоба

Болти без затяжки не дуже поширені в машинобудуванні. У більшості випадків болти без затяжки навантажені тільки осьовою силою. Прикладом розрахунку може бути різьба вантажної скоби (рис. 29.8). Розрахунок проводять з умови міцності на розтягання. Небезпечним перерізом є переріз по різьбі:

$$\sigma_p = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_p],$$

звідки розрахунковий внутрішній діаметр різьби:

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma_p]}},$$

де  $F$  — осьове навантаження на гвинт, Н;  $A = \frac{\pi d_1^2}{4}$  — розрахункова площа перерізу, мм<sup>2</sup>;  $[\sigma_p]$  — допустиме напруження в різьбі при розтяганні, МПа.

Значення  $d_1$  округлюють до стандартного в більшу сторону, за яким встановлюють зовнішній діаметр різьби болта.

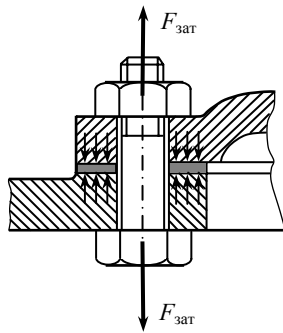


Рис. 29.9. Болт кріплення герметичних кришок і люків корпусів машин

*Розрахунок затягнутого з'єднання без зовнішнього навантаження*

Прикладом гвинтів, навантажених осьовою силою та крутним моментом, є гвинти кріплення герметичних кришок, люків і корпусів машин (рис. 29.9). У цих випадках стержень гвинта розтягується осьовою силою затяжки  $F_{зат}$ , що виникає від затягування гвинта, та скручується моментом сил тертя в різьбі, оскільки момент тертя на торці гайки або головки гвинта через стержень гвинта не передається. Напруження розтягання від сили  $F_{зат}$  визначається так:

$$\sigma_p = \frac{F}{A} = \frac{4F_{зат}}{\pi d_1^2}.$$

Дотичні напруження стержня болта від крутного моменту визначаються:

$$\tau_k = \frac{16T}{\pi d_1^3} = \frac{16 \cdot 0,5 F_{\text{зат}} d_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi)}{\pi d_1^3}.$$

У цьому випадку міцність болта оцінюють за еквівалентним напруженням (за 4-ю теорією міцності):

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma]$$

або

$$\sigma_e = \sigma_p \sqrt{1 + 12(d_2/d_1) \operatorname{tg}(\psi + \varphi)^2}.$$

Якщо зробити обчислення для метричної різьби за залежністю  $\psi = 2^\circ 30'$ ,  $d_2/d_1 = 1,12$  і взяти  $f = 0,15$ , що відповідає  $\psi' = 8^\circ 40'$ , то одержимо для стандартних метричних різьб

$$\sigma_e \approx 1,3\sigma_p.$$

Отже, розрахунок затягнутих болтів можна вести на розтягання за еквівалентним напруженням. При цьому потрібний внутрішній діаметр різьби болта визначається за формулою:

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3 F_{\text{зат}}}{\pi [\sigma_p]}}.$$

*Розрахунок з'єднань деталей, навантажених силами зсуву*

Болт, установлений в отвори деталей із зазором (рис. 29.10, а), створює силу тертя на поверхні стику. Умова відсутності зсуву деталей має вигляд

$$F \leq F_{\text{тр}} i = F_{\text{зат}} f i.$$

Потрібна сила затяжки болта з урахуванням коефіцієнта запасу від зсуву

$$F_{\text{зат}} = \frac{Fk}{fi},$$

де  $f$  — коефіцієнт тертя ( $f = 0,1 \dots 0,2$ );  $i$  — кількість стиків деталей;  $k$  — коефіцієнт запасу від зсуву деталей при статичному навантаженні ( $k = 1,2 \dots 1,5$ ).

У цьому випадку болт працює на розтягання і кручення. З урахуванням  $F_{\text{зат}}$  можна визначити внутрішній діаметр різьби  $d_1$

$$\sigma_p = \frac{4F1,3}{\pi d_1^2 i f} \leq [\sigma_p];$$

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3 F k}{[\sigma_p] \pi i f}}.$$

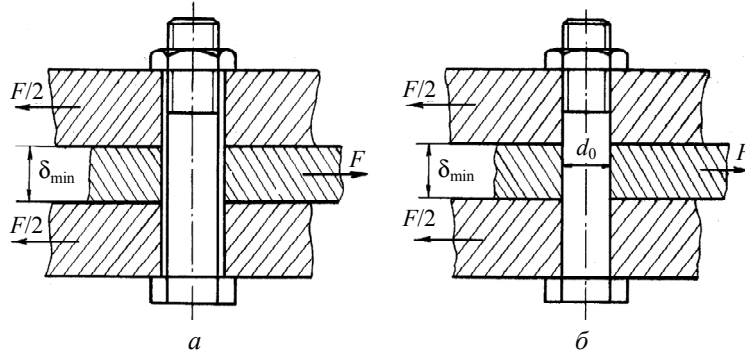


Рис. 29.10. З'єднання деталей болтом, установленим із зазором (а) і без зазору (б)

*Болт, установлений в отвори деталей без зазору*

У цьому випадку визначають діаметр стержня болта з умови міцності на зріз:

$$\tau_{зр} = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d_0 z i} \leq [\tau_{зр}].$$

Потрібний діаметр стержня болта

$$d_0 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi [\tau_{зр}] z i}},$$

де  $d_0$  — діаметр стержня болта, мм;  $z$  — кількість болтів;  $[\tau_{зр}]$  — допустимі напруження на зріз, МПа.

При з'єднанні болтом тонких деталей розрахунком перевіряють з'єднання на зминання

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A} = \frac{F}{d_0 \delta_{\min} z} \leq [\sigma_{зм}],$$

де  $[\sigma_{зм}]$  — допустимі напруження на зминання, МПа;  $\delta_{\min}$  — найменша товщина з'єднаних деталей, мм.

*Розрахунок попередньо затягнутого і навантаженого осьюовою силою болтового з'єднання*

До з'єднань, що застосовуються в машинобудуванні, відносять болтові з'єднання кріпильних кришок циліндрів (рис. 29.11), підшипників вузлів та ін.

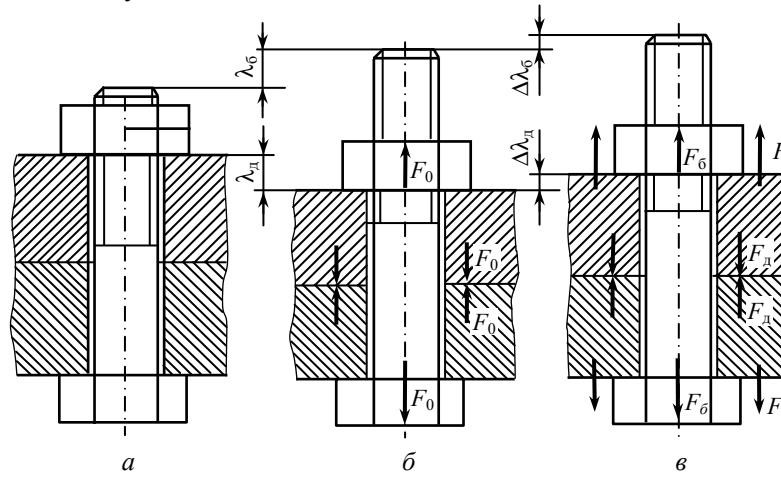


Рис. 29.11. Осьове навантаження з'єднання затягнутим болтом

Попередня сила затяжки болта при збиранні повинна забезпечити щільність з'єднання та стику після прикладення зовнішнього навантаження (сила  $F$ ). Зовнішня сила розтягання  $F$  повністю передається болту. Від цієї сили болт додатково деформується (розтягується) на величину  $\Delta l_b$ , а деталі з'єднання стискаються на величину  $\Delta l_d$ . На цю величину  $\Delta l_d = \Delta l_b$  зменшиться стиск деталей, і навантаження на болт від деталей зменшиться.

Зміна навантаження на болт від стиснутих деталей зв'язана з появою сили  $F$ , частина якої, а саме  $\chi F$  сприймається болтом, а інша частина  $(1 - \chi) F$  — стиснутими деталями. Сумарна сила, що діє на болт

$$F_{\Sigma} = F_0 + \chi F, \quad (29.2)$$

де  $\chi$  — коефіцієнт зовнішнього навантаження.

За законом Гука пружні подовження прямо пропорційні навантаженню:

$$\Delta l_b = \lambda_b \chi F; \quad \Delta l_d = \lambda_d (1 - \chi) F,$$

де  $\lambda_b$  і  $\lambda_d$  — коефіцієнти податливості (деформації) відповідно болта і деталей з'єднання, що чисельно дорівнюють зміні довжини під дією сили в 1 Н, тобто  $\lambda = \frac{l}{EA}$ , де  $l$ ,  $E$  і  $A$  — відповідно довжина, модуль пружності і площа поперечного перерізу бруса.

Оскільки  $\Delta l_b = \Delta l_d$ , тоді  $\lambda_b \chi F = \lambda_d (1 - \chi) F$ ,

звідки

$$\chi = \frac{\lambda_d}{(\lambda_b + \lambda_d)}.$$

Визначення коефіцієнтів податливості  $\lambda_b$  і  $\lambda_d$  є складною інженерною задачею. Для приблизних розрахунків беруть: для з'єднання сталевих та чавунних деталей без пружних прокладок  $\lambda = 0,2 \dots 0,3$ ; для з'єднань сталевих і чавунних деталей із пружними прокладками (гума, пароніт та ін.)  $\lambda = 0,4 \dots 0,5$ .

Формула (29.2) справедлива для значень залишкової сили попередньої затяжки до  $(1 - \chi)F$ , в іншому випадку почнеться розкриття стику деталей і щільність з'єднання порушиться. Мінімальна сила попередньої затяжки болта, що забезпечує нерозкриття стику деталей

$$F_{0\min} = (1 - \chi)F.$$

Практично попередня затяжка болта  $F_0$  повинна бути більше  $F_{0\min}$ . Із умови збереження щільності стику з'єднувальних деталей беруть

$$F_0 = K_{\text{зат}} (1 - \chi)F,$$

де  $K_{\text{зат}}$  — коефіцієнт запасу для попередньої затяжки:

- при постійному навантаженні  $K_{\text{зат}} = 1,25 \dots 2$ ;
- при змінному навантаженні  $K_{\text{зат}} = 2 \dots 4$ .

Під час розрахунків болтів на міцність у формулі (29.2) необхідно врахувати вплив крутного моменту при затяжці.

Розрахункова сила болта з урахуванням впливу крутного моменту при затяжці визначається:

$$F_{\text{розр}} = 1,3F_0 + \lambda F.$$

**Приклад 29.1.** Визначити діаметр різьби болтів фланцевого кріплення кришки парового циліндра (див. рис. 29.9). Кришка кріпиться болтами із сталі 35Х, встановленими із зазором. Допустиме напру-

ження  $[\sigma_p] = 200$  МПа. Максимальний тиск в циліндрі  $P = 2,0$  МПа, внутрішній діаметр з'єднувальних деталей  $D_1 = 250$  мм.

*Розв'язання*

1. Цей випадок відноситься до класу задач, у яких навантаження діє на розкриття стику деталей після попередньої затяжки з'єднання.

2. Беремо коефіцієнт зовнішнього навантаження  $\chi = 0,25$  (жорсткі фланці), а коефіцієнт запасу затяжки з урахуванням статичного характеру прикладення зовнішнього навантаження  $K_{зат} = 2$ . Задамо число болтів  $z = 4$ .

3. Зовнішнє навантаження, що припадає на один болт:

$$F = \frac{F_{\max}}{4z} = \frac{\pi D_1^2 P}{4 \cdot 4} = \frac{3,14 \cdot 0,25^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{4 \cdot 4} = 24,5 \text{ кН}.$$

4. Розрахункове навантаження на один болт визначаємо з урахуванням сили затяжки, крутного моменту при затяжці і частці зовнішнього навантаження, що припадає на болт:

$$F_p = 1,3F_0 + \lambda F = [1,3K_{зат}(1-\chi) + \chi]F = \\ = [1,3 \cdot 2(1-0,25) + 0,25]24,5 \cdot 10^3 = 53,9 \cdot 10^3 = 53,9 \text{ кН}.$$

5. Визначаємо внутрішній діаметр різьби болта за розрахунковим навантаженням:  $d_1 = \sqrt{\frac{4F_p}{\pi[\sigma_p]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 53,9 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 200}} = 18,5$  мм.

6. Згідно з ГОСТ 24705-81 підбираємо найближчий внутрішній діаметр болта  $d_1 = 18,917$  мм, якому відповідає болт М20 із кроком 1 мм.

**Приклад 29.2.** Визначити внутрішній діаметр болта вантажної скоби (див. рис. 29.8), навантаженого осьовою силою  $F = 40$  кН. Допустиме напруження на розтягання для сталі, з якої виготовлено болт  $[\sigma_p] = 120$  МПа.

*Розв'язання*

Болт встановлено без попередньої затяжки і навантажено розтягальною силою. У цьому випадку внутрішній діаметр різьби болта визначається з умови міцності на розтягання. Умова міцності при розтяганні має вигляд:

$$\sigma_p = \frac{F}{A} \leq [\sigma_p].$$

$$\text{Звідки } d_1 = \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma_p]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 40 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2}{3,14 \cdot 120 \text{ Н}}} = 20,61 \text{ мм.}$$

Згідно з ГОСТ 16093-81 вибираємо болт М24 з метричною різьбою і кроком  $p = 3$  мм, для якої  $d_1 = 20,75$  мм.

**Приклад 29.3.** Розрахувати болтове з'єднання, навантажене поперечною силою, яка намагається зсунути деталі одну відносно іншої в місці з'єднання. Умовою надійності з'єднання є відсутність зсуву деталей. Розрахунки виконати для двох випадків: болти встановлено в отвори із зазором і без зазору.

*Болт встановлено в отвір із зазором* (див. рис. 29.10, а). Величина сили зсуву  $F = 4,3$  кН; допустиме напруження розтягання для матеріалу болта  $[\sigma_p] = 120$  МПа; коефіцієнт тертя для сталей поверхонь  $f = 0,15$ .

*Розв'язання*

Знаходимо необхідну силу затяжки болта:

$$F_{\text{зат}} = \frac{F}{izf} = \frac{4,3}{2 \cdot 1 \cdot 0,15} = 14,33 \text{ кН,}$$

де  $i$  — кількість площин зрізу;  $z$  — кількість болтів.

Визначаємо внутрішній діаметр різьби болта, встановленого із

$$\text{зазором } d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3 \cdot F_{\text{зат}}}{\pi[\sigma_p]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3 \cdot 14,33 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 120}} = 14,1 \text{ мм.}$$

Згідно з ГОСТ 16093-81 вибираємо болт М16 з метричною різьбою кроком 1,5 мм, для якого  $d_1 = 14,376$  мм.

*Болт встановлено в отвір без зазору.* Знаходимо діаметр стержня болта з умови міцності на зріз  $\tau_{\text{зр}} = \frac{F}{A_{\text{зр}}} \leq [\tau_{\text{зр}}]$ , де  $A_{\text{зр}}$  — площа

зрізу;  $F$  — сила зрізу. Допустиме напруження на зріз  $[\tau_{\text{зр}}] = 80$  МПа.

