

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем

НАН України та МОН України

Національний авіаційний університет

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця

на правах рукопису

Соловчук Клавдія Юріївна

УДК 681.5(043. 5)

ДИСЕРТАЦІЯ

**МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ КЕРУВАННЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИМИ
ОБ'ЄКТАМИ БЕЗ ПАМ'ЯТІ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ**

05.13.03 – Системи та процеси керування

15 – Автоматизація та приладобудування

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Соловчук К. Ю.

Науковий керівник Житецький Леонід Сергійович, кандидат технічних наук,
старший науковий співробітник

Київ – 2020

АНОТАЦІЯ

Соловчук К. Ю. Методи та алгоритми керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті в умовах невизначеності. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.13.03 – системи та процеси керування (15 – Автоматизація та приладобудування). Підготовлена в Міжнародному науково-навчальному центрі інформаційних технологій та систем, подана до захисту в Національний авіаційний університет, Київ, 2020.

Дисертація присвячена розробленню та дослідженню методів побудови систем автоматичного керування багатозв'язними (багатовимірними) об'єктами без пам'яті (статичними об'єктами) з числом вихідних змінних, що можуть перевищувати число каналів передачі керувальних дій, та мають функціонувати у дискретному часі за наявності зовнішніх невимірювальних збурень в умовах неповної апріорної інформації про параметри об'єктів керування та характеристики збурюючих дій. Припускається, що математичні моделі таких об'єктів можуть бути описані лінійними та нелінійними векторними різницевиими рівняннями. В практичному плані проведені дослідження орієнтовані на використання у складі програмно-алгоритмічного забезпечення систем автоматичного керування неперервними технологічними процесами, зокрема, механічними, гідромеханічними, теплообмінними процесами.

Новизна основного наукового результату дисертаційної роботи полягає в тому, що в рамках загальної концепції розв'язання так званих задач оберненої динаміки вперше запропоновано і теоретично обґрунтовано метод псевдооберненої (узагальненої оберненої) моделі як деякий універсальний метод побудови замкнених дискретних систем керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті при будь-якій матриці коефіцієнтів підсилення, які в принципі можуть бути невідомими.

Показано, що якщо збурення відсутні, а в розпорядженні конструктора системи є повна інформація про всі коефіцієнти підсилення, то закон керування,

побудований на основі псевдооберненої моделі об'єкта, формально синтезується шляхом розв'язання однієї оптимізаційної задачі, в якій критерієм якості функціонування системи виступає такий асимптотичний показник як верхня границя норми вектора похибок цієї системи. Теоретично встановлено, що за наявності нерегулярних збурень, обмежених за рівнем, даний закон мінімізує вказаний показник у випадку, коли множина можливих значень збурень являє собою кулю. Показано, що при повній інформації про параметри об'єкта псевдообернений регулятор гарантує дисипативність замкненої системи керування (граничну обмеженість всіх її сигналів) в умовах, коли присутні збурення, а при відсутності збурень забезпечує існування стійких положень рівноваги системи незалежно від рангу матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта. Це дозволяє досягти достатньо високу якість керування об'єктами без пам'яті, матриці коефіцієнтів підсилення яких можуть бути квадратними виродженими чи погано обумовленими матрицями або бути прямокутними.

Метод псевдооберненої моделі вдалося розповсюдити на клас лінійних, а також на певний клас нелінійних багатозв'язних об'єктів з невизначеностями. Реалізація цього методу при неповній інформації передбачає вибір деякої фіксованої лінійної моделі об'єкта з подальшою побудовою регулятора, що містить модель, псевдообернену до цієї опорної моделі. Встановлені достатні умови робастної стійкості (дисипативності) синтезованих систем керування, які визначають допустимі межі можливих значень параметрів моделі.

Для стабілізації багатозв'язних лінійних об'єктів без пам'яті з довільними матрицями коефіцієнтів підсилення при доволі широкій параметричній невизначеності пропонується використовувати стандартний адаптивний підхід, який раніше був обмежений класом багатозв'язних об'єктів з квадратними невиродженими матрицями коефіцієнтів підсилення. На основі цього підходу розроблено новий метод адаптивного керування об'єктами з можливо виродженою квадратною матрицею коефіцієнтів підсилення за наявності обмежених збурень, рівень яких може бути невідомим конструктору системи. Цей метод передбачає поточне оцінювання невідомих параметрів деякої «віртуальної»

моделі з завідомо невиродженою матрицею, що містить ці параметри в якості своїх елементів. Особливістю синтезованої адаптивної системи керування є те, що формування керувальних дій здійснюється за моделлю, оберненою поточній «віртуальній» моделі об'єкта, одночасно з точковою параметричною ідентифікацією «віртуальної» моделі. При цьому керувальні дії надсилаються одночасно як на реальний об'єкт, так і на його «віртуальну» модель. В рамках запропонованого методу вдалось розв'язати досить складну загальну задачу адаптивного керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті з числом вихідних змінних, що перевищує число каналів передачі керувальних дій, незалежно від рангу матриці невідомих коефіцієнтів підсилення. Встановлено достатні умови досягнення бажаних асимптотичних властивостей замкненої адаптивної системи керування, включаючи збіжність алгоритмів адаптації і дисипативність синтезованої системи.

В дисертації наведено результати практичної реалізації методу псевдооберненої моделі для автоматичного керування технологічними процесами поділу складних сумішей в ректифікаційній колоні а також технологічними процесами розподілу дуття за фурмами доменної печі. Ці результати підтверджують працездатність та ефективність розробленого методу.

Ключові слова: багатозв'язний об'єкт без пам'яті, замкнена система керування, псевдообернена модель, положення рівноваги, стійкість, оптимальність, робастність, адаптивне керування, дисипативність.

ABSTRACT

Solovchuk K. Yu. Methods and algorithms for control of interconnected memoryless plants under uncertainty. – Qualification scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Technical Sciences in specialty 05.13.03 – «Control Systems and Processes» – National Aviation University, Kyiv, 2020. Prepared in International Research and Training Center for Information Technologies and Systems.

The dissertation is devoted to development and research of methods for design of automatic control systems for interconnected (multivariable) memoryless plants (static plants) with the number of output variables that can exceed the number of input variables in discrete time with presence of external unmeasurable disturbances under incomplete a priori information about the parameters of control systems and bounds of disturbances. It is assumed, that the mathematical models of plants can be described by linear and nonlinear vector difference equations. In practical terms, studies have focused on the using the algorithms for automatic continuous process control, including mechanical, hydromechanical, heat exchange processes.

The novelty of main scientific results of the dissertation is that within the general concept of solving the problems of so-called inverse dynamics first proposed and theoretically justified method of pseudoinverse (generalized inverse) operator as a universal method for design of closed-loop discrete control interconnected memoryless systems with any gain matrix, which in principle can be unknown.

It is shown that if no disturbance and system designer has complete information about gain matrix, the control law, which based on the pseudoinverse model of the plant, formally synthesized by a solution of optimization problem in which the criterion of quality of the system stands such as asymptotic upper bound of norm of its error vector. Theoretically found that the presence of irregular disturbances bounded by level, this law minimizes this criterion when the set of possible values of disturbances is a ball. It is also shown that the complete information about the parameters of the pseudoinverse controller ensures dissipativeness of the closed-loop control system in a case when there are disturbances, in the absence of disturbances ensures the existence of stable equilibrium of the system independently of the gain matrix rank. It can achieve sufficiently high quality of memoryless control systems with square (possible ill-condition) or nonsquare gain matrices.

Pseudoinverse method was able to extend to a class of linear and a class of nonlinear interconnected plants with uncertainties. The implementation of this method with incomplete information involves selection of some fixed linear model of the plant, followed by the construction of the controller that contains the pseudoinverse model to

this linear model. Sufficient conditions for robust stability (dissipativeness) of the control systems. These conditions define the bounds of possible values of model parameters.

To stabilize interconnected linear memoryless plants with arbitrary gain matrix coefficients with relatively broad parametric uncertainty, it is proposed to use a standard adaptive approach that was previously restricted to the class of nonsingular square gain matrices. Based on this approach, a new method of adaptive control with a possibly singular square gain matrix in the presence of bounded disturbances, the level of which may be unknown to the system designer, has been developed. This method involves the some evaluation of the unknown parameters of the "imaginary" model with a deliberately nonsingular matrix containing these parameters as its elements. The peculiarity of the synthesized adaptive control system is that the formation of input variables is carried out according to the model inverted to the current "imaginary" plant model, at the same time as the point parametric identification of the "imaginary" model. In this case, the control inputs are sent both to the real plant and to its "imaginary" model. The proposed method succeeded in solving the rather complex overall problem of adaptively interconnected memoryless control systems with the number of output variables, which exceeds the number of control inputs, regardless of the rank of the unknown gain matrix. Sufficient conditions have been established to achieve the desired asymptotic properties of a closed-loop adaptive control system, including the convergence of adaptation algorithms and the dissipativeness of the control system.

The dissertation presents the results about the practical implementation of the pseudoinverse operator method for automatic control of technological distillation column processes as well as technological processes of blast distribution in the furnace tuyere. These results confirm the efficiency and effectiveness of pseudoinverse model-based approach.

Keywords: interconnected memoryless plant, closed-loop control system, pseudoinverse model, equilibrium state, stability, optimality, robustness, adaptive control, dissipativeness.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Статті в наукових журналах, які включено до наукометричної бази Scopus

1. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Pseudoinversion in the problems of robust stabilizing multivariable discrete-time control systems of linear and nonlinear static objects under bounded disturbances. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. N 3. P. 57–70.
2. Zhitetskii L. S., Skurikhin V. I., Solovchuk K. Yu. Stabilization of a nonlinear multivariable discrete-time time-invariant plant with uncertainty on a linear pseudoinverse model. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2017. N 5. P. 12–26.

Статті у наукових фахових виданнях

3. Гриценко В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Предельные возможности метода псевдообращения для управления линейными многосвязными объектами без памяти: гарантированные результаты. *Доповіди НАН України*. 2019. №8. С. 16–24.
4. Zhiteckii L. S., Azarskov V. N., Solovchuk K. Yu. Solving a problem of adaptive stabilization for some static MIMO systems. *Cybernetics and Computer Engineering*. 2019. N 3 (197). P. 33–50.
5. Соловчук К. Ю. Математичні моделі типових неперервних технологічних процесів, орієнтованих на комп'ютерне керування. *Управляющие системы и машины*. 2018. № 5. С. 79–92.
6. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Adaptive stabilization of some multivariable systems with nonsquare gain matrices of full rank. *Кибернетика и вычислительная техника*. 2018. № 2 (192). С. 44–61.
7. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Discrete-time steady-state control of interconnected systems based on pseudoinversion concept. *Кибернетика и вычислительная техника*. 2017. № 189. С. 29–43.
8. Zhiteckii L. S., Nikolaienko S. A., Solovchuk K. Yu. Adaptation and learning in some classes of identification and control systems. *Cybernetics and Computer Engineering*. 2015. N 181. С. 47–65.
9. Скурихин В. И., Гриценко В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Метод обобщенного обратного оператора в задаче оптимального управления линейными многосвязными статическими объектами. *Доповіди НАН України*. 2014. №8. С. 57–66.
10. Azarskov V. N., Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Discrete-time control of linear multivariable systems with either singular or ill-conditioned transfer function matrices. *Proceedings of the National Aviation University*. 2014. N 2. P. 19–27.
11. Скурихин В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Управление многосвязными объектами с вырожденными и плохо обусловленными передаточными матрицами на основе метода псевдообратного оператора. *Управляющие системы и машины*. 2013. №3. С. 14–20, 29.

12. Azarskov V. N., Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Adaptive robust control of multivariable static plants with possibly singular transfer matrix. *Electronics and Control Systems*. 2013. N 4. P. 47–53.

13. Соловчук К. Ю. Управление в многосвязных системах с плохо обусловленной передаточной матрицей объекта. *Математичні машини і системи*. 2013. №2. С. 45–45.

Статті в закордонних наукових журналах

14. Азарсков В. Н., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Управление многосвязными технологическими процессами в условиях неопределенности с использованием концепции обобщенного инвертирования. *Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Естественные и технические науки*. 2014. №5/6. С. 11–20 (РИНЦ).

Матеріали конференцій, які включено до наукометричних баз Scopus

15. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Robust adaptive pseudoinverse model-based control of an uncertain SIMO memoryless system with bounded disturbances. *IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering UKRCON-2019* : proc. Lviv, 2019. P. 628–633.

16. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Analysis of Multivariable Regulation Systems Using Pseudo-Inverse Model-Based Controllers. *IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering UKRCON-2017* : proc. Kiev, 2017. P. 894–899.

17. Zhiteckii L. S., Azarskov V. N., Solovchuk K. Yu., Sushchenko O. A. Discrete-time robust steady-state control of nonlinear multivariable systems : a unified approach. *19th IFAC World Congress* : proc. Cape Town, 2014. P. 8140–8145.

18. Azarskov V. N., Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. A robust adaptive automatic MIMO process control in the presence of great parametric uncertainty. *Aviation in the XXI-st Century : the VI World Congress Safety in Aviation and Space Technologies* : proc. Kiev : NAU, 2014. V. 2. P. 351–355.

Матеріали конференцій

19. Житецкий Л. С., Азарсков В. Н., Соловчук К. Ю. Адаптивное робастное управление многосвязными статическими объектами с прямоугольными матрицами коэффициентов усиления. *XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019* : тр. Всерос. совещания. Москва : ИПУ, 2019. С. 713–718.

20. Азарсков В. Н., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Идентификационный подход к задаче робастного управления многосвязными статическими объектами с нестохастическими неопределенностями. *Идентификация систем и задачи управления SICPRO'15* : тр. X международной конференции. Москва : ИПУ, 2015. С. 520–538.

21. Азарсков В. Н., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Параметрическая идентификация многосвязного статического объекта в замкнутом контуре управления: специальный случай. *XII Всероссийское совещание по проблемам*

управления ВСПУ-2014 : тр. Всерос. совещания. Москва : ИПУ, 2014. С. 2764–2776.

22. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Adaptive pseudoinverse model-based control of some memoryless SIMO and MIMO systems. *Автоматика/Automatics–2018* : матеріали XXV міжнародної конференції. Львів : ЛПТ, 2018. С. 145–146.

23. Соловчук К. Ю. Робастное управление одним классом нелинейных статических объектов с использованием метода псевдообращения. *Автоматика/Automatics–2016* : матеріали XXIII міжнародної конференції. Суми : СумДУ, 2016. С. 65–66.

24. Azarskov V. N., Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Robustness analysis of some multivariable feedback control systems containing generalized inverse model-based controllers. *Infocom Advanced Solution 2015* : матеріали міжнародної конференції. Київ : КПІ, 2015. V. 1. P. 94–95.

25. Azarskov V. N., Rudiuk G. I., Kurganskyi O. Yu., Solovchuk K. Yu. Adaptive robust control of linear MIMO static plant with an arbitrary transfer matrix and bounded noise: a generalization. *Автоматика/Automatics–2015* : матеріали XXII міжнародної конференції. Одеса : ОНПУ, 2015.

26. Азарсков В. Н., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Робастно-адаптивное управление многосвязным статическим объектом с вырожденной передаточной матрицей. *Автоматика/Automatics–2014* : матеріали XXI міжнародної конференції. Київ : КПІ, 2014.

27. Азарсков В. Н., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Optimal and suboptimal control of static multivariable plants based on generalized inverse matrix approach. *Автоматика/Automatics–2013* : матеріали XX міжнародної конференції. Миколаїв : НУК, 2013. С. 65–66.

28. Скурихин В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Оптимальное управление многосвязными статическими объектами с произвольными передаточными матрицами. *Автоматика/Automatics–2013* : матеріали XX міжнародної конференції. Миколаїв : НУК, 2013. С. 63–64.

29. Скурихин В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Метод псевдообратного оператора в задаче оптимального управления многосвязным объектом с вырожденной передаточной матрицей. *Автоматика/Automatics–2012* : матеріали XIX міжнародної конференції. Київ : НУХТ, 2012. С. 63–64.

30. Соловчук К. Ю. Системы управления технологическими процессами на основе встроенных псевдообратных моделей. *Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2012* : матеріали VII міжнародної науково-практичної конференції. Чернігів : ЧТУ. 2012. С. 185–189.

31. Соловчук К. Ю. Керування дискретними багатовимірними об'єктами з виродженими передавальними матрицями за наявності обмежених збурень. *Інформатика та системні науки* : наук. праці III Всеукраїнської науково-практичної конференції. Полтава : ПУЕТ, 2012. С. 634–636.

ЗМІСТ

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	14
ВСТУП.....	15
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИМИ ОБ'ЄКТАМИ.....	23
1.1. Огляд основних робіт у галузі автоматичного керування багатозв'язними об'єктами	23
1.2. Математичні моделі деяких типових неперервних технологічних процесів як багатозв'язних об'єктів без пам'яті	35
1.2.1. Загальна характеристика багатозв'язних технологічних процесів, орієнтованих на комп'ютерне керування.	35
1.2.2. Математична модель технологічного процесу прокатки металевих труб	39
1.2.3. Математична модель технологічного процесу виготовлення скляних труб на лінії горизонтального витягу.....	41
1.2.4. Математична модель технологічного процесу конверсії метану.....	43
1.2.5. Математична модель технологічного процесу виробництва сажі.....	45
1.2.6. Математичні моделі інших технологічних процесів.....	46
1.3. Вибір напрямів досліджень.....	46
Висновки до розділу 1	47
РОЗДІЛ 2. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ БАГАТОЗВ'ЯЗНИМИ ОБ'ЄКТАМИ БЕЗ ПАМ'ЯТІ ПРИ ПОВНІЙ ІНФОРМАЦІЇ	49
2.1. Постановка задачі	49
2.2. Синтез оптимального регулятора за відсутності збурень. Метод псевдооберненої моделі	53
2.3. Синтез оптимального регулятора в умовах невимірюваних обмежених збурень	63
Висновки до розділу 2	69

РОЗДІЛ 3. РОБАСТНЕ КЕРУВАННЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИМИ ОБ'ЄКТАМИ БЕЗ ПАМ'ЯТІ ЗА ПСЕВДООБЕРНЕНИМИ МОДЕЛЯМИ 71

3.1. Робастне керування лінійними об'єктами.....	71
3.1.1. Базові припущення. Постановка задачі.....	71
3.1.2. Аналіз положення рівноваги.	73
3.1.3. Асимптотичні властивості системи.....	81
3.2. Робастне керування нелінійними об'єктами класу I.....	89
3.2.1. Постановка задачі.....	89
3.2.2. Асимптотичні властивості робастного регулятора.....	92
3.2.3. Числові приклади та моделювання.....	96
3.3. Робастне керування нелінійними об'єктами класу II	101
Висновки до розділу 3	102

РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ АДАПТИВНОЇ СТАБІЛІЗАЦІЇ ЛІНІЙНИХ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБ'ЄКТІВ БЕЗ ПАМ'ЯТІ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ 104

4.1. Синтез адаптивного регулятора для стабілізації об'єкта з одним каналом передачі керувальних дій і кількома вихідними змінними	104
4.1.1. Постановка задачі.....	104
4.1.2. Закон керування. Структура системи.....	104
4.1.3. Синтез процедури адаптивної ідентифікації в умовах параметричної невизначеності.	106
4.1.4. Синтез процедури адаптивної ідентифікації в умовах параметричної і непараметричної невизначеності.....	114
4.1.5. Модельні експерименти.....	118
4.2. Синтез адаптивного регулятора для стабілізації багатозв'язного об'єкта без пам'яті з виродженими матрицями коефіцієнтів підсилення	120
4.2.1. Постановка задачі.....	120

4.2.2. Синтез адаптивного регулятора для керування об'єктом за наявності обмежених збурень відомих рівнів.....	120
4.2.3. Синтез адаптивного регулятора для керування об'єктом за наявності обмежених збурень невідомих рівнів.....	130
4.2.4. Числові приклади та моделювання.....	134
4.3. Синтез адаптивного регулятора для керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті з прямокутними матрицями коефіцієнтів підсилення	138
4.3.1. Постановка задачі.....	138
4.3.2. Синтез робастного адаптивного регулятора.....	139
4.3.3. Асимптотичні властивості синтезованої системи.....	144
4.3.4. Числовий приклад. Математичне моделювання.	149
Висновки до розділу 4	151
РОЗДІЛ 5. ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ПОБУДОВИ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИМИ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ ЗА МЕТОДОМ ПСЕВДООБЕРНЕНОЇ МОДЕЛІ.....	153
5.1. Керування багатозв'язним технологічним процесом поділу складних сумішей в ректифікаційній колоні	153
5.1.1. Опис технологічного процесу.....	153
5.1.2. Математична модель технологічного процесу ректифікації.	154
5.1.3. Керування за методом оберненої моделі.	156
5.1.4. Керування за модифікованим методом псевдооберненої моделі.	159
5.1.5. Керування за методом зваженої оберненої/псевдооберненої моделі ...	163
5.2. Автоматичне керування технологічним процесом розподілу дуття за фурмами доменної печі	166
5.2.1. Загальна характеристика процесу розподілу дуття як об'єкта керування.	166
5.2.2. Керування системою розподілу дуття за методом псевдооберненої моделі.....	169

	13
Висновки до розділу 5	172
ВИСНОВКИ.....	173
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	175
ДОДАТКИ.....	186

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

I_r – одинична $r \times r$ -матриця

T – символ транспонування

\mathbf{R}^k – k -вимірний евклідовий простір

$\dim(X)$ – розмірність простору (множини) X

0_r – r -вимірний нульовий вектор

$0_{m \times r}$ – нульова $m \times r$ -матриця

$\mathbf{R}^{m \times r}$ – простір $m \times r$ -матриць

P^{-1} – матриця, обернена до матриці P

P^+ – матриця, псевдообернена до матриці P

N_+ – множина цілих невід'ємних чисел

$\text{rank } P$ – ранг матриці P

$\ker P$ – ядро матриці P

$\text{im } P$ – множина образів матриці P

$\text{cond } P$ – число обумовленості матриці P

$\lambda_i(P)$ – i -те власне значення матриці P

$\rho_i(P)$ – i -те сингулярне число матриці P

$\|P\|_2$ – спектральна норма матриці P

$\|P\|_F$ – фробеніусова норма матриці P

$\|P\|_\infty$ – стовпцева норма матриці P

$\|P\|_1$ – рядкова норма матриці P

$\|x\|_2$ – евклідова норма вектора x

ℓ_∞ – простір всіх можливих обмежених послідовностей скалярних величин

$\text{diam } \Omega$ – діаметр множини Ω

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасний етап технічного прогресу характеризується появою нових складних технологічних комплексів. Вимоги до підвищення точності підтримання заданих технологічних режимів за наявності постійно діючих збурень, що, як правило, бувають неконтрольованими (не доступними для безпосереднього вимірювання), невпинно зростають. Виконання цих вимог нерідко потребує одночасної стабілізації кількох взаємопов'язаних вихідних змінних. При цьому сам технологічний процес виступає як багатозв'язний об'єкт керування. Труднощі, які практично виникають у керуванні багатозв'язними (багатовимірними) об'єктами, зумовлені, як відомо, невизначеностями, викликаними неповною апріорною інформацією про об'єкти та збурення.

Суттєвий внесок у розвиток загальної теорії неперервних та дискретних багатозв'язних систем керування, в тому числі у розроблення системних методів збереження живучості та відновлення керованості таких систем, а також у розроблення сучасних методів математичного моделювання складних систем зробили українські вчені П. І. Чинаєв, В. В. Павлов, Л. М. Любчик, В. М. Казак, А. С. Кулік, П. І. Бідюк, Б. І. Кузнєцов. Зокрема, в рамках висунутої у роботах П. Д. Крутька концепції обернених задач динаміки Л. М. Любчиком були розв'язані задачі синтезу певних класів багатовимірних систем керування з оберненими моделями в контурі керування, орієнтованих на функціонування в умовах невизначеності. Адаптивний підхід до побудови систем керування об'єктами за наявності неповної інформації раніше пропонували у своїх роботах G. C. Goodwin, I. D. Landau, В. А. Якубович, Я. З. Ципкін, В. М. Кунцевич, Ф. Г. Гаращенко, Є. В. Бодянський, О. Г. Руденко, В. Д. Романенко та інші дослідники. Натомість задача компенсації неконтрольованих збурень у багатовимірних системах, яку в свій час поставили E. Davison та J. M. Maciejowski, все ще залишається актуальною. На це вказує поява останніх монографій, в яких узагальнено недавні результати, що отримали P. Albertos,

A. Sala, T. Glad, L. Ljung, S. Skogestad, I. Postlethwaite, L. Tan та інші науковці з далекого зарубіжжя.

Окремий клас багатозв'язних об'єктів керування складають так звані об'єкти без пам'яті (статичні об'єкти). Задачами побудови систем керування цим класом об'єктів у неадаптивній постановці активно займалися T. Lee, G. Adams, W. Gaines, M. B. Meєров, O. C. Соболев, A. A. Первозванський, В. Я. Катковник, а також Г. Є. Пухов, К. Д. Жук, В. І. Скуріхін зі своїми колегами. Методи синтезу адаптивних багатовимірних систем керування об'єктами без пам'яті раніш розробляли M.E. Thomas, D.J. Wilde, В.М. Чадеєв, Б.С. Люблинський, О.Л. Фрадков, В.М. Кунцевич, Г.М. Бакан, В.В. Волосов, М.М. Сальников та інші вчені.

Розроблені наразі методи керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті з числом вихідних змінних, рівним числу каналів передачі керувальних дій обмежуються вимогою невиродженості матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта. Проте на практиці трапляються прикрі випадки, коли ця матриця виявляється погано обумовленою і навіть виродженою. У таких випадках відомий метод оберненого оператора, запропонований в роботах Г. Є. Пухова, К. Д. Жука, стає неприйнятним. Відомі ж інші підходи до побудови замкнених систем керування багатозв'язними об'єктами, у яких число керувальних дій не перевищує число вихідних змінних, базуються на суттєвому припущенні, що у розпорядженні конструктора є повна апріорна інформація про статичні характеристики об'єкта, а матриця коефіцієнтів підсилення має повний ранг.

Таким чином, задачі керування в дискретному часі багатозв'язними об'єктами без пам'яті в умовах невизначеності відносно їхніх статичних характеристик видаються вельми актуальними як у теоретичному плані, так і в плані прикладних досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано згідно з планами наукових досліджень Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН і МОН України в межах таких науково-дослідних робіт:

1. «Дослідження та розробка інформаційних технологій інтелектуальної обробки даних та управління розвитком цілеспрямованих систем» (№ держреєстрації 0109U004772, 2010–2014) (автор був виконавцем роботи).

2. «Розробка інтелектуальних інформаційних технологій обробки даних і сигналів в системах діагностики і керування об'єктами в умовах невизначеностей» (№ держреєстрації 0115U003059, 2015–2019) (автор був виконавцем роботи).

Мета і завдання дослідження. *Метою* досліджень, проведених в дисертації, є розроблення ефективних методів і алгоритмів дискретного керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті за наявності повної і неповної інформації про матриці коефіцієнтів підсилення, які можуть мати довільний ранг. Для досягнення цієї мети поставлено такі *завдання*:

- провести аналіз наявних методів керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті;

- розробити метод та алгоритм оптимізації дискретних систем керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті за наявності повної апріорної інформації про моделі таких об'єктів;

- розробити метод та алгоритм робастного керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті в умовах невизначеності відносно матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта;

- розробити методи та алгоритми робастного керування певними класами нелінійних багатозв'язних об'єктів без пам'яті за наявності невизначеності відносно статичних характеристик цих об'єктів;

- розробити методи та алгоритми адаптивного керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті при невідомих матрицях коефіцієнтів підсилення;

- провести експериментальну перевірку отриманих результатів на модельному прикладі і реальному технологічному процесі як об'єкті керування.

Об'єктом дослідження є динамічні процеси, які виникають в дискретних системах керування лінійними і деякими нелінійними багатозв'язними об'єктами

без пам'яті за довільних обмежених за рівнем неконтрольованих збурень з повною та неповною апріорною інформацією про статичні характеристики цих об'єктів.

Предметом дослідження є методи оптимального керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті за повної апріорної інформації про матриці коефіцієнтів підсилення таких об'єктів, а також методи і алгоритми робастного та адаптивного керування лінійними та певними класами нелінійних багатозв'язних об'єктів без пам'яті в умовах невизначеності відносно елементів цієї матриці та її рангу.

Методи дослідження. У дослідженнях використано методи матричного числення, методи якісної теорії різницевих рівнянь, методи лінійного програмування, методи робастного та адаптивного керування, методи точкової ідентифікації та методи функцій Ляпунова.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Розроблено і обґрунтовано метод псевдооберненої моделі як деякий універсальний метод стабілізації на заданих рівнях вихідних змінних лінійних багатозв'язних об'єктів без пам'яті при будь-яких матрицях коефіцієнтів підсилення. Показано, що до методу псевдооберненої моделі формально приводить розв'язок задач оптимального керування такими об'єктами за критерієм точної верхньої грані евклідової норми вектора похибок в кожний дискретний момент часу при повній інформації про ці матриці.

2. Вперше встановлено, що коли матриця коефіцієнтів підсилення апріорі відома, то регулятор, синтезований за методом псевдооберненої моделі, незалежно від рангу цієї матриці здатний забезпечити стійкість замкненої системи керування за відсутності зовнішніх збурень та дисипативність (граничну обмеженість всіх сигналів в системі), якщо існують довільні збурення, обмежені за рівнем.

3. Встановлено достатні умови робастності замкнених дискретних систем керування лінійними та деякими класами нелінійних багатозв'язних об'єктів без пам'яті на базі фіксованих лінійних псевдообернених моделей за наявності

інтервальних невизначеностей відносно матриці коефіцієнтів підсилення. Ці умови конструктивні: їх можна доволі просто перевірити, застосовуючи класичний метод лінійного програмування.

4. Вперше розроблено методи синтезу адаптивних регуляторів для керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті з матрицями коефіцієнтів підсилення будь-якого ненульового рангу при обмежених нестохастичних збуреннях, рівні яких можуть бути апріорі невідомими.

Практичне значення отриманих результатів. На основі запропонованого підходу до побудови систем керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті, що спирається на загальний метод псевдооберненої моделі, розроблено методи та алгоритми керування типовими неперервними технологічними процесами, а саме технологічним процесом поділу складних сумішей в ректифікаційній колоні та технологічним процесом розподілу дугтя за фурмами доменної печі. Ефективність одного з цих методів підтверджена актом про впровадження результатів дослідження в практичну діяльність АТ «Полтавський турбомеханічний завод» (Додаток Б).

Результати роботи впроваджено в навчальний процес Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» на кафедрі автоматики, електроніки та телекомунікацій (Додаток В).

Особистий внесок здобувача. Всі основні положення і результати, що складають основний зміст роботи, отримані автором самостійно і опубліковані в роботах [1 – 31]. Серед 12 публікацій у фахових виданнях 2 статті написані автором одноосібно. У працях, які виконані зі співавторами, здобувачеві належать наступні результати: [1] – встановлення достатніх умов робастної стійкості лінійних систем з інтервальними невизначеностями; [2] – встановлення достатніх умов робастної стійкості систем керування нелінійними об'єктами з нелінійністю класу I; [3] – розроблення удосконаленого методу керування об'єктами з погано обумовленими матрицями коефіцієнтів підсилення та встановлення загальних умов існування положення рівноваги; [4] – дослідження методу адаптивного керування за наявності прямокутної матриці коефіцієнтів підсилення; [6] –

модельовання адаптивних систем керування об'єктами з прямокутною матрицею коефіцієнтів підсилення; [7] – розроблення методу робастного керування нелінійними об'єктами з нелінійністю класу II; [8] – дослідження методу адаптивного робастного керування об'єктами з квадратними можливо виродженими матрицями коефіцієнтів підсилення за наявності збурень невідомих рівнів; [9] – аналіз асимптотичних властивостей оптимальної системи керування багатозв'язним об'єктом, побудованої за методом псевдооберненої моделі; [10] – аналіз методу керування багатозв'язними об'єктами з погано обумовленими матрицями коефіцієнтів підсилення; [11] – дослідження методу псевдооберненої моделі; [12] – дослідження методу адаптивного робастного керування об'єктами з квадратними можливо виродженими матрицями коефіцієнтів підсилення за наявності збурень невідомих рівнів; [14] – модельовання процесів адаптивного та неадаптивного робастного керування.

Апробація результатів дисертації. Основні положення роботи були представлені і схвалені на міжнародних та всеукраїнських наукових та науково-практичних конференціях: 19th IFAC World Congress (Кейптаун, Південна Африка, 24–29 серпня 2014 р.); XII та XIII Всеросійські наради з проблем керування ВСПУ (Інститут проблем управління ім. В. О. Трапезнікова, Москва, Росія, 16–19 червня 2014 р.; 17–20 червня 2019 р.); X Міжнародна конференція «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO (Інститут проблем управління ім. В. О. Трапезнікова, Москва, Росія, 26–30 січня 2015 р.); 1st and 2nd Ukraine Conferences on Electrical and Computer Engineering UKRCON (Київ, 29 травня – 2 червня 2017 р.; Львів, 2–6 липня 2019 р.); XIX – XXIII та XXV Міжнародні конференції з автоматичного управління «Автоматика/Automatics» (Київ, 26–28 вересня 2012 р.; Миколаїв, 25–27 вересня 2013 р.; Київ, 23–27 вересня 2014 р.; Одеса, 23–27 вересня 2015 р.; Суми, 22-23 вересня 2016 р.; Львів, 18–19 вересня 2018 р.); I Міжнародна конференція «Infocom Advanced Solutions 2015», присвячена 70-річчю кафедри автоматики та управління в технічних системах НТУУ «КПІ» (Київ, 24–25 листопада 2015 р.); III Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформатика та системні науки» (Полтава, 1-3

березня 2012 р.). Положення роботи доповідались на наукових семінарах відділу інтелектуальних автоматичних систем МННЦТiС.

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 31 наукову працю, серед яких 11 статей у наукових фахових виданнях України, три статті у періодичних закордонних виданнях, з яких дві входять до міжнародної наукометричної бази даних Scopus, 7 публікацій в працях міжнародних конференцій, три з яких зареєстровані в базі даних Scopus, та 10 тез доповідей у збірниках матеріалів інших міжнародних та всеукраїнських конференцій.

Структура і обсяг роботи. роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел і трьох додатків. Повний обсяг роботи – 192 сторінок, із них список використаних джерел зі 151 найменуванням на 11 сторінках, 3 додатки на 7 сторінках, обсяг основного тексту дисертації складає 160 сторінок. Робота містить 59 рисунків та одну таблицю.

У вступі обґрунтована актуальність обраної теми дисертаційної роботи і необхідність проведення дослідження, сформульовані мета і задачі дослідження, визначено об'єкт і предмет дослідження, сформульована наукова новизна і практичне значення отриманих результатів, подано інформацію про особистий внесок здобувача, а також наведені відомості про апробацію отриманих результатів і наявні публікації.

У **першому розділі** проведено аналіз сучасного стану теорії керування багатозв'язними об'єктами, в тому числі так званими об'єктами без пам'яті, при повній і неповній інформації про параметри об'єкта за наявності зовнішніх невимірюваних збурень. Наведено приклади деяких типових неперервних технологічних процесів, що орієнтовані на автоматичне керування з використанням засобів комп'ютерної техніки.

У **другому розділі** встановлено, що при повній інформації про коефіцієнти підсилення об'єкта закон керування, побудований на базі псевдооберненої моделі об'єкта, мінімізує верхню границю норми вектора похибок цієї системи (показник якості) за відсутності збурень і у випадку, коли множина можливих значень збурень являє собою кулю. Показано, що при повній інформації про параметри об'єкта псевдообернений регулятор гарантує дисипативність замкненої системи

керування (граничну обмеженість всіх її сигналів) в умовах, коли присутні збурення, а при відсутності збурень забезпечує існування стійких положень рівноваги системи незалежно від рангу матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта.

У **третьому розділі** метод псевдооберненої моделі розповсюджено на клас лінійних, а також на певний клас нелінійних багатозв'язних об'єктів з невизначеностями. Реалізація цього методу при неповній інформації передбачає вибір деякої фіксованої лінійної моделі об'єкта з подальшою побудовою регулятора, що містить модель, псевдообернену до цієї опорної моделі. Встановлені достатні умови робастної стійкості (дисипативності) синтезованих систем керування, які визначають допустимі відхилення значень параметрів моделі від параметрів об'єкта.

У **четвертому розділі** обґрунтовується використання адаптивного підходу, на основі якого розроблено нові методи адаптивного керування об'єктами без пам'яті з одним каналом передачі керувальних дій і будь-яким числом вихідних змінних, не меншим 2, та об'єктами з можливо виродженою квадратною матрицею коефіцієнтів підсилення за наявності обмежених збурень, рівень яких може бути невідомим конструктору системи. Цей метод передбачає поточне оцінювання невідомих параметрів деякої «віртуальної» моделі з завідомо невиродженою матрицею, що містить ці параметри в якості своїх елементів. Встановлено достатні умови досягнення бажаних асимптотичних властивостей замкненої адаптивної системи керування, включаючи збіжність алгоритмів адаптації і дисипативність синтезованої системи.