Звідси діаметр стержня болта

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi i [\tau_{\text{зр}}]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2 \cdot 80}} = 5,85 \text{ мм.}$$

Вибираємо болт з різьбою М6. Перевіряємо з'єднання на зми-  
нання.



Умова міцності на зминання має вид  $\sigma_{зм} = \frac{F}{d\delta_{\min}} \leq [\sigma_{зм}]$ , де  $\delta_{\min}$  — мінімальна товщина деталей з'єднання. Допустиме напруження на зминання беремо  $[\sigma_{зм}] = 160$  МПа:

$$\sigma_{зм} = \frac{4,3 \cdot 10^3}{6 \cdot 8} = 89,58 \text{ МПа} < [\sigma_{зм}] = 160 \text{ МПа.}$$

Умову міцності виконано. Міцність з'єднання забезпечено.

### Запитання для самоконтролю

1. Що розуміють під профілем різьби, кроком різьби, кутом профілю і кутом підйому різьби?
2. Які типи різьби виглядають за призначенням і геометричною формою та які з них стандартизовані? Назвіть основні параметри різьби.
3. Які основні види метричної різьби застосовуються в машинобудуванні?
4. Чому метрична різьба з великим кроком застосовується частіше? Коли застосовується різьба з малим кроком?
5. Які види болтів, гвинтів і шпильок виділяють за призначенням та конструкцією?
6. Чому для болтів застосовують трикутникову різьбу?
7. У яких випадках застосовують шпильки і гвинти замість болтів?
8. Як розраховують болти при дії на них постійних навантажень у таких випадках: болт навантажено тільки осьовою розтягувальною силою і встановлено в отвір із зазором і навантажений поперечною силою; болт поставлений в отвір без зазору і навантажено поперечною силою?
9. Які матеріали застосовують для виготовлення різьбових деталей?

## 30. ШПОНКОВІ З'ЄДНАННЯ

### 30.1. Загальні відомості про шпонкові з'єднання

Шпонкові з'єднання складаються з вала, шпонки і маточини колеса (шківа, зірочки тощо). Шпонки служать для передачі крутного моменту від вала до маточини деталі. Основні типи шпонок стандартизовані.

*Переваги:* проста конструкція і нескладна технологія монтажу та демонтажу.

*Недолік:* шпонкові пази послаблюють вал і маточину.

З'єднання деталей за допомогою шпонок можуть бути напруженими і ненапруженими. З'єднання називають напруженими, якщо в їхніх деталях виникають напруження в процесі складання, тобто до прикладання робочих навантажень. До *напружених* належать з'єднання клиновими та тангенціальними шпонками, які добре сприймають ударні навантаження. Клинові шпонки (рис. 30.1) виконують із плоскими торцями або один торець роблять плоским, а другий — закругленим. Виготовляють з головками і без головок. Клинова шпонка має нахил верхньої грані 1:100 і монтується між валом і деталлю ударами молотка (забивна шпонка).

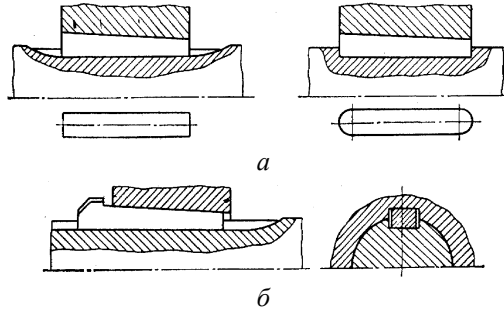


Рис. 30.1. Напружені з'єднання клиновою шпонкою:  
*a* — клинова шпонка без головки; *б* — клинова шпонка з головкою

У важкому машинобудуванні при великих динамічних навантаженнях застосовують клинові тангенціальні шпонки (рис. 30.2), які встановлюють під кутом 120...135°.

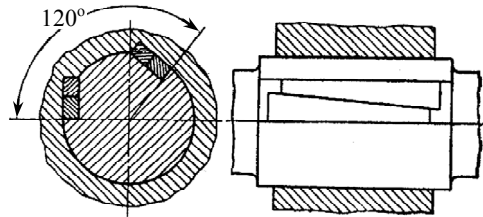


Рис. 30.2. Напружене з'єднання тангенціальною шпонкою

З'єднання тангенціальними клиновими шпонками відрізняються від з'єднань простими клиновими шпонками тим, що натяг між валом і маточиною створюється не в радіальному, а в дотичному на-

прямі, у зв'язку з чим треба встановлювати дві шпонки, що закладаються з нахилом 1:100 і працюють на стиск. *Ненапружені шпонкові з'єднання* виконують призматичними і сегментними шпонками. У цих шпонках робочими гранями служать бокові більш вузькі грані.

*Призматичні шпонки* виготовляють із плоскими та закругленими торцями (рис. 30.3). Призматичні шпонки є основними в машинобудуванні.

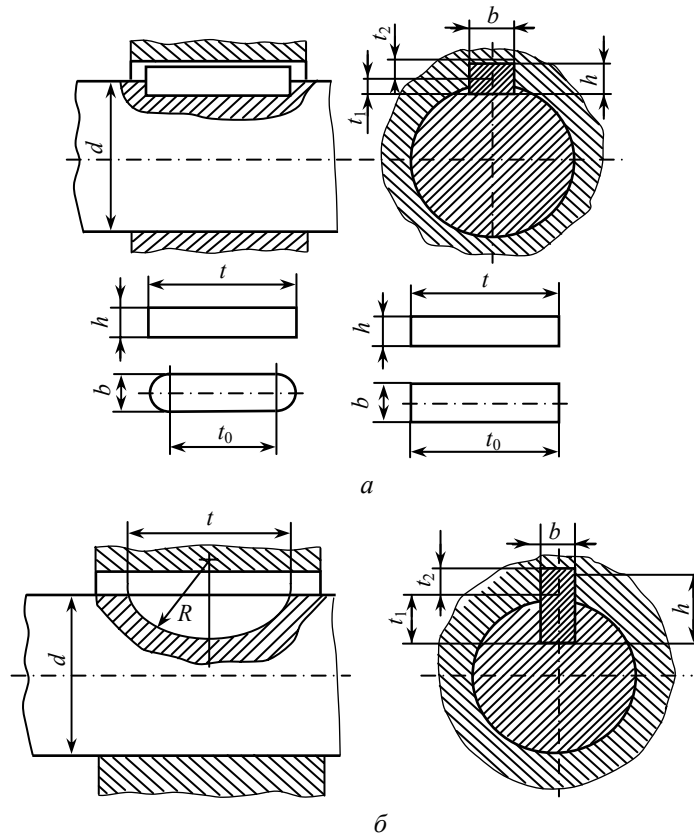


Рис. 30.3. Ненапружені шпонкові з'єднання:  
 а — призматичною шпонкою; б — сегментною шпонкою

Розміри з'єднань призматичними шпонками стандартизовані. *Сегментні шпонки* (рис. 30.3, б) працюють так само, як і призматичні, з боковими гранями.

Вони поширені в автотракторобудуванні, верстатобудуванні завдяки простоті виготовлення і зручності при складанні та розбиранні. Сегментні шпонки використовують для передавання незначних крутних моментів. Стандартні шпонки виготовляють із чистотягнутих сталей з межею міцності не менше 500 МПа.

### 30.2. Вибір і розрахунок призматичних шпонкових з'єднань

Розміри перерізу шпонки  $b \times h$  ( $b$  — ширина,  $h$  — висота шпонки) вибирають із таблиць стандартів залежно від діаметра вала і конструктивних вимог. Довжину шпонки  $l$  беруть на 5...10 мм меншою від довжини маточини, що з'єднується з валом, і закругляють до стандартного значення та перевіряють розрахунком. У стандартних шпонках розміри поперечного перерізу  $b \times h$  підібрані так, що навантаження з'єднання обмежуються напруженнями зминання.

З'єднання за допомогою призматичних шпонок перевіряють на зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{F_t}{A} = \frac{2T}{d(h-t_1)l_p} \leq [\sigma_{зм}],$$

де  $F_t = \frac{2T}{d_2}$  — колова сила, Н;  $A = (h-t_1)l_p$  — площа зминання, мм<sup>2</sup>;

$h$  — висота шпонки, мм;  $t_1$  — глибина паза на валу, мм;  $l_p = l - b$  — робоча довжина шпонки, мм;  $[\sigma_{зм}]$  — допустиме напруження зминання, МПа.

Розрахунок на зріз призматичних шпонок здебільшого не виконують.

**Приклад 30.1.** Підібрати тип стандартного шпонкового з'єднання сталевого зубчастого колеса з валом (рис. 30.3, *a*) і підібрати розміри шпонки. Діаметр вала  $d = 50$  мм, з'єднання передає момент  $T = 600$  Н·м при спокійному навантаженні.

*Розв'язання*

1. *Вибір з'єднання.* Для з'єднання вала з колесом беремо призматичну шпонку з закругленими торцями (виконання І).

2. *Розміри шпонки і паза.* Згідно зі стандартом ГОСТ 23360-78 для діаметра вала  $d = 50$  мм беремо розміри перерізу шпонки  $b = 14$  мм;  $h = 9$  мм; глибина пазу  $t_1 = 5,5$  мм (дод. 26).

3. *Допустиме напруження.* Для сталеві маточини при спокійному навантаженні беремо  $[\sigma_{зм}] = 110 \text{ Н/мм}^2$ .

4. *Розрахункова довжина шпонки*

$$l_p = \frac{2T}{d(h-t_1)[\sigma_{зм}]} = \frac{2 \cdot 600 \cdot 10^3}{50(9-5,5)110} = 62,33 \text{ мм.}$$

5. *Довжина шпонки*

$$l = l_p + b = 62,33 + 14 = 76,33 \text{ мм.}$$

Згідно зі стандартом ГОСТ 23360-78 вибираємо шпонку довжиною  $l = 80 \text{ мм}$  (дод. 26).

6. *Довжина маточини колеса*  $l_{мт} = l + (5 \dots 10) \text{ мм} = 80 + (5 \dots 10) = 85 \dots 90 \text{ мм}$ .

Беремо довжину маточини 90 мм, що задовольняє умови міцності.



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. З'ясуйте призначення шпонок. Які їх типи стандартизовані? Назвіть переваги і недоліки шпонкових з'єднань.
2. В яких випадках застосовують призматичні шпонки?
3. Чому для різних ступенів одного й того ж вала рекомендується призначати однакові шпонки по перерізу, виходячи зі ступенів вала меншого діаметра?
4. Як виконується перевірний розрахунок призматичних шпонок?

## 31. ШЛІЦЬОВІ (ЗУБЧАСТІ) З'ЄДНАННЯ

### 31.1. Загальні відомості

Для з'єднання маточини з валом часто використовують *шліцьові (зубчасті) з'єднання*, які утворюються зовнішніми зубами на валу і відповідно внутрішніми в отворі маточини.

Шліцьові з'єднання широко розповсюджені в машинобудуванні. Усі розміри їх стандартизовані.

*Переваги* шліцьових з'єднань над шпонковими:

- висока надійність при динамічних навантаженнях;
- можливість передачі великих крутних моментів за рахунок більшої поверхні контакту;
- забезпечення кращого базування деталей з'єднання.

*Недолік:* складна технологія виготовлення, а відповідно, висока собівартість.

За формою зубів шліцьові з'єднання бувають евольвентні, трикутні і прямобічні (рис. 31.1).

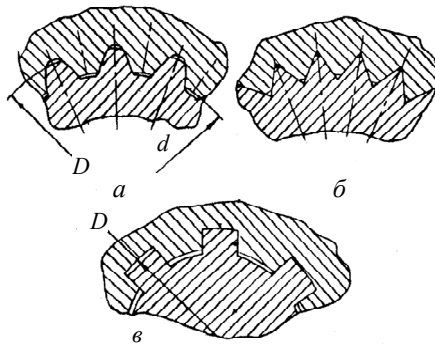


Рис. 31.1. Профіль зубів шліцьового з'єднання:  
*a* — евольвентний; *б* — трикутний; *в* — прямобічний

Найбільш поширені прямобічні й евольвентні шліцьові з'єднання, які застосовуються в рухомих і нерухомих з'єднаннях. Останнім часом перевагу віддають евольвентним з'єднанням, які мають менший коефіцієнт концентрації напружень, крім того, їх можна виготовляти за допомогою верстатів для нарізання зубчастих коліс.

Шліцьові з'єднання з трикутним профілем зубів менш поширені, ніж евольвентні і прямобічні. Шліцьові з'єднання з прямобічним профілем зубів випускають трьох серій: легка, в основному для нерухомих і малонавантажених з'єднань; середня, головним чином для рухомих середньонавантажених з'єднань із великою кількістю зубів; важкої — для передачі великих моментів.

Шліцьові з'єднання підбирають за таблицями стандартів залежно від діаметра вала.

### 31.2. Розрахунок шліцьових з'єднань

Розрахунок шліцьових з'єднань проводять зазвичай як перевірний. Розраховують шліцьові з'єднання на змінання активних поверхонь зубів (рис. 31.2)

$$[\sigma_{зм}] = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{зм}],$$

де  $F = \frac{2T}{d_m}$  — сила зминання, Н;  
 $T$  — крутний момент, Н·м;  $d_m = 0,5(D+d)$  — середній діаметр, мм;  $A = hl_{\text{шл}} = 0,5(D-d) - 2fl_{\text{шл}}$  — розрахункова площа зминання, мм<sup>2</sup>;  $f$  — довжина фаски, мм;  $l_{\text{шл}}$  — робоча довжина шліців, мм

$$\sigma_{\text{зм}} = \frac{2T}{d_m z h l_{\text{шл}} \psi} \leq [\sigma_{\text{зм}}],$$

де  $\psi = 0,7 \dots 0,9$  — коефіцієнт нерівномірності розподілу навантаження на робочих поверхнях шліців;  $z$  — кількість шліців.

Для шліців евольвентного профілю з центруванням по боковій стороні

$$d_{\text{сер}} = d_m = mz \text{ і } m = h = \frac{d_m}{2},$$

де  $m$  — модуль з'єднання.

Для шліців евольвентного профілю з центруванням по діаметру

$$D \text{ і } d_{\text{сер}} = d_m = mz \text{ і } h = 0,9m = \frac{0,9d_m}{2}.$$

Допустимі напруження на зминання шліцьового з'єднання можна взяти: для нерухомого з'єднання з термічною обробкою шліців  $[\sigma_{\text{зм}}] = 100 \dots 140$  МПа та без термообробки  $[\sigma_{\text{зм}}] = 60 \dots 100$  МПа.

Для рухомих з'єднань із термічною обробкою шліців  $[\sigma_{\text{зм}}] = 10 \dots 20$  МПа.

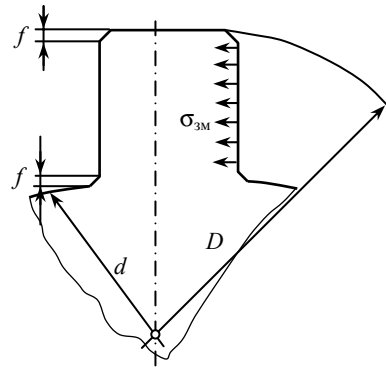


Рис. 31.2. До перевірного розрахунку прямобічного шліцьового з'єднання

### ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Назвіть переваги і недоліки шліцьових з'єднань порівняно зі шпонковими.
2. Назвіть основні типи шліцьових з'єднань та способи центрування прямобічних і евольвентних з'єднань.
3. Як виконують перевірений розрахунок прямобічного і евольвентного шліцьових з'єднань?