У **п'ятому розділі** розглянуті прикладні аспекти побудови систем керування багатозв'язними технологічними процесами за методом псевдооберненої моделі.

У **додатках** наведено числові значення елементів матриці B в рівнянні технологічного процесу розподілу дуття, а також копії документів про впровадження результатів дисертаційної роботи на АТ «Полтавський турбомеханічний завод» та в навчальний процес Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка».

РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

1.1. Огляд основних робіт у галузі автоматичного керування багатозв'язними об'єктами

Ефективність функціонування систем автоматичного керування виробництвом у значній мірі визначається якістю керування технологічними процесами. Інтенсифікація цих процесів супроводжується появою нових складних систем автоматичного керування на базі програмно-алгоритмічних і технічних засобів сучасних цифрових ЕОМ.

Окремий клас технологічних процесів як об'єктів автоматичного керування, введений в колективній монографії [32, гл. 3], складають так звані неперервні технологічні процеси виробництва однорідної продукції. Однорідна продукція випускається у металургії (технологічні процеси збагачення руди, виробництва чавуна, сталі, проката), хімічній і нафтохімічній промисловості (процеси виробництва бензину, спирту), промисловості будівельних матеріалів (процеси виробництва цементу, скла та виробів з нього), целюлозно-паперової промисловості і т. д. [32, с. 146]. Об'єктами, в яких відбуваються технологічні процеси виробництва однорідної продукції, виступають домни, конвертори, прокатні та трубoproкатні стани, хімічні реактори та роздільні колони, печі тощо. Вимоги до показників якості функціонування цих систем невідмінно зростають [33, 34].

Перші суттєві результати в галузі створення ефективних систем автоматичного керування неперервними технологічними процесами на базі математичних моделей цих процесів з використанням програмно-алгоритмічних засобів цифрових ЕОМ належать Н. С. Райбману та його колегам [32], які в свій час запропонували оригінальні методи й алгоритми ідентифікації та адаптивного керування, орієнтовані на даний клас технологічних процесів. Пізніше побудовою систем керування неперервними технологічними процесами з зосередженими і розподіленими параметрами займався в США W. S. Ray (У. Рей) [35]. Останні

теоретичні і практичні підходи до створення і дослідження таких систем узагальнив М. King в книзі [36].

Характерна особливість неперервних технологічних процесів – наявність певного числа вхідних змінних, що включають керувальні дії та зовнішні збурення, і вихідних змінних (сигналів), пов'язаних між собою перехресними зв'язками [35, п. 3.2.6]. На особливість таких процесів як багатозв'язних об'єктів керування була також звернена увага в [32, с. 24].

Під багатозв'язними об'єктами будемо далі розуміти об'єкти, в яких або зміна щонайменше однієї керувальної дії супроводжується одночасною зміною не менше двох вихідних величин, або щонайменше на одну з вихідних величин впливає зміна не менше однієї керувальної дії. В технічній літературі, де розглядаються системи автоматичного керування даним класом об'єктів, вживаються терміни взаємозв'язані, багатоканальні, багатовимірні системи [37, с. 3], а також *multivariable systems, multi-input multi-output (MIMO) systems*. Проте зрозуміло, що далеко не кожна багатоканальна чи багатовимірна система неодмінно буде багатозв'язною. В математичній же літературі, присвяченій питанням теорії багатозв'язного керування, об'єкти з числом керувальних дій чи вихідних змінних більшим, ніж два, називають векторними об'єктами [38, п. 3.1.1] (на відміну від скалярних об'єктів, що мають один керувальний вхід і одну вихідну змінну). Таким чином, у багатозв'язного об'єкта щонайменше одна з двох змінних, а саме керувальна дія чи вихідна змінна – вектор [38, с. 123].

Математичним апаратом дослідження багатозв'язних систем автоматичного керування служить, як відомо, якісна теорія лінійних та нелінійних диференціальних або різницевих рівнянь та теорія матриць. Відомо також, що структурні особливості багатозв'язних систем (наявність перехресних зв'язків між каналами передачі сигналів) приводить до відмінності методів дослідження цих систем від методів дослідження одновимірних (скалярних) систем. Саме це викликає необхідність розробки специфічних підходів до проведення згаданих досліджень.

Загальні методологічні питання теорії автоматичного керування кількома зв'язаними між собою змінними розглядав відомий вчений М. D. Mesarovic [39], якому належить створення основ загальної теорії систем. Найбільш повно теорія багатозв'язних систем керування викладена в роботі М. В. Меєрова [40], узагальнена пізніше в його монографії [41], в якій був проведений аналіз структур

даного класу автоматичних систем. Суттєвий внесок в розвиток теорії неперервних багатозв'язних систем керування на початковому її етапі належить В. Т. Морозовському [37, 42, 43] та О. С. Соболеву [44, 45]. Задачі аналізу та синтезу оптимальних багатозв'язних систем розглядалися у роботах Р. Т. Янушевського [46, 47]. Питанням побудови дискретних багатовимірних систем з використанням математичного апарату сучасної теорії керування присвячена монографія В. Я. Катковника і Р. О. Полуектова [48]. Теоретичними дослідженнями багатовимірних систем керування активно займалися українські вчені А. І. Суд-Злочевський [49], П. І. Чинаєв [50], В. В. Павлов [51], Л. М. Любчик [52], Б. І. Кузнєцов [53]. Новітні результати в напрямку побудови багатозв'язних дискретних систем керування належать В. Ф. Губарєву разом з його учнями [54].

Однією з найбільш суттєвих вимог, які пред'являються до систем автоматичного керування неперервними технологічними процесами, полягає в забезпеченні високих показників точності стабілізації та регулювання режимними змінними за наявності постійно діючих неконтрольованих збурень. При цьому слід зазначити, що для багатьох технологічних процесів спектр цих збурень доволі часто лежить в діапазоні резонансних частот коливання замкнених систем. А це приводить до появи значних похибок регулювання [52, с. 12].

Задача компенсації (чи пак придушення) зовнішніх збурень, що не можуть бути безпосередньо виміряні, все ще залишається, як відомо, однією з центральних задач теорії й практики автоматичного керування як одновимірними, так і багатовимірними об'єктами. Стосовно керування багатовимірними об'єктами цю задачу уперше, мабуть, поставив Е. J. Davison в своїй статті [55]. Основні результати, які були отримані при її розв'язання протягом останніх десятиріч і опубліковані в багатьох статтях, узагальнили в своїх монографіях I. M. Maciejowski [56], S. Skogestad, I. Postlethwaite [57], T. Glad, L. Ljung [58], P. Albertos, A. Sala [59] та інші відомі дослідники з далекого зарубіжжя.

Аби придушити зовнішні неконтрольовані збурення у багатозв'язних системах керування зазвичай вводять перехресні зворотні зв'язки між окремими каналами передачі керувальних дій [37, п. 4-1]. При цьому для синтезу цих зв'язків пропонується використовувати, як відомо [37, с. 106], так званий принцип інваріантності, до розвитку якого на початковому етапі значний внесок зробили серед інших вітчизняних вчених О. Г. Івахненко [60] та О. І. Кухтенко [61].

Теорії інваріантності багатозв'язних систем керування за наявності неконтрольованих збурень присвячені роботи В. Т. Морозовського [37, гл. 4], О. Е. Соболева [46], В. В. Павлова [51, 62], Р. О. Полуектова [63, 64]. Останні результати в напрямку побудови багатозв'язних систем керування в умовах зовнішніх неконтрольованих збурень з використанням теорії інваріантності належать М. Ш. Місріханову [65 – 67]. Специфічний клас задач багатозв'язного керування, що тісно примикає до проблематики теорії інваріантності, складає клас так званих задач автономного керування [37, п. 4-4]. Ефективні методи розв'язування взаємозв'язків, здатного забезпечити автономність нелінійних багатозв'язних систем, були запропоновані В. В. Павловим в [62] і узагальнені в його монографії [51].

На жаль, реалізація принципу інваріантності шляхом введених лише перехресних зв'язків між каналами передачі керувальних дій не дозволяє, як відомо [37, с. 110], забезпечити інваріантність всіх вихідних змінних від всіх неконтрольованих збурень.

Ефективну методологічну базу для розв'язання задач компенсації невимірювальних збурень у багатозв'язних системах керування складає розвинута П. Д. Крутьком [68] теорія обернених задач динаміки, яка в ідейному плані сходиться до методу оберненого оператора Г. С. Пухова і К. Д. Жука [69], та теорії обернених моделей, вагомий внесок до якої зробив Л. М. Любчик [52]. Згідно з цією теорією в ланцюг зворотного зв'язку замкненої лінійної багатозв'язної системи має бути включена обернена модель об'єкта. Така модель реалізує як функцію формування оцінок невимірювальних, так і функцію формування компенсуючих керувальних дій (*inverse model-based control*) [52, с. 7]. Саму ж по собі ідею використання обернених моделей для відновлення невимірювальних збурень і компенсації негативного впливу цих збурень на вихідні змінні багатозв'язних об'єктів уперше висунули Н. Seraji в роботі [70] (для неперервних систем) і Л. М. Любчик в роботі [71] (для дискретних систем).

Метод обернених моделей отримав суттєвий розвиток в роботах [71 – 76]. Порівняно недавно С. Liu і Н. Peng [77] відновили інтерес зарубіжних дослідників до задач оберненої динаміки, розв'язання яких в західній літературі започаткували L. M. Silverman [78], M. K. Sain і J. L. Massey [79], S. Singh [80]. Відносно недавні результати в цьому напрямку досліджень опубліковані в статтях [81, 82] та монографії [83].

«Проміжне» місце між теорією інваріантності і теорією обернених моделей слід, мабуть, відвести теорії H_∞ -оптимізації [84, 85] та теорії ℓ_1 -оптимізації, назву якої запропонували М. А. Dahleh, J. В. Pearson [86] у своїй доповіді на Американській конференції з керування в 1986 р. На жаль, в рамках H_∞ -теорії, яка все ще домінує в загальній теорії керування, вдається розв'язати задачу придушення постійно діючих неконтрольованих збурень лише у випадку гармонічних (синусоїдальних) збурень з невідомою частотою. Задачу оптимального придушення довільних обмежених за рівнем збурень, пізніше названу задачею ℓ_1 -оптимізації, для класу багатозв'язних об'єктів уперше розв'язала О. Д. Якубович у роботі [87]. Пізніше повне розв'язання цієї задачі знайшли М. А. Dahleh і J. В. Pearson [88].

Недоліком запропонованого у роботах [87, 88] методу побудови ℓ_1 -оптимального регулятора є вимога, що матриця коефіцієнтів підсилення об'єкта – квадратна не вироджена матриця. Цю вимогу можна, виявляється, обійти, використовуючи так званий спектральний метод синтезу оптимальних регуляторів для керування в дискретному часі багатозв'язними об'єктами [38, п. 3.П.1°], який допускає перевищення числа вихідних змінних над числом каналів передачі керувальних дій. Інший метод оптимального керування неперервними багатозв'язними об'єктами, в яких число вихідних змінних більше, ніж число передачі керувальних дій, раніше вже був висунутий В. Я. Катковником [89]. Проте згадані методи орієнтовані на функціонування замкненої системи керування в умовах стохастичних збурень, а не в умовах так званих нерегулярних обмежених за рівнями збурень (як в [90]), що є принципіальним моментом.

Загальний недолік всіх розглянутих вище методів підвищення показників якості функціонування системи керування багатозв'язними об'єктами полягає в тому, що для реалізації цих методів конструктор системи має розпоряджатися повною інформацією про параметри математичної моделі об'єкта. Проте така ситуація виглядає ідеальною; адже на практиці доволі часто важко або навіть

неможливо отримати цю інформацію. В такій ситуації традиційно звертаються до так званого робастного підходу.

Під робастністю (robustness) системи керування (регулятора) зазвичай розуміють здатність регулятора з фіксованими параметрами забезпечити бажану якість функціонування такої системи в умовах невизначеності, заданої в той чи іншій формі [90, с. 181]. Саме ж керування, яке гарантує досягнення цієї властивості за наявності невизначеності, вираженої, зокрема, в формі належності невідомих параметрів моделі об'єкта до деякої неодноточкової множини (параметрична невизначеність), прийнято називати робастним керуванням (robust control) [91, с. 8]. Інакше кажучи, робастне керування має бути здатним забезпечити працездатність системи керування не одним якимсь об'єктом з невідомими параметрами, а цілим класом (сімейством) таких об'єктів, відносно яких відомі лише апріорні множинні оцінки можливих значень їхніх параметрів (див. [92, с. 68]).

Наразі відомі два напрями досліджень в галузі аналізу і синтезу робастних систем керування. Основу першого напрямку складає згадана вище H_∞ -теорія. В свій час в рамках H_∞ -теорії робастного керування було отримано розв'язання задачі робастної стабілізації багатовимірних систем зі зворотніми зв'язками, орієнтованих на функціонування в умовах невизначеностей [93, 94]. Застосуванню методів цієї теорії до побудови систем керування технологічними процесами була присвячена монографія [95].

В основу другого (альтернативного) напрямку покладена ℓ_1 -теорія робастного керування, у витоках якої стояли М. Khamash і J. В. Pearson [96, 97]. Основні результати в цьому напрямку були узагальнені в монографії [98].

В теоретичному плані різниця між цими двома напрямками, що розвивалися паралельно, полягає, як відомо [91, с. 13], в тому, що основним припущенням ℓ_1 -теорії є припущення про обмеженість простору невимірюваних сигналів простором ℓ_∞ сигналів, обмежених за рівнем. Натомість основне припущення H_∞ -теорії – обмеженість цих сигналів в просторі ℓ_2 (енергетична обмеженість).

Основні результати в галузі робастного керування, отримані до початку ХХІ сторіччя, представлені в монографіях [99 – 102] та колективних монографіях [103 – 105] зарубіжних дослідників. Суттєвий розвиток теорію робастного керування зробили в своїх монографіях Б. Т. Поляк і П. С. Щербаков [90], В. Ф. Соколов [91], В. М. Кунцевич [92].

Відомо [92, п. 22], що коли множинні оцінки невідомих параметрів об'єкта досить «широкі», забезпечити робастність системи керування для довільного об'єкта, параметри якого належать заданій множині, на основі регулятора з фіксованими параметрами стає неможливим. В такій ситуації доводиться здійснювати адаптацію параметрів регулятора до невідомих параметрів об'єкта.

Методи і алгоритми адаптивного керування, що використовують процедури адаптивного точкового оцінювання, на початковому етапі розвитку теорії адаптивного керування розробляли В. М. Фомін, О. Л. Фрадков та В. А. Якубович [38], В. Г. Срагович [106], G. C. Goodwin та K. S. Sin [107], О. Л. Фрадков [108], I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad [109]. Прийом поточного множинного оцінювання невідомих параметрів об'єктів з подальшим використанням отриманих апостеріорних оцінок для формування керувальних дій активно використовували В. М. Кунцевич та М. М. Личак М. [110]. Останні результати в цьому напрямку досліджень узагальнили в своїх відносно недавніх монографіях J. Тао [111], K. S. Narendra та A. M. Annaswamy [112], K. J. Åström та В. Wittenmark [113], В. О. Никифоров [114], Р. А. Ioannou та S. Sun [115], Л. С. Житецький та В. І. Скурихін [116]. Прикладним питанням побудови адаптивних систем керування технологічними процесами присвячені монографії І. М. Борзенка [117], Н. М. Александровського, С. В. Єгорова і Р. Є. Кузина [118], Е. В. Бодянского і О. Г. Руденка [119] та В. Д. Романенка і Б. В. Ігнатенка [120].

Труднощі, які зазвичай з'являються в задачі синтезу адаптивних регуляторів, полягають в тому, аби встановити умови збіжності алгоритмів адаптації та гарантувати стійкість (дисипативність) замкненої системи керування. У більшості відносно простих випадків ці труднощі вдається подолати, спираючись на такі інструменти як «ключова технічна лема» (Key Technical Lemma), яку можна

знайти і [107, sect. 6.2], або так звану частотну теорему [38, теорема 4.П.3]. Зокрема, у вказаних вище монографіях наведено розв'язок задачі адаптивного керування лінійними багатозв'язними об'єктами без збурень [107, subsect. 6.3.3] та за наявності невимірюваних нерегулярних обмежених збурень [38, п. 4.2.2°]. При цьому вводиться суттєве припущення, що матриця, яка фігурує як матричний коефіцієнт підсилення в старшому члені правої частини різницевого рівняння об'єкта (high frequency gain), квадратна невироджена матриця [38, с. 242; 111, р. 202].

Окремий клас багатозв'язних об'єктів складають статичні об'єкти (об'єкти без пам'яті). (Сам термін «об'єкт без пам'яті» (memoryless plant) уперше, мабуть, був введений М. В. Меєровим в монографії [41].) На відміну від багатозв'язних динамічних об'єктів вони описуються не диференціальними чи різницеvими рівняннями, а алгебраїчними рівняннями [120]. Загальні задачі оптимізації неперервних систем керування такими об'єктами були розв'язані в роботах [121, 122].

Задачами керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті, орієнтованими на функціонування в дискретному часі, в неадаптивних постановках в свій час займалися Т. Н. Lee, G. E. Adams, W. N. Gaines [123, chap. 8], Г. Є. Пухов та В. І. Скуріхін зі своїми колегами [124 – 127], В. Я. Катковник і А. А. Первозванський [128, 129]. Останні результати в напрямку розв'язання задач синтезу дискретних систем керування об'єктами без пам'яті належить О. Л. Буничу [130]. До дискретних об'єктів без пам'яті відносять, як відомо [123, subsect, 8.3; 129, с. 84], неперервні технологічні процеси, які хоча і описуються диференціальними рівняннями, але функціонують в складі цифрових систем керування за умови, якщо протягом кожного інтервалу квантування сигналів у часі перехідні процеси, пов'язані зі стрибкоподібними змінами керувальних дій в дискретні моменти часу, практично затухнуть.

Ефективним методом забезпечення високих точносних показників систем керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті є метод оберненого оператора, який сходить до робіт Г. Є. Пухова [69, 124]. Незалежно й дещо

пізніше до нього фактично прийшли зарубіжні дослідники Т. Н. Lee, G. E. Adams, W. N. Gaines [123, chapt. 8]. Цей метод спочатку був орієнтований на випадок, коли матриця коефіцієнтів підсилення – квадратна невироджена матриця. Проте на практиці все ж зустрічаються технологічні процеси, що функціонують як багатозв'язні об'єкти без пам'яті з квадратною виродженою матрицею [131]. Але методи керування такими об'єктами залишаються відсутніми. Пізніш в [124, гл. VI, п. 2] була здійснена спроба розповсюдити ідею метода оберненого оператора на клас об'єктів, у яких число вихідних змінних перевищує число передачі керувальних дій, з використанням процедури псевдообернення матриці. Проте жодних теоретичних результатів відносно динамічних властивостей побудованих таким чином систем керування знайти там не вдалось. Тим часом сама по собі ідеологія псевдообернення при вирішенні багатьох інших завдань управління продовжувала активно розвиватися в роботах М. Ф. Кириченко [132]. Між тим до методу псевдооберненого оператора по суті справи прийшов В. Я. Катковник [128], розглядаючи задачу синтезу регулятора для стабілізації лінійного багатозв'язного об'єкта з відомою прямокутною матрицею коефіцієнтів підсилення, що має повний ранг, як деяку оптимізаційну задачу. Задача оптимізації дискретної системи стабілізації нелінійних багатовимірних об'єктів без пам'яті з числом вихідних змінних, що перевищує число передачі керувальних дій, поставлена і розв'язана В. Я. Катковником спільно з А. А. Первозванським в роботі [128]. В цій роботі встановлена достатня умова стійкості замкненої системи керування, яка містить такий об'єкт, і регулятор, що реалізує певну однокрокову ітеративну процедуру формування керуючих дій. На жаль, ця умова, сформульована в формі максимально допустимого відхилення за нормою матриці коефіцієнтів підсилення номінальної лінійної моделі багатозв'язного об'єкта від відповідної матриці Якобі, що визначається статичною характеристикою такого об'єкта, виявляється неконструктивною.

Аналіз згаданих вище робіт [123 – 129] показує, що відомі наразі методи неадаптивного керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті обмежені класом

об'єктів, у яких матриця коефіцієнтів підсилення, що описує лінійну опорну (номінальну) модель об'єкта, заздалегідь має повний ранг.

Задачу адаптивного керування лінійними одновимірними об'єктами без пам'яті за наявності збурень, що можуть бути вимірні, розв'язував В.М. Чадеєв [32, гл. 3].

Задачі адаптивного керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті ставились і розв'язувались В. М. Кунцевичем [92, гл. 3], Г. М. Баканом, В. В. Волосовим, М. М. Сальніковим [133, 134], Л. С. Житецьким та В. І. Скуріхінім [116]. Задачі синтезу адаптивного регулятора для керування нелінійним багатозв'язним об'єктом без пам'яті з неявно заданою статичною характеристикою присвячена робота [135] Б. С. Люблинського і О. Л. Фрадкова, занесена до матеріалів довідкового характеру [136, п. 11.7]. Останні результати, що стосуються задачі синтезу адаптивних систем керування певним класом багатозв'язних об'єктів без пам'яті, нелінійних за параметрами, належать В. М. Кунцевичу [92, гл. 3, п. 3.3].

Загальне обмеження, яке фігурує у вказаних вище роботах, полягає в тому, що число вихідних змінних об'єкта не перевищує числа передачі керувальних дій. Між тим за наявності збурень оригінальний метод і алгоритм адаптивного керування нелінійним об'єктом без пам'яті з числом вихідних змінних, більшим числа передачі керувальних дій, відносно давно пропонували М. Е. Томас і D. J. Wilde в роботі, яка розглядалась Я. З. Ципкінім в монографії [137, п. 7.11]. В основу цього методу покладена ідеологія методу стохастичної апроксимації (МСА), яка протягом досить довгого часу повсюдно домінувала в теорії адаптивного керування.

Отже, проведений огляд науково-технічних літературних джерел в галузі теорії і практики автоматичного керування складними багатозв'язними технічними об'єктами різного призначення, в першу чергу керування неперервними технологічними процесами, яке орієнтоване на реалізацію новітніх методів керування з використанням сучасної комп'ютерної техніки, показав, що

наразі існує цілий арсенал методів для керування такими об'єктами. Ці методи можна класифікувати так (рис. 1.1):

- методи теорії інваріантності;
- методи теорії обернених задач динаміки;
- методи H_∞ -теорії та ℓ_1 -теорії оптимального і робастного керування в умовах параметричної і непараметричної невизначеності;
- методи теорії адаптивного керування.



Рисунок 1.1 – Класифікація перспективних методів автоматичного керування складними об'єктами

Серед наведених на рис. 1.1 сучасних методів керування в практичному плані важливо виділити методи, орієнтовані на зменшення негативного впливу неконтрольованих збурень на динамічні процеси в замкнених системах керування. Відповідно до [138, гл. 6] слід розрізняти наступні типи моделей збурень (рис. 1.2):

- детерміновані моделі;
- стохастичні моделі;
- нестохастичні моделі.

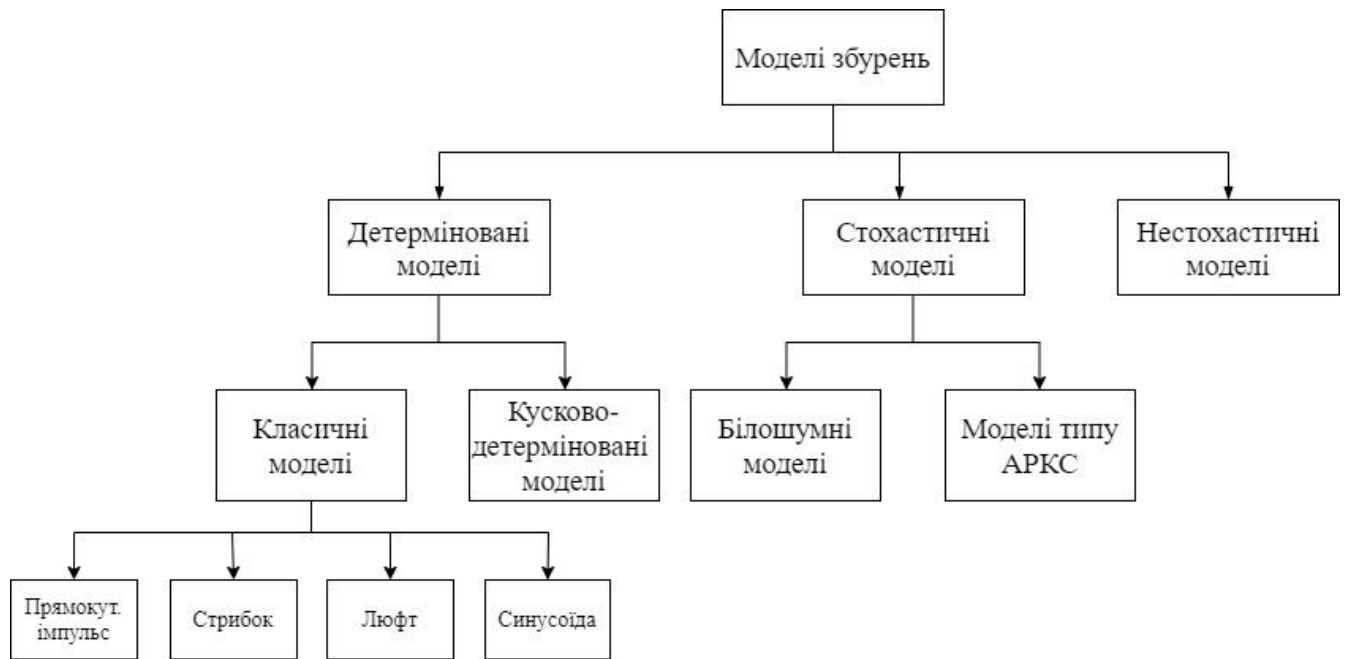


Рисунок 1.2 – Класифікація моделей збурень

Детерміновані моделі, що включають класичні моделі типу «прямокутний імпульс», «стрибок», «люфт» та «синусоїда», та кусково-детерміновані моделі хоча є досить простими [138, пп. 6.2, 6.3], проте практично вони навряд можуть бути придатні для опису збурень в реальних системах керування. В цьому відношенні випадкові процеси, що породжують стохастичні моделі типу «дискретний білий шум» та «авторегресії – ковзного середнього» (АРКС), які в англійській літературі передаються аббревіатурою ARMA (AutoRegressive-Moving Average), виявляються більш адекватними реальним процесам, що викликані діями збурень; такі моделі в свій час активно розробляв К. Я. Åström (див., зокрема, [113, 138]). Тим часом нестохастичні моделі, які описують випадкові процеси нестохастичної природи, використовувались В. Я. Якубовичем, В. М. Кунцевичем, О. Б. Куржанським, Ф. Л. Черноуськом, В. Ф. Губарєвим, В. Ф. Соколовим та іншими вітчизняними і зарубіжними дослідниками. Такі моделі здаються, на наш погляд, більш придатними з-за притаманної їм природи нерегулярності [92, сс. 4 – 5].

1.2. Математичні моделі деяких типових неперервних технологічних процесів як багатозв'язних об'єктів без пам'яті

1.2.1. Загальна характеристика багатозв'язних технологічних процесів, орієнтованих на комп'ютерне керування. Сучасні технологічні процеси виробництва однорідної продукції досить різноманітні. Проте, незважаючи на таку різноманітність, вони складають низку типових процесів як об'єктів керування. За означенням, введеним в книзі [139, с. 11], під типовим об'єктом керування слід розуміти технологічний процес, який протікає у промисловій установці відповідного класу.

Аби побудувати сучасні високоефективні системи автоматичного керування технологічними процесами, необхідно, як правило, мати в своєму розпорядженні опис певного класу цих процесів у формі деякої математичної моделі [123, 124], а також [35, п. 1.3]. На першому етапі повна математична модель може застосовуватись для дослідження технологічного процесу як об'єкта керування з використанням аналітичних методів або методів математичного моделювання подібно до того, як пропонувалось в книгах [35, 123, 124]. На другому етапі, який виступає як основний етап, спрощена математична модель використовується для організації власне самого закону керування в замкненому контурі системи [35, 123, 139]. Оскільки ж передбачається, що таке керування має здійснюватися на базі сучасних комп'ютерних засобів, при побудові спрощеної математичної моделі технологічного процесу того чи іншого класу потрібно враховувати ефект дискретизації у часі сигналів, що виступають як певні змінні на входах і виходах моделі [138].

Сучасний технологічний процес виробництва однорідної продукції являє собою складний багатозв'язний об'єкт керування. Кожний такий процес відрізняється своєю фізико-хімічною суттю, що, як відомо, виражається в ідентичності матеріальних і енергетичних внутрішніх зв'язків. Загальні особливості деяких основних класів неперервних технологічних процесів зібрані в табл. 1.1, наведену також в [3].

Таблиця 1.1. Характеристика деяких класів технологічних процесів як багатозв'язних об'єктів керування

Клас	Цільове призначення	Вхідні змінні (керувальні дії й збурення)	Вихідні змінні
Механічні і гідромеханічні процеси	Виготовлення металевих і скляних труб	Положення обтискних валків, тиск повітря для роздмухування скляної труби, швидкість витягу труби Геометричні розміри металевої заготовки Температура металу (рідкого скла)	Геометричні розміри готової труби (зовнішній діаметр і товщина)
	Розподіл дуття за фурмами доменної печі	Положення заслінок у фурмах	Перепад тиску між сусідніми фурмами
Масообмінні процеси	Ректифікація	Витрати флегми і кубового продукту Температура компонентів суміші	Склад дистилляту і кубового продукту

Під математичною моделлю будь-якого неперервного технологічного процесу з багатьма змінними звичайно розуміють певне математичне співвідношення, яке пов'язує m -вимірний вектор $y(t) = [y^{(1)}(t), \dots, y^{(m)}(t)]^T$ вихідних величин з r -вимірним вектором $u(t) = [u^{(1)}(t), \dots, u^{(r)}(t)]^T$ керувальних дій та l -вимірним вектором $v(t) = [v^{(1)}(t), \dots, v^{(l)}(t)]^T$ зовнішніх (контрольованих чи неконтрольованих) збурень як деяких функцій часу $t \in [0, \infty)$. У загальному випадку воно має такий вигляд:

$$y(t) = \Phi(u(t), v(t)). \quad (1.1)$$

У цьому співвідношенні $\Phi: \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^m$ – деякий, взагалі кажучи, нелінійний оператор, що ставить вектор-функцію $y(t)$ у відповідність парі вектор-функцій $u(t), v(t)$. Воно узагальнює моделі, наведеної в книзі [139, с. 13], на багатовимірний випадок.

Рис. 1.3 ілюструє загальну схему неперервного технологічного процесу як багатозв'язного об'єкта, орієнтованого на комп'ютерне (цифрове) керування. На

цьому рисунку Φ – так звані фіксатори, призначені для перетворення дискретних сигналів $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)}$, що періодично надходять від комп'ютера з деяким сталим періодом T_0 (інтервалом квантування у часі), в неперервні сигнали $u^{(1)}(t), \dots, u^{(m)}(t)$. Формування сигналів $u^{(i)}(t)$ на схемі рис. 1.3 здійснюється так:

$$u^{(i)}(t) = \begin{cases} u_n^{(i)} & \text{при } nT_0 \leq t < (n+1)T_0, \\ u_{n+1}^{(i)} & \text{при } t = (n+1)T_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Операція (1.2), як видно з рис. 1.3, забезпечує утримання протягом всього інтервалу часу T_0 сигналів $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)}$, сформованих в n -й дискретний момент часу $t = nT_0$ синхронно з періодичним квантування вихідних змінних $y^{(1)}(t), \dots, y^{(m)}(t)$, які фізично залишаються неперервними сигналами.

Схематично процеси квантування сигналів $y(t)$ та формування керувальних дій $u(t)$ зображено на рис. 1.4.

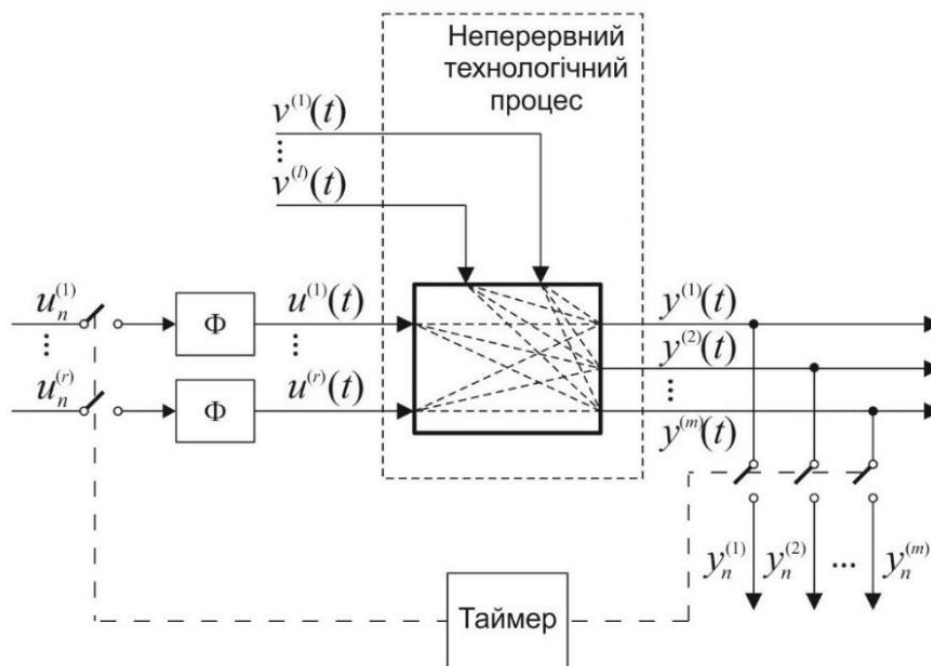


Рисунок 1.3 – Загальна схема неперервного технологічного процесу як багатозв'язного об'єкта в складі цифрової системи керування

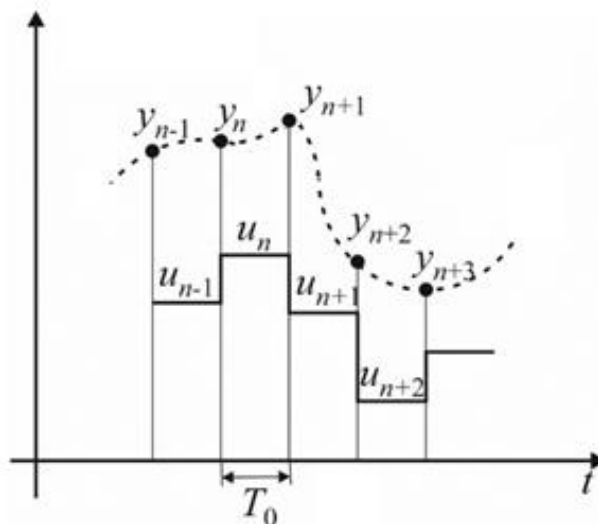


Рисунок 1.4 – Процеси квантування сигналів

Зазвичай збурення $v^{(1)}(t), \dots, v^{(m)}(t)$, що діють на вихідні змінні $y^{(1)}(t), \dots, y^{(m)}(t)$ технологічного процесу (див. рис. 1.3), являють собою не якісь стрибкоподібні чи регулярні функції часу t (типу синусоїди), а деякі нерегулярні змінні, фізично обмежені за рівнями. Рис. 1.5, на якому показана одна з таких нерегулярних функцій $v^{(i)}(t), i \in [1, m]$ дає наочне уявлення про характер зовнішніх збурень, властивих реальному технологічному процесу.

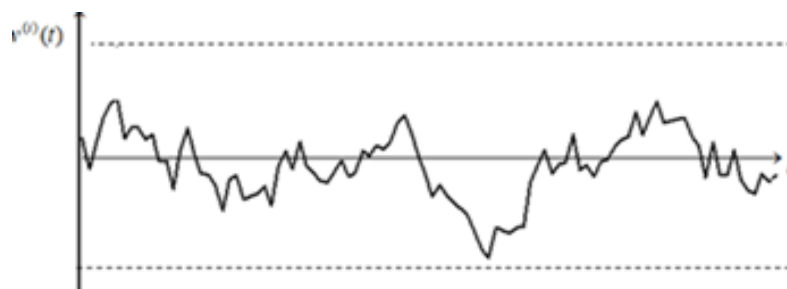


Рисунок 1.5 – Характер зовнішнього збурення

Відомо (див. [35, п. 1.3], а також [123, гл. 6]), що існують принаймні два шляхи побудови математичних моделей неперервних технологічних процесів виробництва однорідної продукції. Основу першого шляху складають фундаментальні закони фізики і хімії (закони збереження речовини, енергії тощо), які дозволяють описати динаміку таких об'єктів як хімічних реакторів, ректифікаційних колон, нагрівальних печей та інших апаратів, які експлуатуються в хімічній та нафтохімічній промисловості, спираючись на рівняння

матеріального й теплового балансів, кінетичні закономірності протікання процесів, гідродинамічні умови та ін. [140, п. 5]; при цьому згідно з [138 гл. 1, п. 5] математичний опис хіміко-технологічних процесів базується якраз на рівняннях, що моделюють гідродинаміку потоків рідин і газів у апаратах, де відбуваються такі процеси.