## 32. ЗАКЛЕПКОВІ З'ЄДНАННЯ

### 32.1. Загальні відомості

З'єднання, що здійснюються заклепками, належать до нероз'ємних з'єднань.

*Переваги:*

- висока міцність і надійність з'єднання;
- простота контролю якості з'єднань;
- можливість з'єднання деталей з будь-яких матеріалів;
- незмінність фізико-хімічних властивостей матеріалів з'єднуваних деталей у процесі клепаання.

*Недоліки:*

- концентрація напружень матеріалу з'єднуваних деталей унаслідок ослаблення їх заклепковими отворами;
- складність технологічного процесу виготовлення клепааних конструкцій;
- заклепки і з'єднувані деталі повинні бути однорідними.

Заклепкові з'єднання застосовують у конструкціях, для яких методи зварювання і склеювання розроблені недостатньо або мало-ефективні.

*Заклепка* (рис. 32.1) — це металевий стержень циліндричної форми з головкою на кінці.

Найпоширеніші заклепки зі сталей Ст. 1; Ст. 2; Ст. 3; Ст. 10; мідних та алюмінієвих сплавів.

За формою головки найбільш поширені заклепки, показані на рис. 32.1.

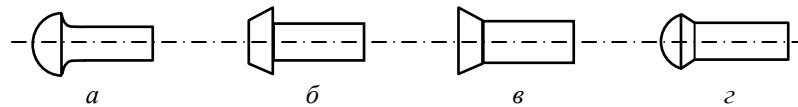


Рис. 32.1. Форми головок заклепок:

*a* — напівкругла; *б* — плоскоконічна; *в* — потайна; *г* — напівпотайна

З'єднання отримують шляхом розклепування стержня заклепки, що вставляється в отвори деталей (рис. 32.2).

Оскільки в заклепковому шві заклепка практично повністю заповнює отвір, то розрахунки роблять за діаметром отвору під заклепку  $d$ , який трохи більший від діаметра заклепки  $d'$ .



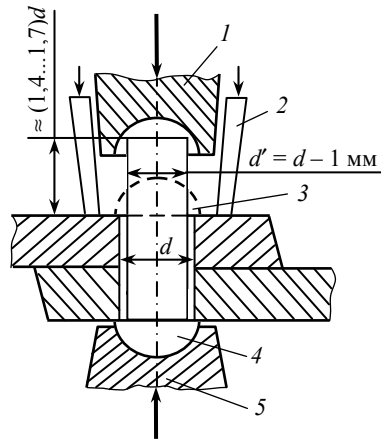


Рис. 32.2. Схема утворення заклепкового шва:  
 1 — обтискач; 2 — обтискання при машинному клепанні;  
 3 — замикаюча головка; 4 — закладна головка; 5 — підтримка

### 32.2. Розрахунок заклепкових з'єднань

Умови навантаження заклепок подібні до умов навантаження болтів, поставлених в отвір без зазору. У зв'язку з цим розрахункові формули справедливі і для заклепкових з'єднань (рис. 32.3).

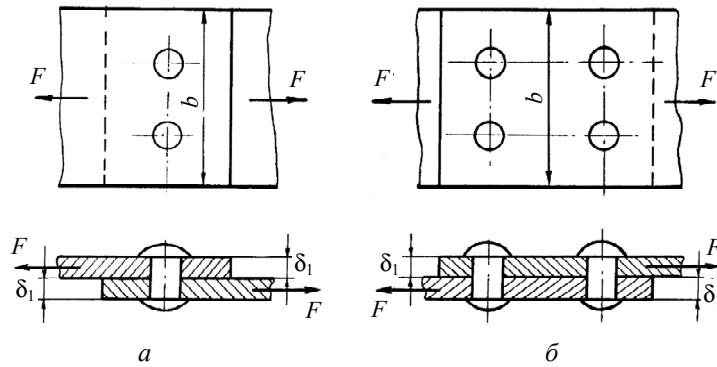


Рис. 32.3. Заклепкові з'єднання:  
 а — однорядне; б — дворядне

Розрахунок стержня заклепки виконують з умови міцності на зріз:

$$\tau_{зр} = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2 z i} \leq [\tau_{зр}],$$

де  $A = \frac{\pi d^2}{4}$  — площа зрізу однієї заклепки, мм;  $d$  — діаметр отвору під заклепку, мм;  $z$  — кількість заклепок;  $i$  — кількість площин зрізу в з'єднанні.

*Розрахунок на зминання* бічної поверхні і стінок отворів у з'єднаних деталях:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A} = \frac{F}{d\delta_{\min}z} \leq [\sigma_{зм}],$$

де  $A = d\delta_{\min}$  — площа зминання заклепок або листка, що дорівнює проекції бічної поверхні циліндра заклепки на осевий переріз, мм;  $\delta_{\min}$  — найменша товщина з'єднаних деталей, мм.

*Розрахунок листків з'єднання.* Під дією великих статичних навантажень розраховують листки з'єднання в небезпечному перерізі на розтягання

$$\sigma_p = \frac{F}{A} = \frac{F}{\delta_{\min}(b-zd)} \leq [\sigma_p],$$

де  $A = (b-zd)\delta_{\min}$  — розрахункова площа в небезпечному перерізі листка, мм;  $z$  — кількість заклепок у небезпечному перерізі листка;  $b$  — ширина листка, мм.

Допустимі напруження беруть для матеріалу заклепки. Для сталевих заклепок допустимі напруження на зріз  $[\tau_{зр}] = 100 \dots 120$  МПа, на зминання  $[\sigma_{зм}] = 210 \dots 240$  МПа.

**Приклад 32.1.** Визначити необхідний діаметр заклепок з'єднання (рис. 32.3, а). Перевірити заклепкове з'єднання на зминання та міцність з'єднувальних листків за напруженнями розтягання. Діюча сила  $F = 20$  кН, товщина з'єднувальних листків  $\delta = 8$  мм, ширина  $b = 40$  мм. Допустимі напруження беруть: на зріз  $[\tau_{зр}] = 100$  МПа на зминання  $[\sigma_{зм}] = 210$  МПа, на розтягання  $[\sigma_p] = 160$  МПа.

*Розв'язання*

1. *Визначаємо діаметр заклепки з умови міцності на зріз за формулою*

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi z i [\tau_{зр}]} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 100}} = 11,3 \text{ мм.}$$

Беремо стандартний діаметр заклепки 12 мм.

2. Перевіряємо з'єднання за напруженнями зминання за формулою

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{d\delta_{\min}z} = \frac{20 \cdot 10^3}{12 \cdot 8 \cdot 2} = 104,16 \text{ МПа} < [\sigma_{зм}] = 210 \text{ МПа} .$$

Умову міцності виконано.

3. Перевіряємо з'єднувальні листки на розтягання:

$$\sigma_p = \frac{F}{\sigma_{\min}(b-zd)} = \frac{20 \cdot 10^3}{8(40-2 \cdot 12)} = 156,25 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 160 \text{ МПа} .$$

Умову міцності виконано. Міцність з'єднання забезпечено.

### ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Назвіть переваги та недоліки заклепкових з'єднань порівняно з іншими нерозбірними з'єднаннями.
2. Як розраховують діаметр стержня заклепки?
3. Як виконують розрахунки на зминання стінок отворів та листків заклепкового з'єднання на розтягання?

## 33. ЗВАРНІ З'ЄДНАННЯ

### 33.1. Загальні відомості

*Зварними* називають з'єднання деталей, зв'язаних у зоні їх контакту міжмолекулярними силами, що виникають при місцевому плавленні або спільному пластичному деформуванні. Зварні з'єднання найбільш поширені в машинобудуванні завдяки перевагам над іншими видами з'єднань.

*Переваги:* незначна вартість і простота конструкції; маса конструкції на 20...25 % менша від маси заклепкових з'єднань через відсутність накладок; висока міцність конструкції і герметичність з'єднань; можливість автоматизації процесу.

*Недоліки:* міцність конструкції залежить від кваліфікації зварника; жолоблення деталей конструкції із-за нерівномірного нагрівання; недостатня надійність при значних утомних, ударних і вібраційних навантаженнях.

Основними способами зварювання деталей є дугове та контактне. При зварюванні плавленням метал нагрівається до розплавлено-

го стану і зварне з'єднання утворюється без застосування тиску. Зварювання під тиском здебільшого здійснюється нагріванням металу до пластичного стану або до початку плавлення зварюваних поверхонь.

### 33.2. Основні види зварних з'єднань та їх розрахунок

Стикове з'єднання (рис. 33.1) двох деталей, розташованих в одній площині, є найраціональнішим видом зварного з'єднання. Вихідною умовою проектування зварних з'єднань зазвичай є рівномірність шва і з'єднаних деталей виробу. Незважаючи на нерівномірність розподілу напружень по периметру шва, при розрахунку зварних з'єднань концентрацію напружень не враховують, тобто розрахунок умовний, однак виправданий практикою експлуатації з'єднань.

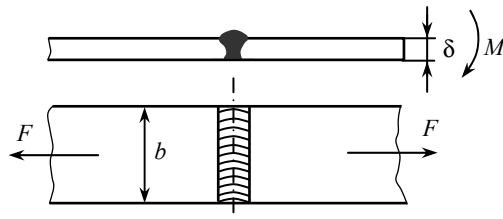


Рис. 33.1. Стикове зварне з'єднання

Стикові з'єднання розраховують за нормальними напруженнями розтягання від дії сили  $F$ :

$$\sigma'_p = \frac{F}{b\delta} \leq [\sigma_p]',$$

де  $b$  — довжина шва, мм;  $\delta$  — товщина зварювальних елементів, мм;  $[\sigma_p]'$  — допустиме напруження розтягання для зварного шва, МПа.

Розрахунок на згин виконують за залежністю:

$$\sigma_F = \frac{M}{W} = \frac{6M}{b\delta^2} \leq [\sigma_F]',$$

де  $M$  — згинальний момент, Н·мм;  $W$  — момент опору згину поперечного перерізу, мм<sup>3</sup>.

Прямий стиковий шов дугового електрозварювання не забезпечує однакової міцності по шву і по цілому перерізу деталі, оскільки допустимі напруження для зварного шва нижчі від допустимих на-

пружень для основного матеріалу. Тому допустимі напруження зварного шва беруть

$$[\sigma_p]' = (0,9 \dots 0,95)\sigma_b; \quad [\tau_{зр}]' = (0,9 \dots 0,95)\tau_b,$$

де  $[\sigma_p]'$ ,  $[\tau_{зр}]'$  — допустимі напруження зварного шва при розтяганні та зрізі;  $\sigma_b$ ,  $\tau_b$  — межі міцності матеріалу з'єднання при розтяганні та зрізі.

У напусткових з'єднаннях (рис. 33.2) незалежно від розташування шва приймають, що вони працюють тільки на зріз і небезпечним перерізом є переріз по бісектрисі шва висотою приблизно  $0,7k$ , де  $k$  — катет шва. Отже, розрахункову площу шва визначають з виразу

$$A = 0,7kl,$$

де  $l$  — довжина зварного шва, мм.

За катет шва  $k$  беруть вписаний у переріз катет рівнобедреного трикутника. Здебільшого  $k$  беруть таким, що дорівнює товщині зварувальних деталей, але не менше 3 мм.

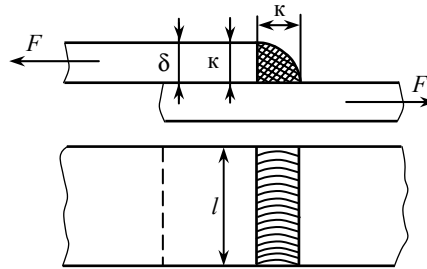


Рис. 33.2. Напусткове зварне з'єднання

Залежно від розташування кутові шви бувають *флангові, лобові та комбіновані*. Фланговий шов може бути однобічним, коли шов накладається по крайці листків з одного боку, і двобічним (рис. 33.3). Фланговий шов розраховують на розтягання та зріз.

Розрахунок на розтягання флангового шва виконують за залежністю:

$$\sigma_p' = \frac{F}{0,7k2l_\phi} \leq [\sigma_p'],$$

де  $l_\phi$  — довжина зварного шва з одного боку, а також на зріз від дії моменту  $M$ .

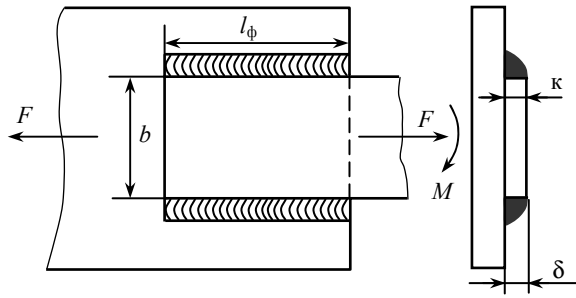


Рис. 33.3. Фланговий зварний шов

Розрахунок на зріз:

$$\tau'_{зр} = \frac{M}{0,7k l_{\phi} b} \leq [\tau'_{зр}],$$

де  $b$  — ширина листка, мм.

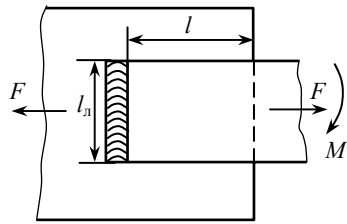


Рис. 33.4. Лобовий зварний шов

мм, а від дії моменту  $M$ :

$$\tau'_{зр} = \frac{M}{0,7k l_n^2 / 6} \leq [\tau'_{зр}].$$

Розрахунок комбінованого шва складається з розрахунків лобового та флангових швів.

**Приклад 33.1.** Перевірити на міцність стикове зварне з'єднання (див. рис. 33.1), якщо сила  $F = 9,7$  кН, товщина зварювальних листків металу  $\delta = 8$  мм, їх ширина  $b = 47$  мм, допустиме напруження на розтягання  $[\sigma_p] = 140$  МПа.

*Розв'язання*

Визначаємо допустиме напруження на розтягання для зварного шва  $[\sigma'_p] = 0,9 [\sigma_p] = 0,9 \cdot 140 = 126$  МПа.

Перевірку міцності зварного шва виконуємо за формулою:

$$\sigma_p = \frac{F}{A_p} \leq [\sigma'_p],$$

де  $A_p$  — площа поперечного перерізу зварного шва;

$$A_p = b\delta = 47 \cdot 8 = 376 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_p = \frac{9,7 \cdot 10^3}{376} = 25,8 \text{ МПа} < [\sigma'_p].$$

Умову міцності виконано. Міцність зварного шва забезпечено.

**Приклад 33.2.** Перевірити на міцність напускове зварне з'єднання (див. рис. 33.2), якщо катет зварного шва  $k = 3$  мм, а його довжина  $l = 74$  мм.

*Розв'язання*

Визначаємо допустиме напруження на зріз для зварного шва  $[\tau'_{зр}]$ :

$$[\tau'_{зр}] = 0,6[\sigma_p] = 0,6 \cdot 140 = 84 \text{ МПа.}$$

Перевірку міцності зварного шва виконуємо за формулою:

$$\tau_{зр} = \frac{F}{A_{зр}} \leq [\tau'_{зр}],$$

де  $A_{зр}$  — площа поперечного перерізу зварного шва;

$$A_{зр} = 0,7kl = 0,7 \cdot 3 \cdot 74 = 155,4 \text{ мм}^2;$$

$$\tau_{зр} = \frac{9,7 \cdot 10^3}{155,4} = 62,42 \text{ МПа} < 84 \text{ МПа.}$$

Умову міцності виконано. Міцність зварного шва забезпечено.



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Назвіть переваги і недоліки зварних з'єднань порівняно з заклепковими.
2. Назвіть основні типи зварювальних швів.
3. Як розраховують зварювальні шви, навантажені осьовою силою?
4. Як розраховують кутові зварні шви (лобові, фланцеві та комбіновані) при навантаженні осьовою силою?

## ОСНОВИ КОНСТРУЮВАННЯ

### 34. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ОСНОВ ПРОЕКТУВАННЯ

#### 34.1. Поняття про проектування і конструювання

*Проектування* — це неперервний процес, у якому наукова і технічна інформація використовується для створення нового пристрою або машини, що приносять суспільству певну користь.

Проектування і конструювання є процесами взаємопов'язаними, що доповнюють один одного.

Конструктивна форма об'єкта уточнюється за допомогою методів проектування, виконанням розрахунків експлуатаційних параметрів на міцність і надійність, оптимізацію прийнятих рішень.

Проектування передуює конструюванню і є пошуком науково обґрунтованих, технічно здійснених та доцільних рішень. Результатом проектування є проект створюваного об'єкта. Проект, виконаний у процесі проектування, обговорюється, аналізується, коректується і береться як основа для подальшого опрацювання.

*Конструювання* — це створення конкретної конструкції об'єкта згідно з проектом. Конструкція — це будова, взаємне розміщення частин і елементів будь-якої машини, приладу, яка визначається його призначенням. Конструкція передбачає спосіб з'єднання, взаємодію частин, а також матеріали, з яких виготовляють окремі елементи. Конструювання базується на результатах проектування і уточнює всі інженерні рішення, прийняті при проектуванні.

Проектування і конструювання мають одну мету — створення нового виробу.

#### 34.2. Задачі конструювання

Завдання конструктора полягає у створенні машин, які цілком відповідають вимогам технічного завдання, дають найбільший економічний ефект і мають високі техніко-економічні й експлуатаційні показники.



*Головними показниками є:* висока продуктивність, економічність, міцність, надійність, незначна маса і компактність, великий ресурс, простота і безпека обслуговування, зручність складання та ремонту.

Значимість кожного із зазначених показників зумовлена функціональним призначенням механізму чи машини. Наприклад, для машин-зрядь найважливішими є: продуктивність, точність, експлуатаційна надійність, ступінь автоматизації, тоді як для авіаційної техніки до найважливіших показників відносяться експлуатаційна надійність і безпека, економічна ефективність повітряних перевезень та ін.

Проектуючи машину, конструктор повинен добиватись усебічного підвищення економічної ефективності за весь період експлуатації.

Головними чинниками, що визначають економічність, є: корисна віддача машини, експлуатаційна надійність, споживання енергії і вартість ремонтів, витрати на оплату праці операторів.

Конструювання на рівні курсового проекту виконують, як правило, за аналогією. Для цього студент повинен вибирати відомі конструктивні рішення, аналогічні розроблюваній конструкції, тобто прототип. У процесі конструювання студент повинен прагнути поліпшити прототип.

### **34.3. Стадії конструювання машин**

Особливістю процесу конструювання є багатоваріантність рішень, необхідність узгодження прийнятих рішень із загальними і специфічними вимогами, що ставляться до конструкцій, а також з вимогами відповідних стандартів, які регламентують терміни, визначення, умовні позначення, методи розрахунку, системи вимірювань тощо.

Деталі, вузли, машини виготовляють за кресленнями, які виконані на основі проектів — сукупності розрахунків, графічних матеріалів та пояснень до них і призначені для обґрунтування параметрів конструкції (кінематичних, геометричних, динамічних та ін.), тобто її продуктивності й економічної ефективності. Для особливо відповідальних конструкцій (наприклад, планер літака) проект доповнюють макетом. Стадії розробки конструкторської документації та етапи робіт установлює ГОСТ 2.103-68, який узагальнює накопичений досвід із проектування машин, приладів і апаратури.

*Перша стадія* — розробка технічного завдання — документа, складовими якого є: основне призначення, технічні вимоги, показники якості, економічні показники і спеціальні вимоги замовника до виробу.

Технічне завдання розробляють на основі вимог замовника з урахуванням досягнень і технічного рівня вітчизняних і зарубіжних конструкцій, патентного пошуку, а також результатів науково-дослідних робіт і наукових прогнозів.

*Друга стадія* — розробка технічної пропозиції — сукупності конструкторських документів, що обґрунтовують технічну і техніко-економічну доцільність розробки виробів на основі пропозицій у технічному завданні, розгляду варіантів можливих рішень з урахуванням досягнень науки і техніки в державі і за кордоном, патентних матеріалів, можливостей машинобудівних заводів галузі. Технічна пропозиція затверджується замовником і генеральним підрядником.

*Третя стадія* — розробка ескізного проекту — сукупності конструкторських документів, що містять принципові конструкторські рішення і розробки загальних видів креслень, які дають уяву про будову розроблюваного виробу, принцип його дії, габарити і основні параметри. До цієї стадії входить пояснювальна записка з необхідними розрахунками.

*Четверта стадія* — розробка технічного проекту — сукупності конструкторських документів, що містять остаточне рішення, яке дає повне уявлення про будову виробу. Креслення проекту складаються із загальних видів, складальних креслень вузлів. На цій стадії розглядаються питання надійності вузлів, відповідність вимогам техніки безпеки, умовам зберігання і транспортування.

*П'ята стадія* — розробка робочої документації — сукупності документів, що містять креслення загальних видів, вузлів і деталей, оформлених так, щоб за ними можна було виготовляти вироби та контролювати їх виробництво й експлуатацію. На цій стадії розробляються конструкції деталей, оптимальні за показниками надійності, технологічності й економічності.

При цьому проектування на всіх стадіях слід забезпечити обчислювальною технікою для того, щоб звільнити конструктора від виконання трудомістких розрахунків, значного обсягу графічних робіт, багатофакторного аналізу.

#### 34.4. Види і комплектність конструкторських документів

Види і комплектність конструкторських документів на виробі всіх галузей промисловості встановлює ГОСТ 2.102-68.

До конструкторських документів належать графічні і текстові документи, які визначають склад, будову виробу і вміщують потрібні дані для його виготовлення, контролю, приймання, експлуатації і ремонту.

Нижче наведено деякі види конструкторських документів.

*Креслення деталі* — графічний документ, який містить зображення деталі та інші дані для її виготовлення і контролю.

*Складальне креслення* — графічний документ, який містить зображення складальної одиниці та інші дані, потрібні для її складання (виготовлення) і контролю.

*Креслення загального вигляду* — графічний документ, який визначає конструкцію виробу та взаємодію його основних складових частин і пояснює принцип роботи виробу.

*Габаритне креслення* — графічний документ, в якому дається спрощене зображення виробу з габаритними, монтажними і приєднувальними розмірами.

*Схема* — графічний документ, на якому у вигляді умовних зображень або позначень показано складові частини виробу і зв'язки між ними. Схеми бувають кінематичні, гідравлічні, пневматичні, електричні та ін.

*Специфікація* — текстовий документ, який визначає склад складальної одиниці, комплексу чи комплекту.

*Пояснювальна записка* — текстовий документ, який містить опис будови і принцип дії спроектованого виробу, а також обґрунтування технічних і техніко-економічних рішень, прийнятих при розробці виробу.

*Розрахунок* — текстовий документ, який містить обчислення параметрів і характерних величин виробу, наприклад кінематичний розрахунок, розрахунок на міцність та ін.

*Інструкція* — текстовий документ, який містить вказівки і правила для виготовлення або експлуатації виробу.

Для різних стадій, або етапів проектування та конструювання технічних об'єктів обов'язковою є розробка тих чи інших конструкторських документів.

### 34.5. Основні поняття про оптимальне проектування

У процесі проектування машин необхідно вибрати серед кількох альтернативних рішень оптимальне, тобто найкраще. Оптимізація конкретного об'єкта (деталі, механізму, машини) починається із формування задачі конструктивного розв'язку. Передумовою для успішного розв'язання задачі оптимізації конструкції є встановлення залежності між цільовою функцією, обмеженнями та параметрами, які отримуються, а саме:

- визначення *критерію оптимізації (порівняння)  $q$* , що дозволяє знайти кращий із відібраних варіантів. Критеріями оптимізації можуть бути такі показники: маса, надійність, коефіцієнт корисної дії, габаритні розміри, довговічність, продуктивність та ін.;

- визначення незалежних змінних параметрів оптимізації, що впливають на критерій оптимізації. Таких незалежних конструктивних величин (параметрів оптимізації) може бути кілька —  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Для розв'язання задачі оптимізації, тобто для вибору оптимального варіанта конструкції, необхідно критерій оптимізації виразити через параметри оптимізації за допомогою математичної залежності

$$q = \varphi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Така залежність називається *цільовою функцією*. Наприклад, якщо необхідно визначити значення  $u_1$  і  $u_2$  для двоступеневого редуктора мінімальної маси, то цільова функція являтиме собою залежність маси редуктора від передаточних відношень ступенів, тобто  $q_m = \varphi_m(u_1, u_2)$ . За допомогою комбінування параметрів оптимізації можна отримати різні варіанти об'єкта, тобто варіанти з різними значеннями критерію оптимізації  $q$ . Параметри оптимізації можуть мати певний взаємозв'язок, що визначає умови функціонування об'єкта. Такі взаємозв'язки описуються системою  *$t$  рівнянь зв'язку*, що мають  $n$  невідомих ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) змінних проектувань. Якщо число рівнянь зв'язку (рівнянь рівноваги, сумісності деформацій, кінематичних співвідношень) дорівнює числу параметрів оптимізації ( $t = n$ ), то задача має єдиний розв'язок. У практиці проектування трапляються задачі, в яких  $t < n$ . Кожна така задача має кілька розв'язків і становить об'єкт оптимізації. Число  $n$  змінних проектування може бути різним. Зі збільшенням  $n$  складність та багатофункціональність задачі зростають. На практиці для спрощення проектування часто зменшують число змінних. Зміна

параметрів оптимізації допускається тільки в деяких межах, що визначається призначенням об'єкта (технологією виготовлення, вимогами стандартів та ін.).

У зв'язку з цими причини *обмеження*, які накладають на параметри об'єкта проектування для виконання заданих функцій, називають *функціональними*, *параметричними* та ін.

*Функціональні обмеження* параметрів оптимізації мають вигляд:

$$\Psi_s(x) = \Psi_s(x_1, x_2 \dots x_n) \leq 0; \quad s = \overline{1, p};$$

$$\Psi_r(x) = \Psi_r(x_1, x_2 \dots x_n) = 0; \quad r = \overline{1, q}.$$

Вони являють собою рівняння зв'язку змінних проектування. Використовуючи обмеження типу  $\Psi_r(x) = 0$ , можна зменшити число параметрів, виразивши одні змінні проектування через інші.

Наприклад, рівняння зв'язку передаточних відношень у двоступеневій зубчастій передачі має вигляд

$$u_\Sigma - u_1 u_2 = 0.$$

Значення  $u_\Sigma$  може бути задано або відомо раніше, тоді замість двох змінних проектувань ( $u_1$  і  $u_2$ ) можна використати лише одну  $u_1$

або  $u_2$ , тому що  $u_2 = \frac{u_\Sigma}{u_1}$ .

*Параметричні обмеження* мають вигляд:

$$x_i \in [a_i, b_i]$$

або у звичайній формі  $a_i \leq x_i \leq b_i$  і встановлюють мінімально і максимально допустимі значення  $a_i$  і  $b_i$   $i$ -го параметра оптимізації ( $i = 1, 2, \dots n$ ).

Призначення обмежень є важливим етапом під час розв'язання задач оптимального проектування. Нехтування будь-яких обмежень може призвести до передчасної втрати деталлю (вузлом, виробом) працездатності та інших небажаних наслідків. Надлишкові обмеження звужують область проектування і ускладнюють розрахунок конструкції. Порівняння варіантів конструкції машини при проектуванні може здійснюватися за кількома критеріями одночасно. У такому разі мають бути багатокритеріальні задачі оптимального проектування. Існує такий *основний принцип оптимізації*: оцінка доцільності об'єкта даного класу визначається ефективністю його функціонування у виробі більш високого класу.

Наприклад, оптимальність ступеня редуктора вантажопідйомної машини слід оцінювати за впливом на роботу всього редуктора. У свою чергу ефективність редуктора слід оцінювати у виробі більш високого класу (наприклад, вантажопідйомної машини).

*Методи розв'язання задач оптимального проектування*

Розроблено багато методів розв'язання задач оптимізації при різних видах цільової функції, рівнянь зв'язку та обмежень, що накладаються на параметри оптимізації.

Ці методи умовно можна поділити на дві групи: *класичні* (метод диференціального числення, метод множників Лагранжа, варіаційне числення) і *математичного програмування* (методи лінійного і нелінійного програмування, методи динамічного програмування). Ці методи дозволяють розв'язувати загальні задачі оптимізації технічних об'єктів.

Важливим резервом можливості розв'язання задач оптимізації є наявність швидкодіючих обчислювальних машин, які здатні виконувати математичні операції з великим масивом інформації.

#### **34.6. Поняття про автоматизоване проектування**

Розв'язувати задачу оптимального синтезу деталей машин неможливо без автоматизації процесу проектування. Автоматизація проектування передбачає перехід від автоматизації виконання окремих інженерних розрахунків до комплексної автоматизації процедур проектування, тобто до *системи автоматизованого проектування (САПР)*.

САПР — організаційно-технічна система, яка призначена для автоматизованого проектування об'єктів і складається з комплексу засобів автоматизації проектних робіт та відповідних підрозділів проектної організації.

*Об'єктами проектування* за допомогою САПР можуть бути різні вироби (деталі, вузли, комплекси), технологічні процеси та організаційно-технічні системи.

За допомогою САПР досягається високий техніко-економічний рівень створення об'єктів, скорочення термінів, зменшення вартості і трудомісткості проектування.

САПР можна розглядати як систему, яка ґрунтується на застосуванні сучасних математичних методів і засобів обчислювальної техніки в процесі проектування.

Структурними ланками САПР є підсистеми, в яких виконуються закінчені операції. *Підсистеми* залежно від призначення поділяються на *проектувальні й обслуговуючі*.

*Проектувальні* підсистеми виконують проектні процедури й операції (наприклад, підсистема проектування деталей машин складальних одиниць). Вони є функціонально закінченими частинами системи, які реалізують деякі етапи процесу проектування.

*Обслуговуючі підсистеми* виконують процедури, які підтримують працездатність проектувальних підсистем (наприклад, підсистеми графічного відображення об'єктів проектування, інформаційного пошуку та ін.). До основних підсистем відносяться такі: *інформаційна; пошуку і розв'язання технічних задач; інженерного аналізу; ведення та виготовлення документації*.