В основу другого шляху побудови математичних моделей неперервних багатовимірних технологічних процесів покладають використання масивів експериментальних даних, отриманих протягом певного часу спостереження за змінами вихідних величин y , керувальних дій u та контрольованих збурень v у дискретні моменти часу. Саме цим шляхом переважно йдуть на практиці, орієнтуючись на можливість застосування таких моделей для автоматичного керування технологічними процесами на базі засобів цифрової обчислювальної техніки [138].

Виявляється, що коли період квантування T_0 достатньо великий, то перехід від моделі об'єкта (1.1) у неперервному часі $t \in [0, \infty)$ до моделі цього об'єкта у дискретному часі $n = 1, 2, \dots$ приводить до рівняння

$$y_n = \varphi(u_{n-1}) + v_{n-1}, \quad (1.3)$$

в якому $\varphi: \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^m$, а $v_n = [v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(m)}]^T$ – вектор адитивних невимірюваних збурень, приведених до виходу об'єкта в n -й дискретний момент часу [141]. Таке рівняння може розглядатися як загальне рівняння багатозв'язного об'єкта без пам'яті, що підпадає під дію адитивного збурень. Саме це рівняння буде далі використовуватися при проведенні досліджень.

1.2.2. Математична модель технологічного процесу прокатки металевих труб. Цей процес, як відомо [32, п. 3.6], здійснюється в промислових умовах на трубопрокатному агрегаті, який включає дві печі та прошивний, розкатний і калібрувальний стани (рис. 1.6). З цих трьох станів найбільш помітний вплив на геометричні розміри гарячокатаних труб спричиняють розкатний і калібрувальний стани [32, п. 3.6.2].

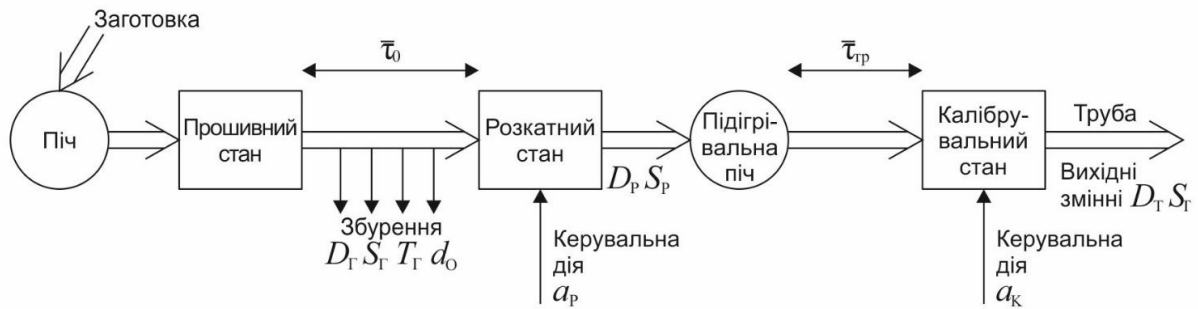


Рисунок 1.6 – Принципіальна схема технологічного процесу трубопрокатки

На розкатному стані формується товщина S_T стінки металеві труби, а на калібрувальному стані – її зовнішній діаметр D_T . Згідно з [32, с. 180] на величину S_T впливають наступні змінні: діаметр D_Γ гільзи, яка надходить від прошивного стану; товщина S_Γ її стінки; температура T_Γ гільзи на виході з прошивного стану; час $\bar{\tau}_0$, протягом якого ця гільза пересувається до розкатного стану, поступово охолоджуючись; діаметр d_o оправки, яка перед прокаткою вводиться всередину гільзи; відстань a_p між валками розкатного стану. Основними факторами, що впливають на зовнішній діаметр D_T готової труби, виступають такі величини: діаметр D_p труби перед калібрувальним станом; температура T_K труби на виході з підігрівальної печі; час $\bar{\tau}_{тр}$ транспортування гільзи від підігрівальної печі до калібрувального стану; відстань a_k між валками цього стану.

Співвідношення

$$\left. \begin{aligned} S_T &= S(D_\Gamma, S_\Gamma, T_\Gamma, d_o, a_p), \\ D_T &= D(D_p, T_K, a_k) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

визначають залежність двох геометричних розмірів S_T і D_T готової труби, що виконують роль вихідних змінних об'єкта керування, від змінних $D_\Gamma, S_\Gamma, T_\Gamma, d_o, D_p, T_K$, що виступають як збурення, та від змінних a_p, a_k , що використовуються як керувальні дії. Відповідно до першого співвідношення, яке фігурує у (1.4), лінійна модель процесу прокатки труб, орієнтована на

функціонування системи автоматичного керування цим процесом на базі цифрової ЕОМ, виглядає так:

$$S_T(n) = K_T x(n-1) + K_a a_p(n-1) \quad (1.5)$$

[32, с. 187]. Тут $K_T = [k_1, \dots, k_4]$ – вектор параметрів цього процесу як об'єкта керування; $x(n) = [D_T(n), S_T(n), T_T(n), d_O(n)]^T$ – вектор зовнішніх збурень, віднесений до n -го дискретного моменту часу; K_a – деякий коефіцієнт.

Модель (1.5), що описує даний процес у статиці, практично виявилась доволі ефективною [32, п. 3.6].

1.2.3. Математична модель технологічного процесу виготовлення скляних труб на лінії горизонтального витягу. Цей неперервний технологічний процес здійснюється в такий спосіб. З варильної печі (рис. 1.7) розплавлене скло певного фізико-хімічного складу по розподільному каналу надходить у чашу, в якій підтримується заданий рівень скломаси і її температура. Грузла скломаса безупинно стікає на похило обертовий «мундштук» і намотується на нього. Повітря, що продувається під певним тиском через внутрішню порожнину «мундштука», формує з аморфно-м'якого скла пустотілу «цибулину», яка під дією сили натягу, яку створює тяглова машина, переходить у циліндричну трубу (фідер). Під час руху уздовж транспортера труба поступово твердіє, проходить стадію термічної обробки і остигає. Наприкінці лінії витяжки труба ріжеться на шматки певної довжини.

Для підтримки заданих значень зовнішнього діаметра D і товщини h стінки здійснюється зміна тиску P повітря, що подається для роздмухування скляної труби, а також зміна швидкості V руху труби уздовж конвеєра. З цією метою використовуються регулятор-стабілізатор 1 тиску і регулятор-стабілізатор 2 швидкості V руху труби уздовж конвеєра.

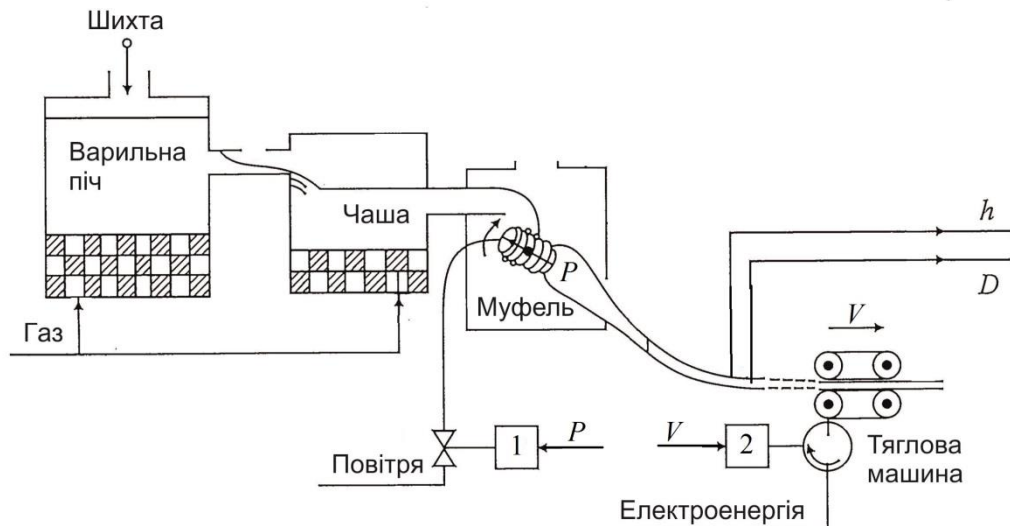


Рисунок 1.7 – Схема технологічного процесу виготовлення скляних труб

З позицій керування даний технологічний процес являє собою двозв'язний об'єкт: діаметр D труби, що формується, та її товщина h залежать як від тиску P повітря, так і від швидкості V витяжки. Особливість цього процесу полягає в тому, що точні рівняння

$$D(t) = \varphi_D(P(t), V(t), \xi_D(t)), \quad h(t) = \varphi_h(P(t), V(t), \xi_h(t)),$$

які зв'язують у кожний момент часу t вихідні величини $D(t)$, $h(t)$ з керувальними діями $P(t)$, $V(t)$ і збуреннями $\xi_D(t)$, $\xi_h(t)$ (оператори φ_D , φ_h невідомі), а самі збурення не доступні для виміру. Якщо ж ці вихідні величини вимірювати в рівновіддалені дискретні моменти $t = nT_0$ ($n = 1, 2, \dots$) з деяким інтервалом T_0 і формувати керувальні дії в ті ж моменти, то даний процес можна описати рівнянням виду

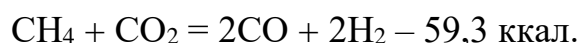
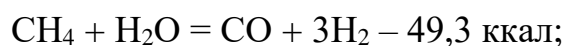
$$y_n = Bu_{n-1} + \eta_n. \quad (1.6)$$

В цьому рівнянні $y_n = [D_n, h_n]^T$ – вектор вихідних змінних D_n, h_n в n -й дискретний момент часу; $u_{n-1} = [P_{n-1}, V_{n-1}]^T$ – вектор керувальних дії P_{n-1}, V_{n-1} , сформованих у попередній $(n-1)$ -й момент часу; $\eta_n = [\eta_D(n), \eta_h(n)]^T$ – вектор приведених до виходу неконтрольованих збурень; B – деяка матриця з елементами $b^{(ij)}$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$). Рівняння (1.6) описує статичну модель об'єкта. З такою

моделлю можна мати справу, коли інтервал T_0 квантування за часом настільки великий, що перехідний процес, викликаний зміною керувальної дії u_n у кожний n -й дискретний момент $t = nT_0$, практично загасне до чергового $(n + 1)$ -го моменту квантування сигналів.

1.2.4. Математична модель технологічного процесу конверсії метану.

Технологія конверсії метану здійснюється наступним чином [124, гл. IV, п. 2]. Природний газ, що складається переважно з метану (CH_4), під тиском 0,7 – 0,8 атм проходить через сатураційну башту, зрошується гарячою водою (80°C) та насичується паром до співвідношення пара/газ = 0,4/1; після цього додається водяна пара до співвідношення пара/газ = 1,1/1. Суміш нагрівається у теплообміннику до температури $500 - 600^\circ\text{C}$ і надходить у змішувач, де до неї додають збагачене киснем повітря. Зі змішувача робоча паро-газо-киснево-повітряна суміш з температурою близько 450°C надходить у конвертор метану, що являє собою основну технологічну установку і призначений для отримання водню шляхом конверсії природного газу з киснево-повітряною сумішшю та водяною паром. У цьому конверторі відбуваються наступні хімічні реакції:



З конвертору метану газ з температурою $750 - 850^\circ\text{C}$ і з вмістом залишкового метану 0,5 – 2% надходить до зволожувача, який використовують для охолодження конвертованого газу. Далі, після додавання водяної пари, конвертований газ проходить через теплообмінник, де віддає своє тепло вихідній паро-газовій суміші, а сам охолоджується до 400°C і надходить до конвертора CO (окису вуглецю). Конвертор окису вуглецю призначений для збагачення воднем газу після конверсії метану шляхом реакції окиснення CO в CO_2 водяною паром. Після конвертору CO газ проходить через казан-утилізатор, що призначений для отримання водяної пари з тиском $P = 2$ атм за рахунок використання тепла паро-газової суміші конвертованого газу. З казану-утилізатора конвертований газ

надходить через водонагрівальний теплообмінник до водонагрівальної башти, де він поступово охолоджується і готується для подальшої переробки.

Вхідними змінними, до яких належать керувальні дії та збурення, виступають наступні параметри:

$x^{(1)}$ – витрати газу в конверторі метану;

$x^{(2)}$ – витрати пари в конверторі метану;

$x^{(3)}$ – витрати пари у випаровувачі конвертора окису вуглецю;

$x^{(4)}$ – витрати пари у випаровувачі конвертора метану;

$x^{(5)}$ – витрати кисню;

$x^{(6)}$ – витрати повітря;

$x^{(7)}$ – температура на виході з конвертора.

До вихідних змінних належать:

$y^{(1)}$ – вміст CO_2/O_2 в готовому продукті;

$y^{(2)}$ – вміст CO в готовому продукті;

$y^{(3)}$ – вміст H_2 в готовому продукті;

$y^{(4)}$ – вміст CH_4 в готовому продукті;

$y^{(5)}$ – вміст N_2 в готовому продукті.

Згідно з [124, с. 125], вимірювання компонент вектора вихідних змінних

$$y_n = \begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(5)} \end{pmatrix}$$

зазвичай відбувається з періодом $T_0 = 8$ год.

Математична модель технологічного процесу конверсії метану як об'єкта автоматичного керування описується лінійним векторним різницеvim рівнянням

$$y_n = G x_{n-1} + g_0, \quad (1.7)$$

де

$$x_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(7)} \end{pmatrix}$$

– вектор вхідних змінних, G – деяка 5×7 -матриця коефіцієнтів підсилення, а g_0 – 5-вимірний вектор.

1.2.5. Математична модель технологічного процесу виробництва сажі.

При складанні математичної моделі для технологічного процесу виробництва сажі в реакторі, зазвичай виходять з вимог, що висуваються до створення системи автоматичного керування цим процесом [124, гл. IV, п. 4]. Як показують дослідження [124, с. 133], при певних умовах можна обмежитися наступними вхідними змінними:

$x^{(1)}$ – питома вага сировини;

$x^{(2)}$ – коефіцієнт заломлення сировини;

$x^{(3)}$ – в'язкість сировини;

$x^{(4)}$ – витрати сировини;

$x^{(5)}$ – витрати повітря високого тиску;

$x^{(6)}$ – витрати повітря низького тиску;

$x^{(7)}$ – витрати паливного газу;

$x^{(8)}$ – температура сировини на виході з нагрівача;

$x^{(9)}$ – температура повітря низького тиску.

Вихідними змінними процесу виробництва сажі виступають такі величини:

$y^{(1)}$ – питома поверхня вихідного продукту;

$y^{(2)}$ – масляне число;

$y^{(3)}$ – вихід сажі.

Виявляється, що математична модель технологічного процесу виробництва сажі описується таким же рівнянням (1.7), як і рівняння процесу конверсії метану. При цьому

$$x_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(9)} \end{pmatrix}, \quad y_n = \begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \\ y_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

– вектори вхідних та вихідних змінних, відповідно, G – деяка 3×9 -матриця коефіцієнтів підсилення, а g_0 – 3-вимірний вектор.

1.2.6. Математичні моделі інших технологічних процесів. До неперервних технологічних процесів як багатозв'язних об'єктів без пам'яті відносяться також процес ректифікації та процес розподілу дуття за фурмами доменної печі, математичні моделі яких описані у розділі 5.

1.3. Вибір напрямів досліджень

Аналіз літературних джерел показав, що незважаючи на значне число доступних публікацій в галузі сучасної теорії керування та її прикладних аспектів наразі відсутні методи оптимального, робастного і адаптивного керування дискретними багатозв'язними об'єктами, у яких число вихідних змінних може перевищувати число каналів передачі керувальних дій, при будь-якому ранзі матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта за наявності нерегулярних (нестохастичних) невимірюваних збурень в умовах можливої параметричної невизначеності. В цьому зв'язку можливість розширення класу багатозв'язних об'єктів без пам'яті, що допускає застосування нових методів керування, залишається відкритим питанням.

Аби дати обґрунтовану відповідь на поставлене питання, в дисертації були обрані наступні напрями наукових досліджень:

- оптимізація замкнених багатозв'язних дискретних систем керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті з квадратними і прямокутними матрицями коефіцієнтів підсилення довільного рангу за наявності повної інформації про ці матриці;

- синтез неадаптивних робастних регуляторів для керування дискретними лінійними та нелінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті за наявності невизначеностей відносно матриць коефіцієнтів підсилення в умовах нестохастичних невимірюваних збурень;
- синтез дискретних адаптивних систем керування невизначеними лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті, матриці коефіцієнтів підсилення яких та їх ранги апріорі невідомі, за наявності нерегулярних обмежених збурень, рівень яких може бути апріорі невідомим.

Дослідження за вказаними вище напрямками передбачає розв'язання певних задач, перелік яких був наведений в загальній характеристиці роботи.

Висновки до розділу 1

1. Із проведеного аналізу доступних публікацій випливає, що проблема керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті продовжує привертати увагу вітчизняних та зарубіжних вчених. Ця проблема залишається актуальною.

2. Існуючі методи автоматичного керування лінійними та нелінійними багатозв'язними об'єктами, в тому числі і об'єктами без пам'яті, що функціонують в дискретному часі, можна розділити на такі групи: а) методи теорії інваріантності; б) методи теорії обернених задач динаміки; в) методи H_∞ -теорії та ℓ_1 -теорії оптимального і робастного керування; г) методи теорії адаптивного керування.

3. Аналіз доступних літературних джерел показує, що методи оптимального керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті за критерієм верхньої межі норми вектора похибок в кожний дискретний момент часу в умовах, коли матриця коефіцієнтів підсилення є відомою матрицею неповного рангу і присутні нерегулярні обмежені збурення, а також методи робастного неадаптивного і робастного адаптивного керування такими об'єктами в тих же умовах за наявності параметричних невизначеностей наразі відсутні.

4. Для розроблення нових методів та алгоритмів керування в дискретному часі багатозв'язними об'єктами без пам'яті виникає потреба в проведенні наукових досліджень за такими напрямками: а) оптимізація замкнених багатозв'язних дискретних систем керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті з квадратними і прямокутними матрицями коефіцієнтів підсилення довільного рангу за наявності повної інформації про ці матриці; б) синтез неадаптивних робастних регуляторів для керування дискретними лінійними та нелінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті за наявності невизначеностей відносно матриць коефіцієнтів підсилення в умовах нестохастичних невимірюваних збурень; в) синтез дискретних адаптивних систем керування невизначеними лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті, матриці коефіцієнтів підсилення яких та їх ранги апріорі невідомі, за наявності нерегулярних обмежених збурень, рівень яких може бути апріорі невідомим.

5. Рівняння (1.3) може виступати як загальне рівняння моделі багатозв'язного об'єкта без пам'яті.

Аналіз математичних моделей типових неперервних технологічних процесів проведено в [5, 14, 30].

РОЗДІЛ 2

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ БАГАТОЗВ'ЯЗНИМИ ОБ'ЄКТАМИ БЕЗ ПАМ'ЯТІ ПРИ ПОВНІЙ ІНФОРМАЦІЇ

В цьому розділі ставиться і розв'язується задача синтезу регуляторів, здатних забезпечити оптимальне (за певним критерієм) керування лінійними багатозв'язними об'єктами без пам'яті при повній апіорній інформації про статичні характеристики об'єкта.

2.1. Постановка задачі

Розглядається випадок, коли в загальному рівнянні об'єкта (1.3) $\varphi: \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^m$ – лінійний оператор. У цьому випадку воно набуває форму

$$y_n = Bu_{n-1} + v_{n-1}. \quad (2.1)$$

У цьому рівнянні $y_n = [y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(m)}]^T$ – m -вимірний вектор вихідних змінних, доступних для вимірювання в кожний n -й дискретний момент часу; $u_n = [u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)}]^T$ – r -вимірний вектор керувальних дій; $v_n = [v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(m)}]^T$ – m -вимірний вектор адитивних збурень;

$$B = \begin{pmatrix} b^{(11)} & \dots & b^{(1r)} \\ & \vdots & \\ b^{(m1)} & \dots & b^{(mr)} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

– довільна $m \times r$ -матриця коефіцієнтів підсилення (тут і надалі T – символ транспонування).

Вважається, що число каналів передачі керувальних дій не перевищує числа вихідних змінних:

$$r \leq m. \quad (2.3)$$

Припускається, що елементи $b^{(ij)}$ матриці (2.2) точно відомі конструктору системи (ідеальний випадок).

Як і в [38, гл. 3], вважається, що послідовність $\{v_n^{(i)}\} := v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots$ кожної i -ї компоненти вектора збурень v_n являє собою нерегулярну (нестохастичну) послідовність скалярних величин, обмежену за рівнем, тобто

$$|v_n^{(i)}| \leq \varepsilon^{(i)} (< \infty) \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.4)$$

У рамках припущення (2.4) можна уявити, що

$$v_n \in \Omega \subseteq [-\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(1)}] \times \dots \times [-\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(m)}] \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{diam } \Omega < \infty).$$

Тут Ω – обмежена множина, яка, як і в [38, п. 3.2.1°], є замкненою симетричною множиною, а $\text{diam } \Omega := \max_{v', v'' \in \Omega} \|v' - v''\|_2$ – її діаметр, де $\|x\|_2$ позначає евклідову норму вектора x (див. рис. 2.1). При такому припущенні оцінка зверху евклідової норми вектора v_n формально визначається як

$$\sup_{n \in N_+} \|v_n\|_2 \leq \frac{1}{2} \text{diam } \Omega \leq \varepsilon,$$

де

$$\varepsilon = +\sqrt{[\varepsilon^{(1)}]^2 + \dots + [\varepsilon^{(m)}]^2}, \quad (2.5)$$

а $N_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ – позначення множини цілих невід'ємних чисел.

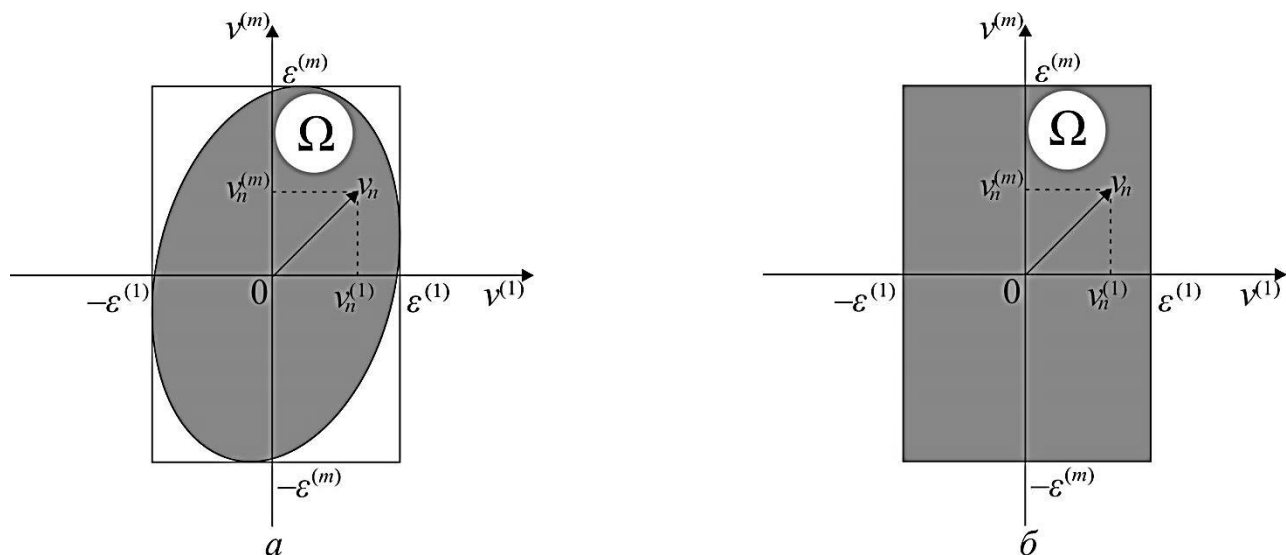


Рисунок 2.1 – Ілюстрація припущення (2.4) для двох можливих випадків:

$$a - \Omega \subset [-\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(1)}] \times \dots \times [-\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(m)}]; \quad b - \Omega = [-\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(1)}] \times \dots \times [-\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(m)}]$$

У позначеннях, прийнятих у сучасній теорії керування [90, 91], припущення (2.4) зручно записати так:

$$\{v_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_m. \quad (2.6)$$

У цьому виразі ℓ_∞ представляє простір усіх обмежених послідовностей скалярних величин $x_n \in \mathbf{R}^m$ з ℓ_∞ -нормою $\|x\|_\infty := \sup_{n \in N_+} |x_n| < \infty$ [90, с. 29].

Зауваження 2.1. Не слід ототожнювати послідовність нерегулярних нестохастичних збурень $\{v_n\}$, задану у формі (2.6), зі стаціонарною випадковою послідовністю, яку називають «білошумною»: остання являє собою послідовність стохастично незалежних векторів v_1, v_2, \dots з нульовим середнім, тоді як для нерегулярної обмеженої послідовності таке середнє не існує (відомо не більше, ніж те, що в кожний момент часу n вектор v_n належить деякій обмеженій множині Ω); див. [38, с. 138].

Виберемо загальну стратегію керування багатовимірним об'єктом (2.1) у формі стаціонарної ітераційної процедури

$$u_n = u_{n-1} + \chi(e_n), \quad (2.7)$$

яка узагальнює запропоновану в роботах [128, 129] процедуру керування таким об'єктом на випадок можливого нелінійного перетворення вектора $e_n \in \mathbf{R}^m$, де $\chi: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^r$ – деякий оператор, а e_n являє собою вектор похибок системи в n -й дискретний момент часу, визначений формулою

$$e_n = y_n^0 - y_n, \quad (2.8)$$

в якій $y_n^0 = [y_n^{0(1)}, \dots, y_n^{0(m)}]^T$ – m -вимірний вектор бажаних значень $y^{0(1)}, \dots, y^{0(m)}$ вихідних змінних в n -й момент часу. Вважається, що $\|y_n^0\| \neq 0$, тобто хоча б одне значення $y^{0(i)}$ відмінне від нуля:

$$|y_n^{0(1)}| + \dots + |y_n^{0(m)}| \neq 0$$

для будь-якого $n \in N_+$. Додаткове припущення полягає у тому, що

$$\sup_{n \in N_+} \|y_n^0\| < \infty, \quad (2.9)$$

звідки негайно випливає, що

$$h_n := y_n^0 - y_{n-1}^0 \quad (2.10)$$

– обмежений за нормою вектор:

$$\sup_{n \in N_+} \|h_n\|_2 \leq \bar{h} (< \infty). \quad (2.11)$$

Зауваження 2.2. Звертає на себе увагу той факт, що хоча сам по собі об'єкт (2.1) є статичним, однак замкнена система керування, яка містить такий об'єкт і зворотний зв'язок (2.7), (2.8), є дискретною динамічною системою: вона описується векторним різницеvim рівнянням першого порядку

$$e_n - e_{n-1} + B\chi(e_{n-1}) = h_n - \nabla v_{n-1}, \quad (2.12)$$

де введена нова змінна

$$\nabla v_n = v_n - v_{n-1}. \quad (2.13)$$

Тому природнім чином виникає нагальна потреба у дослідженні асимптотичних властивостей цієї замкненої системи, в першу чергу, її стійкості.

Оскільки згідно з (2.10), (2.13), змінні h_n та ∇v_{n-1} не залежать від вектора e_{n-1} , то в силу рівняння (2.12), переписаного як

$$e_n = [e_{n-1} - B\chi(e_{n-1})] + h_n - \nabla v_{n-1}, \quad (2.14)$$

на кожному n -му кроці при даному e_{n-1} і деякому $\chi(e_{n-1})$ вектор e_n зрештою визначається лише змінними h_n та ∇v_{n-1} . Цей факт дає підстави оцінювати якість функціонування системи керування (2.1), (2.7), (2.8) локальним показником у формі точної верхньої межі евклідової норми $\|e_n\|_2$ вектора похибок системи, визначеним як

$$J_n := \sup_{\substack{h_n : \|h_n\|_2 \leq \bar{h} \\ \nabla v_{n-1} : v_{n-1}, v_{n-2} \in \Omega}} \|e_n\|_2. \quad (2.15)$$

Задача тепер полягає в тому, аби знайти оператор χ , який фігурує у рівнянні (2.7), з умови мінімуму функціонала J_n виду (2.15) на множині всіх можливих відображень $\chi(e_{n-1}) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^r$:

$$J_n = J_n^0 := \inf_{\chi(e_{n-1})} J_n. \quad (2.16)$$

У такій постановці цю задачу вправі інтерпретувати як оптимізаційну задачу керування.

Окрім розв'язання задачі оптимізації (2.16) одночасно вимагається також, аби регулятор (2.7), (2.8) забезпечував граничну обмеженість послідовності $\{u_n\}$ у формі

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \leq C_u < \infty \quad (2.17)$$

з деякою сталою C_u (це суттєвий момент). А при виконанні (2.17) і $\{v_n\}, \{y_n^0\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_m$ в силу (2.1) гарантується гранична обмеженість $\{e_n\}$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|e_n\| \leq C_e < \infty, \quad (2.18)$$

де C_e – деяка стала.

Задачу виконання вимог (2.17), (2.18) прийнято називати задачею про дисипативність системи (2.1), (2.7), (2.8) за парою $\{u_n, y_n\}$ [38, пп. 3.1.5°, 3.1.8.°]. (В західній літературі властивості (2.17), (2.18) пов'язують з поняттям стійкості в термінах «обмежений вхід – обмежений вихід» (BIBO stability); див. [142, с. 377].)

2.2. Синтез оптимального регулятора за відсутності збурень. Метод псевдооберненої моделі

Нехай спочатку $\det B \neq 0$, а $v_n \equiv 0_m$, де 0_m – позначення нульового m -вимірного вектора, взяте з [143, с. 9] (ідеальний випадок). В цьому випадку рівняння об'єкта (2.1) набуває вигляду

$$y_n = B u_{n-1}. \quad (2.19)$$

Використовуючи далі техніку побудови оптимального регулятора для керування багатозв'язним дискретним об'єктом (2.19), запозичену з [38, п. 3.2.3°], покладемо в рівнянні (2.14) [...] = 0, де для скорочення запис «...» позначає вираз, що міститься в квадратних дужках правої частини цього рівняння. Тоді отримаємо

$$\chi(e_{n-1}) = B^{-1} e_n, \quad (2.20)$$

де B^{-1} позначає матрицю, обернену до матриці B . Якщо тепер переписати співвідношення (2.20) для моменту n і підставити його в (2.7), то прийдемо до закону керування

$$u_n = u_{n-1} + B^{-1}e_n, \quad (2.21)$$

при якому

$$e_n = h_n \quad \forall n \in N_+, \quad (2.22)$$

звідки в силу (2.11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|e_n\|_2 \leq \bar{h} < \infty$.

Неважко бачити, що закон керування (2.21) якраз реалізує відомий метод оберненого оператора, який в свій час пропонувався в [69, 126] на евристичному рівні.

З виразів (2.22), (2.10) негайно випливає, що при побудові системи керування об'єктом (2.19) за методом оберненої моделі кожна i -а вихідна змінна в точності повторює її задане значення із запізнюванням на один такт:

$$y_n^{(i)} \equiv y_{n-1}^{0(i)} \quad (i = 1, \dots, m).$$

При цьому, як показано в роботі [12], справедлива наступна оцінка зверху норми вектора керувальних дій:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \leq \|B^{-1}\| \sup_{n \in N_+} \|y_n^0\| < \infty.$$

Отже, класичний метод оберненого оператора забезпечує виконання вимог (2.17), (2.18) з константами $C_u = \|B^{-1}\| \sup_{n \in N_+} \|y_n^0\|$, $C_e = \bar{h}$.

Схема алгоритму, який реалізує закон керування (2.21), зображена на рис. 2.2. Цей алгоритм включає наступні кроки:

Крок 1. Початок

Крок 2. Ініціалізація параметрів об'єкта (елементів матриці B) та інтервалу квантування за часом T_0 .

Крок 3. Обчислення матриці B^{-1} , оберненої до матриці B .

Крок 4. Для першого дискретного моменту часу $n=1$ і всіх наступних моментів часу виконувати кроки 4 – 10.

Крок 5. Ініціалізація компонент $y_n^{0(1)}, \dots, y_n^{0(m)}$ вектора бажаних значень y_n^0 вихідних змінних.

Крок 6. Вимірювання та запам'ятовування компонент $y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(m)}$ вектора вихідних змінних y_n в n -й момент часу.

Крок 7. Обчислення компонент $e_n^{(1)}, \dots, e_n^{(m)}$ вектора похибки системи e_n за формулою (2.8).

Крок 8. Обчислення вектора приросту керувальних дій $\nabla u_n := u_n - u_{n-1}$ за формулою

$$\nabla u_n = B^{-1} e_n. \quad (2.23)$$

Крок 9. Накопичення компонент вектора керувальних дій u_n за формулою

$$u_n^{(i)} = u_{n-1}^{(i)} + \nabla u_n^{(i)} \quad (i = 1, \dots, r). \quad (2.24)$$

Крок 10. Запам'ятовування компонент вектора керувальних дій u_n протягом інтервалу часу $[nT_0, (n+1)T_0)$.

Крок 11. Перехід до $(n+1)$ -го моменту часу і повернення до кроку 3.

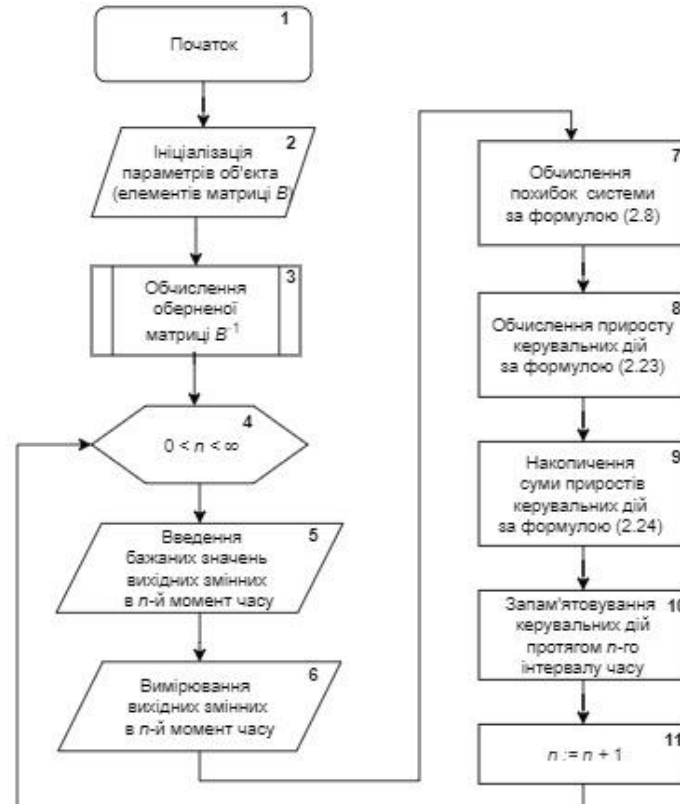


Рисунок 2.2 – Схема алгоритму керування об'єктом (2.19) за методом оберненої моделі

На рис. 2.3 зображена структурна схема замкненої дискретної системи керування (2.19), (2.21), (2.8) лінійним багатозв'язним об'єктом без збурень. В цій схемі регулятор будується послідовним з'єднанням оберненої моделі і дигратора (дискретного інтегратора), що здійснює операцію накопичення суми

$$u_n = \sum_{k=1}^n \nabla u_k, \quad (2.25)$$

де $\nabla u_n := u_n - u_{n-1}$ – векторний вихід оберненої моделі, який визначається формулою (2.23).

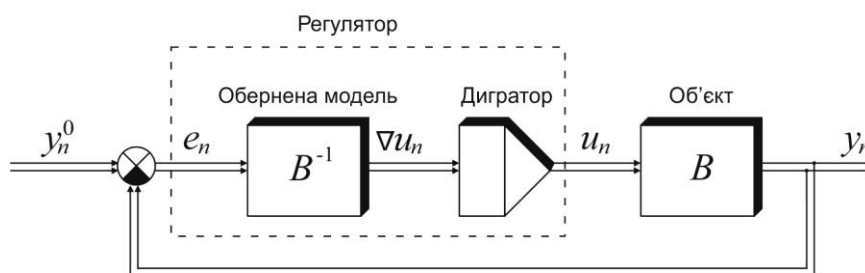


Рисунок 2.3 – Структурна схема системи керування, побудованої за методом оберненої моделі

Нехай тепер B – вироджена або прямокутна $m \times r$ -матриця ($r \leq m$), а, як і раніше, $v_n \equiv 0_m$. В цьому випадку законом керування (2.21) скористатися вже не можна, оскільки обернена матриця B^{-1} не існує. Інтуїтивно здається, що тепер замість оберненої матриці B^{-1} , що фігурує в (2.21), слід брати узагальнену обернену (псевдообернену) матрицю B^+ (матриці P^+ псевдообернена до довільної матриці P визначається загальною формулою

$$P^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} (P^T P + \delta^2 I)^{-1} P^T, \quad (2.26)$$

наведеною в [144, теорема 3.4]). При такому підході закон керування об'єктом (2.19) з повною інформацією про матрицю B має набути вигляду

$$u_n = u_{n-1} + B^+ e_n. \quad (2.27)$$

Проте така, на перший погляд, приваблива ідея зовсім не може гарантувати, що замкнена система, побудована на основі матриці B^+ , псевдооберненої до матриці B , буде щонайменше стійкою. Тому виникає потреба дослідження системи

керування, в якій закон керування (2.21) замінено на закон керування (2.27). Виявляється, що псевдообернений регулятор (2.27), (2.8) дійсно здатен забезпечити стійкість (при $y_n^{0(i)} \equiv \text{const} \quad \forall i = 1, \dots, m$) та дисипативність (при $y_n^{0(i)} \neq \text{const} \quad \forall i = 1, \dots, m$) замкненої системи керування. Цей факт встановлює наступне твердження [12].