Основне завдання *інформаційної підсистеми* — пошук, збирання, поповнення, зберігання, видача всієї інформації, необхідної для забезпечення процесу проектування.

*Підсистема пошуку розв'язання технічних задач* виконує пошук нових принципів дії технічних об'єктів і можливих варіантів розв'язання при відомих принципах дії. Кількість можливих варіантів розв'язання залежить від стадії їх розробки, найменше число варіантів наявне на стадії розробки принципу дії виробу, а найбільше — на стадії конструкторського використання.

Основне завдання *підсистеми інженерного аналізу* — виконання обчислювальних робіт, зв'язаних з деталізацією вибраного варіанта розв'язання технічної задачі, тобто з визначенням параметрів виробу.

Призначення *підсистеми ведення та виготовлення документації* дає змогу скоротити витрати праці та забезпечити внесення змін у проектну документацію.

До складу компонентів підсистем, що забезпечують роботу САПР, входять: *математичне забезпечення (методики розрахунків, математичні моделі) і програмне забезпечення (транслятори, операційні системи, пакети прикладних програм); технічне забезпечення (засоби обчислювальної техніки, зокрема дисплеї, графопобудовники); інформаційне забезпечення (інструкція, штатний розклад)*.

*Основні етапи САПР*. Процес автоматизованого проектування розглянемо на прикладі синтезу приводу конвєсера. Процес автоматизованого проектування об'єкта поділяється на такі основні етапи:

- формування технічного завдання;
- побудова структурних схем;
- моделювання та синтез вибраної структурної схеми приводу;
- проектування принципової кінематичної схеми;
- розрахунок і добір параметрів окремих елементів;
- проектування об'єкта як системи;
- автоматизація викреслювання;
- розробка технічної документації на виготовлення приводу.

**Приклади задач оптимального проектування  
та конструювання деталей машин  
та вузлів загального призначення**

**Приклад 34.1.** Розподілити загальне передаточне відношення між ступенями двоступеневого циліндричного зубчастого редуктора, забезпечивши мінімальну масу, якщо  $u_{ред} = 22,4$ , коефіцієнт довговічності  $K_{нд} < 1$ , твердість  $HRC\ 56...63$ .

Для редукторів загального призначення критерієм оптимальності розподілення загального передаточного відношення є мінімальна маса. На першому етапі розподілу загальне передаточне відношення вибирають залежно від числа ступенів згідно з даними, наведеними в табл. 34.1.

*Таблиця 34.1*

**Рекомендовані передаточні відношення залежно  
від числа ступеней редуктора**

Редуктор	Редуктори	
	одноступеневі	двоступеневі
Циліндричний	$\frac{1,6...8}{2...6,3}$	$\frac{7,1...50}{8...40}$
Планетарний	$\frac{3,15...12,5}{4...10}$	$\frac{10...125}{16...100}$
Конічний	$\frac{1...6,3}{1...5}$	–
Конічно-циліндричний	–	$\frac{6,3...40}{6,3...31,5}$



Редуктор	Редуктори	
	одноступеневі	двоступеневі
Черв'ячний	$\frac{8 \dots 80}{8 \dots 63}$	$\frac{63 \dots 4000}{63 \dots 2,500}$
Черв'ячно-циліндричний	—	$\frac{25 \dots 400}{40 \dots 250}$
Циліндрично-черв'ячний	—	$\frac{16 \dots 200}{16 \dots 160}$

**Примітка.** У числівнику наведено повний діапазон передаточних відношень, у знаменнику — рекомендований.

Якщо задане передаточне відношення забезпечується редукторами з різним числом ступенів, то керуються таким правилом: якщо висота, ширина і маса редуктора не мають суттєвого значення, то беруть менше число ступенів, тоді редуктор простіший і дешевший при меншій довжині; якщо висота, ширина і маса редуктора мають бути меншими, то беруть більше число ступенів, що відповідає сучасним тенденціям редукторобудування.

Між масою редуктора та умовним об'ємом існує лінійний кореляційний зв'язок з високим коефіцієнтом кореляції:  $V = BHL$ , де  $B = \psi(a_r + a_{ш})$  — ширина;  $H$  — висота;  $L$  — довжина (рис. 34.1).

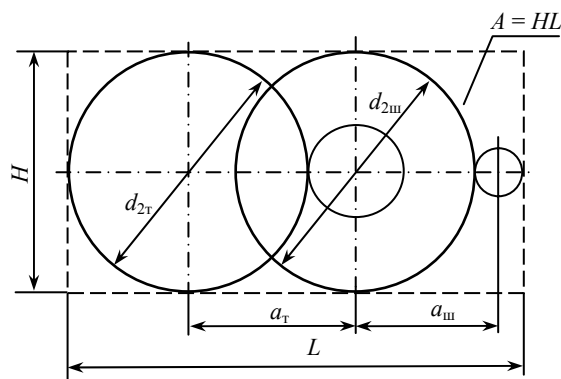


Рис. 34.1. Двоступеневий редуктор з розгорнутою та роздвоєною схемою

Зв'язок з об'ємом дозволяє мінімізацію маси звести до мінімізації умовного об'єму, що математично значно простіше. Незначну залежність маси і об'єму від коефіцієнта ширини  $\psi$  показано вище. У зв'язку з цим задача зводиться до мінімізації площі бічної проекції  $A = HL$ .

Ця площа мінімальна при контактній рівномірності ступенів редуктора і рівності діаметрів ділительних кіл  $d_{2т} = d_{2ш}$ . За виконання цих умов і при  $K_{Нд} < 1$  передаточне число швидкохідного ступеня

$$u_{ш} = 0,75 \sqrt[3]{u_{заг}^2} \leq u_{максш}; \quad (34.1)$$

$$u_{ш} \approx 0,9 \sqrt[3]{u^2} \leq u_{максш} \text{ при } K_{Нд} = 1,$$

де  $u_{заг}$  — загальне передаточне відношення редуктора;  $u_{максш}$  — найбільше допустиме передаточне число швидкохідного ступеня;  $K_{Нд}$  — коефіцієнт довговічності для зубчастих коліс;  $K \approx 0,9$  — коефіцієнт, що враховує навантаження ступенів.

Передаточне число тихохідного ступеня

$$u_{т} = \frac{u_{заг}}{u_{ш}} \leq u_{максш}. \quad (34.2)$$

Обмеження по  $u_{макс}$  є перевіркою правильності вибору передаточного відношення редуктора  $u_{заг}$ . Після цього  $u_{ш}$  і  $u_{т}$  округлюють до стандартних значень відповідно до ряду:

1,0; 1,12; 1,25; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,24; 2,5; 2,8; 3,15; 3,55; 4,0; 4,5; 5,0; 5,6; 6,3; 7,1; 8,0; 9,0; 10,0; 11,2; 12,5; 14,0; 16,0; 18,0; 20,0.

Потім обчислюють міжосьові відстані тихохідної  $a_{т}$  і швидкохідної  $a_{ш}$  ступенів.

Обчислення можна скоротити, тобто визначити тільки міжосьову відстань тихохідного ступеня. Для цього визначають потрібне за умовами контактної рівномірності відношення відстаней:

$$\frac{a_{т}}{a_{ш}} = \frac{K}{\sqrt[9]{u_{ш}}} \frac{u_{т} + 1}{u_{ш} + 1} \sqrt[3]{\frac{u_{ш}^2}{u_{т}}} \text{ при } K_{Нд} < 1; \quad (34.3)$$

$$\frac{a_{т}}{a_{ш}} = K \frac{u_{т} + 1}{u_{ш} + 1} \sqrt[3]{\frac{u_{ш}^2}{u_{т}}} \text{ при } K_{Нд} = 1.$$

Отримані значення округлюють до найближчого стандартного значення і уточнюють передаточне число швидкохідного ступеня за формулою

$$u_{\text{ш}} = \frac{u_{\text{заг}} - \text{Ш}}{\text{Ш} - 1}, \quad (34.4)$$

де

$$\text{Ш} = \frac{a_{\text{т}}}{a_{\text{ш}}} \sqrt[3]{\frac{u_{\text{заг}}}{K}} 1,2 \quad \text{при } K_{\text{Нд}} < 1;$$

$$\text{Ш} = \frac{a_{\text{т}}}{a_{\text{ш}}} \sqrt[3]{\frac{u_{\text{заг}}}{K}} \quad \text{при } K_{\text{Нд}} = 1.$$

Тут  $u_{\text{ш}}$  — округлюють до стандартного значення (бажано в менший бік), після чого визначають  $u_{\text{т}}$  за формулою (34.2). Значення  $a_{\text{ш}}$  отримують, поділивши міжосьову відстань тихохідного ступеня  $a_{\text{т}}$  на отримане відношення  $\frac{a_{\text{т}}}{a_{\text{ш}}}$ .

*Розв'язання*

За формулою (34.1)

$$u_{\text{ш}} = 0,75 \sqrt[3]{u_{\text{заг}}^2} = 0,75 \sqrt[3]{22,4^2} = 5,96 < u_{\text{max}} = 6,3.$$

За формулою (34.2)

$$u_{\text{т}} = \frac{u_{\text{заг}}}{u_{\text{ш}}} = \frac{22,4}{5,96} = 3,76 < u_{\text{max}} = 5,6.$$

За виразом (34.3)

$$\frac{a_{\text{т}}}{a_{\text{ш}}} = \frac{K}{\sqrt[3]{u_{\text{ш}}}} \frac{u_{\text{т}} + 1}{u_{\text{ш}} + 1} \sqrt[3]{\frac{u_{\text{ш}}^2}{u_{\text{т}}}} = \frac{0,9}{\sqrt[3]{5,96}} \frac{3,76 + 1}{5,96 + 1} \sqrt[3]{\frac{5,96^2}{3,76}} = 1,08.$$

Беремо стандартне значення  $\frac{a_{\text{т}}}{a_{\text{ш}}} = 1,12$ .

За формулою (34.2)

$$\text{Ш} = \frac{a_{\text{т}}}{a_{\text{ш}}} \sqrt[3]{\frac{u_{\text{заг}}}{K}} 1,2 = 1,12 \frac{\sqrt[3]{22,4}}{0,9} 1,2 = 4,21.$$

За рівнянням (34.4)

$$u_{\text{ш}} = \frac{u_{\text{заг}} - \text{Ш}}{\text{Ш} - 1} = \frac{22,4 - 4,21}{4,21 - 1} = 5,67.$$

Беремо стандартне значення  $u_{ш} = 5,6 < u_{\max ш} = 6,3$ .

Передаточне число тихохідного ступеня становить

$$u_T = \frac{u_{заг}}{u_{ш}} = \frac{22,4}{5,6} = 4 < u_{\max ш} = 5,6.$$

**Приклад 34.2.** Спроекувати циліндричну косозубу передачу при заданій потужності  $P_1$ , кутовій швидкості  $\omega_1$ , передаточному відношенні  $u$  та строку служби передачі  $h$ , забезпечивши мінімальну масу передачі.

Розв'язання прикладу 34.2 наведено в розд. 20.

**Приклад 34.3.** Спроекувати черв'ячну передачу при заданій потужності  $P_1$ , кутовій швидкості  $\omega_1$ , передаточному відношенні  $u$ , забезпечивши мінімальну масу передачі.

Розв'язання прикладу 34.3 наведено в розд. 22.

**Приклад 34.4.** Спроекувати вихідний вал редуктора та зробити повний аналітичний розрахунок (визначити коефіцієнти безпеки в небезпечних перерізах) при заданому крутному моменті  $T$ , дільному діаметрі  $d$ , строку служби передачі  $h$ .

Розв'язання прикладу 34.4 наведено в розд. 26.

**Приклад 34.5.** Виконати практичний розрахунок підшипників кочення вихідного вала редуктора, конструкцію якого наведено в прикладі 27.1.

Розв'язання прикладу 34.5 наведено в розд. 27.



#### Запитання і завдання для самоконтролю

1. З'ясуйте поняття «проекування» машини.
2. З'ясуйте поняття та основні задачі конструювання.
3. З яких основних стадій складається конструювання?
4. Назвіть основні види конструкторських документів.
5. З'ясуйте поняття «оптимальне проектування».
6. Назвіть основні параметри оптимізації.
7. Що розуміють під основним принципом оптимізації?
8. Що таке САПР? Назвіть підсистеми САПР.



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

### *Основний*

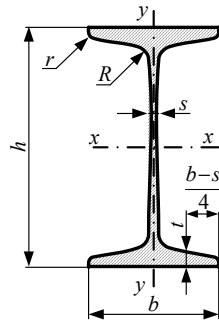
1. *Писаренко Г. С.* Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Є. С. Уманський. — К. : Вища шк., 1993. — 655 с.
2. *Дарков А. В.* Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. — М. : Высш. шк., 1989. — 624 с.
3. *Иоселевич Г. Б.* Прикладная механика / Г. Б. Иоселевич, Г. Б. Строганов, Г. С. Маслов; под ред. Г. Б. Иоселевича. — М. : Высш. шк., 1989. — 351 с.
4. *Астанін В. В.* Технічна механіка. Ч II. Опір матеріалів / В. В. Астанін. — К. : НАУ, 2009. — 192 с.
5. *Опір матеріалів: лабораторний практикум / за ред. В. В. Астаніна.* — К. : НАУ, 2006. — 248 с.
6. *Кіницький Я. Т.* Теорія механізмів і машин / Я. Т. Кіницький. — К. : Наук. думка, 2002. — 660 с.
7. *Павлище В. Т.* Основи конструювання та розрахунок деталей машин / В.Т. Павлище. — К. : Вища шк., 1993. — 556 с.
8. *Деталі машин: конспект лекцій / В. М. Павлов, А. С. Крижанівський, Г. М. Борозенець [та ін.].* — К. : НАУ, 2008. — 164 с.
9. *Основи конструювання / В. М. Павлов, Г. М. Борозенець, О. В. Голубничій [та ін.].* — К. : НАУ, 2006. — 40 с.
10. *Деталі машин: лабораторний практикум / уклад. : В. М. Павлов, Г. М. Борозенець, О. В. Голубничій [та ін.].* — К. : НАУ, 2006. — 48 с.

### *Додатковий*

11. *Писаренко Г. С.* Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. — К. : Наук. думка, 1988. — 736 с.
12. *Анурьев В. И.* Справочник конструктора-машиностроителя. В 3 т. / В. И. Анурьев. — М. : Машиностроение, 1982.
13. *Орлов П. И.* Основы конструирования: справочно-методическое пособие: в 2-х кн. / под ред. П. Н. Учаева. — М. : Машиностроение, 1988. — Кн. 1. — 560 с.
14. *Баласанян Р. А.* Атлас деталей машин / Р. А. Баласанян. — Х. : Основа, 1996. — 378 с.
15. *Киркач Н. Ф.* Расчет и проектирование деталей машин. Ч. II / Н. Ф. Киркач, Р. А. Баласанян. — Х. : Высш., шк., 1988. — 140 с.
16. *Куклин Н. Г.* Детали машин / Н. Г. Куклин, Г. С. Куклина. — М. : Высш. шк., 1987. — 383 с.
17. *Проектирование механических передач: учеб. справоч. пособие / С. А. Чернавский, Г. А. Снесарев, Б. С. Козинцев [и др.].* — М., 1984. — 560 с.

## Сортамент прокатної сталі

## Двутаври (ГОСТ 8239-89)

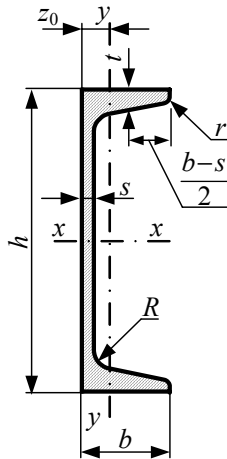


## Позначення:

- $h$  — висота двутавра  
 $b$  — ширина полиці  
 $s$  — товщина стінки  
 $t$  — середня товщина полиці  
 $R$  — радіус внутрішнього закруглення  
 $r$  — радіус закруглення полиці  
 $J$  — момент інерції  
 $W$  — момент опору  
 $S$  — статичний момент півперерізу  
 $i$  — радіус інерції

№ двутавра	Розміри, мм						Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup>	Маса 1 м, кг	Довідкові значення для осей						
	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$			$x-x$			$y-y$			
					Не більше				$J_{x_3}$ см <sup>4</sup>	$W_{x_3}$ см <sup>3</sup>	$i_{x_3}$ см	$S_{x_3}$ см <sup>3</sup>	$J_{y_3}$ см <sup>4</sup>	$W_{y_3}$ см <sup>3</sup>	$i_{y_3}$ см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,0	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,0	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,0	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Швелери (ГОСТ 8240-89)

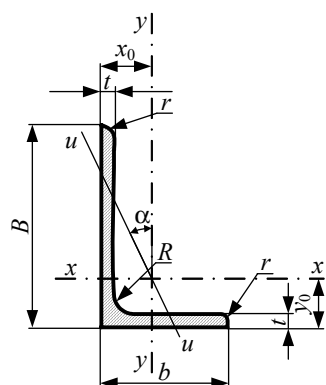


Позначення:

- $h$  — висота швелера
- $b$  — ширина полиці
- $s$  — товщина стінки
- $t$  — товщина полиці
- $R$  — радіус внутрішнього закруглення
- $z_0$  — відстань від осі  $y$ - $y$  до зовнішньої грані стінки
- $r$  — радіус закруглення полки
- $J$  — момент інерції
- $W$  — момент опору
- $S$  — статичний момент півперерізу
- $i$  — радіус інерції

№ швелера	Розміри, мм						Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup>	Маса 1 м, кг	Довідкові значення для осей								$z_0$ , см
	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$			$x-x$				$y-y$				
									Не більше	$J_{x_2}$ , см <sup>4</sup>	$W_{x_2}$ , см <sup>3</sup>	$i_{x_2}$ , см	$S_{x_2}$ , см <sup>3</sup>	$J_{y_2}$ , см <sup>4</sup>	$W_{y_2}$ , см <sup>3</sup>	$i_{y_2}$ , см	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16	
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,3	12,8	4,75	1,19	1,31	
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,0	11,0	1,70	1,67	
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	

## Кутики нерівнобічні (ГОСТ 8510–86)



## Позначення:

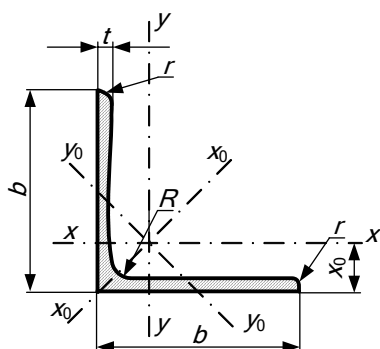
- $B$  — висота швелера  
 $b$  — ширина полиці  
 $t$  — товщина полиці  
 $R$  — радіус внутрішнього закруглення  
 $r$  — радіус закруглення полки  
 $J$  — момент інерції  
 $i$  — радіус інерції  
 $x_0, y_0$  — відстані від центра ваги до зовнішніх граней полиці  
 $J_{xy}$  — відцентровий момент інерції

№ кутка	мм					Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей						$x_0$ , см	$y_0$ , см	$J_{sp}$ , см <sup>4</sup>	Кут нахилу осі tg $\alpha$	Маса 1 м кутка, кг
	$B$	$b$	$t$	$R$	$r$		$x-x$		$y-y$		$u-u$						
							$J_{x_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ , см	$J_{y_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ , см	$J_{u_{min}}$ , см <sup>4</sup>	$i_{u_{min}}$ , см					
	2,5/ 1,6	25	16	3				1,16	0,70	0,78	0,22	0,44					
			3,5	1,2	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17	
3,2/ 2	32	20	3			1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52
			4		1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48	
4/ 2,5	40	25	4			2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94
			4,0	1,3	3,03	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,5	0,66	1,41	1,44	0,374	2,37	
4,5/ 2,8	45	28	3			2,14	4,41	1,48	1,32	0,79	0,79	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68
			4		2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,02	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20	
5/ 3,2	50	32	3			2,42	6,18	1,60	1,99	0,91	1,18	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
			3,4		3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	1,40	
5,6/ 3,6	56	36	4			3,58	11,37	1,78	3,70	1,02	2,19	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
			5		4,41	13,82	1,77	4,48	1,01	2,65	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46	
6,3/ 4,0	63	40	4			4,04	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17
			5		4,98	19,91	2,00	6,26	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91	
			6		5,90	23,31	1,99	7,29	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63	
			7,0	2,3	7,68	29,60	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03	
7/ 4,5	70	45	5			5,59	27,76	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
			7,5	2,5													



№ кутика	мм					Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей						x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	J <sub>xy</sub> , см <sup>4</sup>	Кут нахилу осі tg α	Маса 1 м кутика, кг
	B	b	t	R	r		x-x		y-y		u-u						
							J <sub>x<sub>0</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub></sub> , см	J <sub>y<sub>0</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub></sub> , см	J <sub>u<sub>0</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u<sub>0</sub></sub> , см					
							J <sub>x<sub>0</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub></sub> , см	J <sub>y<sub>0</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub></sub> , см	J <sub>u<sub>0</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u<sub>0</sub></sub> , см					
7,5/ 5	75	50	5	8	2,7	6,11	37,81	2,39	12,47	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436	4,79
			6			7,25	40,92	2,38	14,60	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69
			7			8,37	46,77	2,36	16,61	1,41	9,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57
			8			9,47	52,38	2,35	18,52	1,40	10,87	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430	7,43
8/ 5	80	50	5	8	2,7	6,36	41,64	2,56	12,68	1,41	7,57	1,00	1,13	2,60	13,20	0,387	4,49
			6			7,55	48,98	2,55	14,85	1,40	8,88	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92
9/ 5,6	90	56	5,5	9	3,0	7,86	65,28	2,88	19,67	1,58	11,77	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384	6,17
			6			8,54	70,58	2,88	21,22	1,58	12,70	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384	6,70
			8			11,18	90,87	2,85	27,08	1,56	16,29	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380	8,77
10/ 6,3	100	63	6	10	3,3	9,58	98,29	3,20	30,58	1,79	18,20	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393	7,53
			7			11,09	112,86	3,19	34,99	1,78	20,83	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392	8,70
			8			12,57	126,96	3,18	39,21	1,77	23,38	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391	9,87
			10			15,47	153,95	3,15	47,18	1,75	28,34	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387	12,14
11/ 7	110	70	6,5	10	3,3	11,45	142,42	3,53	45,61	2,00	26,94	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402	8,98
			8			13,93	171,54	3,51	54,64	1,98	32,31	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400	10,93
12,5/ 8	125	80	7	11	3,7	14,06	226,53	4,01	73,73	2,29	43,40	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407	11,04
			8			15,98	225,62	4,00	80,95	2,28	48,82	1,7	1,84	4,05	84,10	0,406	12,58
			10			19,70	311,61	3,98	100,47	2,26	59,33	1,74	1,92	4,14	102	0,404	15,47
			12			23,36	364,79	3,95	116,84	2,24	69,47	1,72	2,00	4,22	118	0,400	18,34
14/ 9	140	90	8	12	4,0	18,00	363,68	4,49	119,79	2,58	70,27	1,58	2,03	4,49	121	0,411	14,13
			10			22,24	444,45	4,47	145,54	2,58	85,51	1,96	2,12	4,58	147	0,409	17,46
16/ 10	160	100	9	13	4,3	22,87	605,97	5,15	186,03	2,85	110,40	2,20	2,24	5,19	194	0,391	17,96
			10			25,28	666,59	5,13	204,09	2,84	121,16	2,19	2,28	5,23	213	0,390	19,85
			12			30,04	784,22	5,11	238,75	2,82	142,14	2,18	2,36	5,32	249	0,388	23,58
			14			34,72	897,19	5,08	271,60	2,80	162,49	2,16	2,43	5,40	282	0,385	27,26
18/ 11	180	110	10	14	4,7	28,33	952,28	5,80	276,37	3,12	165,44	2,42	2,44	5,88	295	0,376	22,20
			12			33,69	1122,19	5,77	324,09	3,10	194,28	2,40	2,52	5,97	348	0,374	26,40
20/ 12,5	200	125	11	14	4,7	34,87	1449,02	6,45	446,36	3,58	263,84	2,75	2,79	6,50	465	0,392	27,37
			12			37,89	1568,19	6,43	481,93	3,57	285,04	2,74	2,83	6,54	503	0,392	29,74
			14			43,87	1800,83	6,41	550,77	3,54	326,54	2,73	2,91	6,62	575	0,390	34,43
			16			49,77	2026,08	6,38	616,66	3,52	366,99	2,72	2,99	6,71	643	0,388	39,07

## Кутики рівнобічні (ГОСТ 8509–93)



## Позначення:

- $b$  — ширина полиці  
 $t$  — товщина полиці  
 $R$  — радіус внутрішнього закруглення  
 $r$  — радіус закруглення полиці  
 $J$  — момент інерції  
 $i$  — радіус інерції  
 $x_0$  — відстані від центра ваги до зовнішньої грані полиці  
 $J_{xy}$  — відцентровий момент інерції

№ кутика	мм				Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей						$J_{xy}$ , см <sup>4</sup>	$x_0$ , см	Маса 1 м кутика, кг
	$b$	$t$	$R$	$r$		$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$				
						$J_{x_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ , см	$J_{y_0 \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0 \max}$ , см	$J_{y_0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0 \min}$ , см			
2	20	3 4	3,5 3,5	1,2 1,2	1,13 1,46	0,40 0,50	0,59 0,58	0,63 0,78	0,75 0,73	0,17 0,22	0,39 0,38	0,23 0,28	0,60 0,64	0,89 1,15
2,5	25	3 4	3,5 3,5	1,2 1,2	1,43 1,86	0,81 1,03	0,75 0,74	1,29 1,62	0,95 0,93	0,34 0,44	0,49 0,48	0,47 0,59	0,73 0,76	1,12 1,46
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3 4	4,0 4,0	1,3 1,3	1,74 2,27	1,45 1,84	0,91 0,90	2,30 2,92	1,15 1,13	1,43 1,86	0,59 0,58	0,85 1,08	0,85 0,89	1,36 1,78
3,2	32	3 4	4,5 4,5	1,5 1,5	1,86 2,43	1,77 2,26	0,97 0,96	2,80 3,58	1,23 1,21	0,74 0,94	0,63 0,62	1,03 1,32	0,89 0,94	1,46 1,91
3,5	35	3 4 5	4,5 4,5 4,5	1,5 1,5 1,5	2,04 2,67 3,28	2,35 3,01 3,61	1,07 1,06 1,05	3,72 4,76 5,71	1,35 1,33 1,32	0,97 1,25 1,52	0,69 0,68 0,68	1,37 1,75 2,10	0,97 1,01 1,05	1,60 2,10 2,58
4	40	3 4 5	5,0 5,0 5,0	1,7 1,7 1,7	2,35 3,08 3,79	3,55 4,58 5,53	1,23 1,22 1,21	5,63 7,26 8,75	1,55 1,53 1,52	1,47 1,90 2,30	0,79 0,78 0,78	2,08 2,68 3,22	1,09 1,13 1,17	1,85 2,42 2,98
4,5	45	3 4 5	5,0 5,0 5,0	1,7 1,7 1,7	2,65 3,48 4,29	5,13 6,63 8,03	1,39 1,38 1,37	8,13 10,52 12,74	1,75 1,74 1,72	2,12 2,74 3,33	0,89 0,89 0,88	3,00 3,89 4,71	1,21 1,26 1,30	2,08 2,73 3,37
5	50	3 4 5 6	5,5 5,5 5,5 5,5	1,8 1,8 1,8 1,8	2,96 3,89 4,80 5,69	7,11 9,21 11,20 13,07	1,55 1,54 1,53 1,52	11,27 14,63 17,77 20,72	1,95 1,94 1,92 1,91	2,95 3,80 4,63 5,43	1,00 0,99 0,98 0,98	4,16 5,42 6,57 7,65	1,33 1,38 1,42 1,46	2,32 3,05 3,77 4,47

№ кутика	мм				Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей						$J_{y_0}$ , см <sup>4</sup>	$x_0$ , см	Маса 1 м кутика, кг
	$b$	$t$	$R$	$r$		$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$				
						$J_{x_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ , см	$J_{x_0 \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0 \max}$ , см	$J_{y_0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0 \min}$ , см			
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52	3,44
		5	6,0	2,0	5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57	4,25
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	11,00	1,69	3,90
		5	7,0	2,3	6,13	23,10	1,94	36,80	2,44	9,52	1,25	13,70	1,74	4,81
		6	7,0	2,3	7,28	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,90	1,78	5,72
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	17,00	1,88	4,87
		5	8,0	2,7	6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,70	1,90	5,38
		6	8,0	2,7	8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,10	1,94	6,39
		7	8,0	2,7	9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,20	1,99	7,39
7,5	75	8	8,0	2,7	10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,20	2,02	8,37
		5	9,0	3,0	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,10	2,02	5,80
		6	9,0	3,0	8,78	46,57	2,30	73,87	2,90	19,28	1,48	27,30	2,06	6,89
		7	9,0	3,0	10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	31,20	2,10	7,96
8	80	8	9,0	3,0	11,50	59,84	2,28	94,89	2,87	24,80	1,47	35,00	2,15	9,02
		9	9,0	3,0	12,83	66,10	2,27	104,72	2,86	27,48	1,46	38,60	2,18	10,07
		5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	2,47	83,56	3,11	21,80	1,59	30,90	2,17	6,78
		6	9,0	3,0	9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	33,40	2,19	7,36
9	90	7	9,0	3,0	10,85	65,31	2,45	103,60	3,09	26,97	1,58	38,30	2,23	8,51
		8	9,0	3,0	12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	43,00	2,27	9,65
		6	10,0	3,3	10,61	82,10	2,78	130,00	3,50	33,97	1,79	48,10	2,43	8,33
		7	10,0	3,3	12,28	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	55,40	2,47	9,64
10	100	8	10,0	3,3	13,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	62,30	2,51	10,93
		9	10,0	3,3	15,60	118,00	2,75	186,00	3,46	48,60	1,77	68,00	2,55	12,20
		6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	3,09	193,46	3,89	50,73	1,99	71,40	2,68	10,06
		7	12,0	4,0	13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	76,40	2,71	10,79
11	110	8	12,0	4,0	15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	86,30	2,75	12,25
		10	12,0	4,0	19,24	178,95	3,05	283,83	3,84	74,08	1,96	110,00	2,83	15,10
		12	12,0	4,0	22,80	208,90	3,03	330,95	3,81	86,84	1,95	122,00	2,91	17,90
		14	12,0	4,0	26,28	237,15	3,00	374,98	3,78	99,32	1,94	138,00	2,99	20,63
12,5	125	16	12,0	4,0	29,68	263,82	2,98	416,04	3,74	111,61	1,94	152,00	3,06	23,30
		8	12,0	4,0	15,15	175,61	3,40	278,54	4,29	72,68	2,19	106,00	2,96	11,89
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,98	2,49	172,00	3,36	15,46
		9	14,0	4,6	22,00	327,48	3,86	520,00	4,86	135,88	2,48	192,00	3,40	17,30
		10	14,0	4,6	24,33	359,82	3,85	571,04	4,84	148,59	2,47	211,00	3,45	19,10
		12	14,0	4,6	28,89	422,23	3,82	670,02	4,82	174,43	2,46	248,00	3,53	22,68
		14	14,0	4,6	33,37	481,76	3,80	763,90	4,78	199,62	2,45	282,00	3,61	26,20
		16	14,0	4,6	37,77	538,56	3,78	852,84	4,75	224,29	2,44	315,00	3,68	29,65