Твердження 2.1. Нехай матриця B – відома вироджена або прямокутна матриця. Тоді за умов (2.9) та $v_n \equiv 0_m$ замкнена система керування (2.19), (2.8), (2.27) буде мати наступні властивості:

1) для будь-якої матриці $B \in \mathbf{R}^{m \times r}$ положення рівноваги $\{u^e, y^e\}$ цієї системи завжди існує, причому

$$u^e = (I_r - B^+ B) \bar{u} + B^+ y^0, \quad (2.28)$$

$$y^e = B B^+ y^0, \quad (2.29)$$

де \bar{u} – довільний вектор з \mathbf{R}^r (тут і надалі I_r – одинична $r \times r$ -матриця);

2) система (2.19), (2.8), (2.27) дисипативна за парою $\{u_n, y_n\}$ з наступними оцінками зверху норм векторів u_n і e_n :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \leq \|I_r - B^+ B\| \|u_0\| + \|B^+\| \sup_{n \in N_+} \|y_n^0\| < \infty, \quad (2.30)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|e_n\| \leq \|I_m - B B^+\| \sup_{n \in N_+} \|y_n^0\| + \bar{h} < \infty; \quad (2.31)$$

3) якщо $y_n^{0(i)} \equiv \text{const} \quad \forall i = 1, \dots, m$, то керування, яке описується лінійним зворотним зв'язком (2.27), буде оптимальним за критерієм (2.15).

Доведення. Доведемо спочатку положення 1) цього твердження. Згідно з [129, с. 19] положення рівноваги замкненої системи керування (2.19), (2.8), (2.27), задане парою $\{u^e, y^e\}$, де $y^e = B u^e$, а u^e при $y_n^0 \equiv y^0 (\neq 0)$ визначається як розв'язок векторного рівняння

$$B^+(y^0 - B u) = 0, \quad (2.32)$$

відносно u . Покажемо, що це рівняння має розв'язок $u = u^e$ і визначається виразом (2.28). Дійсно, підстановкою $u = u^e$ в ліву частину рівняння (2.32),

переконаємося, що в силу (2.28) з врахуванням одного зі співвідношень Пенроуза [145, п. 6.50]

$$BB^+B = B, \quad B^+BB^+ = B^+ \quad (2.33)$$

це рівняння задовольняється. Підставляючи (2.28) у вираз $y^e = Bu^e$, негайно отримуємо (2.29). Таким чином, пара $\{u^e, y^e\}$ дійсно визначає положення рівноваги системи (2.19), (2.8), (2.27) і положення 1) твердження доведено.

Аби довести положення 2), запишемо співвідношення

$$u_n = u_{n-1} - B^+ y_n + B^+ y_n^0, \quad (2.34)$$

отримане простою підстановкою виразу (2.8) в (2.27). Враховуючи далі рівняння об'єкта (2.19), приведемо (2.34) до вигляду

$$u_n = (I_r - B^+B)u_{n-1} + B^+ y_n^0. \quad (2.35)$$

У силу (2.33) і того факту, що $Q_u := I_r - B^+B$ – ідемпотентна матриця [144, п.3.7.6], послідовне використання співвідношення (2.35) остаточно дає

$$u_n = (I_r - B^+B)u_0 + B^+ y_n^0. \quad (2.36)$$

На підставі (2.36) одержуємо оцінку

$$\sup_{n \in N_+} \|u_n\| \leq \|I_r - B^+B\| \|u_0\| + \|B^+\| \|y_n^0\| < \infty.$$

Звідси в силу (2.9) приходимо до граничної обмеженості послідовності $\{u_n\}$, вираженої у формі (2.30). Підставляючи тепер вираз (2.36) в (2.19) і використовуючи знову співвідношення Пенроуза (2.33), можна записати

$$y_n = BB^+ y_{n-1}^0,$$

звідки з врахуванням виразу (2.8) вектора e_n знаходимо

$$e_n = y_n^0 - BB^+ y_{n-1}^0.$$

В силу (2.10) останнє співвідношення приводиться до вигляду

$$e_n = (I_m - BB^+) y_{n-1}^0 + h_n. \quad (2.37)$$

З (2.37) маємо оцінку

$$\sup_{n \in N_+} \|e_n\| \leq \|I_m - BB^+\| \|y_{n-1}^0\| + \bar{h} < \infty,$$

яка при $n \rightarrow \infty$ приводить до (2.31). Звідси прямо слідує, що система керування (2.19), (2.8), (2.27) стійка за станом (u_n, y_n) для будь-якої матриці $B \in \mathbf{R}^{m \times r}$, тобто положення 2) твердження доведено.

Доведемо далі положення 3). З цією метою, виходячи з рівняння об'єкта (2.19) і враховуючи вирази (2.8), (2.7) для похибки та змінної u_n , можна записати

$$e_n = e_{n-1} - B \nabla u_{n-1}. \quad (2.38)$$

З іншого боку, в силу прийнятої стратегії керування (2.7) маємо $\nabla u_{n-1} = \chi(e_{n-1})$, звідки

$$e_n = e_{n-1} - B \chi(e_{n-1}). \quad (2.39)$$

Порівнюючи (2.38) з (2.39), бачимо, що при даному e_{n-1} вектор похибок системи в наступний n -й момент часу буде залежати лише від вибору оператора χ . А це згідно з (2.7) означає, що

$$\min_{u_{n-1} \in \mathbf{R}^r} \|e_n\| = \min_{\chi(e_{n-1})} \|e_{n-1} - B \chi(e_{n-1})\|.$$

Відповідно до одного результату, який можна знайти в [144, теорема 3.12, положення (b)], маємо

$$\min_{\chi(e_{n-1})} \|e_{n-1} - B \chi(e_{n-1})\|_2 = \|e_{n-1} - BB^+ e_{n-1}\|_2$$

Отже, мінімізація функціонала (2.15) приводить до лінійного відображення

$$\chi(e_n) = B^+ e_n.$$

Таким чином, регулятор (2.27) забезпечує мінімізацію функціонала якості (2.16) і є оптимальним. На цьому доведення твердження 2.1 завершується.

Наслідок 2.1. В умовах, коли $y_n^{0(i)} \equiv y^{0(i)} (= \text{const}) \quad \forall i = 1, \dots, m$, для замкненої системи (2.19), (2.8), (2.27) справедливі оцінки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_2 \leq \|u_0\|_2 + \|B^+\|_2 \|y^0\|_2 < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_2 \leq \|y^0\|_2 < \infty.$$

Такі оцінки негайно випливають з (2.30) та (2.31) з врахуванням того, що в даних умовах $\sup_{n \in N_+} \|y_n^0\|_2 = \|y^0\|_2$, $\bar{h} = 0$ (в силу (2.10), (2.11)), а $\|I_r - B^+ B\|_2 = 1$ та $\|I_m - BB^+\|_2 = 1$.

Зауваження 2.3. Відомо [144, теорема 3.4], що для будь-якої матриці B завжди існує її узагальнена обернена (псевдообернена) матриця B^+ виду (2.26); при цьому $B^+ = B^{-1}$ в умовах, коли $r = m$, а $\det B \neq 0$. В цих умовах закон керування (2.27) негайно переходить в закон (2.21), що реалізує метод оберненої моделі. Якщо ж $r < m$, а $\text{rank } B = r$ (B – матриця повного рангу), згідно з [144, п. 3.5.3] замість формули (2.26) пропонується більш проста формула

$$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T. \quad (2.40)$$

Звертає на себе увагу той факт, що в умовах, коли B^+ має вигляд (2.40), процедура (2.7) визначає оптимальний регулятор, синтезований раніше в [129, с. 27].

Зауваження 2.4. Згідно з (2.28) множина E положень рівноваги замкненої системи керування (2.19), (2.8), (2.27) може бути представлена як $E = E_u \times E_y$, де

$$E_u = \{u^e : u^e = (I_r - B^+ B)\bar{u} + B^+ y^0, \bar{u} \in \mathbf{R}^r\},$$

а $E_y = \{B B^+ y^0\}$. Якщо при цьому B – матриця неповного рангу, то множина E_u – зв'язна неодноточкова множина в \mathbf{R}^r (лінійний многовид), розмірність якої $\dim E_u$ визначається як $0 < \dim E_u < r$. Якщо ж B – матриця повного рангу, а y^0 – деякий фіксований вектор, то $E_u = \{u^e : u^e = B^+ y^0\}$ – одноточкова множина ($\dim E_u = 0$), оскільки $B^+ B = I_r$ (згідно з [144, теорема 3.12, положення (b)]); при цьому $u^e = B^{-1} y^0$ коли $r = m$.

Схема алгоритму керування об'єктом (2.1) за законом (2.27) зображена на рис. 2.4. Цей алгоритм включає наступні кроки:

Крок 1. Початок.

Крок 2. Ініціалізація параметрів об'єкта (елементів матриці B) та інтервалу квантування за часом T_0 .

Крок 3. Обчислення матриці B^+ , псевдооберненої до матриці B , за формулою (2.26).

Крок 4. Для першого дискретного моменту часу $n=1$ і всіх наступних моментів часу виконувати кроки 4 – 10.

Крок 5. Ініціалізація компонент $y_n^{0(1)}, \dots, y_n^{0(m)}$ вектора бажаних значень y_n^0 вихідних змінних.

Крок 6. Вимірювання та запам'ятовування компонент $y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(m)}$ вектора вихідних змінних y_n в n -й момент часу.

Крок 7. Обчислення компонент $e_n^{(1)}, \dots, e_n^{(m)}$ вектора похибки системи e_n за формулою (2.8).

Крок 8. Обчислення вектора приросту керувальних дій $\nabla u_n := u_n - u_{n-1}$ за формулою

$$\nabla u_n = B^+ e_n. \quad (2.41)$$

Крок 9. Накопичення компонент вектора керувальних дій u_n за формулою (2.24).

Крок 10. Запам'ятовування компонент вектора керувальних дій u_n протягом інтервалу часу $[nT_0, (n+1)T_0)$.

Крок 11. Перехід до $(n+1)$ -го моменту часу і повернення до кроку 3.

Структурна схема системи керування (2.19), (2.8), (2.27) зображена на рис. 2.5.

Подібно до закону керування (2.21), реалізація закону (2.27) передбачає використання послідовного з'єднаних псевдооберненої моделі об'єкта для знаходження приросту керувальних дій ∇u_n в кожний n -й дискретний момент часу у вигляді (2.41) і дигратора (дискретного інтегратора), що являє собою суматор накопичуючого типу, призначений для формування керувальних дій за формулою (2.25).

Для ілюстрації працездатності методу псевдооберненої моделі і експериментального підтвердження положень твердження 2.1 проводилося моделювання системи (2.19), (2.8), (2.27). Результати одного з модельних експериментів наведені нижче.

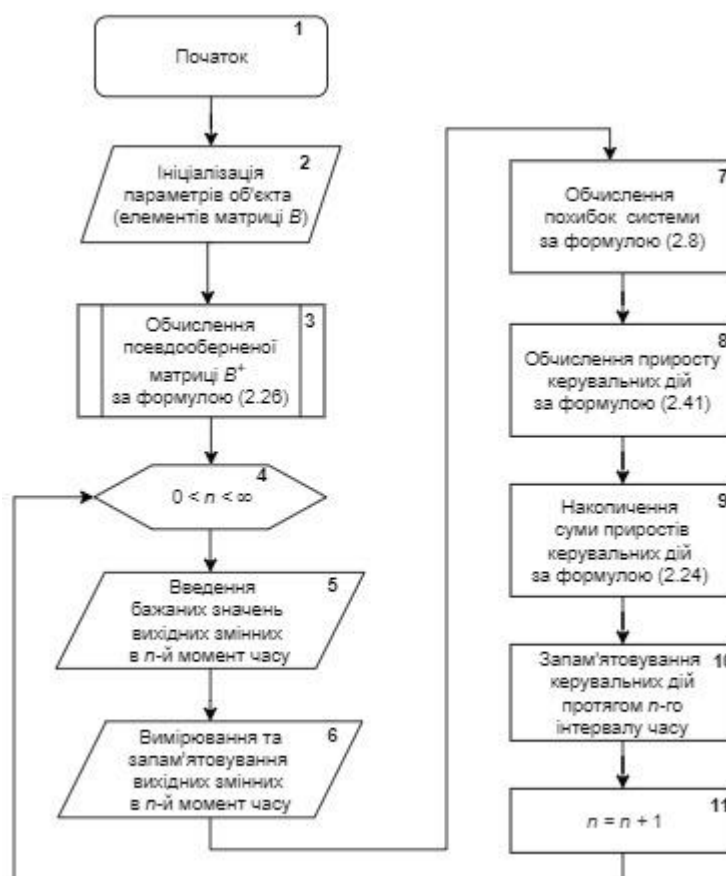


Рисунок 2.4 – Схема алгоритму керування за методом псевдооберненої моделі

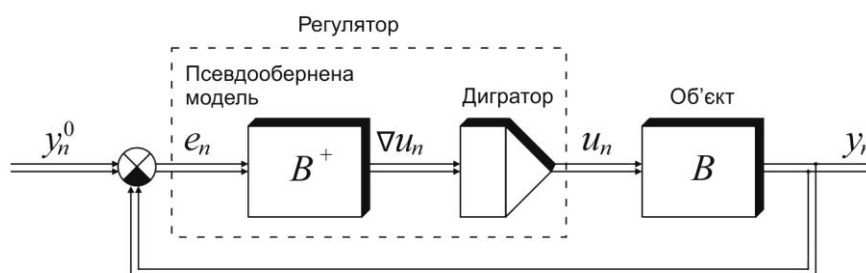


Рисунок 2.5 – Структурна схема системи керування, побудованої за методом псевдооберненої моделі

Модельний експеримент 2.1. В цьому експерименті було покладено

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \quad (\det B = 0),$$

що дало

$$B^+ = \frac{1}{588} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Підпоследовність векторів $\{y_{n_k}^0\} = y_1^0, y_5^0, y_{25}^0, y_{35}^0, y_{55}^0, y_{70}^0$ генерувалась як обмежена псевдовипадкова послідовність, при цьому $y_n^0 = y_{n_k}^0$ для всіх $n \in [n_k, n_{k+1} - 1]$. Тривалість модельного експерименту складала 100 кроків.

Результати моделювання показані на рис. 2.6.

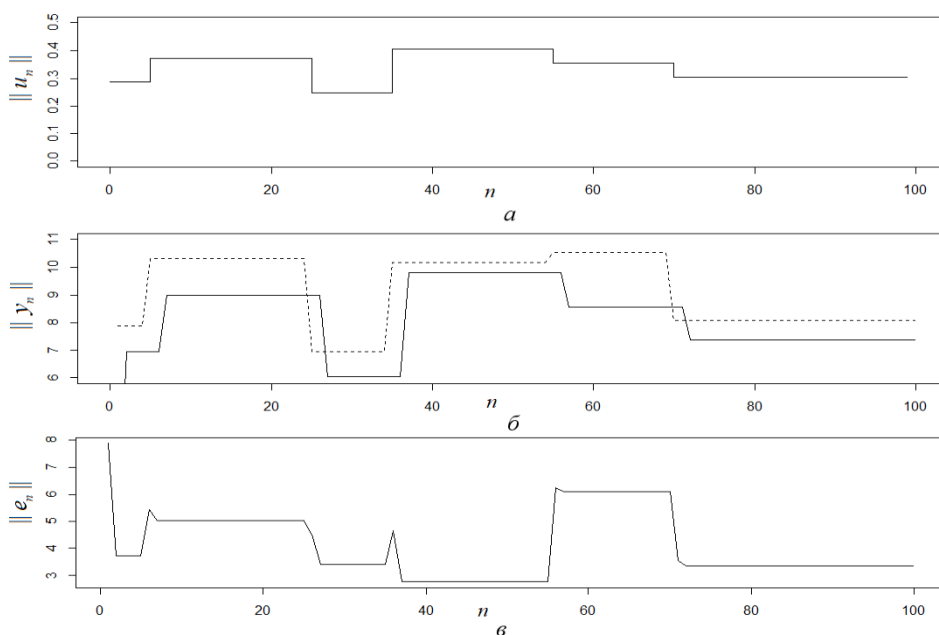


Рисунок 2.6 – Динамічні процеси в системі (2.19), (2.27), (2.8) в умовах модельного експерименту 2.1: $a - \|u_n\|$; $b - \|y_n\|$; $c - \|e_n\|$

Як видно з рис. 2.6, побудована система працездатна й досить ефективна. Синтезований регулятор дозволяє мінімізувати норму вектора відхилень вихідних величин від заданих значень. Таким чином метод псевдооберненої моделі, який реалізує алгоритм (2.27), розв'язує поставлену оптимізаційну задачу.

2.3. Синтез оптимального регулятора в умовах невимірюваних обмежених збурень

Припустимо тепер, що B – квадратна вироджена або прямокутна матриця, яка задовольняє умову (2.3), а $v_n \neq 0_m$. У цьому випадку об'єкт буде описуватися рівнянням (2.1). Для керування таким об'єктом спробуємо застосувати метод

псевдооберненої моделі, використовуючи закон керування (2.27). Тоді замкнена система керування буде описуватися рівняннями (2.1), (2.8), (2.27). Структурна схема цієї системи зображена на рис. 2.7.

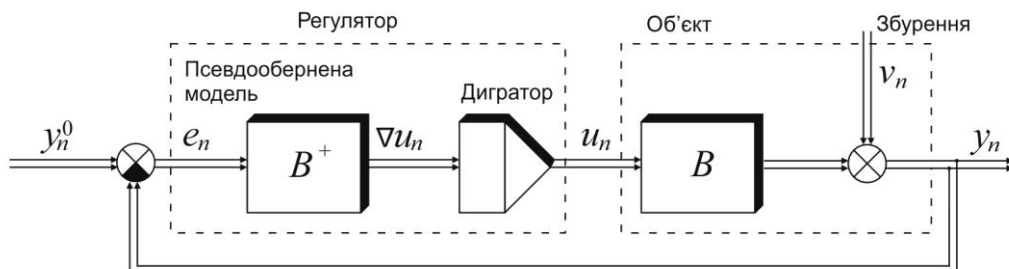


Рисунок 2.7 – Структурна схема системи керування (2.1), (2.8), (2.27)
(при повній інформації)

Поведінку замкненої системи керування (2.1), (2.8), (2.27) встановлює наступне твердження [9].

Твердження 2.2. Припустимо, що виконані умови (2.4), (2.9). Нехай $r < m$ або $r = m$, але $\det B = 0$. Введемо матриці $Q_u := I_r - B^+ B$ та $Q_e := I_m - B B^+$. Тоді:

1) замкнена система керування (2.1), (2.8), (2.27) дисипативна за парою $\{u_n, y_n\}$, у розумінні вимог (2.17), (2.18), причому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_2 \leq \|Q_u\|_2 \|u_0\|_2 + \|B^+\|_2 \left(\sup_{n \in N_+} \|y_{n-1}^0\|_2 + \frac{1}{2} \text{diam } \Omega \right) < \infty; \quad (2.42)$$

2) якщо $y_n^{0(i)} = y^{0(i)} \equiv \text{const}$ ($i = 1, \dots, m$), то керування за законом (2.27) дає

$$(i = 1, \dots, m) \quad (2.43)$$

для показника якості (2.15);

3) при $y_n^{0(i)} \equiv \text{const}$ ($i = 1, \dots, m$) задача оптимізації керування має розв'язок, коли множина належності вектора v_n являє собою кулю $\Omega = \{v : \|v\|_2 \leq \varepsilon\}$ в \mathbf{R}^m , причому на оптимальному керуванні, яке визначається лінійним зворотним зв'язком (2.27), справедлива оцінка

$$J_n = J_n^0 \leq \|Q_e\|_2 \|e_0\|_2 + (1 + \|Q_e\|_2) \text{diam } \Omega. \quad (2.44)$$

Доведенню цього твердження передують кілька лем, що мають самостійний інтерес і опубліковані в [9].

Лема 2.1. Нехай v', v'' – довільні вектори, що незалежно пробігають множину Ω . В умовах припущення (2.4) вектор $\nabla v := v' - v''$ буде пробігати симетричну множину $\Omega' = 2\Omega$, причому

$$\text{diam } \Omega' = 2\text{diam } \Omega. \quad (2.45)$$

Доведення леми 2.1 базується на тому, що в силу визначень векторів v', v'' з Ω і множини $\Omega' = \Omega + (-\Omega)$, тут символ “+” означає відому в теорії множин суму за Мінковським, можна записати $\Omega' \ni \nabla v$. Але в силу симетрії Ω маємо $-\Omega = \Omega$. Тому $\Omega' = 2\Omega$ – симетрична множина.

Справедливість рівності (2.45) випливає прямо з того факту, що Ω, Ω' – симетричні множини. Лема 2.1 доведена.

Лема 2.2. Для будь-якого вектора $x \in \mathbf{R}^m$ й будь-якого іншого вектора ∇v з $\Omega' = 2\Omega$, незалежного від x , справедлива оцінка

$$\sup_{\nabla v \in \Omega'} \|x + \nabla v\|_2 \geq +\sqrt{\|x\|_2^2 + (\text{diam } \Omega)^2}.$$

Лема 2.2 являє собою деяку модифікацію леми 3.Д.1, сформульованої та доведеної в [38]; вона суттєво використовує властивість обмеженості й симетричності множини Ω' , встановлену в лемі 2.1.

Лема 2.3. Якщо припущення (2.4) виконано, то в умовах $r < m$ або $r = m$, але $\det B = 0$ при $y_n^{0(i)} = y^{0(i)} \equiv \text{const}$ для всіх $i = 1, \dots, m$ і будь-якому керуванні виду (2.7) для функціонала (2.15) справедлива оцінка знизу

$$J_n \geq +\sqrt{\|Q_e e_{n-1}\|_2^2 + (\text{diam } \Omega)^2}. \quad (2.46)$$

Доведення леми 2.3. Переконаємося в справедливості оцінки (2.46). З цією метою на підставі (2.1), (2.7) і (2.8) при $y_n^0 \equiv y^0 = [y_n^{0(1)}, \dots, y_n^{0(m)}]^T$ запишемо

$$e_n = [e_{n-1} - B\chi(e_{n-1})] + (-\nabla v_n). \quad (2.47)$$

Враховуючи що змінна $e_{n-1} - B\chi(e_{n-1})$ не залежить від ∇v_n , згідно з (2.47) за лемою 2.2 і означенням інфімуму $\inf \|e_{n-1} - B\chi(e_{n-1})\|_2$ маємо

$$\sup_{\nabla v \in \Omega'} \|e_n\|_2 \geq + \sqrt{\inf_{\chi: e_{n-1} \rightarrow \nabla u_n} \|e_{n-1} - B\chi(e_{n-1})\|_2^2 + (\text{diam } \Omega)^2}. \quad (2.48)$$

Згідно з [144, теорема 3.4], інфімум, який фігурує в правій частині (2.48), завжди досягається при $\chi(e_{n-1}) = B^+ e_{n-1}$. З врахуванням (2.48) і того, що

$$\sup_{\nabla v \in \Omega'} \|e_n\|_2 = \sup_{\{v_n\}: \nabla v_n \in \Omega'} \|e_n\|_2, \text{ за означенням матриці } Q_e \text{ та функціонала (2.15)}$$

негайно впливає (2.46). Лема 2.3 доведена.

Повернемося до доведення твердження 2.2. З цією метою спочатку згадаємо, що при $v_n \equiv 0_m$ положення рівноваги $\{u^e, y^e\}$ завжди існує. Далі використовуємо співвідношення Пенроуза (2.33), а також рівняння (2.30) рівноваги системи (2.1), (2.8), (2.27), одержимо рівняння системи у відхиленнях від положення рівноваги u^e у формі

$$u_n - u^e = Q_u (u_0 - u^e) - B^+ v_{n-1}. \quad (2.49)$$

Підстановка виразу (2.31) в рівняння (2.49) з врахуванням (2.6) негайно приводить до оцінки (2.42), що означає, що $\{u_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_r$. На підставі рівняння

$$(2.1) \text{ маємо } \{y_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_m, \text{ оскільки } \{v_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_m. \text{ А це доводить}$$

справедливість положення 1) твердження 2.2.

Доведемо тепер положення 2) цього твердження. Використовуючи результат, що містяться в лемі 2.3, відразу ж переконуємося в справедливості першої нерівності, яка фігурує в співвідношеннях (2.43).

Вважаючи далі $\chi(e_{n-1}) = B^+ e_{n-1}$, в силу відомої з лінійної алгебри властивості $\|P_1 + P_2\| \leq \|P_1\| + \|P_2\|$ норм довільних матриць P_1, P_2 на підставі (2.47) одержуємо наступну оцінку зверху функціонала J виду (2.15):

$$J_n \leq \|Q_e\|_2 \|e_{n-1}\|_2 + \text{diam } \Omega. \quad (2.50)$$

Об'єднання нерівностей (2.46) і (2.50) приводить до (2.43). Тим самим установлюється справедливість положення 2) твердження 2.2.

Доведемо тепер положення 3) цього твердження. З леми 2.1 випливає, що $\nabla v_n \in \Omega'$, де $\Omega' = \{ \nabla v : \|\nabla v_n\|_2 \leq \text{diam } \Omega \}$ – куля у \mathbf{R}^m . Звідси в силу (2.47) і означення (2.15) справедлива рівність

$$J_n = \|e_{n-1} - B\chi(e_{n-1})\|_2 + \sup_{\nabla v_n \in \Omega'} \|\nabla v_n\|_2, \quad (2.51)$$

оскільки при кожному e_{n-1} завжди знайдеться вектор ∇v з Ω' такого ж напрямку, як і вектор $e_{n-1} - B\chi(e_{n-1})$. За означенням функціонала J^0 згідно з (2.51) можна записати

$$J_n^0 = \inf_{\chi: e_{n-1} \rightarrow \nabla u_n} \|e_{n-1} - B\chi(e_{n-1})\|_2 + \sup_{\nabla v_n \in \Omega'} \|\nabla v_n\|_2. \quad (2.52)$$

Оскільки $\inf_{\chi: e_{n-1} \rightarrow \nabla u_n} \|e_{n-1} - B\chi(e_{n-1})\|_2$ досягається при $\chi(e_n) = B^+ e_n$, то на підставі (2.52) отримуємо закон керування (2.27), який розв'язує оптимізаційну задачу (2.16).

Для завершення доведення залишається тільки встановити справедливість оцінки (2.44). З цією метою розглянемо рівняння

$$e_n = Q_e e_{n-1} - \nabla v_n, \quad (2.53)$$

що випливає з (2.47) при виконанні (2.27). Оскільки Q_e – ідемпотентна матриця [144, п. 3.7.6], то на підставі (2.53) можна записати $e_n = Q_e e_0 - Q_e \nabla v_{n-1,0} - \nabla v_n$. Звідси з врахуванням означень функціоналів J_n , J_n^0 і властивості (2.45) приходимо до оцінки (2.44). Твердження доведено.

Зауваження 2.5. У випадку, коли B – матриця повного рангу і $\|Q_u\|_2 = 0$, оскільки, як відомо [144, теорема 3.12 b)], $B^+ B = I_r$, вираз (2.42) дещо спрощується:

$$\sup_{n \in N_+} \|u_n\|_2 \leq \|B^+\|_2 \left(\sup_{n \in N_+} \|y_{n-1}^0\|_2 + \frac{1}{2} \text{diam } \Omega \right) < \infty.$$

Зазначимо, що коли $y_n^{0(i)} = y^{0(i)} \equiv \text{const}$, тобто коли $h_n \equiv 0_m$, а $y^0 \in \text{im } B$, то $J_n \leq \text{diam } \Omega$, як і у випадку квадратної невинродженої матриці коефіцієнтів підсилення.

Встановлену в твердженні 2.2 властивість (2.43) наочно ілюструє рис. 2.8, на якому $R_{n-1}^1 = \|Q_e e_{n-1}\|_2$, $R_n^2 = +\sqrt{(R_{n-1}^1)^2 + (\text{diam } \Omega)^2}$, $R_n^3 = R_{n-1}^1 + \text{diam } \Omega$.

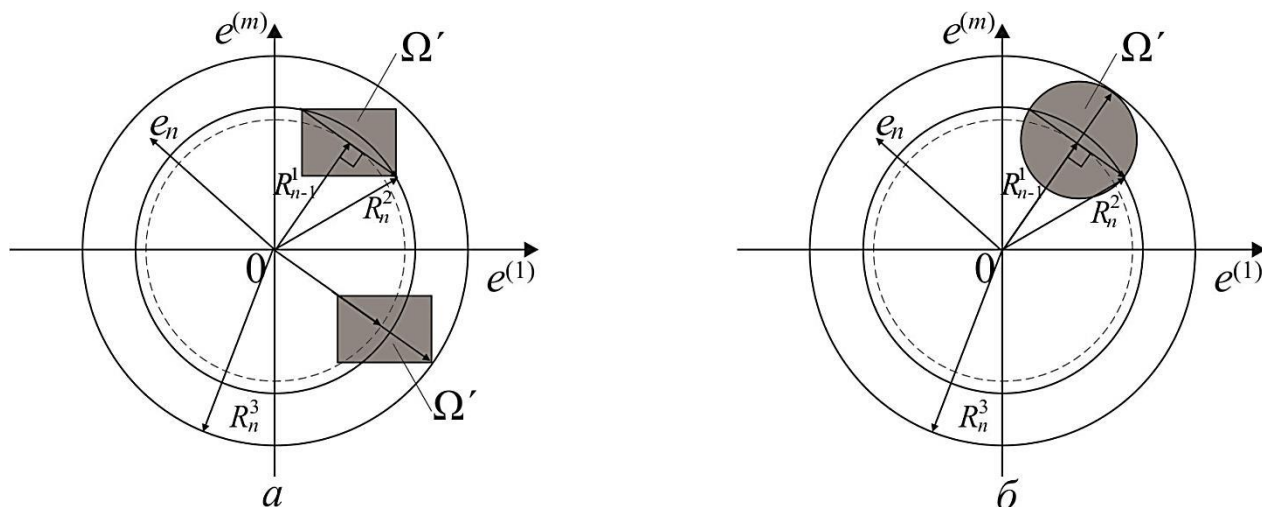


Рисунок 2.8 – Геометрична інтерпретація властивості (2.43) для двох можливих випадків: $a - \Omega = [-2\varepsilon^{(1)}, 2\varepsilon^{(1)}] \times \dots \times [-2\varepsilon^{(m)}, 2\varepsilon^{(m)}]$; $b - \Omega' = \{v' : \|v'\|_2 \leq 2\varepsilon\}$

Для підтвердження властивостей, встановлених твердженням 2.2, проводилася серія модельних експериментів із системою (2.1), (2.8), (2.27). Приведемо результати одного з них.

Модельний експеримент 2.2. У цьому експерименті була взята така матриця коефіцієнтів підсилення:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad (\det B = 0).$$

Тоді

$$B^+ = \frac{1}{702} \begin{pmatrix} 34 & 52 & -16 \\ 80 & 143 & -17 \\ -20 & 52 & 92 \end{pmatrix}.$$

У якості вектора заданих значень вихідних величин взято вектор $y^0 = [4, 11, 9]^T$. Послідовності компонент вектора v_n моделювалися як послідовності псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[-1, 1]$ таким чином, що $\|v_n\|_2 \leq \sqrt{3}$.

Результати модельного експерименту наведені на рис. 2.9.

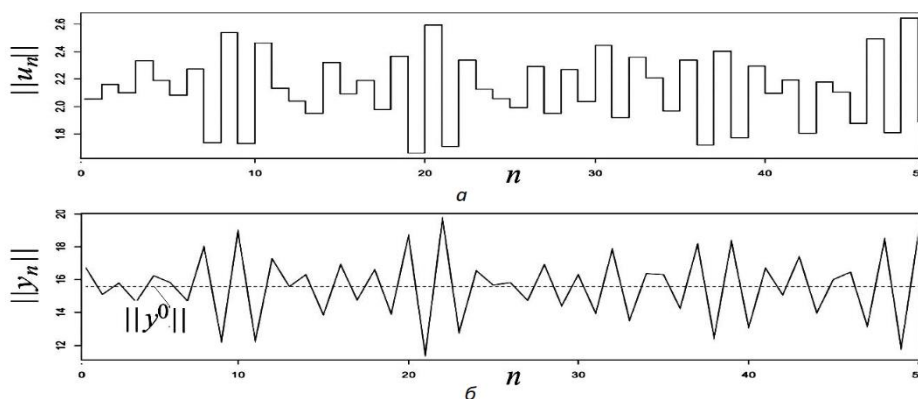


Рисунок 2.9 – Динамічні процеси в системі (2.1), (2.8), (2.27) в умовах модельного експерименту 2.2: $a - \|u_n\|_2$; $b - \|y_n\|_2$

Проведене дослідження дає підстави стверджувати, що метод псевдооберненої моделі узагальнює всі відомі раніше результати, що стосуються оптимізації систем керування багатозв'язними об'єктами виду (2.1) з довільними матрицями B коефіцієнтів підсилення у випадку, коли її елементи апріорі відомі конструктору системи, див. [9].

Висновки до розділу 2

1. За відсутності збурень в замкненій системі керування, що містить псевдообернений регулятор, гарантується існування положень рівноваги системи незалежно від рангу матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта, причому у випадку, коли матриця коефіцієнтів підсилення має повний ранг, це положення рівноваги – одноточкова множина, а коли матриця коефіцієнтів підсилення має неповний ранг, ця множина – деякий лінійний багатовид.

2. При повній інформації про параметри об'єкта псевдообернений регулятор забезпечує стійкість замкненої системи керування за відсутності збурень та її дисипативність (граничну обмеженість всіх сигналів) в умовах, коли присутні збурення.

3. Якщо збурення відсутні, а в розпорядженні конструктора системи є повна інформація про всі коефіцієнти підсилення, то закон керування, побудований на основі псевдооберненої моделі об'єкта, формально синтезується шляхом розв'язання однієї оптимізаційної задачі, в якій критерієм якості функціонування

системи виступає такий локальний показник як точна верхня границя евклідової норми вектора похибок цієї системи в кожний дискретний момент часу.

4. За наявності збурень метод псевдооберненої моделі дозволяє розв'язати задачу оптимізації систем керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті з квадратними виродженими і прямокутними матрицями коефіцієнтів підсилення у випадку, коли множина можливих векторів збурень являє собою кулю.

5. Проведені моделювання синтезованої системи продемонстрували достатньо високу якість керування об'єктами без пам'яті, матриці коефіцієнтів підсилення яких можуть бути квадратними виродженими чи прямокутними.

6. Запропонований метод псевдооберненої моделі може розглядатися як деякий універсальний метод керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті при будь-яких матрицях коефіцієнтів підсилення цих об'єктів.

Результати розділу 2 опубліковані в [9 – 11, 16, 27 – 29, 31].

РОЗДІЛ 3 РОБАСТНЕ КЕРУВАННЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИМИ ОБ'ЄКТАМИ БЕЗ ПАМ'ЯТІ ЗА ПСЕВДООБЕРНЕНИМИ МОДЕЛЯМИ

3.1. Робастне керування лінійними об'єктами

3.1.1. Базові припущення. Постановка задачі. Нехай тепер матриця $B = (b^{(ij)})$, що фігурує в рівнянні об'єкта (2.1), являє собою $m \times r$ -матриця з елементами $b^{(ij)}$, які апріорі невідомі конструктору системи. Розглядається клас об'єктів, для яких виконується (2.3). Припустимо далі, що матриця B в (2.1) невідома, але відома замкнена обмежена множина Ξ , до якої вона належить. Нехай ця множина, яка описує невизначеність щодо матриці B в рівнянні (2.1) об'єкта, задана, як і в [90, с. 176], інтервальним матричним сімейством

$$\Xi = \{(b^{(ij)}): \underline{b}^{(ij)} \leq b^{(ij)} \leq \bar{b}^{(ij)}, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, r\}. \quad (3.1)$$

Додатково введемо вимогу

$$\underline{b}^{(ij)} \bar{b}^{(ij)} > 0 \quad \forall i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, r, \quad (3.2)$$

яка означає, що в матричному сімействі (3.1) кожний елемент $b^{(ij)}$ має один і той же знак.

Зафіксуємо деяку матрицю $B_0 = (b_0^{(ij)})$ і розглянемо можливість робастного керування об'єктом (2.1) за наявності параметричної невизначеності у формі (3.1). З цією метою спробуємо використати закон керування, що описується рівнянням

$$u_n = u_{n-1} + B_0^+ e_n, \quad (3.3)$$

яке отримується заміною в рівнянні (2.27) невідомої матриці B на деяку $m \times r$ -матрицю B_0 (останню доречно інтерпретувати як матрицю коефіцієнтів підсилення номінальної моделі об'єкта).

Структурна схема системи керування (2.1), (2.8), (3.3) зображена на рис. 3.1.

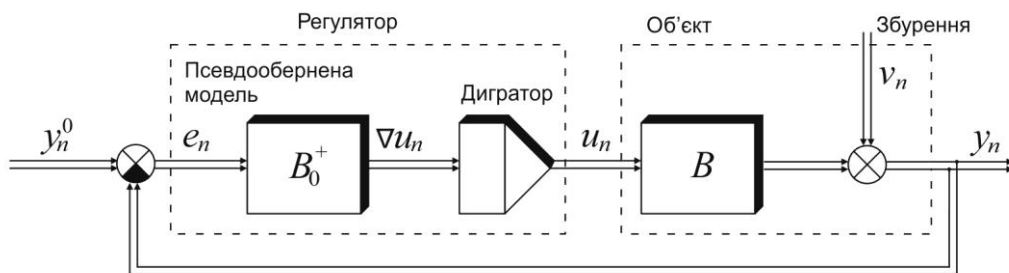


Рисунок 3.1 – Структурна схема системи керування (2.1), (2.8), (3.3)
в умовах невизначеності

Припустимо, що у випадку, коли $r = m$, що верхні та нижні оцінки елементів $b^{(ij)}$ $\bar{b}^{(ij)}$ матриці B в (3.1) задовольняють нерівності (3.2) і умові

$$\min\{|\underline{b}^{(ii)}|, |\bar{b}^{(ii)}|\} > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \max\{|\underline{b}^{(ik)}|, |\bar{b}^{(ik)}|\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

яку завжди можна перевірити. Тоді в силу теореми Адамара, відомої в англійській літературі як теорема Леві-Деспланка [143, частина III, п.2.1], для будь-якої матриці $B = (b^{(ij)})$ з елементами $b^{(ij)} \in [\underline{b}^{(ij)}, \bar{b}^{(ij)}]$ умова $\det B \neq 0$ неодмінно буде виконуватися, а значить, множина Ξ буде множиною квадратних невідроджених матриць. Невідродженість всіх матриць в множині Ξ також гарантується при виконанні такої умови:

$$\max_{i,j=1,\dots,m} |\underline{b}^{(ij)} - \bar{b}^{(ij)}| < \frac{2}{m \max_{B \in \Xi} \|B^{-1}\|},$$

Ця умова, яку також неважко перевірити, впливає з результатів, наведених в [90, лема 7.2], і відомих властивостей матричних норм [145, с.103]. Якщо множина Ξ містить лише невідроджені матриці, то в якості номінальної моделі об'єкта правомірно вибирати модель, у якій B_0 – довільна фіксована невідроджена матриця з множини Ξ . При цьому закон керування (3.3) набуває вигляду

$$u_n = u_{n-1} + B_0^{-1} e_n,$$

оскільки $B_0^+ = B_0^{-1}$.

Задача полягає у встановленні умов, за яких замкнена система (2.1), (2.8), (3.3) буде дисипативна (в розумінні виконання умов (2.17), (2.18)).

3.1.2. Аналіз положення рівноваги. Згідно з [128, с. 19] положення рівноваги замкненої системи керування, яка містить об'єкт (2.1) з матрицею $B \in \Xi$ і регулятор (2.8), (3.3) при $v_n \equiv 0_m$, визначається парою $\{u^e, y^e\}$, де $u = u^e$ – розв'язок не рівняння (2.32), а рівняння

$$B_0^+(y^0 - Bu) = 0_r,$$

переписаного в стандартній формі

$$B_0^+ Bu = B_0^+ y^0. \quad (3.4)$$

З цього рівняння випливає, що положення рівноваги неодмінно буде існувати не тільки в тривіальних випадках, коли $y^0 \in \ker B_0^+$ або $y^0 \in \text{im } B$, де $\ker P$ позначає ядро матриці P , а $\text{im } P$ – множину її образів [145, п. 6.24], але і при будь-якому $y^0 \in \mathbf{R}^m$, коли $r \times r$ -матриця $B_0^+ B$ не вироджена, тобто коли

$$\det B_0^+ B \neq 0, \quad (3.5)$$

незалежно від y^0 . Тим не менш, для виконання вимоги (3.5) необхідно, але зовсім ще недостатньо, аби матриці B і B_0 мали повний ранг: адже $\text{rank } P_1 P_2 \leq \min\{\text{rank } P_1, \text{rank } P_2\}$, а тому $\text{rank } B_0^+ B \leq r$ навіть при $\text{rank } B = \text{rank } B_0 = r$. Таким чином, якщо Ξ містить лише матриць повного рангу, а B_0 вибирається також як матриця повного рангу, то виконання вимоги (3.5) ще не гарантується.

Виявляється, що при певних умовах вимога (3.5) буде виконуватися для всіх $B \in \Xi$. Аби встановити цей факт, зафіксуємо деяку матрицю $B_0 = (b_0^{(ij)})$ повного рангу ($\text{rank } B_0 = r$) і визначимо матрицю

$$\Delta = B_0 - B. \quad (3.6)$$

Оскільки $b^{(ij)} \in [\underline{b}^{(ij)}, \bar{b}^{(ij)}]$, то в силу означення (3.1) множини Ξ згідно з (3.6) маємо

$$\Delta = \{(\delta^{(ij)}): \underline{\delta}^{(ij)} \leq \delta^{(ij)} \leq \bar{\delta}^{(ij)}\}, \quad (3.7)$$

де

$$\underline{\delta}^{(ij)} = b_0^{(ij)} - \bar{b}^{(ij)}, \quad \bar{\delta}^{(ij)} = b_0^{(ij)} - \underline{b}^{(ij)}. \quad (3.8)$$

Справедливий наступний результат.

Лема 3.1. Нехай B_0 – матриця повного рангу. Тоді якщо виконана умова

$$q < 1, \quad (3.9)$$

де

$$q := \max_{\Delta: \delta^{(i)} \in [\underline{\delta}^{(i)}, \bar{\delta}^{(i)}]} \|B_0^+ \Delta\|, \quad (3.10)$$

то положення рівноваги замкненої системи керування (2.1), (2.8), (3.3) завжди існує при будь-якій матриці $B \in \Xi$ незалежно від y^0 .

Доведення. Згідно з означенням $\|P\|_2 = \rho_{\max}(P)$ евклідової норми деякої матриці P (див., наприклад, [145, п. 14.48]), де $\rho_{\max}(P)$ позначає найбільше сингулярне число матриці P , маємо

$$\|B_0^+ \Delta\|_2 = \rho_{\max}(B_0^+ \Delta).$$

Підстановка (3.6) в праву частину цього рівняння дає

$$\|B_0^+ \Delta\|_2 = \rho_{\max}(I_r - B_0^+ B). \quad (3.11)$$

Скориставшись далі нерівністю Брауна, записаною відповідно до [143, частина III, п. 1.5.1] у формі

$$|\lambda_i(P)| \leq \rho_{\max}(P),$$

де $\lambda_i(P)$ – i -те власне значення матриці $P \in \mathbf{R}^{r \times r}$, на підставі (3.11) отримаємо

$$|\lambda_i(I_r - B_0^+ B)| \leq \|B_0^+ \Delta\|_2 \quad \forall i = 1, \dots, r. \quad (3.12)$$

З іншого боку, в силу відомої нерівності Брауера [143, частина III, п. 1.6.5]

$$|\lambda_i(P)| \leq \min\{\|P\|_1, \|P\|_\infty\}, \quad i = 1, \dots, r,$$

в якій $\|P\|_1$ – рядкова норма цієї матриці, а $\|P\|_\infty$ – її стовпцева норма, можна записати

$$\underbrace{|\lambda_i(I_r - B_0^+ B)|}_{B_0^+ \Delta} \leq \|B_0^+ \Delta\|_1, \quad \underbrace{|\lambda_i(I_r - B_0^+ B)|}_{B_0^+ \Delta} \leq \|B_0^+ \Delta\|_\infty \quad \forall i = 1, \dots, r$$

для довільної фіксованої матриці $B \in \Xi$. Якщо виконана умова (3.12), то останні нерівності разом з нерівністю (3.12) дають

$$|\lambda_i(I_r - B_0^+ B)| \leq \|B_0^+ \Delta\| \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (3.13)$$

для довільної матричної норми $\|\cdot\|$.

Враховуючи умови (3.9), (3.10), нерівності (3.13) можна підсилити і перейти до нерівностей

$$|\lambda_i(I_r - B_0^+ B)| < 1 \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad (3.14)$$

справедливих для всіх $B \in \Xi$. А при виконанні (3.14) в силу властивості

$\lambda_i(I_r - B_0^+ B) = 1 - \lambda_i(B_0^+ B)$, відомої з [143, частина I, п. 2.15.3], маємо

$$|1 - \lambda_i(B_0^+ B)| < 1 \quad \forall i = 1, \dots, r$$

при будь-якій матриці B з Ξ , звідки негайно випливає, що $\lambda_i(B_0^+ B) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$, тобто $\det B_0^+ B \neq 0$. Цим самим завершується доведення леми.

Виявляється, що при $y^0 \notin \ker B_0^+$ та $y^0 \notin \text{im } B$ рівняння (3.4) може мати розв'язок відносно u не тільки тоді, коли виконана умова (3.5), але й тоді, коли $\det B_0^+ B = 0$. Наведений нижче приклад демонструє цей факт.

Приклад 3.1. Нехай

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 3 & -4,5 \\ 1 & -1,5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$B_0^+ = \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що $y^0 = [1, 3, 5]^T$; при цьому, очевидно, $y^0 \notin \ker B_0^+$ та $y^0 \notin \text{im } B$. Неважко бачити, що в умовах цього прикладу рівняння (3.4) має нескінченне число розв'язків $u = [u^{(1)}, u^{(2)}]^T$, які лежать на прямій

$$7u^{(1)} - 14u^{(2)} + 4 = 0,$$

що при фіксованому y^0 визначає неодноточкову множину $E_u = \{u^e\}$.

Нажаль, коли матриця B має неповний ранг ($\text{rank } B < r$), то при $y^0 \notin \text{im } B$ положення рівноваги системи керування (2.1), (2.8), (3.3) при $B_0 \neq B$ в принципі

може й не існувати. Для ілюстрації цього прикрого факту наведемо один числовий приклад.

Приклад 3.2. Нехай тепер

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_0^+ = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

а $y^0 \notin \ker B_0^+$ та $y^0 \notin \text{im } B$. Оскільки $B_0^+ B = 0_{2 \times 2}$, то в цьому випадку рівняння (3.4) не має розв'язку, тобто замкнена система керування (2.1), (2.8), (3.3) не буде мати положення рівноваги.

Виявляється, що в загальному випадку положення рівноваги $\{u^e, y^e\}$ замкненої системи (2.1), (2.8), (3.3) існує тоді й тільки тоді, коли

$$\ker B_0^+ \cap (\{y^0\} + \text{im } B) \neq \emptyset. \quad (3.15)$$

де знак “+” означає суму множин за Г. Мінковським [146, с. 6]. Дійсно, з означення множини $\text{im } B$, до якої належить і нульовий вектор 0_m , випливає, що $(-Bu) \in \text{im } B$. Отже, вектор $y^0 - Bu$ належить множині $\{y^0\} + \text{im } B$, яка являє собою лінійний підпростір розмірності $\dim(\text{im } B) = \text{rank } B$ [144, с. 52] і проходить паралельно підпростору $\text{im } B$ та не містить вектор 0_m . З іншого боку, вектор $y^0 - Bu$ повинен належати множині $\ker B_0^+$, аби задовольнити рівняння рівноваги (3.4). Тому точка рівноваги u^e існує тоді й тільки тоді, коли перетин множин $\{y^0\} + \text{im } B$ і $\ker B_0^+$ не буде порожньою множиною, тобто коли виконується умова (3.15).

Геометрична інтерпретація умови (3.15) дана на рис. 3.2.

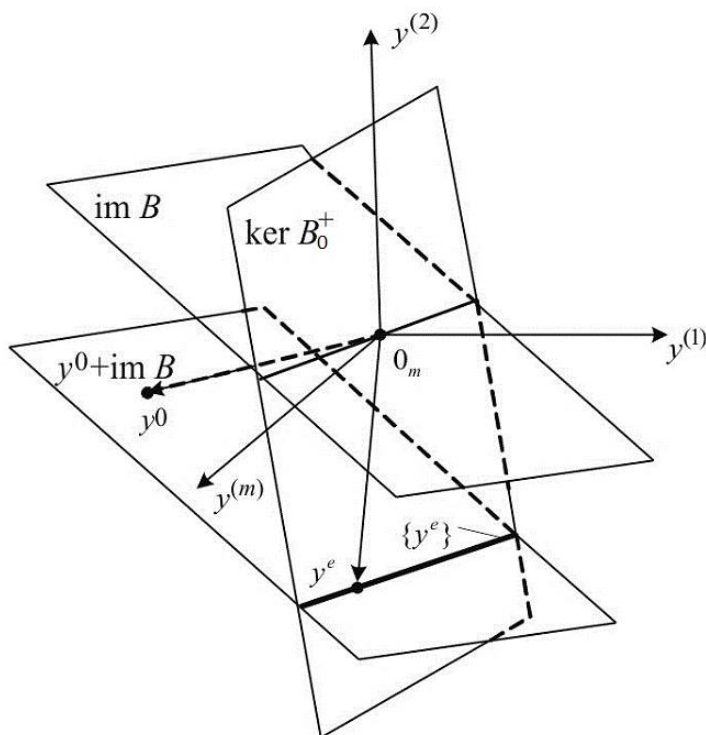


Рисунок 3.2 – Геометрична інтерпретація умови (3.15)

Нажаль, умова (3.15) є неконструктивною. Аби встановити конструктивні умови існування положення рівноваги замкненої системи керування (2.1), (2.8), (3.3) при $\text{rank } B < r$, переконаємося спочатку, що

$$\text{rank } P^+ = \text{rank } P. \quad (3.16)$$

незалежно від рангу матриці P . Насправді, згідно з [145, п. 6.25] ранг матриці P співпадає з розмірністю її множини образів: $\text{rank } P = \dim(\text{im } P)$. З іншого боку, відомо, що $\text{im } P^+ = \text{im } P^T$ [144, п. 3.11.5]. Звідси $\text{rank } P^+ = \dim(\text{im } P^+) = \dim(\text{im } P^T) = \text{rank } P^T = \text{rank } P$, що призводить до співвідношення (3.16).

Зафіксуємо далі деяку $m \times r$ -матрицю B_0 рангу 1. Тоді $\text{rank } B_0^+ = \text{rank } B_0 = 1$ (в силу (3.16)), а сама структура матриці B_0^+ набуває, очевидно, вигляду

$$B_0^+ = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0^{(11)} & k_{12}\beta_0^{(11)} & \dots & k_{m-1,m}\beta_0^{(11)} \\ \beta_0^{(21)} & k_{12}\beta_0^{(21)} & \dots & k_{m-1,m}\beta_0^{(21)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_0^{(r1)} & k_{12}\beta_0^{(r1)} & \dots & k_{m-1,m}\beta_0^{(r1)} \end{pmatrix}}_{m \text{ стовпців}}, \quad (3.17)$$

який вказує на те, що m стовпців матриці B_0^+ – колінеарні вектори розмірності r .

Перемножуючи матрицю B_0^+ у формі (3.17) справа на матрицю B , задану у формі (2.2), складемо $r \times r$ -матрицю

$$G = B_0^+ B = \begin{pmatrix} g^{(11)} & \dots & g^{(1r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g^{(r1)} & \dots & g^{(rr)} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

що фігурує в лівій частині рівняння (3.4). Тут $g^{(1k)} = g^{(1k)}(B) = \beta_0^{(11)} d_k, \dots, g^{(rk)} = g^{(rk)}(B) = \beta_0^{(r1)} d_k$ позначені елементи k -го стовпця цієї матриці, де

$$d_k = b^{(1k)} + k_{12} b^{(2k)} + \dots + k_{m-1, m} b^{(mk)} \quad (3.19)$$

– скалярна величина, яка залежить від конкретних значень елементів матриці B (точніше, від елементів її k -го стовпця).

Введемо r -вимірний вектор

$$g^{(k)}(B) = [\beta_0^{(11)}, \dots, \beta_0^{(r1)}]^T d_k, \quad (3.20)$$

який утворює k -й стовпець матриці $G = G(B)$, та визначемо мінімальне і максимальне значення змінної $d_k = d_k(B)$ відповідно як

$$\underline{d}_k(B) = \min_{B \in \Xi} d_k(B) = \min_{\substack{b^{(ik)} \in [\underline{b}^{(ik)}, \bar{b}^{(ik)}] \\ i=1, \dots, m}} (b^{(1k)} + k_{12} b^{(2k)} + \dots + k_{m-1, m} b^{(mk)}), \quad k=1, \dots, r, \quad (3.21)$$

$$\bar{d}_k(B) = \max_{B \in \Xi} d_k(B) = \max_{\substack{b^{(ik)} \in [\underline{b}^{(ik)}, \bar{b}^{(ik)}] \\ i=1, \dots, m}} ((b^{(1k)} + k_{12} b^{(2k)} + \dots + k_{m-1, m} b^{(mk)}), \quad k=1, \dots, r, \quad (3.22)$$

враховуючи (3.19), а також той факт, що такі значення існують: адже за означенням (3.1) множина Ξ – компакт. Нехай тепер хоча б для одного $k \in \{1, \dots, r\}$ виконана умова

$$\underline{d}_k(B) \bar{d}_k(B) > 0, \quad (3.23)$$

яка означає, що мінімальні і максимальні значення змінної $d_k(B)$, залишаючись ненульовими, мають однакові знаки. Оскільки ж кожна така змінна $d_k(B)$ – лінійна неперервна функція від m відповідних елементів матриці B (згідно з

(3.19)), то при виконанні умови (3.23) $g^{(k)}(B)$ – вектор, всі елементи якого відмінні від нуля для всіх матриць B з множини Ξ .

Транспонування матриці $G = G(B)$ приводить до матриці

$$G^T = \begin{pmatrix} \beta_0^{(11)} d_1 & \dots & \beta_0^{(r1)} d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_0^{(11)} d_r & \dots & \beta_0^{(r1)} d_r \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

ненульові рядки якої являють собою колінеарні вектори. Тому за означенням ядра $\ker P := \{w : Pw = 0_r\}$ будь-якої $r \times r$ -матриці P (див., наприклад, [145, п. 6.24]) в силу (3.24) маємо

$$\ker G^T(B) = \{u : \beta_0^{(1)T} u = 0_r\}, \quad (3.25)$$

де $u = [u^{(1)}, \dots, u^{(r)}]^T$, а

$$\beta_0^{(1)} = [\beta_0^{(11)}, \dots, \beta_0^{(r1)}]^T. \quad (3.26)$$

Неважко бачити з (3.25), що в даних умовах множина $\ker G^T(B)$ для кожної матриці $B \in \Xi$ являє собою не що інше, як гіперплощину у просторі \mathbf{R}^r векторів u з направляючим $\beta_0^{(1)}$, оскільки розмірність ядра матриці $G^T(B)$ згідно з [145, п. 6.25] дорівнює $\dim \ker G^T(B) = r - \text{rank } G^T(B) = r - 1$.

Розглянемо тепер праву частину векторного рівняння (3.4). Підстановка (3.17) разом з $y^0 = [y^{0(1)}, \dots, y^{0(m)}]^T$ у цю частину з врахуванням (3.26) дає

$$B_0^+ y^0 = \beta_0^{(1)T} L, \quad (3.27)$$

де $L = y^{0(1)} + k_{12} y^{0(2)} + \dots + k_{m-1,m} y^{0(m)}$.

Як видно з (3.27), при $L \neq 0$ права частина векторного рівняння (3.4) – ненульовий r -вимірний вектор, ортогональний (згідно з (3.25)) ядру матриці $G^T(B)$:

$$B_0^+ y^0 \perp \ker G^T(B). \quad (3.28)$$

А при виконанні (3.28) система рівнянь (3.4) завжди сумісна (згідно з [145, п. 6.34]). Якщо ж $L = 0$, то ця система стає однорідною (згідно з (3.27)): вона, як добре відомо [145, п. 6], неодмінно матиме розв'язок.

Встановлені вище факти приводять до одного важливого результату, сформульованому в наступній лемі.

Лема 3.2. Зафіксуємо матрицю B_0 рангу 1 так, аби всі елементи відповідної їй псевдооберненої матриці B_0^+ були ненульовими. Якщо умова (3.23), в якій $\underline{d}_k(B)$ і $\bar{d}_k(B)$ визначаються відповідно до (3.21), (3.22), виконується хоча б для одного $k \in \{1, \dots, r\}$, то замкнена система керування (2.1), (2.8), (3.3) за відсутності збурень $\{v_n\}$ має положення рівноваги при будь-яких B з множини Ξ і будь-якому $y^0 \in \mathbf{R}^m$.

Геометрична інтерпретація властивості (3.28), записаній у формі

$$B_0^+ y^0 \perp \ker \underbrace{B_0^+ B}_{B \in \Xi}, \quad (3.29)$$

на якій базується доведення лемі 3.2, для випадку $u = [u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}]^T$ дана на рис. 3.3.

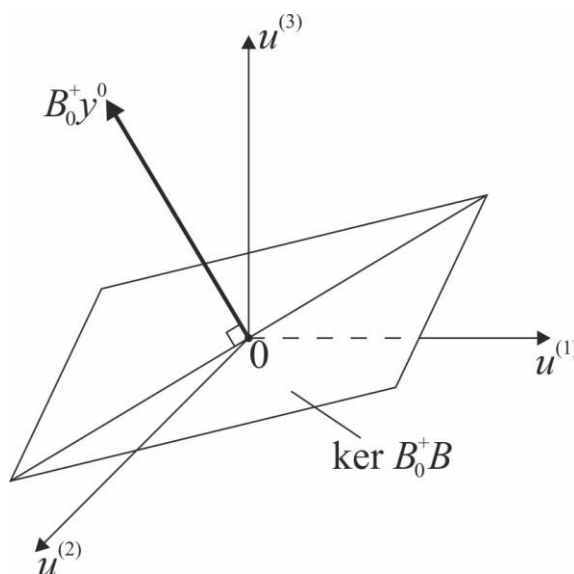


Рисунок 3.3 – Геометрична інтерпретація властивості (3.29)

Зауваження 3.1. Неважко бачити, що обчислення величин $\underline{d}_k(B)$ і $\bar{d}_k(B)$ за формулами (3.21), (3.22) негайно зводяться до розв'язання стандартних задач лінійного програмування (ЛП): знайти $\min d_k$ та $\max d_k$ ($k = 1, \dots, r$) при обмеженнях $\underline{b}^{(ij)} \leq b^{(ij)} \leq \bar{b}^{(ij)}$ ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, r$).

Зауваження 3.2. Аби встановити чи містить множина Ξ матриці рангу 1, введемо величини

$$\begin{aligned} \underline{k}_{i,i+1}^{(j)} &:= \min\{\bar{b}^{(i+1,j)} / \underline{b}^{(ij)}, \bar{b}^{(i+1,j)} / \bar{b}^{(ij)}, \underline{b}^{(i+1,j)} / \underline{b}^{(ij)}, \underline{b}^{(i+1,j)} / \bar{b}^{(ij)}\}, \\ \bar{k}_{i,i+1}^{(j)} &:= \max\{\bar{b}^{(i+1,j)} / \underline{b}^{(ij)}, \bar{b}^{(i+1,j)} / \bar{b}^{(ij)}, \underline{b}^{(i+1,j)} / \underline{b}^{(ij)}, \underline{b}^{(i+1,j)} / \bar{b}^{(ij)}\} \end{aligned}$$

і визначимо m відрізків $[\underline{k}_{i,i+1}^{(1)}, \bar{k}_{i,i+1}^{(1)}], \dots, [\underline{k}_{i,i+1}^{(m)}, \bar{k}_{i,i+1}^{(m)}]$ для кожного фіксованого $i = 1, \dots, r-1$. Можна зрозуміти, що коли перетин всіх цих відрізків – непорожня множина, тобто

$$\bigcap_{j=1}^m [\underline{k}_{i,i+1}^{(j)}, \bar{k}_{i,i+1}^{(j)}] \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, r-1,$$

то неодмінно знайдуться матриці з елементами $b^{(ij)}$, стовпці яких будуть утворювати колінеарні вектори. А це звісно вказує на існування у множині Ξ матриці рангу 1.

3.1.3. Асимптотичні властивості системи. Достатня умова, яка гарантує робастну стабілізацію матричного сімейства об'єктів (3.1), сформульована у наступному твердженні.

Твердження 3.1. Нехай $B \in \Xi$, де множина Ξ визначається згідно з (3.1), (3.2). Тоді в умовах леми 3.1, а також в умовах леми 3.2, доповнених умовою (3.9), регулятор (2.8), (3.3) буде робастно стабілізувати сімейство Ξ об'єктів (2.1) з матрицями коефіцієнтів підсилення B ; при цьому для довільного $u_0: \|u_0\| < \infty$, будь-якого u^e , що задовольняє рівняння (16), і довільній обмеженій згідно з (3) послідовності $\{v_n\}$ справедливі граничні оцінки зверху

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|e_n\| \leq \|I_m - B_0 B_0^+\| [\|e_0\| + 2 \sup_{0 \leq n < \infty} \|v_n\|] + 2 \sup_{0 \leq n < \infty} \|v_n\| (1-q)^{-1} < \infty, \quad (3.30)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^e\| \leq \|I_r - B_0^+ B_0\| \|u_0 - u^e\| + \|B_0^+\| (1-q)^{-1} \sup_{0 \leq n < \infty} \|v_n\| < \infty, \quad (3.31)$$

де q визначається формулою (3.10).

Доведення. Згідно з умовами леми 3.1 чи 3.2, що фігурують у твердженні, положення рівноваги $\{u^e, y^e\}$ замкненої системи (2.1), (2.8), (3.3) існує. Тому в силу рівняння рівноваги (3.4) маємо

$$u_n - u^e = (I_r - B_0^+ B)(u_{n-1} - u^e) - B_0^+ v_{n-1}$$

для будь-якого фіксованого $u^e \in E_u$. А це з врахуванням (2.1), (3.3) дозволяє записати

$$\begin{aligned} u_n - u^e = (I_r - B_0^+ B)^n (u_0 - u^e) - (I_r - B_0^+ B)^{n-1} B_0^+ v_0 - \dots \\ \dots - (I_r - B_0^+ B) B_0^+ v_{n-2} - B_0^+ v_{n-1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

для будь-якого $n = 2, 3, \dots$.

Подальший хід доведення суттєво використовує те, що

$$(I_r - B_0^+ B)^n = (I_r + B_0^+ \Delta + (B_0^+ \Delta)^2 + \dots + (B_0^+ \Delta)^{n-1})(I_r - B_0^+ B_0) + (B_0^+ \Delta)^n. \quad (3.33)$$

Аби переконатися в справедливості співвідношення (3.33), запишемо

$$(I_r - B_0^+ B)^n = (I_r - B_0^+ B_0 + B_0^+ \Delta)^n.$$

Звідси за означенням $P^n = P^{n-1} P$ цілого додатного степеню n матриці P при $n = 2$ маємо

$$\begin{aligned} (I_r - B_0^+ B)^2 &= (I_r - B_0^+ B_0 + B_0^+ \Delta)(I_r - B_0^+ B_0 + B_0^+ \Delta) = \\ &= (I_r - B_0^+ B_0)^2 + (I_r - B_0^+ B_0) B_0^+ \Delta + B_0^+ \Delta (I_r - B_0^+ B_0) + (B_0^+ \Delta)^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Враховуючи далі співвідношення Пенроуза (2.33), знаходимо

$$(I_r - B_0^+ B_0) B_0^+ = B_0^+ - B_0^+ B_0 B_0^+ = 0_{r \times r}. \quad (3.35)$$

Оскільки ж матриця $I_r - B_0^+ B_0$ ідемпотентна, тобто $(I_r - B_0^+ B_0)^2 = I_r - B_0^+ B_0$ (див. [144, пп. 3.7.3, 3.7.6]), то з врахуванням (3.35) співвідношення (3.34) остаточно набуде вигляду

$$(I_r - B_0^+ B)^2 = (I_r + B_0^+ \Delta)(I_r - B_0^+ B_0) + (B_0^+ \Delta)^2. \quad (3.36)$$

Як видно, співвідношення (3.33) справедливо при $n = 2$. Доведення його справедливості при кожному $n > 2$ проведемо за індукцією. Із цією метою припустимо, що воно справедливо при якомусь $n = k$, тобто що

$$(I_r - B_0^+ B)^k = (I_r + B_0^+ \Delta + (B_0^+ \Delta)^2 + \dots + (B_0^+ \Delta)^{k-1})(I_r - B_0^+ B_0) + (B_0^+ \Delta)^k.$$

Тоді, опускаючи ряд проміжних перетворень, одержимо

$$(I_r - B_0^+ B)^{k+1} = (I_r - B_0^+ B)^k (I_r - B_0^+ B) = (I_r + B_0^+ \Delta + \dots + (B_0^+ \Delta)^k) (I_r - B_0^+ B_0) + (B_0^+ \Delta)^{k+1},$$

звідки випливає справедливість (3.33) при $n = k + 1$. Взявши до уваги (3.36), тим самим устанавлюємо, що співвідношення (3.33) справедливо для будь-якого цілого $n \geq 2$.

На підставі (3.33) з врахуванням співвідношень Пенроуза (2.33) можна записати

$$(I_r - B_0^+ B)^n B_0^+ = [(I_r + B_0^+ \Delta + (B_0^+ \Delta)^2 + \dots \\ \dots + (B_0^+ \Delta)^{n-1}) (I_r - B_0^+ B_0) + (B_0^+ \Delta)^n] B_0^+ = (B_0^+ \Delta)^n B_0^+. \quad (3.37)$$

Повторне використання (3.33) разом з (3.37) дозволяє тепер представити співвідношення (3.32) у такий спосіб:

$$u_n - u^e = [(I_r + B_0^+ \Delta + \dots + (B_0^+ \Delta)^{n-1}) (I_r - B_0^+ B_0) + (B_0^+ \Delta)^n] (u_0 - u^e) - \\ - (B_0^+ \Delta)^{n-1} B_0^+ v_0 - \dots - (B_0^+ \Delta) B_0^+ v_{n-2} - B_0^+ v_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (3.38)$$

Оцінка зверху норм $\|u_n - u^e\|$ згідно з (3.38) для довільного $n \geq 2$ після послідовного підсилення дає

$$\|u_n - u^e\| \leq [1 + \|B_0^+ \Delta\| + \dots + \|B_0^+ \Delta\|^{n-1}] \|I_r - B_0^+ B_0\| + \\ + \|B_0^+ \Delta\|^n \|u_0 - u^e\| + [\|B_0^+ \Delta\|^{n-1} + \dots + \|B_0^+ \Delta\| + 1] \|B_0^+\| \sup_{0 \leq k \leq n-1} \|v_k\|. \quad (3.39)$$

Оскільки $\|B_0^+ \Delta\|^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, якщо

$$\|B_0^+ \Delta\| < 1, \quad (3.40)$$

а величина, що міститься в другій квадратній дужці правої частини нерівності (3.39), прямує до суми нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником $q_0 := \|B_0^+ \Delta\| < 1$, яка рівна $(1 - q_0)^{-1}$, то при виконанні умови (3.40) з врахуванням обмеження (2.4) справедлива гранична оцінка

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|u_n - u^e\| \leq (1 - q_0)^{-1} \|I_r - B_0^+ B_0\| \|u_0 - u^e\| + (1 - q_0)^{-1} \|B_0^+\| \sup_{0 \leq k < \infty} \|v_k\| < \infty. \quad (3.41)$$

Якщо тепер взяти до уваги, що гранична обмеженість норми $\|u_n - u^e\|$, виражена у формі (3.41), повинна бути гарантована для будь-якої матриці Δ , при якій $B = B_0 - \Delta$ належить множині Ξ , то умову (3.40) можна замінити її більш жорстким варіантом (3.9). При цьому після заміни q_0 на q в (3.41) одержуємо оцінку (3.31), яка фігурує в твердженні. (Зауважимо, що максимум норми $\|B_0^+ \Delta\|$ існує в силу замкненості й обмеженості множини Ξ , а також неперервності $\|B_0^+ \Delta\|$ як скалярної функції від елементів матриці $\Delta = (\delta^{(ij)})$.)

Техніка доведення справедливості оцінки (3.30), яким завершується доведення твердження, практично повністю повторює техніку доведення справедливості оцінки (3.31) у тих же умовах.

Порівняння оцінок (3.30), (3.31) з оцінками (2.17), (2.18), показує, що в умовах твердження 3.1 при фіксованому y^0 закон керування (2.8), (3.3), який реалізує метод псевдооберненої номінальної моделі, дійсно забезпечує робастну стабілізацію системи керування, що містить сімейство Ξ виду (3.1) лінійних дискретних багатомірних об'єктів без пам'яті. Твердження 3.1 доведено.

На перший погляд здається, що перевірка умови (3.9) вимагає надзвичайно великих зусиль, пов'язаних з необхідністю перебору можливих матриць $\Delta = (\delta^{(ij)})$. В дійсності ж це далеко не так: такого перебору можна уникнути, якщо врахувати той факт, що умова (3.9) справедлива для якої-небудь матричної норми $\|\cdot\|$, в тому числі й рядкової норми $\|B_0^+ \Delta\|_1$, що є кусково-лінійною функцією від $\delta^{(ij)}$ (означення рядкової норми $\|\cdot\|_1$ можна знайти в [143, с. 259]). Для перевірки умови (3.9) зручно використовувати прийом, подібний тому, який був запропонований у книзі [90, п. 4.5] при побудові однієї зверхстійкої системи керування. Такий прийом дозволяє звести перевірку цієї умови до розв'язання серії задач ЛП, які ставляться таким чином.

Знайти

$$\min \sigma^{(ij)}, \quad \max \sigma^{(ij)} \quad (3.42)$$

при обмеженнях

$$\underline{\delta}^{(ij)} \leq \delta^{(ij)} \leq \bar{\delta}^{(ij)}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r, \quad (3.43)$$

де

$$\sigma^{(ij)} = \sum_{k=1}^m \beta_0^{(ik)} \delta^{(kj)} \quad (3.44)$$

– лінійні форми, що залежать від елементів псевдооберненої матриці $B_0^+ = (\beta_0^{(ij)})$, а $\underline{\delta}^{(ij)}$, $\bar{\delta}^{(ij)}$ визначаються згідно з (3.8).

Описаний прийом допускає переформулювання твердження 3.1 у термінах стандартної задачі ЛП наступним чином.

Твердження 3.2. Нехай B_0 – деяка фіксована $m \times r$ -матриця, що задовольняє одну з двох вимог: 1) $\text{rank } B_0 = r$, 2) $\text{rank } B_0 = 1$ і виконана решта умов леми 3.2.

Тоді при

$$\sum_{j=1}^r \max\{|\min \sigma^{(ij)}|, |\max \sigma^{(ij)}|\} < 1 \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

де $\min \sigma^{(ij)}$ й $\max \sigma^{(ij)}$ – розв'язки задач (3.42), (3.43) ЛП, регулятор (2.8), (3.3) забезпечує робастну стабілізацію сімейства всіх об'єктів (2.1) з матрицями коефіцієнтів підсилення $B \in \Xi$.

Доведення. Результат негайно випливає з означення рядкової норми $\|\cdot\|_1$ матриці (див., наприклад, [90, с. 259]) і використання того факту, що умова (3.9) повинна виконуватися для будь-якої матричної норми $\|\cdot\|$.

Схема алгоритму перевірки умови (3.9), зображена на рис. 3.4. Цей алгоритм включає наступні кроки:

Крок 1. Початок.

Крок 2. Ініціалізація інтервального матричного сімейства Ξ у формі (3.1).

Крок 3. Введення значень елементів матриці B_0 номінальної моделі об'єкта.

Крок 4. Обчислення оцінок елементів $\delta^{(ij)}$ матриці Δ за формулою (3.43).

Крок 5. Знаходження матриці $B_0^+ = (\beta_0^{(ij)})$ псевдооберненої матриці B_0 за формулою (2.26).

Крок 6. Для $i = 1$ і всіх наступних $i \leq m$ виконувати кроки 6, 11, 12.

Крок 7. Для $j = 1$ і всіх наступних $j \leq r$ виконувати кроки 7 – 10.

Крок 8. Знаходження лінійної форми $\sigma^{(ij)}$ за формулою (2.27).

Крок 9. Знаходження розв'язку задачі (3.42) ЛП у формі $\max \sigma^{(ij)}$ в умовах обмежень (3.43).

Крок 10. Знаходження розв'язку задачі (3.42) ЛП у формі $\min \sigma^{(ij)}$ в умовах обмежень (3.43).