№ кутика	мм				Площа поперечного перерізу, см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей						$J_{xy}$ , см <sup>4</sup>	$x_0$ , см	Маса 1 м кутика, кг
	$b$	$t$	$R$	$r$		$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$				
						$J_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$J_{x0 \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x0 \max}$ , см	$J_{y0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y0 \min}$ , см			
	14	140	9	14,0		4,6	24,72	465,72	4,34	739,42	5,47			
10			14,0	4,6	27,33	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	301,00	3,82	21,45
12			14,0	4,6	32,49	602,49	4,31	956,98	5,43	248,01	2,76	354,00	3,90	25,50
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	4,96	1229,10	6,25	319,33	3,19	455,00	4,30	24,67
		11	16,0	5,3	34,42	844,21	4,95	1340,06	6,24	347,77	3,18	496,00	4,35	27,02
		12	16,0	5,3	37,39	912,89	4,94	1450,00	6,23	375,78	3,17	537,00	4,39	29,35
		14	16,0	5,3	43,57	1046,47	4,92	1662,13	6,20	430,81	3,16	615,00	4,47	34,20
		16	16,0	5,3	49,07	1175,19	4,89	1865,73	6,17	484,64	3,14	690,00	4,55	38,52
		20	16,0	5,3	60,40	1418,85	4,85	2248,26	6,10	589,43	3,12	830,00	4,70	47,41
18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	716,00	4,85	30,47
		12	16,0	5,3	42,19	1316,62	5,59	2092,78	7,04	540,45	3,58	776,00	4,89	33,12
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	6,22	2896,16	7,84	749,40	3,99	1073,00	5,37	36,97
		13	18,0	6,0	50,85	1960,77	6,21	3116,18	7,83	805,35	3,98	1156,00	5,42	39,92
		14	18,0	6,0	54,60	2097,00	6,20	3333,00	7,81	861,00	3,97	1236,00	5,46	42,80
		16	18,0	6,0	61,98	2362,57	6,17	3755,39	7,78	969,74	3,96	1393,00	5,54	48,65
		20	18,0	6,0	76,54	2871,47	6,12	4860,42	7,72	1181,92	3,93	1689,00	5,70	60,08
		25	18,0	6,0	94,29	3466,21	6,06	5494,04	7,63	1438,38	3,91	2028,00	5,89	74,02
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	6,83	4470,15	8,60	1158,56	4,38	1655,00	5,91	47,40
		6	21,0	7,0	68,58	3175,44	6,80	5045,37	8,58	1305,52	4,36	1869,00	6,02	53,83
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	7,76	7492,10	9,78	1942,09	4,98	2775,00	6,75	61,55
		18	24,0	8,0	87,72	5247,24	7,73	8336,69	9,75	2157,78	4,96	3089,00	6,83	68,86
		20	24,0	8,0	96,96	5764,87	7,71	9159,73	9,72	2370,01	4,94	3395,00	6,91	76,11
		22	24,0	8,0	106,12	6270,32	7,69	9961,30	9,69	2579,04	4,93	3691,00	7,00	83,31
		25	24,0	8,0	119,71	7006,39	7,65	11125,52	9,64	2887,26	4,91	4119,00	7,11	93,97
		28	24,0	8,0	133,12	7716,86	7,61	12243,84	9,59	3189,89	4,90	4527,00	7,23	104,50
		30	24,0	8,0	141,96	8176,82	7,59	12964,66	9,56	3388,98	4,89	4788,00	7,31	111,44
		35	24,0	8,0	163,71	9281,05	7,53	14682,73	9,47	3879,37	4,87	5401,68	7,53	128,51

## Коефіцієнти поздовжнього згинання

Гнучкість $\lambda$	Коефіцієнт $\phi$				Гнучкість $\lambda$	Коефіцієнт $\phi$			
	Ст.2 Ст.3 Ст.4	Ст5	Чавун	Дерево		Ст.2 Ст.3 Ст.4	Ст5	Чавун	Дерево
0	1,00	1	1	1					
10	0,99	0,98	0,97	0,99	110	0,52	0,43	—	0,25
20	0,96	0,95	0,91	0,97	120	0,45	0,36	—	0,22
30	0,94	0,92	0,81	0,93	130	0,40	0,33	—	0,18
40	0,92	0,89	0,69	0,87	140	0,36	0,29	—	0,16
50	0,89	0,86	0,57	0,80	150	0,32	0,26	—	0,14
60	0,86	0,82	0,44	0,71	160	0,29	0,24	—	0,12
70	0,81	0,76	0,34	0,60	170	0,26	0,21	—	0,11
80	0,75	0,70	0,26	0,48	180	0,23	0,19	—	0,10
90	0,69	0,62	0,20	0,38	190	0,21	0,17	—	0,09
100	0,60	0,51	0,16	0,31	200	0,19	0,16	—	0,08

## Значення меж контактної та згинальної витривалості

Марка сталі	Вид термічної обробки	Твердість зубів		Контактна витривалість $\sigma_{H0}$ , МПа,	Згинальна витривалість $\sigma_{F0}$ , МПа	Коефіцієнт безпеки $S_F$
		на поверхні	у серцевині біля основи			
40; 45; 50; 40X; 40XH; 40XФА; 50XH; 35XM	Нормалізація, поліпшення	HB 180...350		2 HB +70	1,03 HB <sub>cp</sub>	1,75
40X; 40XH; 40XФА	Об'ємне загартування	HRC 45...55		18 HRC + 150	500... 550	1,75

Марка сталі	Вид термічної обробки	Твердість зубів		Контактна витривалість $\sigma_{H0}$ , МПа,	Згинальна витривалість $\sigma_{F0}$ , МПа	Коефіцієнт безпеки $S_F$
		на поверхні	у серцевині біля основи			
40X; 40XH3MA; 50XH; 35XM; 40XM; 45XЦ	Поліпшення та загартування при нагріванні СВЧ	48...58	25...35	17 HRC + 200	650... 700	1,75
20X; 20XH; 20XH2M; 25XГТ; 12XH2; 12XH3A; 18XГТ	Поліпшення, цементация і загартування	56...63	30...45	23 HRC	950	1,55
25XГТ	Нітроцементация	56...63	30...45	23 HRC	750	1,55
30XMЮA; 40X; 40XH2MA; 40XФА	Поліпшення та азотування	50...60	24...40	1050	300+1,2 HRS (серцевина зуба)	1,75

## ДОДАТОК 7

Коефіцієнт концентрації навантаження  $K_{H\beta}$ 

Розташування зубчастих коліс відносно опор вала	Твердість HB поверхонь зубів	
	$\leq 350$	$>350$
Симетричне	1,0...1,15	1,05...1,25
Несиметричне	1,1...1,25	1,15...1,35
Консольне	1,2...1,35	1,25...1,45

## ДОДАТОК 8

Значення коефіцієнта  $K_{H\alpha}$  для косозубих передач

Степінь точності	Колова швидкість зубчастих колес $v$ , м/с				
	До 1	5	10	15	20
6	1	1,02	1,03	1,04	1,05
7	1,02	1,05	1,07	1,1	1,12
8	1,06	1,09	1,13	—	—
9	1,1	1,16	—	—	—

## ДОДАТОК 9

## Степінь точності виготовлення зубчастих коліс

Тип зубчастої передачі	Колова швидкість $v$ , м/с	
	До 5 м/с	Більше 5 м/с
Циліндрична прямозуба	8	7
Циліндрична косозуба	8	8
Конічна прямозуба	7	—

## ДОДАТОК 10

Значення коефіцієнта  $K_{H\beta}$ 

Коефіцієнт $\psi_b = \frac{b_1}{d}$	Твердість поверхонь зубів					
	HB $\leq$ 350			HB $>$ 350		
	Розташування шестірні відносно опор					
	симетричне	несиметричне	консольне	симетричне	несиметричне	консольне
0,4	1,00	1,04	1,15	1,02	1,08	1,33
0,6	1,02	1,06	1,24	1,04	1,14	1,5
0,8	1,03	1,08	1,30	1,06	1,21	—
1,0	1,04	1,11	—	1,09	1,29	—
1,2	1,07	1,19	—	1,16	1,48	—

## ДОДАТОК 11

Значення коефіцієнта  $K_{H\alpha}$ 

Тип зубчастієї передачі	Твердість HB поверхонь зубів	Колова швидкість $v$ , м/с			
		До 5	10	15	20
		Ступінь точності			
		8		7	
Прямозуба	$\leq 350$	1,05	—	—	—
	$> 350$	1,10	—	—	—
Косозуба	$\leq 350$	1,00	1,01	1,02	1,05
	$> 350$	1,00	1,05	1,07	1,10

## ДОДАТОК 12

Значення коефіцієнта  $Y_F$ 

$z, z_v$	17	20	25	30	40	50	60	70	80	100
$Y_F$	4,28	4,09	3,9	3,8	3,7	3,68	3,62	3,61	3,61	3,60

## ДОДАТОК 13

Значення коефіцієнта  $K_{F\beta}$ 

Коефіцієнт $\psi_b = \frac{b_1}{d}$	Твердість поверхонь зубів							
	HB $\leq 350$				HB $> 350$			
	Розташування шестірні відносно опор							
	симетричне	несиметричне	Консольне		симетричне	несиметричне	Консольне	
			Шарикопідшипники	Роликотідшипники			Шарикопідшипники	Роликотідшипники
0,2	1,00	1,4	1,18	1,10	1,03	1,05	1,35	1,20
0,4	1,03	1,07	1,37	1,21	1,07	1,10	1,7	1,45
0,6	1,05	1,12	1,62	1,40	1,09	1,18	—	1,72
0,8	1,08	1,17	—	1,59	1,13	1,28	—	—
1,0	1,10	1,23	—	—	1,20	1,40	—	—
1,2	1,14	1,42	—	—	1,3	1,73	—	—



Орієнтовне значення коефіцієнта  $K_{Fv}$ 

Ступінь точності	Твердість НВ робочої поверхні зубів	Колова швидкість $v$ , м/с					
		3		3...8		8...12,5	
		прямозуба	косозуба	прямозуба	косозуба	прямозуба	косозуба
6	$\leq 350$	1,0	1,0	1,2	1,0	1,3	1,1
	$>350$	1,0	1,0	1,15	1,0	1,25	1,0
7	$\leq 350$	1,15	1,0	1,35	1,0	1,45	1,2
	$>350$	1,15	1,0	1,25	1,0	1,35	1,1
8	$\leq 350$	1,25	1,1	1,45	1,3	–	1,4
	$>350$	1,20	1,1	1,35	1,2	–	1,3

## Механічні характеристики матеріалів вінців черв'ячних коліс

Матеріал вінця колеса	Швидкість ковзання $v_s$ , м/с	Спосіб виливання	Межа плинності $\sigma_{п}$	Межа міцності при розтяганні $\sigma_p$	Межа міцності при згинанні $\sigma_{зг}$
			МПа		
Бр.ОНФ10-1-1	$> 5$	Відцентровий	165	285	
Бр.ОФ10-1	$> 5$	У кокіль	195	245	
Бр.ОФ10-1	$> 5$	У землю	132	215	
Бр.А9ЖЗЛ	2...5		200	500	
Бр.А9ЖЗЛ	2...5	У кокіль	195	490	
Бр.А9ЖЗЛ	2...5	У землю	195	392	
СЧ 12	$< 2$	У землю	–	–	280

## ДОДАТОК 16

Значення коефіцієнта  $C_v$ 

Швидкість ковзання $v_s$ , м/с	5	6	7	8
Коефіцієнт $C_v$	0,95	0,88	0,83	0,80

## ДОДАТОК 17

## Значення допустимих напружень згинання

Матеріал вінця колеса	Нереверсивна передача	Реверсивна передача
Бронза	$[\sigma_F] = (0,08\sigma_B + 0,25T) K_{FL}$	$[\sigma_F] = 0,16\sigma_B K_{FL}$
Чавун	$[\sigma_F] = 0,12\sigma_{зr} K_{FL}$	$[\sigma_F] = 0,075\sigma_{зr} K_{FL}$

## ДОДАТОК 18

## Кількість заходів черв'яка

Передаточне відношення черв'ячної передачі, $u$	8...14	15...30	Більше 30
Кількість захо- дів різьби черв'яка, $z_1$	4	2	1

## ДОДАТОК 19

Значення коефіцієнта  $\Theta$ 

Кількість заходів різьби черв'яка, $z_1$	Значення коефіцієнта $\Theta$ при коефіцієнті діаметра черв'яка $q$					
	8	10	12,5	14	16	20
1	72	108	154	176	225	245
2	57	86	121	140	171	197
4	47	70	98	122	137	157

## ДОДАТОК 20

Значення коефіцієнта  $K_{Hv}$ 

Ступінь точності	Значення коефіцієнта $K_{Hv}$ при швидкості ковзання, м/с			
	До 1,5	1,5...3	3...7,5	7,5...12
6	1,00	1,00	1,1	1,2
8	1,15	1,25	1,4	—
9	1,25	—	—	—

## ДОДАТОК 21

Значення модуля зачеплення,  $m$ 

$m$ , мм	2,5; 3,15; 4,0; 5,0	6,3; 8,0; 10,0; 12,5	10
$q$	8; 10; 12,5; 16; 20	8; 10; 12,5; 16; 20	8; 10; 12,5; 6

## ДОДАТОК 22

Значення кута підйому  $\gamma$  на ділільному циліндрі черв'яка

Кількість заходів різьби черв'яка $z_1$	Коефіцієнт $q$					
	8	10	12,5	14	16	20
1	7°07'	5°43'	4°35'	4°05'	3°35'	2°52'
2	14°02'	11°19'	9°05'	8°07'	7°07'	5°43'
4	26°34'	21°48'	17°45'	15°57'	14°02'	11°19'

## ДОДАТОК 23

Значення кута тертя  $\rho'$ 

Швидкість ковзання $v_s$ , м/с	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$\rho'$	3°10'	2°30'	2°20'	2°00'	1°40'
	3°40'	3°10'	2°50'	2°30'	2°20'
Швидкість ковзання $v_s$ , м/с	3	4	7	10	15
$\rho'$	1°30'	1°20'	1°00'	0°55'	0°50'
	2°00'	1°40'	1°30'	1°20'	1°10'

## ДОДАТОК 24

Значення коефіцієнта  $Y_{F2}$  для черв'ячного колеса

$z_{E2}$	28	30	32	35	37	40
$Y_{F2}$	1,8	1,76	1,71	1,64	1,61	1,55
$z_{E2}$	45	50	60	80	100	150
$Y_{F2}$	1,48	1,45	1,40	1,34	1,30	1,27

## ДОДАТОК 25

Площа поверхні охолодження редуктора  $A$ , м<sup>2</sup>  
залежно від міжосьової відстані

Міжосьова відстань $a_w$ , мм	80	100	125	140	160
$A$ , м <sup>2</sup>	0,19	0,24	0,36	0,43	0,54
Міжосьова відстань $a_w$ , мм	180	200	225	250	280
$A$ , м <sup>2</sup>	0,67	0,80	1,00	1,20	1,40

## Шпонки призматичні (ГОСТ 23360-78)

Діаметр вала $d$ , мм	Переріз шпонки		Глибина пазів		Гранична довжина	
	$b$ , мм	$h$ , мм	$t_1$ , мм	$t_2$ , мм	min	max
Від 12 до 17	5	5	3,0	2,3	10	56
17...22	6	6	3,5	2,8	14	70
22...30	8	7	4,0	3,3	18	90
30...38	10	8	5,0	3,3	22	110
38...44	12	8	5,0	3,3	28	140
44...50	14	9	5,5	3,8	36	160
50...58	16	10	6,0	4,3	45	180
58...65	18	11	7,0	4,4	50	200
65...75	20	12	7,5	4,9	56	220
75...85	22	14	9,0	5,4	63	250
85...95	25	14	9,0	5,4	70	280

**Примітка.** Довжину призматичних шпонок вибирають із ряду, мм: 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 70; 80; 90; 100; 110; 125; 140; 160; 180; 200.