Крок 11. Вибір з двох величин $\max \sigma^{(ij)}$ та $\min \sigma^{(ij)}$ більшої за модулем та її запам'ятовування.

Крок 12. Перевірка умови $\sum_{j=1}^r \max\{|\min \sigma^{(ij)}|, |\max \sigma^{(ij)}|\} < 1$, якщо умова виконується, то повертаємося до кроку 5, а якщо не виконується – переходимо до кроку 13.

Крок 13. Робимо висновок, що умова (3.9) не задовольняється, і переходимо до кроку 15.

Крок 14. Якщо умова кроку 12 виконана для всіх $i = 1, \dots, m$, то робимо висновок, що умова (3.9) задовольняється, і переходимо до кроку 15.

Крок 15. Завершення алгоритму.

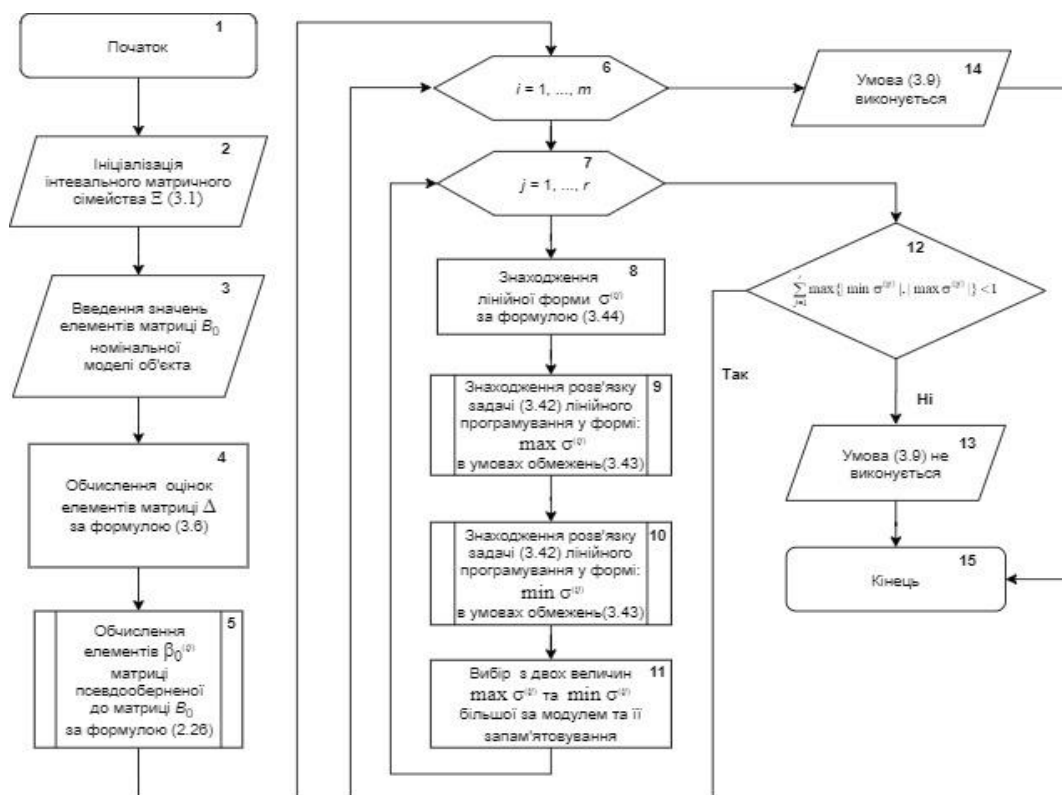


Рисунок 3.4 – Схема алгоритму перевірки умови (3.9)

Для демонстрації властивостей системи керування багатозв'язним об'єктом без пам'яті за методом псевдооберненої моделі в умовах невизначеності $B \in \Xi$ розраховувались параметри регулятора (2.8), (3.3) і проводилася серія модельних експериментів при вибраних числових значеннях матриці коефіцієнтів підсилення конкретного об'єкта, невідомих конструктору системи, і певних числових значеннях меж інтервалів, до яких вони апріорі належать.

Модельний експеримент 3.1. Для експериментального підтвердження встановлених теоретичних результатів проводились розрахунки і моделювання системи керування (2.1), (2.8), (3.3) за наявності матриці B неповного рангу і невизначеності, заданої інтервальною множиною $\Xi = \{b^{(ij)} : 0,4 \leq b^{(11)} \leq 1,4, -2 \leq b^{(12)} \leq -1, -1,2 \leq b^{(21)} \leq -0,2, 0,7 \leq b^{(22)} \leq 1,7, -1,7 \leq b^{(31)} \leq -0,7, 1 \leq b^{(32)} \leq 2\}$. В якості матриці B_0 була вибрана матриця рангу 1 виду

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & -1,6 \\ -0,7 & 1,4 \\ -1,0 & 2,0 \end{pmatrix}, \text{ яка породжує } B_0^+ = \begin{pmatrix} 16/213 & -14/213 & -20/213 \\ -32/213 & 28/213 & 40/213 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до (3.17) це дає $k_{12} = -7/8, k_{23} = -5/4$. За формулами (3.21), (3.22) маємо $\underline{d}_1(B) = 1,45, \bar{d}_1(B) = 4,575$, звідки $\underline{d}_1(B)\bar{d}_1(B) > 0$. Оскільки при такому виборі B_0 виконуються всі умови леми 3.2, то ця система матиме положення рівноваги при будь-якій матриці $B \in \Xi$ і будь-якому $y^0 \in \mathbf{R}^m$.

При проведенні модельного експерименту були довільно прийняті наступні значення елементів матриці B з даної множини Ξ : $b^{(11)} = 1, b^{(12)} = -1,5, b^{(21)} = -0,8, b^{(22)} = 1,2, b^{(31)} = -1,2, b^{(32)} = 1,8$; при цьому $\text{rank } B = 1 (< 2)$. Вектор y^0 був заданий як $y^0 = [0,3, 0,4, 0,3]^T$ з таким розрахунком, аби $y^0 \notin \text{im } B$. Як і повинно бути, при вибраних B, B_0 і y^0 дана система керування має положення рівноваги. Дійсно, підстановка в (3.4) матриць B, B_0 і вектора y^0 з конкретними числовими значеннями їхніх елементів приводить до рівняння

$$3,2u^{e(1)} - 4,8u^{e(2)} + 0,425 = 0,$$

яке описує зображену на рис. 3.5 множину $E_u = \{u^e\}$ векторів $u^e = [u^{e(1)}, u^{e(2)}]^T$ і зрештою визначає неодноточкову множину положень рівноваги $\{u^e, y^e\}$ цієї системи.

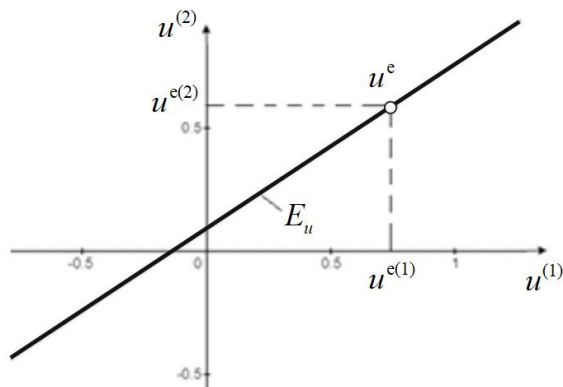


Рисунок 3.5 – Множина $E_u = \{u^e\}$ положень рівноваги замкненої системи (2.1), (2.8), (3.3) в умовах модельного експерименту 3.1

Розв'язування задач ЛП (3.42), в умовах даного модельного експерименту дає

$$\begin{aligned} \min \sigma^{(11)} &= -194/2130, & \max \sigma^{(11)} &= 306/2130, & \min \sigma^{(12)} &= -106/2130, \\ \max \sigma^{(12)} &= 394/2130, & \min \sigma^{(21)} &= -612/2130, & \max \sigma^{(21)} &= 388/2130, \\ \min \sigma^{(22)} &= -788/2130, & \max \sigma^{(22)} &= 216/2130. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \max\{|\min \sigma^{(1j)}|, |\max \sigma^{(1j)}|\} &= 70/213 < 1, \\ \sum_{j=1}^2 \max\{|\min \sigma^{(2j)}|, |\max \sigma^{(2j)}|\} &= 140/213 < 1. \end{aligned}$$

Цим самим переконуємося, що всі умови твердження 3.2 виконуються.

Аби перевірити працездатність методу псевдооберненої моделі, проводилося моделювання системи керування (2.1), (2.8), (3.3) з вибраними числовими значеннями її параметрів. При проведенні модельного експерименту збурення $\{v_n^{(1)}\}$ і $\{v_n^{(2)}\}$ генерувалися як послідовності псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[-0,07, 0,07]$. Тривалість модельного експерименту становила 100 кроків.

Результати моделювання наведені на рис. 3.6. Вони наочно демонструють обмеженість послідовностей $\{\|u_n\|_2\}$ і $\{\|y_n\|_2\}$.

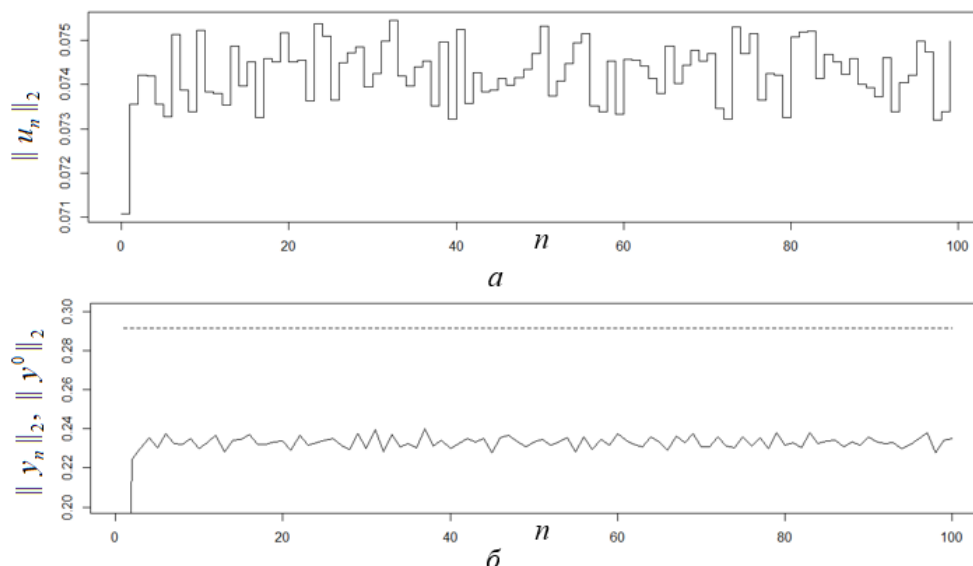


Рисунок 3.6 – Динамічні процеси в системі (2.1), (3.3), (2.8):

a – норма вектора керувальних дій $\|u_n\|_2$; $б$ – норма вектора вихідних величин $\|y_n\|_2$ – суцільна лінія, та вектора їх бажаних значень $\|y^0\|_2$ – пунктирна лінія

3.2. Робастне керування нелінійними об'єктами класу I

3.2.1. Постановка задачі. Розглянемо нелінійний багатозв'язний об'єкт без пам'яті, що функціонує на напівнескінченному інтервалі дискретного часу $n \in [0, \infty)$ і описується рівнянням (1.3). Як і раніше вважається, що компоненти $y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(m)}$ вектора вихідних змінних y_n доступні для вимірювання в кожний n -й дискретний момент часу.

Припускається далі, що $\varphi: \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^m$ – деяка апріорі невідома нелінійна вектор-функція

$$\varphi(u) = [\varphi^{(1)}(u), \dots, \varphi^{(m)}(u)]^T. \quad (3.46)$$

Розглядається випадок (2.3), коли число r каналів передачі керувальних дій $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)}$ не перевищує числа m вихідних змінних $y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(m)}$.

Як і в [128], будемо виходити з припущення, що кожна компонента $\varphi^{(i)}(u)$ ($i = 1, \dots, m$) в (3.46) являє собою неперервно диференційовану функцію змінних $u^{(1)}, \dots, u^{(r)}$. Наступне важливе припущення полягає в тому, що всі r частинних похідних $\partial \varphi^{(i)}(u) / \partial u^{(j)}$ залишаються рівномірно відокремленими від нуля і

обмеженими на \mathbf{R}^m , зберігаючи незмінними свої знаки для всіх $u \in \mathbf{R}^r$. А це означає, що

$$\underline{b}^{(ij)} \leq \partial \varphi^{(i)}(u) / \partial u^{(j)} \leq \bar{b}^{(ij)}, \quad 0 < \underline{b}^{(ij)} \bar{b}^{(ij)} < \infty, \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, r). \quad (3.47)$$

Припускається, що всі межі $\underline{b}^{(ij)}$, $\bar{b}^{(ij)}$, які фігурують в (3.47), апіорі відомі.

Неважко бачити, що в умовах припущення (3.47) $\varphi^{(i)}(u)$ – нескінченно великі функції:

$$\inf_{u \in \mathbf{R}^r} \varphi^{(i)}(u) = -\infty, \quad \sup_{u \in \mathbf{R}^r} \varphi^{(i)}(u) = +\infty \quad (3.48)$$

для всіх $i=1, \dots, m$. Для зручності нелінійність, що задовольняє обмеженням (3.47), (3.48), назовемо нелінійностями класу I.

Звернемо увагу, що існує множина функцій, які належать класу I. Зокрема, до цього класу належать функції типу

$$\varphi^{(i)}(u) = \sum_{j=1}^r F^{(j)}(u), \quad (3.49)$$

де

$$F^{(j)}(u) = \frac{a_{ij}u^{(j)} + b_{ij}(u^{(j)})^3}{c_{ij} + d_{ij}(u^{(j)})^2} \quad (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} > 0) \quad (3.50)$$

– дробово-раціональні функції. Числовий приклад функції $F^{(j)}(u)$, виду (3.50) ілюструє властивості (3.47), (3.48), і її графіки функцій $F^{(j)}(u)$ і $\partial \varphi^{(i)}(u) / \partial u^{(j)}$ наведені на рис. 3.7.

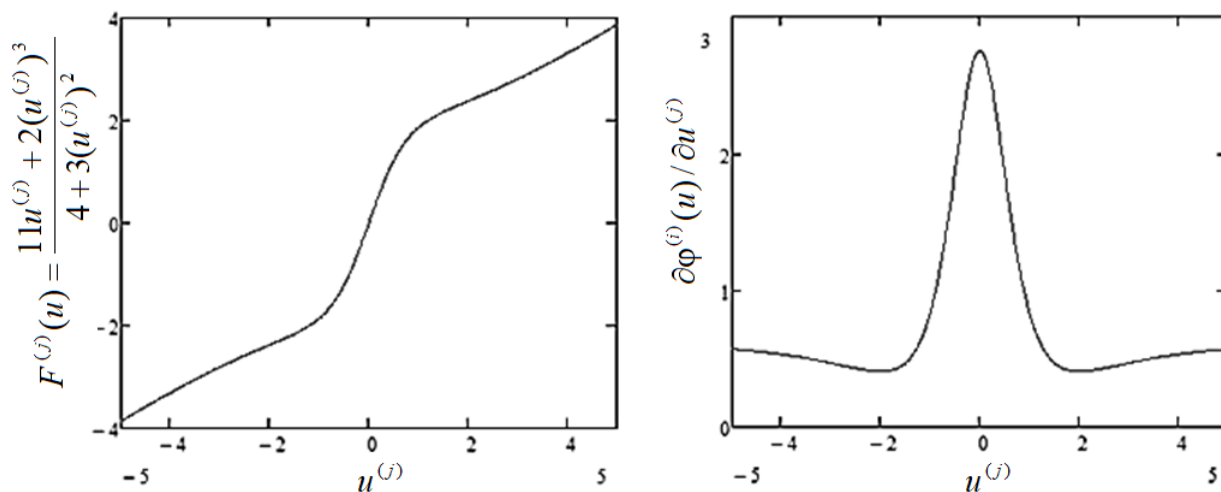


Рисунок 3.7 – Графіки функцій $F^{(j)}(u)$ виду (3.50) і $\partial \varphi^{(i)}(u) / \partial u^{(j)}$

До функцій з нелінійністю класу I належать також і функції виду (3.52), де

$$F^{(j)}(u) = a_{ij}u^{(j)} + b_{ij} \operatorname{th}(u^{(j)}) \quad (a_{ij} \neq 0, b_{ij} \neq 0) \quad (3.51)$$

при будь-яких a_{ij}, b_{ij} однакового знаку і при $|a_{ij}| > |b_{ij}|$, якщо вони мають різні знаки. Відповідні графіки наведені на рис. 3.8.

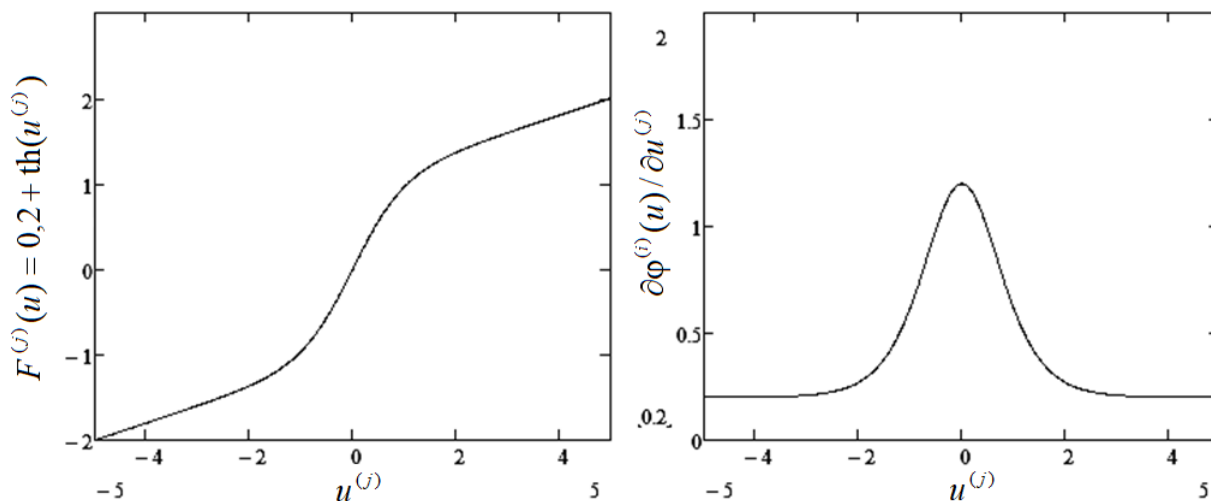


Рисунок 3.8 – Графіки функцій $F^{(j)}(u)$ виду (3.51) і $\partial\varphi^{(i)}(u)/\partial u^{(j)}$

Наведемо ще один приклад функції з нелінійністю класу I, типу (3.49), де

$$F^{(j)}(u) = a_{ij}u^{(j)} + b_{ij} \operatorname{arctg}(u^{(j)}) \quad (a_{ij} \neq 0, b_{ij} \neq 0) \quad (3.52)$$

при будь-яких a_{ij}, b_{ij} однакового знаку і при $|a_{ij}| > |b_{ij}|$ ($a_{ij}b_{ij} < 0$). Відповідні графіки при конкретних числових параметрах наведені на рис. 3.9.

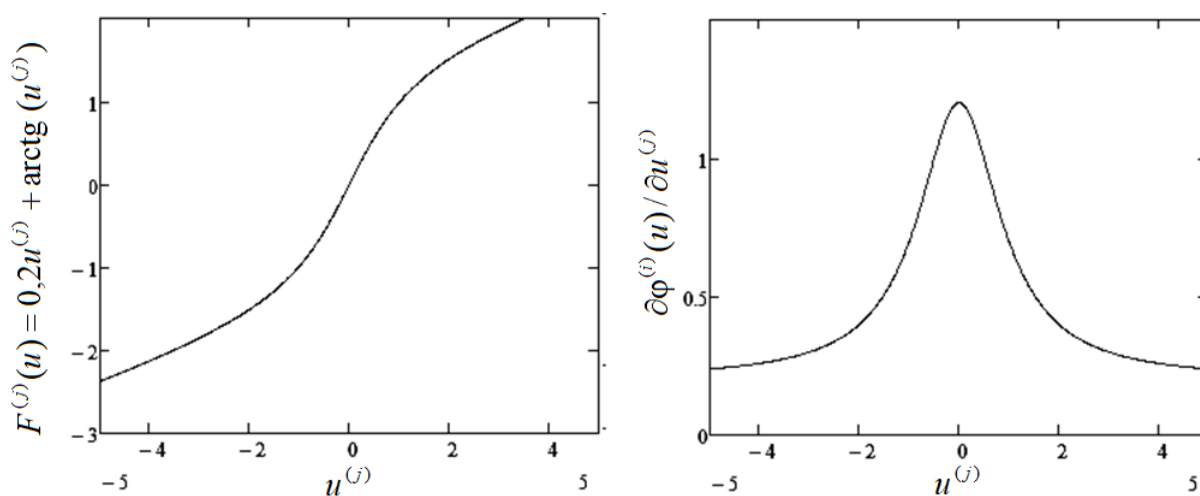


Рисунок 3.9 – Графіки функцій $F^{(j)}(u)$ виду (3.52) і $\partial\varphi^{(i)}(u)/\partial u^{(j)}$

Подібно до того, як це робиться в [90], будемо виходити з припущення, що послідовність $\{v_n^{(i)}\} := \{v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots\}$ задовольняє умовам (2.4).

Розглядається система стабілізації вихідних змінних $y_n^{(i)}$ на заданих рівнях $y^{0(i)}$ ($y^{0(i)} \equiv \text{const}$ для всіх $i = 1, \dots, m$) з законом керування (3.3), побудованим на базі лінійної моделі з матрицею B_0^+ , псевдооберненої до матриці B_0 , номінальної лінійної моделі.

Реалізація закону керування (3.3) з врахуванням (2.8) приводить до побудови системи керування нелінійним об'єктом (1.3), наведеної на рис. 3.10.

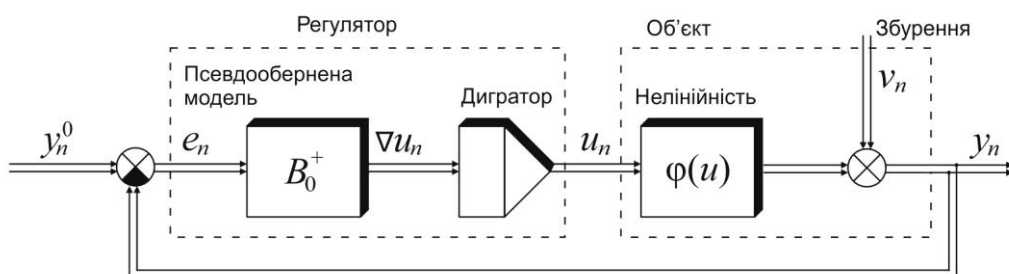


Рисунок 3.10 – Структурна схема системи керування (1.3), (2.8), (3.3)

Задача полягає в тому, аби в рамках зроблених припущень щодо нелінійності $\varphi(u)$ встановити умови, в яких при $v_n \equiv 0_m$ гарантується робастна стійкість замкненої системи керування (1.3), (3.3), (2.8) для всього сімейства можливих нелінійностей, що задовольняють інтервальним обмеженням (3.47), а при $v_n \neq 0_m$ – дисипативність цієї системи керування.

3.2.2. Асимптотичні властивості робастного регулятора. Спочатку введемо $m \times r$ -матриці Якобі $B(u)$ у формі

$$B(u) = \begin{pmatrix} \partial\varphi^{(1)}(u)/\partial u^{(1)} & \dots & \partial\varphi^{(1)}(u)/\partial u^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial\varphi^{(m)}(u)/\partial u^{(1)} & \dots & \partial\varphi^{(m)}(u)/\partial u^{(r)} \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Зафіксуємо далі довільну матрицю B_0 повного рангу та знайдемо псевдообернену матрицю $B_0^+ = (\beta^{(ij)})$ за формулою (2.40), замінивши у ній B на B_0 . Визначимо тепер матрицю $\Delta(u) = (\delta^{(ij)})(u)$ абсолютних відхилень елементів $B(u)$ від

елементів деякої фіксованої $m \times r$ -матриці $B_0 = (b_0^{(ij)})$ лінійної номінальної моделі як

$$\Delta(u) = B(u) - B_0. \quad (3.54)$$

Згідно з (3.54) з урахуванням (3.53) для елементів $\delta^{(ij)}(u)$ матриці $\Delta(u)$ маємо

$$\delta^{(ij)}(u) = b^{(ij)}(u) - b_0^{(ij)}. \quad (3.55)$$

Оскільки $b^{(ij)}(u) := \partial \varphi^{(i)}(u) / \partial u^{(j)}$, то в силу обмежень (3.47) та рівності (3.55) можна записати

$$\underline{\delta}^{(ij)} \leq \delta^{(ij)}(u) \leq \bar{\delta}^{(ij)},$$

де

$$\underline{\delta}^{(ij)}(u) = \underline{b}^{(ij)}(u) - b_0^{(ij)}, \quad \bar{\delta}^{(ij)}(u) = \bar{b}^{(ij)}(u) - b_0^{(ij)}. \quad (3.56)$$

Положення рівноваги нелінійної системи керування (1.3), (2.8), (3.3) при відсутності збурень, що визначається розв'язком $u = u^e$ рівняння

$$B_0^+(y^0 - \varphi(u)) = 0_r, \quad (3.57)$$

неодмінно існує, якщо

$$\ker B_0^+ \cap (\{y^0\} + \text{im} B(u)) \neq \emptyset$$

для всіх $u \in \mathbf{R}^r$.

Асимптотичні властивості замкненої системи керування (1.3), (2.8), (3.3) встановлює наступне твердження.

Твердження 3.3. Зафіксуємо деяку $m \times r$ -матрицю B_0 повного рангу. Нехай $\varphi(\cdot)$ – нелінійність класу I. Якщо положення рівноваги замкненої системи керування нелінійним об'єктом (1.3) з лінійним зворотним зв'язком (2.8), (3.3), яке визначається розв'язком $u = u^e$ системи рівнянь (3.57), існує, і виконана вимога

$$q < 1, \quad (3.58)$$

в якій

$$q := \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m \max\{|\min \sigma^{(ij)}|, |\max \sigma^{(ij)}|\}, \quad (3.59)$$

де $\min \sigma^{(ij)}$ і $\max \sigma^{(ij)}$ – розв’язки задач (3.42), (3.56) ЛП, то при $v_n \equiv 0_m$ система керування (1.3), (2.8), (3.3) буде робастно стійкою для всього класу I нелінійностей і дисипативною за наявності обмежених відповідно до (2.4) збурень ($v_n \neq 0_m$); при цьому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^e\|_\infty \leq \|B_0^+\|_1 \bar{\varepsilon} (1 - q)^{-1} < \infty, \quad (3.60)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y^e\|_\infty \leq \max_{B \in \Xi} \|B\|_1 \|B_0^+\|_1 \bar{\varepsilon} (1 - q)^{-1} + \bar{\varepsilon} < \infty, \quad (3.61)$$

де

$$\bar{\varepsilon} := \sup_{n \in N_+} \|v_n\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \varepsilon^{(i)}. \quad (3.62)$$

Доведення. Для системи (1.3), (2.8), (3.3) за умови існування u^e можна записати

$$u_{n+1} - u^e = u_n - u^e - B_0^+(\varphi(u_n) - \varphi(u^e)) - B_0^+ v_n. \quad (3.63)$$

За умовою твердження $\varphi(u)$ – функція, що диференціюється за компонентами $u^{(1)}, \dots, u^{(r)}$ вектора u . Тому згідно з [128, с. 27] для її приросту справедливо співвідношення, взяте з [147, с. 4],

$$\varphi(u_n) - \varphi(u^e) = \int_0^1 B(u^e + \theta(u_n - u^e))(u_n - u^e) d\theta, \quad (3.64)$$

в якому $B(u)$ – матриця з елементами $b^{(ij)}(u) = \partial \varphi^{(i)}(u) / \partial u^{(j)}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, r$).

Підстановка (3.64) в (3.63) дає

$$u_{n+1} - u^e = \int_0^1 (I_r - B_0^+ B(u^e + \theta(u_n - u^e)))(u_n - u^e) d\theta - B_0^+ v_n. \quad (3.65)$$

Беручи до уваги (3.65) і той факт, що $B_0^+ B_0 = I_r$, при $\text{rank } B_0 = r$, можна записати

$$\sup_u \|u_{n+1} - u^e\|_\infty \leq \sup_u \|B_0^+ \Delta(u)\|_1 \|u_n - u^e\|_\infty + \|B_0^+\|_1 \sup_{0 \leq n < \infty} \|v_n\|_\infty.$$

Останню нерівність в силу співвідношення

$$\sup_{u \in \mathbf{R}^r} \| B_0^+ \Delta(u) \| \leq \max_{\Delta: \delta^{(ij)} \in [\underline{\delta}^{(ij)}, \bar{\delta}^{(ij)}]} \| B_0^+ \Delta \| < 1, \quad (3.66)$$

доцільно переписати наступним чином

$$\begin{aligned} \sup_u \| u_{n+1} - u^e \|_\infty &\leq \max_{\Delta(u): \delta^{(ij)}(u) \in [\underline{\delta}^{(ij)}, \bar{\delta}^{(ij)}]} \| B_0^+ \Delta(u) \|_1 \| u_n - u^e \|_\infty + \\ &+ \| B_0^+ \|_1 \sup_{0 \leq n < \infty} \| v_n \|_\infty \leq q \| u_n - u^e \|_\infty + \| B_0^+ \|_1 \bar{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Тут q визначається виразом (3.59), а $\bar{\varepsilon}$ – виразом (3.62) (в силу означення ∞ -норми вектора, наведеної в [145, п. 14.26]; див. також [143, с. 260]).

Використовуючи тепер (3.67) і той факт, що $\bar{\varepsilon} < \infty$, отримуємо ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} \| u_{n+1} - u^e \|_\infty &\leq q \| u_n - u^e \|_\infty + \| B_0^+ \|_1 \bar{\varepsilon} \leq \dots \leq q^n \| u_0 - u^e \|_\infty + (q^{n-1} + \dots \\ &\dots + q + 1) \| B_0^+ \|_1 \bar{\varepsilon} < \infty. \end{aligned}$$

З цих нерівностей можна зробити висновок: якщо умова (3.58) виконується, то ∞ -норма відхилення u_n від u^e при $n \rightarrow \infty$ буде в асимптотиці обмеженої зверху сумою деякої нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником q , що негайно приводить до (3.60). Для доведення твердження залишається переконатися в справедливості співвідношення (3.61). З цією метою перетворимо рівняння об'єкта (1.3) до виду

$$y_n - y^e = \varphi(u_n) - \varphi(u^e) + v_n, \quad (3.68)$$

враховуючи той факт що $y^e = \varphi(u^e)$. Використовуючи далі нерівність

$$\| \varphi(u_n) - \varphi(u^e) \|_\infty \leq \max_{B: \underline{b}^{(ij)} \leq b^{(ij)} \leq \bar{b}^{(ij)}} \| B \|_1 \| u_n - u^e \|_\infty,$$

яка випливає зі співвідношення (3.64), на підставі (3.68) з врахуванням (3.62) і відомої нерівності трикутника [145, п. 14.20] можна записати

$$\| y_n - y^e \|_\infty \leq \max_{B: \underline{b}^{(ij)} \leq b^{(ij)} \leq \bar{b}^{(ij)}} \| B \|_1 \| u_n - u^e \|_\infty + \bar{\varepsilon}.$$

Звідси в силу (3.60) негайно приходимо до співвідношення (3.61). На цьому завершується доведення твердження 3.3.

Наслідок 3.1. В умовах твердження 3.3 при $v_n \equiv 0_m$ справедлива гранична властивість $e_n \rightarrow 0_m$ при $n \rightarrow \infty$, яка означає, що система керування нелінійним об'єктом (1.3) з лінійним зворотним зв'язком (2.8), (3.3) стає астатичною.

Зауваження 3.3. При доведенні твердження 3.3 суттєво використано співвідношення (3.66), з якого випливає, що при виборі величини q згідно з (3.59) умова (3.58) накладає більш жорсткі обмеження на допустимі відхилення $\Delta(u) = B_0 - B(u)$ матриці Якобі $B(u) = (\partial \varphi^{(i)}(u) / \partial u^{(j)})$ від матриці B_0 , ніж умова

$$q = \sup_{u \in \mathbf{R}^r} \| B_0^+ \Delta(u) \| < 1, \quad (3.69)$$

оскільки елементи матриці $\Delta = (\delta^{(ij)})$ пробігають можливі значення в інтервалах $[\underline{\delta}^{(ij)}, \bar{\delta}^{(ij)}]$ незалежно один від одного. Однак умова (3.58), в якій q визначається виразом (3.59), конструктивна (на відміну від умови (3.69)), що в практичному плані вельми важливо.

3.2.3. Числові приклади та моделювання. Модельний експеримент 3.2.

Нехай є нелінійний багатозв'язний об'єкт без пам'яті з двома керуваннями $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, двома виходами $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ ($r = m = 2$), що описується рівнянням (1.3), в якому компоненти вектор-функції виду (3.46) визначаються як

$$\varphi^{(1)}(u) = \varphi^{(11)}(u^{(1)}) + \varphi^{(12)}(u^{(2)}), \quad \varphi^{(2)}(u) = \varphi^{(21)}(u^{(1)}) + \varphi^{(22)}(u^{(2)}), \quad (3.70)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^{(11)}(u^{(1)}) &= \frac{\alpha_{11}u^{(1)} + \gamma_{11}(u^{(1)})^3}{\eta_{11} + (u^{(1)})^2}, & \varphi^{(12)}(u^{(2)}) &= -\frac{\alpha_{12}u^{(2)} + \gamma_{12}(u^{(2)})^3}{\eta_{12} + (u^{(2)})^2}, \\ \varphi^{(21)}(u^{(1)}) &= \frac{\alpha_{21}u^{(1)} + \gamma_{21}(u^{(1)})^3}{\eta_{21} + (u^{(1)})^2}, & \varphi^{(22)}(u^{(2)}) &= \frac{\alpha_{22}u^{(2)} + \gamma_{22}(u^{(2)})^3}{\eta_{22} + (u^{(2)})^2}. \end{aligned}$$

Припустимо, що апріорі відомі інтервальні оцінки

$$\begin{aligned} 18 \leq \alpha_{11} \leq 20, \quad 4 \leq \gamma_{11} \leq 6, \quad 2 \leq \eta_{11} \leq 3, \\ 1/5 \leq \alpha_{12} \leq 1/2, \quad 1/12 \leq \gamma_{12} \leq 1/7, \quad 1/6 \leq \eta_{12} \leq 1/3, \\ 1/2 \leq \alpha_{21} \leq 1, \quad 1/15 \leq \gamma_{21} \leq 1/9, \quad 1/4 \leq \eta_{21} \leq 1/3, \\ 30 \leq \alpha_{22} \leq 35, \quad 7 \leq \gamma_{22} \leq 9, \quad 2 \leq \eta_{22} \leq 5. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Згідно з (3.70) з врахуванням обмежень (3.71) знаходимо

$$\begin{aligned} 3,2 < \partial\varphi^{(1)} / \partial u^{(1)} \leq 10, & \quad -3 \leq \partial\varphi^{(1)} / \partial u^{(2)} < 0,32, \\ -0,44 < \partial\varphi^{(2)} / \partial u^{(1)} \leq 4, & \quad 5,5 < \partial\varphi^{(2)} / \partial u^{(2)} \leq 17,5. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Використовуючи оцінки (3.72), в якості матриці опорної лінійної моделі об'єкта з нелінійностями (3.70) приймаємо матрицю

$$B_0 = \begin{pmatrix} 6,60 & -1,34 \\ 1,78 & 11,50 \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

При такому виборі B_0 маємо

$$\begin{aligned} -3,4 \leq \delta^{(11)}(u) \leq 3,4, & \quad -1,66 \leq \delta^{(12)}(u) \leq 1,66, \\ -2,22 \leq \delta^{(21)}(u) \leq 2,22, & \quad -6 \leq \delta^{(22)}(u) \leq 6, \end{aligned} \quad (3.74)$$

а $\det B_0 = 78,2852 \neq 0$ і

$$B_0^+ = B_0^{-1} = \frac{2500}{195713} \begin{pmatrix} 11,50 & 1,34 \\ -1,78 & 6,60 \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Розв'язування чотирьох пар задач ЛП в умовах (3.74) з врахуванням (3.75) дає

$$\begin{aligned} \min \sigma^{(11)} &= -105187/195713, & \max \sigma^{(11)} &= 105187/195713, \\ \min \sigma^{(12)} &= -67825/195713, & \max \sigma^{(12)} &= 67825/195713, \\ \min \sigma^{(21)} &= -51760/195713, & \max \sigma^{(21)} &= 51760/195713, \\ \min \sigma^{(22)} &= -106387/195713, & \max \sigma^{(22)} &= 106387/195713. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \max\{|\min \sigma^{(1j)}|, |\max \sigma^{(1j)}|\} &= 173012/195713 \approx 0,884, \\ \sum_{j=1}^2 \max\{|\min \sigma^{(2j)}|, |\max \sigma^{(2j)}|\} &= 158147/195713 \approx 0,808. \end{aligned} \quad (3.76)$$

З (3.76) прямо випливає, що умова (3.58), які фігурує в твердженні 3.3, виконані. Це дозволяє зробити висновок, що при виборі матриці B_0 у вигляді (3.73) замкнена система керування, яка містить об'єкт (1.3) з нелінійністю, яка описується рівнянням (3.70), і лінійний регулятор (2.8), (3.3) з матрицею B_0^+ виду

(3.75), буде робастно стійкою для всього сімейства нелінійностей, заданого інтервальними оцінками (3.71).

Для підтвердження цього факту проводилося моделювання системи керування (1.3), (2.8), (3.3), при $v_n^{(1)}, v_n^{(2)} \equiv 0$ і $v_n^{(1)}, v_n^{(2)} \neq 0$. При проведенні модельних експериментів було покладено $y^0 = [5, 13]^T$ і $u_0 = [0, 0]^T$. послідовності збурень $\{v_n^{(1)}\}, \{v_n^{(2)}\}$ моделювалися як послідовності псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[-1, 1]$.

Результати експериментів тривалістю 50 тактів при відсутності і наявності збурень показані на рис. 3.11 і 3.12 відповідно.

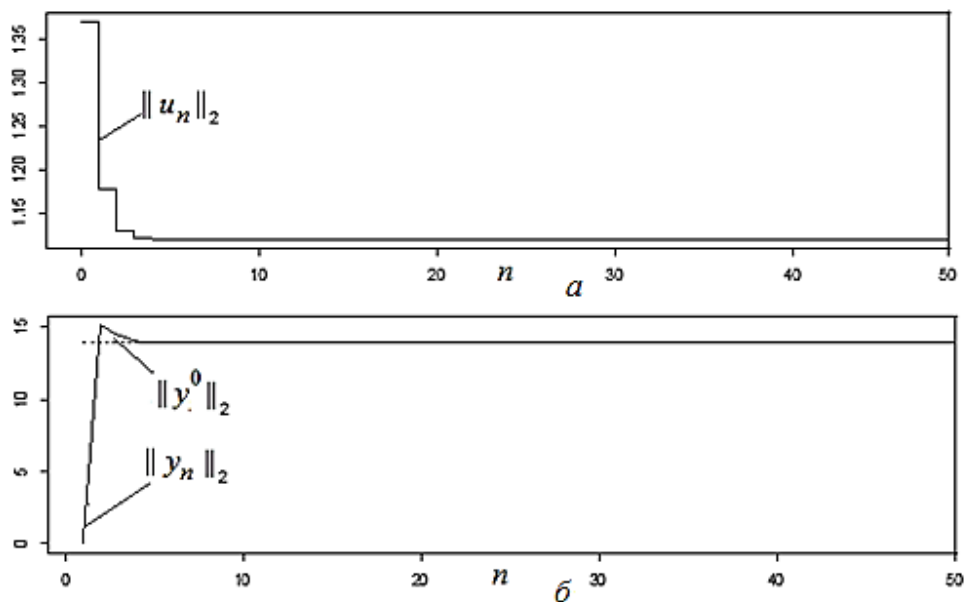


Рисунок 3.11 – Динамічні процеси в системі (1.3), (2.8), (3.3)

в умовах модельного експерименту 3.4 при $v_n^{(1)}, v_n^{(2)} \equiv 0_m$:

$a - \|u_n\|_2$; $b - \|y_n\|_2$ (суцільна лінія) і $\|y^0\|_2$ (пунктирна лінія)

Процеси наведених на рис. 3.11, показують, що регулятор (2.8), (3.3), побудований за лінійною моделлю, здатний забезпечувати стійкість системи керування нелінійним об'єктом (1.3) в умовах інтервальних невизначеностей щодо параметрів нелінійності $\varphi(u)$.

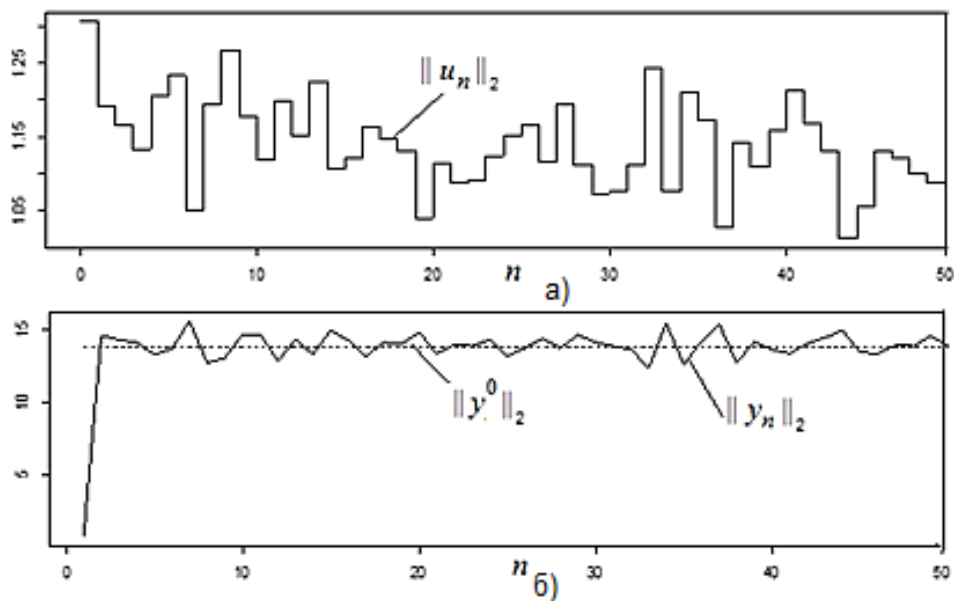


Рисунок 3.12 – Динамічні процеси в системі (1.3), (3.3), (2.8)

в умовах модельного експерименту 3.4 при $v_n^{(1)}, v_n^{(2)} \neq 0_m$:

$a - \|u_n\|_2$; $b - \|y_n\|_2$ (суцільна лінія) і $\|y^0\|_2$ (пунктирна лінія)

З рис. 3.12 наочно видно, що цей регулятор досить успішно справляється з неконтрольованими обмеженими збуреннями, підтримуючи вектор вихідних змінних y_n в околі точки y^0 .

Модельний експеримент 3.3. В цьому експерименті розглядався багатовимірний об'єкт з двома керувальними діями і трьома вихідними змінними ($r = 2, m = 3$), описуваний системою нелінійних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} y_n^{(1)} &= 9u_{n-1}^{(1)} + 5u_{n-1}^{(2)} + 2\text{th}(u_{n-1}^{(1)}) + 2\text{th}(u_{n-1}^{(2)}) + v_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} &= 3u_{n-1}^{(1)} + 10u_{n-1}^{(2)} + 4\text{th}(u_{n-1}^{(1)}) + 4\text{th}(u_{n-1}^{(2)}) + v_n^{(2)} \\ y_n^{(3)} &= 3u_{n-1}^{(1)} + 6u_{n-1}^{(2)} + 8\text{th}(u_{n-1}^{(1)}) + 6\text{th}(u_{n-1}^{(2)}) + v_n^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

послідовності $\{v_n^{(i)}\}$ ($i = 1, 2, 3$) збурень, які відповідають обмеженням (2.4), моделювалися як послідовності псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[-1, 1]$. При моделюванні було прийнято $y^0 = [5, 13, 7]^T$.

На підставі (3.77) спочатку були встановлені обмеження

$$\begin{aligned} 9 \leq \partial\varphi^{(1)}(u)/\partial u^{(1)} \leq 11, & \quad 5 \leq \partial\varphi^{(1)}(u)/\partial u^{(2)} \leq 7, \\ 3 \leq \partial\varphi^{(2)}(u)/\partial u^{(1)} \leq 7, & \quad 10 \leq \partial\varphi^{(2)}(u)/\partial u^{(2)} \leq 14, \\ 3 \leq \partial\varphi^{(3)}(u)/\partial u^{(1)} \leq 11, & \quad 6 \leq \partial\varphi^{(3)}(u)/\partial u^{(2)} \leq 12 \end{aligned}$$

на елементи $b^{(ij)}(u) = \partial\varphi^{(i)}(u)/\partial u^{(j)}$ матриці

$$B(u) = \begin{pmatrix} 9 + 2\text{ch}^{-2}(u^{(1)}) & 5 + 2\text{ch}^{-2}(u^{(2)}) \\ 3 + 4\text{ch}^{-2}(u^{(1)}) & 10 + 4\text{ch}^{-2}(u^{(2)}) \\ 3 + 8\text{ch}^{-2}(u^{(1)}) & 6 + 6\text{ch}^{-2}(u^{(2)}) \end{pmatrix}$$

в експерименті 3.5. Далі була знайдена матриця

$$B_0 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 6 & 12 & 9 \end{pmatrix}^T$$

лінійної опорної моделі об'єкта (3.77). Потім розраховувалася псевдообернена матриця B_0^+ :

$$B_0^+ = \frac{1}{3975} \begin{pmatrix} 504 & -297 & 60 \\ -262 & 391 & 95 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування задачі ЛП для знаходження q за формулою (3.59) при обмеженнях

$$\begin{aligned} -1 \leq \delta^{(11)} \leq 1, \quad -1 \leq \delta^{(12)} \leq 1, \quad -2 \leq \delta^{(21)} \leq 2, \\ -2 \leq \delta^{(22)} \leq 2, \quad -4 \leq \delta^{(31)} \leq 4, \quad -3 \leq \delta^{(32)} \leq 3, \end{aligned}$$

показало, що умова (3.58), яка фігурує в твердженні 3.3, виконується. При цьому виявилось, що $q = 1338/3975 < 1$. А це має гарантувати робастно стійкість замкненої системи керування, що містить об'єкт (3.77) і регулятор (3.3), (2.8).

Результати моделювання описаної вище системи при $0 \leq n \leq 200$ показані на рис. 3.13. Ці результати наочно підтверджують встановлений вище факт обмеженості норми $\|u_n\|_2$ вектора керувальних дій та норми $\|y_n\|_2$ вектора вихідних змінних на інтервалі $n \in [0, 200]$ і демонструють працездатність запропонованого методу робастного керування нелінійним об'єктом за його узагальненої оберненої лінійної моделі.

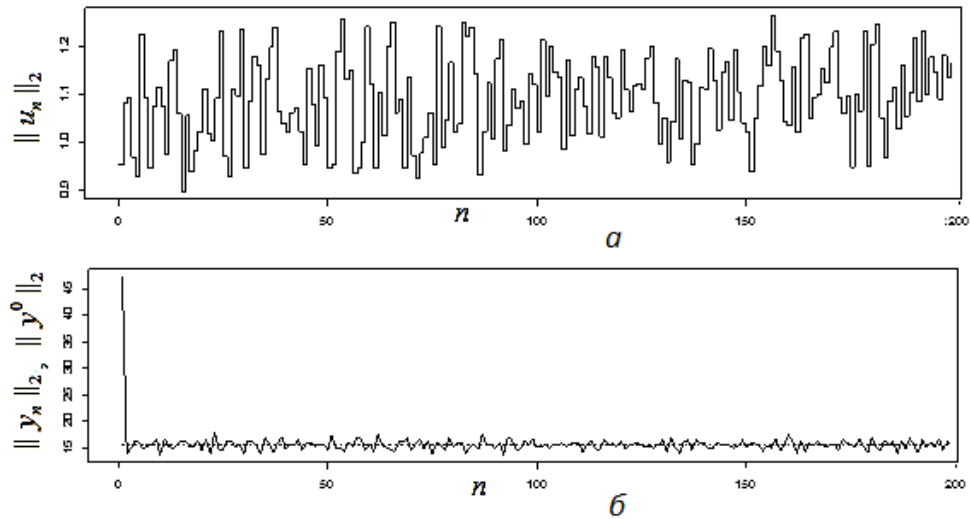


Рисунок 3.13 – Динамічні процеси в системі (1.3), (3.3), (2.8)

в умовах модельного експерименту 3.5: $a - \|u_n\|_2$;

$b - \|y_n\|_2$ (суцільна лінія) і $\|y^0\|_2$ (пунктирна лінія)

3.3. Робастне керування нелінійними об'єктами класу II

Повернемося тепер до об'єкта (1.3) з нелінійною вектор-функцією $\varphi(u) = [\varphi^{(1)}(u), \dots, \varphi^{(m)}(u)]^T$, залежної від $u \in \mathbf{R}^r$, і підлягає лінеаризації, тобто допускає подання у формі

$$\varphi(u) = Vu + \psi(u).$$

де $\psi(u) = [\psi^{(1)}(u), \dots, \psi^{(m)}(u)]^T$ – однозначна нелінійна вектор-функція, обмежена єдиним обмеженням

$$\sup_{u \in \mathbf{R}^r} \|\psi(u)\| \leq C < \infty \quad (3.78)$$

з можливо невідомим C . При цьому саме рівняння об'єкта (1.3) приводиться до вигляду

$$y_n = Bu_{n-1} + \psi(u_{n-1}) + v_{n-1}. \quad (3.79)$$

Зауваження 3.4. Слід звернути увагу на те, що нелінійна вектор-функція $\psi(u)$, залишаючись згідно з (3.78) обмеженою по нормі, зовсім не обов'язково повинна задовольняти відомому умові Ліпшиця

$$\|\psi(u') - \psi(u'')\| \leq L \|u' - u''\| \quad \forall u', u'' \in \mathbf{R}^r \quad (0 < L < \infty).$$

Розглянемо можливість робастної стабілізації класу нелінійних об'єктів (3.79) з використанням того ж самого методу псевдообернення.

Твердження 3.4. Нехай об'єкт описується рівнянням (3.79). Припустимо, що матриця $B = (b^{(ij)})$ в рівнянні (3.79) об'єкта задана, як і в [90, с. 176], інтервальним матричним сімейством

$$\Xi = \{(b^{(ij)}) : \underline{b}^{(ij)} \leq b^{(ij)} \leq \bar{b}^{(ij)}, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, r\},$$

і виконано додаткова вимога

$$\underline{b}^{(ij)} \bar{b}^{(ij)} > 0 \quad \forall i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, r,$$

а $p(u)$ задовольняє умові обмеженості (3.78). Припустимо далі, що в цих умовах положення рівноваги замкненої системи керування (3.79), (3.3), (2.8) існує. Тоді для робастної стабілізованості цієї системи досить, аби було виконано вимогу (3.9).

Доведення цього твердження дослівно повторює доведення твердження 3.1 з тією лише різницею, що $\sup_{0 \leq n < \infty} \|v_n\| < \infty$ замінюється на $\sup_{0 \leq n < \infty} \|v_n\| + C < \infty$.

Висновки до розділу 3

1. За певних умов метод псевдооберненої моделі в принципі дозволяє робастно стабілізувати інтервальне сімейство багатозв'язних лінійних і деяких класів нелінійних багатозв'язних об'єктів без пам'яті з невизначеностями відносно їхніх статичних характеристик.

2. Якщо виконані деякі умови, встановлені в цьому розділі, то замкнена система керування, що містить лінійний багатозв'язний об'єкт без пам'яті і регулятор, побудований за методом псевдооберненої моделі, матиме положення рівноваги при будь-якій матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта, яка належить інтервальному сімейству.

3. При виконанні певних умов можна забезпечити робастну стійкість і дисипативність системи керування лінійними і деякими класами нелінійних

об'єктів без пам'яті з лінійними зворотними зв'язками, що містять моделі, псевдообернені деяким фіксованим лінійним номінальним моделям цих об'єктів.

4. Встановлені умови існування положення рівноваги, а також достатні умови робастності систем керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті конструктивні. Ці умови можна досить просто перевірити, розв'язуючи серію простих задач ЛП.

Результати присвячені робастному керуванню багатозв'язними об'єктами без пам'яті опубліковані в [1, 2, 7, 16, 17, 23, 24, 26, 27].

РОЗДІЛ 4

МЕТОДИ АДАПТИВНОЇ СТАБІЛІЗАЦІЇ ЛІНІЙНИХ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБ'ЄКТІВ БЕЗ ПАМ'ЯТІ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

4.1. Синтез адаптивного регулятора для стабілізації об'єкта з одним каналом передачі керувальних дій і кількома вихідними змінними

4.1.1. Постановка задачі. Розглянемо лінійний багатозв'язний об'єкт без пам'яті, що функціонує в дискретному часі і описується рівнянням (2.1), у якому $y_n = [y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(m)}]^T$ – m -вимірний вектор вихідних змінних ($m \geq 2$), u_n – скалярна керувальна дія, $v_n = [v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(m)}]^T$ – m -вимірний вектор неконтрольованих збурень в n -й дискретний момент часу, а B – одностовпцева матриця ненульових коефіцієнтів підсилення:

$$B = \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(m)} \end{pmatrix}, \quad b^{(i)} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (4.1)$$

Вважається, що елементи $m \times 1$ -матриці (4.1) апріорі невідомі. Більше того, на відміну від припущень, введених в розділі 3, невідома навіть ніяка обмежена множина Ξ , до якої належить B . Як і раніше, вводиться припущення, що $\{v_n^{(i)}\}$ – нерегулярні послідовності збурень, обмежених за рівнями $\varepsilon^{(i)}$ (відповідно до (2.4)); при цьому самі рівні $\varepsilon^{(i)}$ можуть бути також апріорі невідомі.

Задача полягає у тому, щоб синтезувати адаптивний регулятор, здатний забезпечити граничну обмеженість сигналів у формі

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| < \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n| < \infty. \quad (4.2)$$

4.1.2. Закон керування. Структура системи. Для керування об'єктом (2.1) в умовах невизначеності відносно елементів матриці B виду (4.1) пропонується адаптивний підхід, що передбачає поточну ідентифікацію моделі об'єкта (2.1). Згідно з цим підходом в якості закону керування приймається закон

$$u_n = u_{n-1} + B_n^+ e_n, \quad (4.3)$$

який отримується заміною в (2.27) невідомої матриці B на її поточну оцінку

$$B_n = \begin{pmatrix} b_n^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(m)} \end{pmatrix}, \quad b_n^{(i)} \neq 0 \quad \forall i=1, \dots, m, \quad (4.4)$$

знайдену тим чи іншим чином на основі певної процедури так званої функціонально ідентифікації [38, гл. 4]. При цьому якщо на кожному n -му кроці забезпечується вимога $\text{rank } B_n = 1$, то обчислення псевдооберненої матриці B_n^+ , котра фігурує в законі керування (4.3), можна здійснювати за формулою (2.40), що дає

$$B_n^+ = \frac{1}{[b_n^{(1)}]^2 + \dots + [b_n^{(m)}]^2} B_n^T. \quad (4.5)$$

На рис. 4.1 зображена структурна схема системи керування об'єктом (2.1) з використанням адаптивного регулятора (4.3).

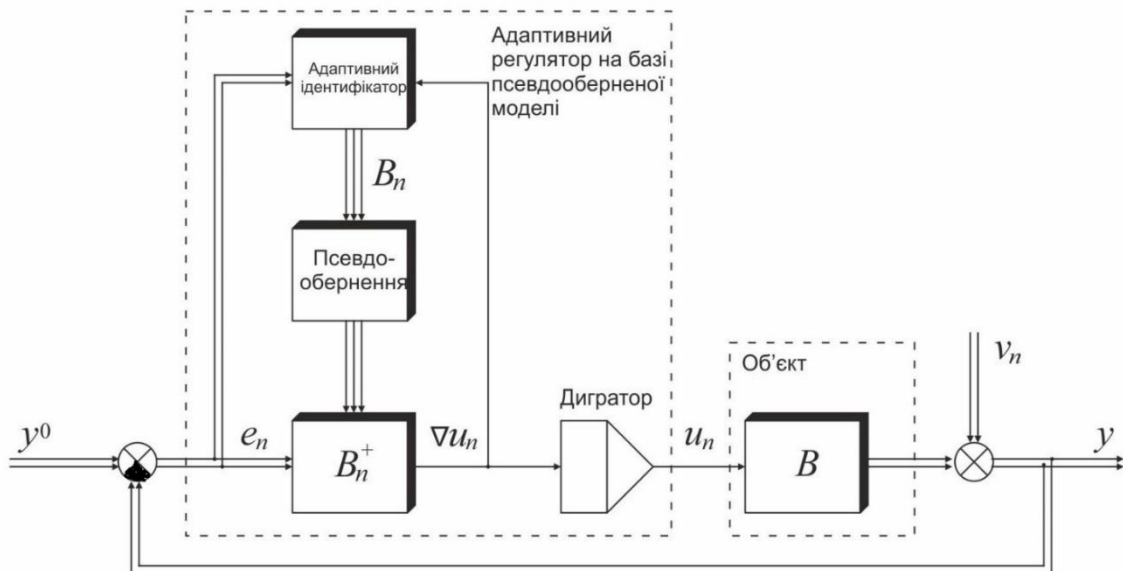


Рисунок 4.1 – Конфігурація адаптивної системи керування об'єктом (2.1) з матрицею коефіцієнтів підсилення виду (4.1)

Синтез процедури адаптивної ідентифікації далі здійснюється різними шляхами в залежності від того, чи будується адаптивна система керування в умовах параметричної невизначеності, коли ап'іорі невідомі лише елементи

матриці B , чи в умовах параметричної і непараметричної невизначеності, коли відсутня інформація не тільки про ці елементи, але й про межі $\varepsilon^{(i)}$ збурень $v_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$).

4.1.3. Синтез процедури адаптивної ідентифікації в умовах параметричної невизначеності. Припустимо, що величини $\varepsilon^{(i)}$ відомі. Тоді в силу (2.1) з врахуванням (2.4) випливає, що $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$ задовольняють нескінченні системи нерівностей

$$|\hat{b}^{(i)} \nabla u_{n-1} + e_n^{(i)} - e_{n-1}^{(i)}| \leq 2\varepsilon^{(i)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.6)$$

$$|\hat{b}^{(i)} u_{n-1} - y_n^{(i)}| \leq \varepsilon^{(i)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

відносно невідомих скалярних величин $\hat{b}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$). Іншими словами, $\hat{b}^{(i)} = b^{(i)}$ є розв'язком цих систем нерівностей.

Нерівності (4.6), (4.7) визначають відрізки $[\underline{b}_n^{*(i)}, \bar{b}_n^{*(i)}]$, $[\underline{b}_n^{**(i)}, \bar{b}_n^{**(i)}]$, до яких належать відповідні невідомі $\hat{b}^{(i)}$, а величини

$$\underline{b}_n^{*(i)} = \begin{cases} (e_{n-1}^{(i)} - e_n^{(i)} - 2\varepsilon^{(i)}) / \nabla u_{n-1} & \text{при } \nabla u_{n-1} > 0, \\ (e_{n-1}^{(i)} - e_n^{(i)} + 2\varepsilon^{(i)}) / \nabla u_{n-1} & \text{при } \nabla u_{n-1} < 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\bar{b}_n^{*(i)} = \begin{cases} (e_{n-1}^{(i)} - e_n^{(i)} + 2\varepsilon^{(i)}) / \nabla u_{n-1} & \text{при } \nabla u_{n-1} > 0, \\ (e_{n-1}^{(i)} - e_n^{(i)} - 2\varepsilon^{(i)}) / \nabla u_{n-1} & \text{при } \nabla u_{n-1} < 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\underline{b}_n^{**(i)} = \begin{cases} (y_n^{(i)} - \varepsilon^{(i)}) / u_{n-1} & \text{при } u_{n-1} > 0, \\ (y_n^{(i)} + \varepsilon^{(i)}) / u_{n-1} & \text{при } u_{n-1} < 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\bar{b}_n^{**(i)} = \begin{cases} (y_n^{(i)} + \varepsilon^{(i)}) / u_{n-1} & \text{при } u_{n-1} > 0, \\ (y_n^{(i)} - \varepsilon^{(i)}) / u_{n-1} & \text{при } u_{n-1} < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

визначають поточні межі цих відрізків.

Введемо перетини відрізків

$$H_n^{*(i)} = [\underline{b}_1^{*(i)}, \bar{b}_1^{*(i)}] \cap \dots \cap [\underline{b}_n^{*(i)}, \bar{b}_n^{*(i)}], \quad H_n^{**(i)} = [\underline{b}_1^{**(i)}, \bar{b}_1^{**(i)}] \cap \dots \cap [\underline{b}_n^{**(i)}, \bar{b}_n^{**(i)}],$$

що можуть бути рекурентно визначені як

$$H_n^{*(i)} = H_{n-1}^{*(i)} \cap [\underline{b}_n^{*(i)}, \bar{b}_n^{*(i)}], \quad H_n^{**(i)} = H_{n-1}^{**(i)} \cap [\underline{b}_n^{**(i)}, \bar{b}_n^{**(i)}]. \quad (4.12)$$

Далі визначимо множину

$$H_n^{(i)} = H_n^{*(i)} \cap H_n^{**(i)}, \quad (4.13)$$

відносно якої гарантується, що $b^{(i)} \in H_n^{(i)}$ для будь-якого $n = 1, 2, \dots$. Ця властивість випливає з (4.12) в силу того, що $b^{(i)} \in [\underline{b}_n^{*(i)}, \bar{b}_n^{*(i)}]$ і $b^{(i)} \in [\underline{b}_n^{**(i)}, \bar{b}_n^{**(i)}]$.

Аби побудувати процедуру адаптації у випадку, коли всі $\varepsilon^{(i)}$ відомі, введемо змінні

$$\tilde{e}_n^{(i)} = e_n^{(i)} - e_{n-1}^{(i)} + b_{n-1}^{(i)} \nabla u_{n-1} \quad (i = 1, \dots, m), \quad (4.14)$$

які відіграють роль деяких похибок оцінювання (як і в [116]). Сама ж процедура адаптації являтиме собою рекурентну процедуру розв'язання нерівностей (4.6), (4.7) щодо $\hat{b}^{(i)}$ у такій формі:

$$b_n^{(i)} = \begin{cases} b_{n-1}^{(i)}, & \text{коли } |\tilde{e}_n^{(i)}| \leq \varepsilon_0^{(i)}, \\ P_{H_n^{(i)}} \{b_{n-1}^{(i)} - \gamma_n^{(i)} [\tilde{e}_n^{(i)} - 2\varepsilon^{(i)} \text{sign } \tilde{e}_n^{(i)}] / \nabla u_{n-1}\} & \text{в іншому випадку } (i = 1, \dots, m). \end{cases} \quad (4.15)$$

Тут $b_n^{(i)}$ – поточна оцінка невідомого $\hat{b}^{(i)}$; $\varepsilon_0^{(i)}$ – довільні величини, що вибираються з умови

$$\varepsilon_0^{(i)} \geq 2\varepsilon^{(i)}; \quad (4.16)$$

$P_{H_n^{(i)}}\{w\}$ позначає проєкцію скаляра w на поточний відрізок $H_n^{(i)}$, визначений відповідно до (4.13); $\gamma_n^{(i)}$ – скалярний множник, що вибирається з умови

$$0 < \gamma' \leq \gamma_n^{(i)} \leq \gamma'' < 2 \quad (4.17)$$

таким чином, аби виконати вимогу

$$b_n^{(i)} \neq 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Зауваження 4.1. Процедура рекурентного оцінювання (4.15) отримана шляхом суперпозиції стандартної процедури ідентифікації, що дає точкові розв'язки $\hat{b}^{(i)} = b_n^{(i)}$ системи нерівностей (4.6) (як у [38, гл. 4]), та процедури множинної ідентифікації [92].

Зауваження 4.2. Аби виконати (4.17), (4.18) при $b_{n-1}^{(i)} \notin H_n^{(i)}$, рекомендується на кожному n -му кроці здійснювати такі дії. Покласти в (4.17) $\gamma_n^{(i)} = 1$. Якщо при цьому виявиться, що $w_n \neq 0$, то прийняти $b_n = w_n$, де для скорочення запису w_n означає величину, яка міститься у фігурних дужках правої частини співвідношення (4.15). Оскільки ж $H_n^{(i)} = [\underline{H}_n^{(i)}, \overline{H}_n^{(i)}] \in \mathbf{R}$ – опукла одновимірна множина, то за означенням операції проєктування будь-якого скаляра на цю множину, сформульованої зокрема в [38, п. 2.1.2°], при $b_{n-1}^{(i)} \notin H_n^{(i)}$, коли $w_n = 0$, маємо $b_n^{(i)} = \underline{H}_n^{(i)}$, якщо $b_{n-1}^{(i)} < \underline{H}_n^{(i)}$, і $b_n^{(i)} = \overline{H}_n^{(i)}$, якщо $b_{n-1}^{(i)} > \overline{H}_n^{(i)}$. З врахуванням того факту, що w_n – лінійна функція від $\gamma_n^{(i)}$, вона не може прийняти нульове значення більше, ніж в одній точці $\gamma_n^{(i)} \in [\gamma', \gamma'']$. Це дає $b_n^{(i)} \neq 0$ і зрештою гарантує, що процедура (4.15) породжує послідовність $\{b_n^{(i)}\}$ заздалегідь ненульових $b_n^{(i)}$, якщо покласти ненульові початкові значення $b_0^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$).

Схема алгоритму, який реалізує закон керування (4.3), (4.15) – (4.18), подана на рис. 4.2. Цей алгоритм включає наступні кроки:

Крок 1. Початок.

Крок 2. Вибір матриці B_0 початкових оцінок невідомої матриці B .

Крок 3 Вибір величин $\varepsilon_0^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) згідно з умовами (4.16).

Крок 4. Для першого дискретного моменту часу $n=1$ і всіх наступних моментів часу виконувати кроки 5 – 14.

Крок 5. Вимірювання вихідних змінних $y_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) об'єкта в n -й момент часу.

Крок 6. Обчислення похибки e_n функціонування віртуальної системи в n -й момент часу за формулою (2.8).

Крок 7. Обчислення $\underline{b}_n^{*(i)}$, $\overline{b}_n^{*(i)}$, $\underline{b}_n^{**(i)}$, $\overline{b}_n^{**(i)}$ за формулами (4.8) – (4.11).

Крок 8. Обчислення $H_n^{*(i)}$, $H_n^{**(i)}$ за формулами (4.12).

Крок 9. Обчислення $H_n^{(i)}$ за формулою (4.13).

Крок 10. Обчислення поточних похибок $\tilde{\epsilon}_n^{(i)}$ оцінювання елементів матриці B_n коефіцієнтів підсилення а в n -й момент часу за формулою (4.14)

Крок 11. Адаптивна параметрична ідентифікація елементів матриці B_n коефіцієнтів підсилення об'єкта за процедурою (4.15).

Крок 12. Обчислення матриці B_n^+ за формулою (4.5).

Крок 13. Обчислення керувальної дії u_n за формулою (4.3).

Крок 14. Перехід до наступного $(n+1)$ -го моменту часу і повернення до кроку 4.

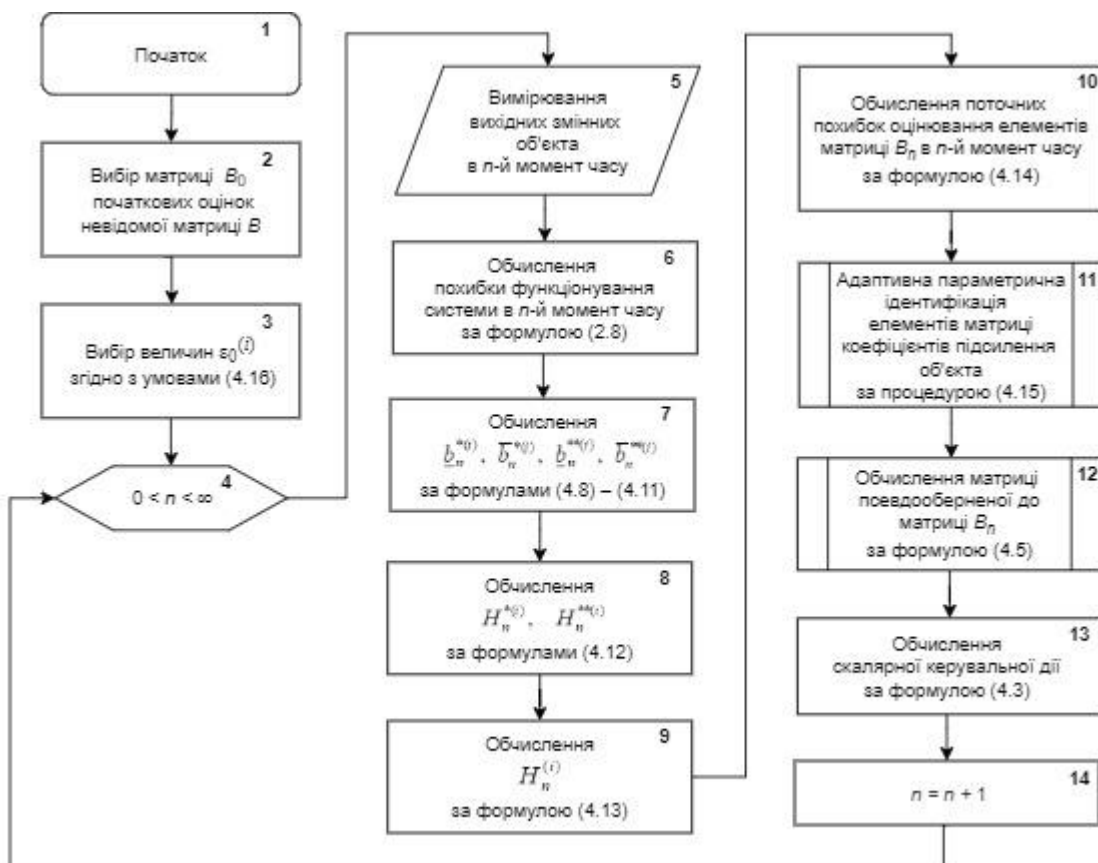


Рисунок 4.2 – Схема алгоритму керування за законом (4.3), (4.15) – (4.18)

Наступна лема досить важлива для встановлення асимптотичних властивостей адаптивного керування в замкненій системі (2.1), (2.8), (4.3), (4.8) – (4.17).

Лема 4.1. Нехай $\epsilon'(B, \hat{B}) := \{\hat{B} : \|B - \hat{B}\|_2 < \epsilon'\}$ – деякий ϵ' -окіл матриці B виду (4.1), а $\bar{\epsilon}'(B, \hat{B})$ – його замикання. Тоді існує достатньо мале додатне число

ε' таке, що якщо $B_{n(\varepsilon')} \in \bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})$ для деякого скінченного $n = n(\varepsilon')$, то послідовність $\{u_n\}$ буде обмеженою

Доведення. З умови $b^{(i)} \neq 0 \forall i = 1, \dots, m$, яка фігурує в (4.1), випливає існування достатньо малого додатного числа ε' такого, що $\bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})$ не буде містити матриць \hat{B} , хоча б один елемент яких дорівнює 0, тобто $0_{m \times 1} \notin \bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})$. Нехай в деякий момент $n = n(\varepsilon')$ на етапі адаптивного оцінювання B_n за процедурою (4.15) відбулася подія $B_{n(\varepsilon')} \in \bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})$. За означенням множини $\bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})$ у цьому випадку

$$\|B_{n(\varepsilon')} - B\|_2 \leq \varepsilon'. \quad (4.19)$$

Проаналізуємо далі послідовність $\{u_n\}$, яка породжується законом керування (4.3) при $n \geq n(\varepsilon')$. З цією метою на підставі (4.3), (2.1), (2.8) при $y_n^0 \equiv y^0$ складемо рівняння

$$u_n = (1 - B_n^+ B)u_{n-1} + B_n^+ y^0 - B_n^+ v_{n-1}. \quad (4.20)$$

Введемо матрицю

$$\Delta_n := B_n - B, \quad (4.21)$$

що визначається як різниця між невідомою B і її поточною оцінкою B_n . Враховуючи той факт, що B_n як стовпцева матриця з ненульовими елементами (див. зауваження 4.2) є матрицею повного рангу, в силу властивості $B_n^+ B_n = 1$, яка випливає з [144, теорема 3.12], на підставі (4.21) рівняння (4.20) можна переписати наступним чином:

$$u_n = D_n u_{n-1} + B_n^+ y^0 - B_n^+ v_{n-1}. \quad (4.22)$$

Тут

$$D_n := B_n^+ \Delta_n. \quad (4.23)$$

З (4.23) випливає, що

$$\|D_n\|_2 \leq \|B_n^+\|_2 \|\Delta_n\|_2. \quad (4.24)$$

Розглянемо окремо кожний з двох множників, які фігурують в нерівності (4.24). За означенням евклідової норми $\|P\|_2$ довільної матриці P на підставі виразу (4.5) з врахуванням (4.4) маємо

$$\|B_n^+\|_2 = \frac{1}{\sqrt{[b_n^{(1)}]^2 + \dots + [b_n^{(m)}]^2}}. \quad (4.25)$$

Згідно з [38, теорема 2.1.1a] змінна

$$V_n^{(i)} = |b_n^{(i)} - b^{(i)}|^2$$

є функцією Ляпунова рекурентної процедури типу (4.15), а тому за означенням 2.1.2 цієї функції, наведеним в [38, с. 53],

$$|b_{n+1}^{(i)} - b^{(i)}|^2 \leq |b_n^{(i)} - b^{(i)}|^2 \quad \forall n=1, 2, \dots \quad (i=1, \dots, m), \quad (4.26)$$

тобто $\{|b_n^{(i)} - b^{(i)}|^2\}$ – незростаючі послідовності. Згідно з (4.1), (4.4) за означенням норми $\|P\|_2$ маємо

$$\|B_n - B\|_2 = \sqrt{|b_n^{(1)} - b^{(1)}|^2 + \dots + |b_n^{(m)} - b^{(m)}|^2} \quad \forall n=1, 2, \dots,$$

звідки в силу (4.26) з врахуванням (4.19) негайно випливає низка нерівностей

$$\|B_{n(\varepsilon') + k} - B\|_2 \leq \dots \leq \|B_{n(\varepsilon') + 1} - B\|_2 \leq \|B_{n(\varepsilon')} - B\|_2 \leq \varepsilon'. \quad (4.27)$$

А це означає, що

$$B_{n(\varepsilon')} \in \bar{\varepsilon}'(B, \hat{B}) \Rightarrow B_{n(\varepsilon') + k} \in \bar{\varepsilon}'(B, \hat{B}), \quad k=1, 2, \dots, \quad (4.28)$$

тобто при кожному $n = n(\varepsilon')$, $n(\varepsilon') + 1$, $n(\varepsilon') + 2, \dots$ всі матриці B_n неодмінно будуть належати обмеженій замкненій множині $\bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})$ (компакту).