Орієнтовні значення коефіцієнтів  $K_{HE}$ 

Типовий режим навантаження	$K_{HE}$	$K_{FE}$	
	$m = 3$	$m = 6$	$m = 9$
Постійний (П)	1,00	1,00	1,00
Важкий (В)	0,50	0,30	0,20
Середній рівномірний (СР)	0,25	0,14	0,10
Середній нормальний (СН)	0,18	0,06	0,04
Легкий (Л)	0,6	0,38	0,016



## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
<b>Частина I. ОСНОВИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ.....</b>	<b>6</b>
<b>1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ.....</b>	<b>6</b>
1.1. Основні визначення .....	6
1.2. Основні гіпотези .....	7
1.3. Об'єкти вивчення.....	8
1.4. Класифікація зовнішніх навантажень .....	10
1.5. Внутрішні сили. Метод перерізів .....	11
1.6. Типи простих деформацій бруса .....	13
1.7. Деформації та напруження.....	14
<b>2. РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ .....</b>	<b>16</b>
2.1. Нормальні сили і напруження.....	16
2.2. Поздовжні і поперечні деформації. Закон Гука .....	19
2.3. Експериментальні дослідження властивостей матеріалів. Діаграма розтягання.....	20
2.4. Допустимі напруження. Основи розрахунків на міцність .....	23
2.5. Переміщення перерізів бруса. Розрахунки на жорсткість .....	27
2.6. Потенціальна енергія деформації .....	28
2.7. Статично-невизначувані системи .....	29
<b>3. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО ТА ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ .....</b>	<b>35</b>
3.1. Напружений стан у точці .....	35
3.2. Головні напруження. Види напруженого стану .....	35
3.3. Лінійний напружений стан.....	36
3.4. Плоский напружений стан .....	37
3.5. Деформації при об'ємному напруженому стані.....	39
3.6. Теорії міцності.....	39
<b>4. ЗСУВ.....</b>	<b>44</b>
4.1. Чистий зсув.....	44
4.2. Практичні розрахунки з'єднань на зсув.....	45
<b>5. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ .....</b>	<b>48</b>
5.1. Основні визначення .....	49

5.2. Моменти інерції найпростіших перерізів.....	51
5.3. Моменти інерції відносно паралельних осей.....	52
5.4. Залежності між моментами інерції при повороті осей.....	53
5.5. Головні осі, головні моменти інерції.....	54
<b>6. КРУЧЕННЯ</b> .....	57
6.1. Кручення бруса круглого поперечного перерізу.....	58
<b>7. ЗГИНАННЯ</b> .....	63
7.1. Балки і їхні опори.....	63
7.2. Внутрішні силові фактори.....	65
7.3. Диференціальні залежності при згинанні.....	66
7.4. Нормальні напруження.....	67
7.5. Дотичні напруження.....	69
7.6. Розрахунок на міцність при згинанні.....	71
<b>8. СКЛАДНИЙ ОПІР</b> .....	77
8.1. Косе згинання.....	77
8.2. Позацентрове розтягання–стискання.....	79
8.3. Згинання з крученням.....	81
<b>9. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ</b> .....	84
9.1. Поняття критичної сили.....	84
9.2. Формула Ейлера для критичної сили.....	85
9.3. Границі застосування формули Ейлера. Формули Ясинського.....	87
9.4. Практичні розрахунки на стійкість.....	88
<b>10. ДИНАМІЧНА ДІЯ НАВАНТАЖЕНЬ</b> .....	91
10.1. Напруження при рівноприскореному русі.....	91
10.2. Розрахунок обертового кільця.....	92
10.3. Ударна дія навантаження.....	93
<b>11. ОПІР МАТЕРІАЛІВ ДІЇ     ПОВТОРНО-ЗМІННИХ НАВАНТАЖЕНЬ</b> .....	97
11.1. Змінні напруження та втомленість матеріалів.....	97
11.2. Цикли змінних напружень.....	98
11.3. Криві втомленості. Границя витривалості.....	99
11.4. Фактори, що впливають на границю витривалості.....	101
11.5. Розрахунки на міцність при повторно-змінних навантаженнях.....	103
 <b>Частина II. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МЕХАНІЗМІВ</b>	
<b>I МАШИН</b> .....	105
<b>12. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ</b> .....	105
12.1. Поняття про ланку, кінематичну пару.....	105
12.2. Класифікація кінематичних пар.....	106

12.3. Умовне зображення кінематичних пар і ланок плоских механізмів.....	110
12.4. Кінематичні ланцюги.....	113
12.5. Число степенів вільності механізму.....	113
<b>13. СТРУКТУРА ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ .....</b>	<b>117</b>
13.1. Поняття про структуру плоских важільних механізмів.....	117
13.2. Синтез чотириланкових важільних механізмів.....	122
13.3. Заміна в плоских механізмах вищих пар нижчими.....	124
<b>14. КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ.....</b>	<b>129</b>
14.1. Основні задачі та методи кінематичного дослідження механізмів.....	129
14.2. Поняття про масштабний коефіцієнт.....	130
14.3. Побудова планів механізму і траєкторій окремих точок.....	131
14.4. Основні рівняння для швидкостей та прискорень.....	133
14.5. Теореми подібності для швидкостей та прискорень.....	135
14.6. Побудова плану швидкостей і прискорень кривошипно-повзункового механізму.....	137
14.7. Визначення радіуса кривизни траєкторії.....	141
<b>15. СИЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ .....</b>	<b>142</b>
15.1. Основні задачі динамічного дослідження механізмів.....	142
15.2. Силowe дослідження шарнірного чотириланкового механізму.....	146
 <b>Частина III. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ДЕТАЛЕЙ І ВУЗЛІВ ЗАГАЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ.....</b>	
<b>16. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ РОЗРАХУНКУ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН.....</b>	<b>152</b>
16.1. Основні поняття та визначення.....	152
16.2. Основні критерії працездатності деталей машин.....	152
16.3. Проектний і перевірний розрахунки.....	154
16.4. Допустимий коефіцієнт запасу міцності та методи його визначення.....	154



16.5. Основні відомості про матеріали для виготовлення деталей машин .....	155
<b>17. МЕХАНІЧНІ ПЕРЕДАЧІ</b> .....	158
17.1. Призначення та класифікація передач .....	158
17.2. Основні кінематичні та силові співвідношення .....	159
<b>18. ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ</b> .....	166
18.1. Загальні відомості та класифікація передач .....	166
18.2. Елементи теорії зубчастого зачеплення .....	168
18.3. Основні елементи і геометричні характеристики евольвентного зачеплення .....	173
18.4. Виготовлення зубчастих коліс .....	177
18.5. Види руйнування і пошкодження зубів .....	178
18.6. Матеріали зубчастих коліс .....	179
18.7. Допустимі напруження .....	182
<b>19. ПРЯМОЗУБІ ЦИЛІНДРИЧНІ ПЕРЕДАЧІ</b> .....	185
19.1. Основні геометричні співвідношення .....	185
19.2. Сили в зачепленні прямозубих передач .....	186
19.3. Розрахунок на контактну міцність циліндричних прямозубих зубчастих передач .....	187
19.4. Розрахунок на згин зубів циліндричних прямозубих передач .....	191
19.5. Вибір основних параметрів і розрахункових коефіцієнтів .....	193
<b>20. КОСОЗУБІ ЦИЛІНДРИЧНІ ПЕРЕДАЧІ</b> .....	195
20.1. Загальні відомості .....	195
20.2. Основні геометричні співвідношення косозубих передач .....	196
20.3. Еквівалентне колесо .....	197
20.4. Сили в зачепленні .....	198
20.5. Особливості розрахунку на контактну міцність косозубих передач .....	199
20.6. Розрахунок на згин косозубих передач .....	201
<b>21. КОНІЧНІ ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ</b> .....	210
21.1. Загальні відомості .....	210
21.2. Основні геометричні співвідношення .....	211
21.3. Еквівалентне колесо .....	213
21.4. Сили в зачепленні прямозубої конічної передачі .....	214
21.5. Розрахунок на контактну міцність прямозубої конічної передачі .....	215

21.6. Розрахунок зубів прямозубої конічної передачі за напруженням згину .....	216
<b>22. ЧЕРВ'ЯЧНІ ПЕРЕДАЧІ</b> .....	222
22.1. Загальні відомості .....	222
22.2. Класифікація черв'ячних передач .....	222
22.3. Основні геометричні співвідношення .....	224
22.4. Кінематичні параметри і ККД черв'ячної передачі .....	227
22.5. Сили в зачепленні .....	228
22.6. Матеріали та види руйнування черв'ячних передач .....	230
22.7. Допустимі напруження для матеріалів черв'ячних коліс .....	230
22.8. Розрахунок на міцність черв'ячних передач .....	231
22.9. Тепловий розрахунок черв'ячних передач .....	234
<b>23. ПЛАНЕТАРНІ ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ</b> .....	241
23.1. Загальні відомості .....	241
23.2. Передаточне відношення .....	242
23.3. Різновидності планетарних передач .....	243
23.4. Вибір числа зубів планетарних передач .....	244
23.5. Розрахунок на міцність планетарних передач .....	245
<b>24. РЕДУКТОРИ</b> .....	248
24.1. Загальні відомості .....	248
24.2. Зубчасті редуктори .....	248
<b>25. ПАСОВІ ПЕРЕДАЧІ</b> .....	251
25.1. Загальні відомості .....	251
25.2. Геометрія пасових передач .....	252
25.3. Сили і силові залежності в пасових передачах .....	252
25.4. Сили в пасі від дії відцентрових сил .....	254
25.5. Навантаження на вали пасової передачі .....	254
25.6. Ковзання паса .....	255
25.7. Напруження у гілках пасової передачі .....	256
25.8. Переваги і галузь застосування клинового паса .....	258
25.9. Тягова здатність пасових передач .....	258
<b>26. ВАЛИ ТА ОСІ</b> .....	261
26.1. Загальні відомості .....	261
26.2. Проектний розрахунок валів .....	262
26.3. Розрахунок валів на статичну міцність .....	266
26.4. Розрахунок валів на утомну міцність .....	268
<b>27. ПІДШИПНИКИ</b> .....	276
27.1. Призначення і класифікація .....	276
27.2. Загальні відомості про підшипники ковзання .....	276
27.3. Практичний розрахунок підшипників ковзання .....	277

27.4. Загальні відомості та класифікація підшипників кочення .....	278
27.5. Практичний розрахунок (вибір) підшипників кочення .....	281
<b>28. МУФТИ</b> .....	287
28.1. Призначення та класифікація муфт .....	287
28.2. Некеровані муфти .....	288
28.3. Керовані муфти .....	291
28.4. Самокеровані муфти .....	292
<b>29. РІЗЬБОВІ З'ЄДНАННЯ</b> .....	293
29.1. Загальні відомості .....	293
29.2. Основні параметри різьби .....	295
29.3. Силіві співвідношення, умови самогальмування і коефіцієнт корисної дії гвинтової пари .....	296
29.4. Розрахунки різьбових з'єднань .....	298
<b>30. ШПОНКОВІ З'ЄДНАННЯ</b> .....	305
30.1. Загальні відомості про шпонкові з'єднання .....	305
30.2. Вибір і розрахунок призматичних шпонкових з'єднань .....	308
<b>31. ШЛІЦЬОВІ (ЗУБЧАСТІ) З'ЄДНАННЯ</b> .....	309
31.1. Загальні відомості .....	309
31.2. Розрахунок шліцевих з'єднань .....	310
<b>32. ЗАКЛЕПКОВІ З'ЄДНАННЯ</b> .....	312
32.1. Загальні відомості .....	312
32.2. Розрахунок заклепкових з'єднань .....	313
<b>33. ЗВАРНІ З'ЄДНАННЯ</b> .....	315
33.1. Загальні відомості .....	315
33.2. Основні види зварних з'єднань та їх розрахунок .....	316
<b>Частина IV. ОСНОВИ КОНСТРУЮВАННЯ</b> .....	320
<b>34. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ОСНОВ ПРОЕКТУВАННЯ</b> .....	320
34.1. Поняття про проектування і конструювання .....	320
34.2. Задачі конструювання .....	320
34.3. Стадії конструювання машин .....	321
34.4. Види і комплектність конструкторських документів .....	323
34.5. Основні поняття про оптимальне проектування .....	324
34.6. Поняття про автоматизоване проектування .....	326
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b> .....	333
<b>ДОДАТКИ</b> .....	334

*Навчальне видання*

БОРОЗЕНЕЦЬ Григорій Михайлович  
ПАВЛОВ Віктор Миколайович  
ГОЛУБНИЧІЙ Олександр Васильович  
БАБЕНКО Євген Михайлович  
КОЛЬЦОВ Валерій Олексійович

## ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА І ОСНОВИ КОНСТРУЮВАННЯ

Навчальний посібник

Редактори *Н. О. Щур, В. П. Заскалета*  
Технічний редактор *А. І. Лавринович*  
Коректор *О. О. Крусь*  
Художник обкладинки *О. О. Зайцева*  
Комп'ютерна верстка *Л. Т. Колодіної*

Підп. до друку 13.08.2015. Формат 60x84/16. Папір офс.  
Офс. друк. Ум. друк. арк. 20,69. Обл.-вид. арк. 22,25.  
Тираж 100 пр. Замовлення № 142-1.

Видавець і виготовник  
Національний авіаційний університет  
03680. Київ – 58, проспект Космонавта Комарова, 1  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002