З формули

$$\|\hat{B}^+\|_2 = \frac{1}{\sqrt{[\hat{b}^{(1)}]^2 + \dots + [\hat{b}^{(m)}]^2}},$$

аналогічної (4.25), неважко бачити, що $\|\hat{B}^+\|_2$ як функція від $\hat{B} = [\hat{b}^{(1)}, \dots, \hat{b}^{(m)}]^T$ являє собою неперервну функцію на $\bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})$ (в силу того, що $\hat{b}^{(i)} \neq 0$ ($i=1, \dots, m$)) $\forall \hat{B} \in \bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})$. Оскільки ж $\bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})$ – компакт, то за відомою теоремою Вейерштраса, наведеної, зокрема, в монографії [147, с. 183], існують мінімум

$$\underline{M} = \min_{\hat{B} \in \bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})} \|\hat{B}^+\|_2 > 0 \quad (4.29)$$

і максимум

$$\overline{M} = \max_{\hat{B} \in \bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})} \|\hat{B}^+\|_2 (< \infty) \quad (4.30)$$

цієї функції на $\bar{\varepsilon}'(B, \hat{B})$. Тому в силу (4.28) справедливі обмеження

$$\underline{M} \leq \|B_n^+\|_2 \leq \overline{M} \quad \forall n \geq n(\varepsilon'), \quad (4.31)$$

де \underline{M} і \overline{M} визначаються відповідно до (4.29) і (4.30).

Згадуючи тепер означення (4.21) матриці Δ_n , на підставі (4.27) запишемо

$$\|\Delta_n\|_2 \leq \varepsilon' \quad \forall n \geq n(\varepsilon'). \quad (4.32)$$

Враховуючи далі (4.31) і (4.32), обмеження зверху на $\|D_n\|_2$, виражене нерівністю (4.24), при $n = n(\varepsilon')$, $n(\varepsilon') + 1$, $n(\varepsilon') + 2, \dots$ можна підсилити і записати

$$\|D_n\|_2 \leq \overline{M}\varepsilon' \quad \forall n \geq n(\varepsilon'). \quad (4.33)$$

З-за довільності вибору числа ε' приймаємо $\varepsilon' < 1/\overline{M}$. Тоді (4.33) набуває вигляду

$$\|D_n\|_2 \leq 1 \quad \forall n \geq n(\varepsilon'). \quad (4.34)$$

Використовуючи певною мірою стандартну техніку встановлення асимптотичних властивостей замкненої дискретної нестационарної системи керування, запозичену в [90, п. 3.6.2], неважко показати, що за наявності обмеження $\|v_n\|_2 \leq \varepsilon$, де ε визначається формулою (2.5), умова (4.34) є достатньою умовою граничної обмеженості послідовності $\{u_n\}$, яка формулюється у відповідності до (4.22):

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_2 < \infty.$$

Тим самим завершується доведення леми.

Справедливо таке твердження.

Твердження 4.1. При будь-яких початкових оцінках $b_0^{(i)} \neq 0$ ($i = 1, \dots, m$) замкнена система стабілізації об'єкта (2.1), що містить в контурі зворотного

зв'язку адаптивний регулятор (4.3), (4.15) – (4.18) забезпечує виконання граничних вимог (4.2).

Доведення. Припустимо, що послідовність $\{y_n\}$ є необмеженою, тобто

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \infty. \quad (4.35)$$

Тоді

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \infty. \quad (4.36)$$

Дійсно, за наявності матриці B повного рангу з рівняння об'єкта (2.1) маємо

$$u_{n-1} = B^+ y_n - B^+ v_n,$$

звідки в умовах припущення (4.35) з урахуванням (2.4) випливає (4.36).

Якщо припущення (4.36) виконується, то існує підмножина $\{n_j\}$ ($n_1 < n_2 < \dots$) така, що

$$\lim_{n_j \rightarrow \infty} |u_{n_j}| = \infty. \quad (4.37)$$

Враховуючи, що в силу (4.10), (4.11) довжина $d_n^{**^{(i)}}$ інтервалу $[\underline{b}_n^{**^{(i)}}, \bar{b}_n^{**^{(i)}}]$ дорівнює $d_n^{**^{(i)}} = 2\varepsilon^{(i)} / u_{n-1}$, згідно з (4.37) маємо

$$\lim_{n_j \rightarrow \infty} d_{n_j}^{**^{(i)}} = 0. \quad (4.38)$$

З означень (4.12) разом з (4.13) стає очевидним, що $\{H_n^{(i)}\}$ являє собою послідовність одновимірних «незростаючих» множин: $H_n^{(i)} \supseteq H_{n+1}^{(i)} \quad \forall n = 1, 2, \dots$ ($i = 1, \dots, m$). При цьому з (4.38) випливає існування числа $n(\varepsilon')$ такого, що

$$H_n^{(1)} \times \dots \times H_n^{(m)} \subseteq \varepsilon'(B, \tilde{B}) \quad \forall n \geq n(\varepsilon')$$

з як завгодно малим $\varepsilon' > 0$. В силу леми 4.1 можна записати

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n| < \infty.$$

Але це суперечить (4.36). Звідси припущення про необмеженість послідовності $\{u_n\}$ є хибним. Значить, послідовність $\{u_n\}$ є обмеженою. Тому в силу рівняння об'єкта (2.1) і обмеження (2.4) негайно встановлюється обмеженість послідовності $\{y_n\}$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| < \infty.$$

На цьому доведення твердження завершується.

4.1.4. Синтез процедури адаптивної ідентифікації в умовах параметричної і непараметричної невизначеності. Розглянемо тепер випадок, коли не тільки елементи матриці B , але й межі $\varepsilon^{(i)}$ в (2.4) невідомі. Проте відомо, що величини $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$ та $\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(m)}$ задовольняють нескінченні системи нерівностей

$$|\hat{b}^{(i)} \nabla u_{n-1} + e_n^{(i)} - e_{n-1}^{(i)}| \leq 2\hat{\varepsilon}^{(i)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.39)$$

$$|\hat{b}^{(i)} u_{n-1} - y_n^{(i)}| \leq \hat{\varepsilon}^{(i)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.40)$$

відносно $\hat{b}^{(i)}, \hat{\varepsilon}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$), подібні нерівностям (4.6), (4.7) відповідно. В цьому випадку процедура оцінювання елементів матриці B має здійснюватися одночасно з оцінюванням величин $\varepsilon^{(i)}$ за співвідношеннями

$$b_n^{(i)} = \begin{cases} b_{n-1}^{(i)} & \text{при } |\tilde{e}_n^{(i)}| \leq 2\varepsilon_{n-1}^{(i)}, \\ P_{H_n^{(i)}} \{b_{n-1}^{(i)} - \gamma_n^{(i)} [\tilde{e}_n^{(i)} - 2\varepsilon_{n-1}^{(i)} \text{sign } \tilde{e}_n^{(i)}] / \nabla u_{n-1}\} & \text{при } |\tilde{e}_n^{(i)}| > 2\varepsilon_{n-1}^{(i)}, \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\varepsilon_n^{(i)} = \varepsilon_{n-1}^{(i)}, \quad (4.42)$$

за умови $H_n^{(i)} \neq \emptyset$; в іншому випадку

$$b_n^{(i)} = b_0^{(i)}, \quad (4.43)$$

$$\varepsilon_n^{(i)} = \varepsilon_{n-1}^{(i)} + d_\varepsilon^{(i)}, \quad (4.44)$$

де $d_\varepsilon^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) – фіксовані і достатньо малі додатні числа, задані конструктором системи. Множина $H_n^{(i)}$, що фігурує у цих співвідношеннях, визначається аналогічно до (4.13) коли

$$H_n^{*(i)} := \bigcap_{v=n_i(j)}^n [\underline{b}_v^{*(i)}, \bar{b}_v^{*(i)}], \quad H_n^{**(i)} := \bigcap_{v=n_i(j)}^n [\underline{b}_v^{**(i)}, \bar{b}_v^{**(i)}], \quad (4.45)$$

де $n_i(j)$ позначає останній момент часу, коли одна з множин $H_{n_i(j)}^{*(i)}$ або $H_{n_i(j)}^{**(i)}$ стає порожньою множиною ($n_i(1) < n_i(2) < \dots < n_i(j) < n$). Заміна невідомих величин $\varepsilon^{(i)}$ на оцінки $\varepsilon_{n-1}^{(i)}$ у формулах (4.8) – (4.11) веде до процедур

$$\underline{b}_n^{*(i)} = \begin{cases} (e_{n-1}^{(i)} - e_n^{(i)} - 2\varepsilon_{n-1}^{(i)}) / \nabla u_{n-1}, & \text{якщо } \nabla u_{n-1} > 0, \\ (e_{n-1}^{(i)} - e_n^{(i)} + 2\varepsilon_{n-1}^{(i)}) / \nabla u_{n-1}, & \text{якщо } \nabla u_{n-1} < 0, \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\bar{b}_n^{*(i)} = \begin{cases} (e_{n-1}^{(i)} - e_n^{(i)} + 2\varepsilon_{n-1}^{(i)}) / \nabla u_{n-1}, & \text{якщо } \nabla u_{n-1} > 0, \\ (e_{n-1}^{(i)} - e_n^{(i)} - 2\varepsilon_{n-1}^{(i)}) / \nabla u_{n-1}, & \text{якщо } \nabla u_{n-1} < 0, \end{cases} \quad (4.47)$$

та

$$\underline{b}_n^{**(i)} = \begin{cases} (y_n^{(i)} - \varepsilon_{n-1}^{(i)}) / u_{n-1}, & \text{якщо } u_{n-1} > 0, \\ (y_n^{(i)} + \varepsilon_{n-1}^{(i)}) / u_{n-1}, & \text{якщо } u_{n-1} < 0, \end{cases} \quad (4.48)$$

$$\bar{b}_n^{**(i)} = \begin{cases} (y_n^{(i)} + \varepsilon_{n-1}^{(i)}) / u_{n-1}, & \text{якщо } u_{n-1} > 0, \\ (y_n^{(i)} - \varepsilon_{n-1}^{(i)}) / u_{n-1}, & \text{якщо } u_{n-1} < 0. \end{cases} \quad (4.49)$$

Схема алгоритму керування за законом (4.3), (4.41) – (4.49) подана на рис. 4.3. Цей алгоритм включає наступні кроки:

Крок 1. Початок.

Крок 2. Вибір матриці B_0 початкових оцінок невідомої матриці B .

Крок 3 Вибір величин $\varepsilon_0^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) згідно з умовами (4.16).

Крок 4. Для першого дискретного моменту часу $n=1$ і всіх наступних моментів часу виконувати кроки 5 – 14.

Крок 5. Вимірювання вихідних змінних $y_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) об'єкта в n -й момент часу.

Крок 6. Обчислення похибки e_n функціонування віртуальної системи в n -й момент часу за формулою (2.8).

Крок 7. Обчислення $\underline{b}_n^{*(i)}$, $\bar{b}_n^{*(i)}$, $\underline{b}_n^{**(i)}$, $\bar{b}_n^{**(i)}$ за формулами (4.8) – (4.11).

Крок 8. Обчислення $H_n^{*(i)}$, $H_n^{**(i)}$ за формулами (4.12).

Крок 9. Обчислення $H_n^{(i)}$ за формулою (4.13).

Крок 10. Перевірка умови $H_n^{(i)} \neq \emptyset$, якщо умова виконується, то переходимо до кроку 13, а якщо не виконується – переходимо до кроку 11.

Крок 11. Обчислення $\varepsilon_n^{(i)}$ за формулою (4.44).

Крок 12. Покласти $b_n^{(i)} = b_0^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) згідно з формулою (4.43) і перейти до кроку 4.

Крок 13. Обчислення поточних похибок $\tilde{\varepsilon}_n^{(i)}$ оцінювання елементів матриці B_n коефіцієнтів підсилення а в n -й момент часу за формулою (4.14)

Крок 14. Адаптивна параметрична ідентифікація елементів матриці B_n коефіцієнтів підсилення об'єкта за процедурою (4.41).

Крок 15. Обчислення матриці B_n^+ за формулою (4.5).

Крок 16. Обчислення керувальної дії u_n за формулою (4.3).

Крок 17. Перехід до наступного $(n + 1)$ -го моменту часу і повернення до кроку 4.

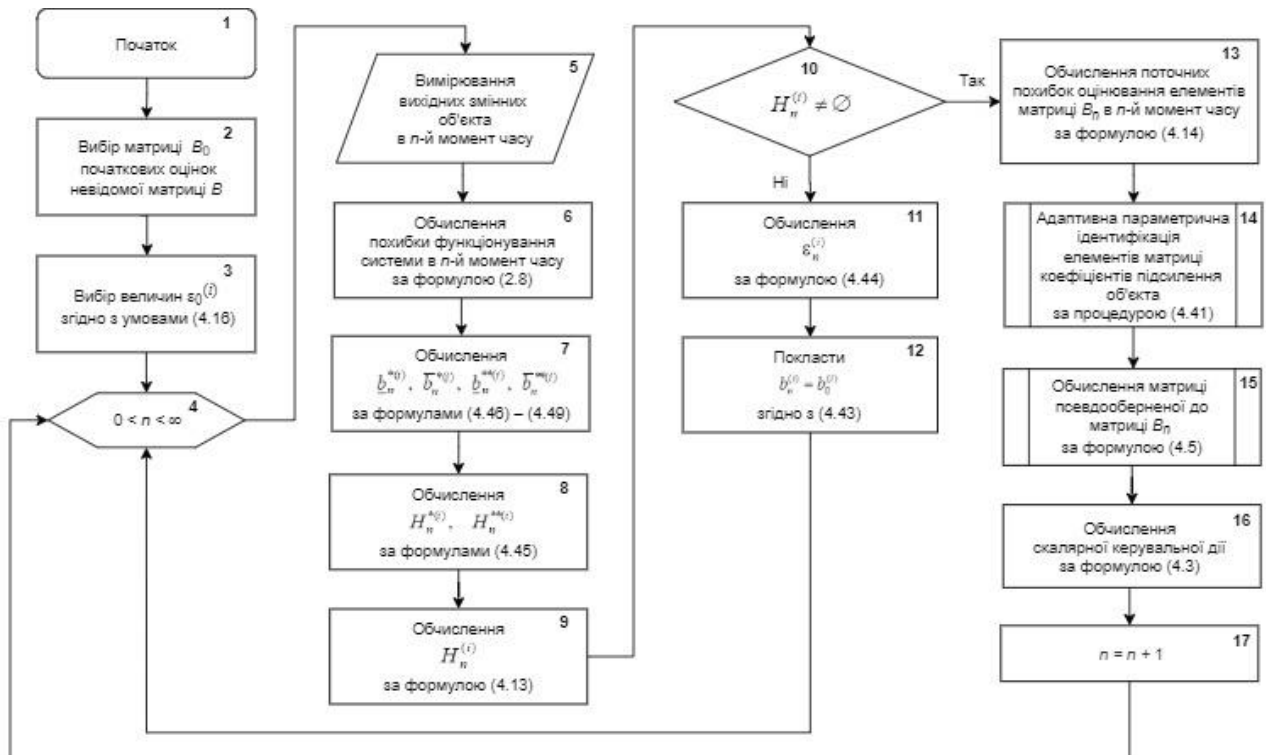


Рисунок 4.3 – Схема алгоритму керування за законом (4.3), (4.15) – (4.18)

Асимптотична властивість адаптивного регулятора, який побудований на основі псевдообреної моделі і використовує процедури адаптації, описані вище, встановлена в наступному твердженні.

Твердження 4.2. При будь-яких початкових оцінках $b_0^{(i)} \neq 0$ і $\{\varepsilon_n^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, m$) замкнена система стабілізації об'єкта (2.1), що містить в контурі зворотного зв'язку адаптивний регулятор (4.3), (4.41) – (4.49), має такі асимптотичні властивості:

- 1) оцінки $\varepsilon_n^{(1)}, \dots, \varepsilon_n^{(m)}$ обмежені зверху;
- 2) обмеженість $\{u_n\}$ і $\{y_n\}$ гарантується.

Доведення. Звернемо спочатку увагу на те, що (4.42) та (4.44) визначають неспадаючі послідовності $\{\varepsilon_n^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, m$). Доведемо далі, що ці послідовності не можуть бути необмеженими. Дійсно, коли вони стають такими, що $\varepsilon_n^{(i)} \geq \varepsilon^{(i)}$ для всіх достатньо великих n_+ і всіх $i = 1, \dots, m$, то перетин (4.13) буде непорожнім (за означеннями (4.12) множин $H_n^{*(i)}$ і $H_n^{**(i)}$). Цим самим доведено положення 1) твердження.

Аби довести справедливість положення 2), зазначимо, що обмеженість послідовностей $\{\varepsilon_n^{(i)}\}$, встановлена в положенні 1), означає, що послідовності $\{n_i(j)\}$ ($i = 1, \dots, m$) скінченні. З іншого боку, можна показати, що поки справедливі нерівності

$$\varepsilon_n^{(i)} < \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n^{(i)} \quad \text{або} \quad -\varepsilon_n^{(i)} > \liminf_{n \rightarrow \infty} v_n^{(i)}$$

для всіх $i = 1, \dots, m$, то наступить скінченний момент часу $n(j)$ такий, що перетин (4.13) стане порожнім. Таким чином, $\varepsilon_n^{(i)}$ зростатиме до тих пір, поки будуть виконуватися згадані вище нерівності. Можна зрозуміти, що коли $\varepsilon_n^{(i)}$ перестануть змінюватися, тобто $\varepsilon_n^{(i)} \equiv \varepsilon_{n_+}^{(i)}$ для всіх $i = 1, \dots, m$, то процедура (4.41) почне

функціонувати так, як і процедура (4.15) при $\varepsilon_0^{(i)} = 2\varepsilon_{n_+}^{(i)}$. А це означає, що при всіх $n > n_+$ будуть виконані умови твердження 4.1. Згідно ж з цим твердженням будуть виконані положення 2) твердження 4.2.

Твердження доведено.

4.1.5. Модельні експерименти. Для ілюстрації працездатності синтезованого адаптивного регулятора за методом псевдооберненої моделі проведено два модельні експерименти. В обох експериментах істинні значення матриці B і її початкова оцінка B_0 були вибрані наступним чином: $B^T = [2, 14, 8]$ і $B_0^T = [0, 5, 1, 1]$.

Вектор бажаних значень вихідних змінних був заданий як $y^0 = [2, 7, 3]^T$.

Послідовності збурень $\{v_n^{(1)}\}$, $\{v_n^{(2)}\}$ і $\{v_n^{(3)}\}$ формувались як послідовності псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалах $[-1, 1]$, $[-2, 2]$, $[-0.8, 0.8]$ відповідно.

Перший модельний експеримент був проведений в умовах, коли межі збурень $v_n^{(i)}$ відомі і можна скористатися процедурою адаптації (4.15). Працездатність же адаптивного регулятора (4.41) в умовах невідомих рівнів збурень була перевірена у другому модельному експерименті. У цьому експерименті початкові значення оцінок $\varepsilon_n^{(1)}$, $\varepsilon_n^{(2)}$ і $\varepsilon_n^{(3)}$ були вибрані як

$$\varepsilon_0^{(1)} = \varepsilon_0^{(2)} = \varepsilon_0^{(3)} = 0,$$

а числа $d_\varepsilon^{(i)}$ були прийняті рівними

$$d_\varepsilon^{(1)} = 0,6, \quad d_\varepsilon^{(2)} = d_\varepsilon^{(3)} = 0,5.$$

Поведінка замкненої систем керування об'єктом (2.1) в умовах першого і другого модельного експерименту показана на рис. 4.4 та 4.5 відповідно.

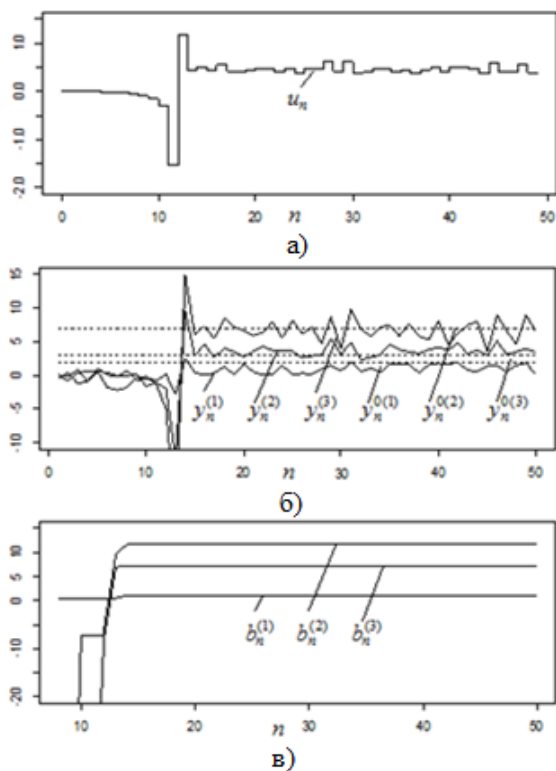


Рисунок 4.4 – Поведінка адаптивної системи керування в I експерименті

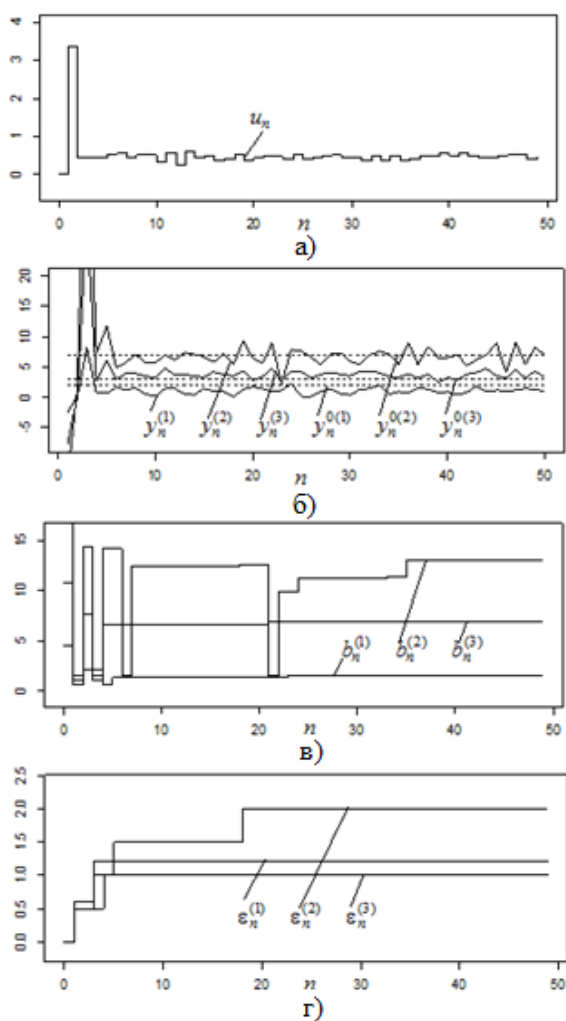


Рисунок 4.5 – Поведінка адаптивної системи керування в II експерименті

Рис. 4.4,а, б та 4.5,а, б демонструють граничну обмеженість послідовностей керувальних дій та вихідних змінних, тобто виконання вимог (2.17), (2.18), а рис. 4.4,в і 4.5 – поведінку процедур адаптації (4.15) і (4.41) відповідно. Рис. 4.5,г демонструє обмеженість поточних оцінок меж збурень.

4.2. Синтез адаптивного регулятора для стабілізації багатозв'язного об'єкта без пам'яті з виродженими матрицями коефіцієнтів підсилення

4.2.1. Постановка задачі. Нехай є лінійний багатозв'язний об'єкт без пам'яті, який описується у дискретному часі $n = 0, 1, 2, \dots$ рівнянням (2.1). Вважається, що $m = r$, а елементи $b^{(ij)}$ ($i, j = 1, \dots, r$) квадратної $r \times r$ -матриці B в (2.1) невідомі конструктору системи; відомі лише апріорні оцінки знизу й зверху цих елементів у формі $B \in \Xi$, де Ξ визначається відповідно до (3.1). У рамках зроблених припущень (3.1) щодо матриці B цілком допускається, що вона в принципі може бути виродженою. А це означає, що в загальному випадку

$$\det B = 0. \quad (4.50)$$

Як і раніше, вважається, що $v_n^{(i)}$ – довільні обмежені за рівнем змінні згідно з (2.4). При цьому рівні збурень в (2.4) апріорі можуть бути невідомі.

Необхідно побудувати адаптивний регулятор, здатний забезпечити виконання граничних вимог (2.17), (2.18).

4.2.2. Синтез адаптивного регулятора для керування об'єктом за наявності обмежених збурень відомих рівнів. На перший погляд може здатися, що в умовах (3.1) якщо невідома матриця B вироджена, то достатньо використовувати той же закон (4.3), переходячи від невідомої матриці B^+ , до її поточної оцінки

$$B_n^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} (B_n^T B_n + \delta^2 I)^{-1} B_n^T,$$

а саму оцінку B_n будувати на базі стандартної рекурентної процедури адаптивного оцінювання, подібної до тієї, яка була запропонована в [38, гл. 4]. У

дійсності це далеко не так. Справа в тому, що саме в цьому спеціальному випадку не гарантується гранична обмеженість (2.18) вектора u_n (див. [38, п. 4.2.3]). Отже, як керування за законом (4.3), так і оцінювання за стандартною процедурою ідентифікації зовсім неприйнятні для розв'язання поставленої задачі. Цей прикрий факт став спонукальним мотивом для розробки нового методу адаптивного керування в умовах (4.50).

Основна ідея запропонованого методу полягає в переході від адаптивної функціональної ідентифікації істинного об'єкта з виродженою матрицею B коефіцієнтів підсилення до адаптивної ідентифікації іншого («віртуального») об'єкта з невиродженою матрицею

$$\tilde{B} = B + \delta_0 I, \quad (4.51)$$

яка відрізняється від B своїми діагональними елементами на деяку фіксовану величину δ_0 певного знаку.

Виявляється, що хоча матриця \tilde{B} так само, як і матриця B , залишається невідомою, але в умовах (3.1) завжди можна виконати вимогу

$$\det \tilde{B} \neq 0 \quad (4.52)$$

належним вибором числа δ_0 в (4.51). Насправді, кожне i -е власне значення $\lambda_i(B)$ лежить, як відомо [143, ч. III, п. 2.2], в одній із r замкнених областей площини комплексної змінної λ , утворених колами Гершгоріна

$$|\lambda - b^{(ii)}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r |b^{(ij)}|, \quad i = 1, \dots, r. \quad (4.53)$$

Оскільки ж в силу (4.50) принаймні одне із власних значень матриці B рівне 0, то згідно з (4.53) хоча б для одного i числа

$$\underline{\beta}^{(i)} := b^{(ii)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r |b^{(ij)}|, \quad \bar{\beta}^{(i)} := b^{(ii)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r |b^{(ij)}|, \quad (4.54)$$

що визначають точки перетину i -го круга Гершгоріна з дійсною віссю на площині $\{\lambda\}$, такі, що при

$$|b^{(i1)}| + \dots + |b^{(ir)}| \neq 0 \quad (4.55)$$

або $\underline{\beta}^{(i)} \leq 0$, а $\bar{\beta}^{(i)} > 0$, або ж $\underline{\beta}^{(i)} < 0$, а $\bar{\beta}^{(i)} \geq 0$, як показано ліворуч на рис. 4.6 і 4.7 відповідно (на прикладі, коли $r = 2$). Але в обох випадках неодмінно $\underline{\beta}^{(i)} \bar{\beta}^{(i)} \leq 0$, якщо тільки виконане (4.55): числа $\underline{\beta}^{(i)}$ і $\bar{\beta}^{(i)}$ не можуть мати однаковий знак.

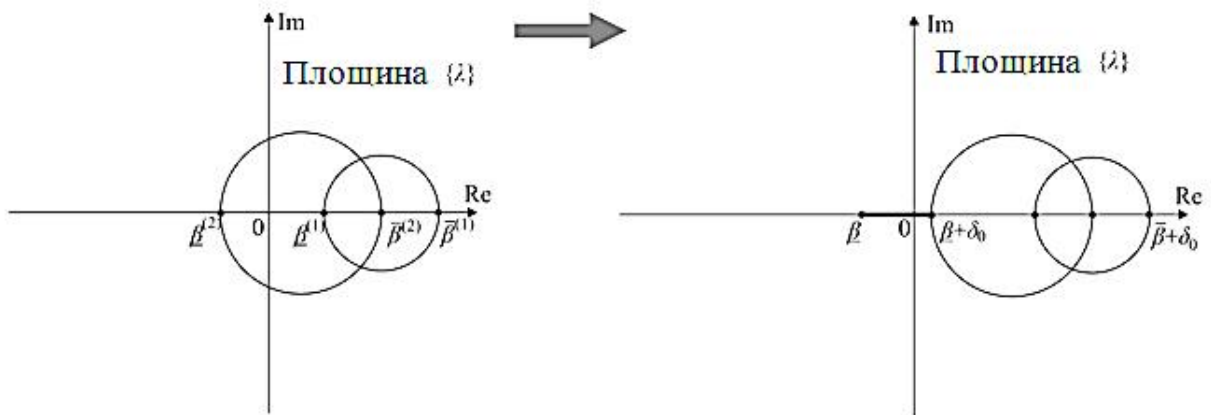


Рисунок 4.6 – Круги Гершгорина при $r=2$ у випадку $|\underline{\beta}^{(2)}| < |\bar{\beta}^{(1)}|$

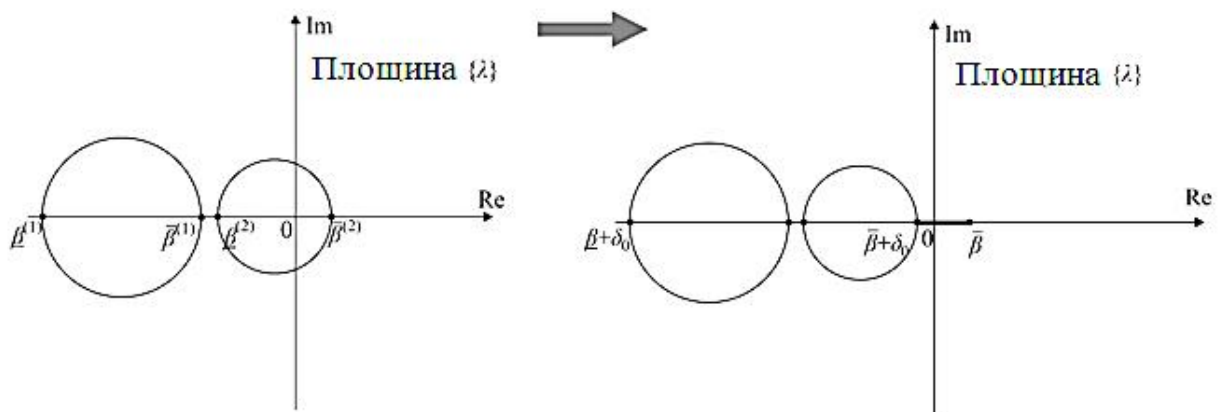


Рисунок 4.7 – Круги Гершгорина при $r=2$ у випадку $|\bar{\beta}^{(2)}| < |\underline{\beta}^{(1)}|$

Позначимо

$$\underline{\beta} := \min\{\underline{\beta}^{(1)}, \dots, \underline{\beta}^{(r)}\}, \quad \bar{\beta} := \max\{\bar{\beta}^{(1)}, \dots, \bar{\beta}^{(r)}\} \quad (4.56)$$

і розглянемо наступні можливі випадки: а) $|\underline{\beta}| < |\bar{\beta}|$; б) $|\underline{\beta}| > |\bar{\beta}|$. (Випадок, коли $|\underline{\beta}| = |\bar{\beta}|$, може бути приєднаний до кожного із цих двох випадків.) У випадку а) для переходу до матриці \tilde{B} коефіцієнтів підсилення віртуального об'єкта виду (4.51) досить зсунути вправо круги Гершгорина (4.53) на величину

$$\delta_0 > |\underline{\beta}| \quad (4.57)$$

(див. рис. 4.6, праворуч). У випадку ж б) для такого переходу доречно здійснити зсув кіл (4.53) вліво на величину

$$\delta_0 < -|\bar{\beta}| \quad (4.58)$$

(див. рис. 4.7, праворуч). При цьому в обох випадках невиродженість матриці \tilde{B} гарантується. Але вибір числа δ_0 відповідно до співвідношень (4.57), (4.58) поки ще не видається можливим: адже величини $\underline{\beta}$, $\bar{\beta}$, що фігурують у них, обумовлені виразами (4.56) з врахуванням (4.54), залежать від елементів $b^{(ij)}$ матриці B , а вони апіорі невідомі. Саме тому пошук числа δ_0 , для якого гарантується виконання вимоги (4.52), пропонується здійснювати в такий спосіб.

Визначимо величини

$$\underline{\beta}_{\min}^{(i)} := \underline{b}^{(ii)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \max\{|\underline{b}^{(ij)}|, |\bar{b}^{(ij)}|\}, \quad (4.59)$$

$$\bar{\beta}_{\max}^{(i)} := \bar{b}^{(ii)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \max\{|\underline{b}^{(ij)}|, |\bar{b}^{(ij)}|\}, \quad (4.60)$$

мінімізуючи і максимізуючи праві частини виразів (4.54) для $\underline{\beta}^{(i)}$ та $\bar{\beta}^{(i)}$ відповідно за всіма можливими значеннями $b^{(ij)} \in [\underline{b}^{(ij)}, \bar{b}^{(ij)}]$.

Введемо далі такі величини:

$$\underline{\beta}_{\min} := \min\{\underline{\beta}_{\min}^{(1)}, \dots, \underline{\beta}_{\min}^{(r)}\}, \quad \bar{\beta}_{\max} := \max\{\bar{\beta}_{\max}^{(1)}, \dots, \bar{\beta}_{\max}^{(r)}\}. \quad (4.61)$$

Тоді необхідне значення δ_0 повинне задовольняти умови

$$\delta_0 > -\underline{\beta}_{\min} \quad \text{при} \quad |\underline{\beta}_{\min}| < |\bar{\beta}_{\max}|, \quad \delta_0 < -\bar{\beta}_{\max} \quad \text{при} \quad |\underline{\beta}_{\min}| > |\bar{\beta}_{\max}|. \quad (4.62)$$

Можна зрозуміти, що при виконанні умов (4.62) з врахуванням (4.59) – (4.61) вимога (4.52) неодмінно буде виконана.

Після того як визначено число δ_0 , що фігурує у виразі (4.51) матриці коефіцієнтів підсилення \tilde{B} віртуального об'єкта, перейдемо до розгляду самого цього об'єкта, на входи якого мають надходити ті ж керувальні дії $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)}$ і

неконтрольовані збурення $v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(r)}$, що й на істинний об'єкт. Віртуальний об'єкт формально можна описати рівнянням

$$\tilde{y}_n = \tilde{B}u_{n-1} + v_{n-1}, \quad (4.63)$$

подібним рівнянню (2.1) при $m=r$. У цьому рівнянні $\tilde{y}_n = [\tilde{y}_n^{(1)}, \dots, \tilde{y}_n^{(r)}]^T$ позначає вектор вихідних змінних віртуального об'єкта, а \tilde{B} – матриця виду (4.51).

Цікаво, що хоча компоненти вектора v_n в рівнянні (4.63), як і раніше, недоступні для вимірювання, проте компоненти вектора \tilde{y}_n можуть бути опосередковано виміряні. Дійсно, підставляючи вираз (4.51) для \tilde{B} в (4.63) і враховуючи (2.1), одержимо

$$\tilde{y}_n = y_n + \delta_0 I u_{n-1}. \quad (4.64)$$

Як видно з виразу (4.64), при заданому δ_0 вектор \tilde{y}_n завжди можна знайти за відомим u_n і вимірюваним y_n .

Задача тепер зводиться прямо до задачі функціональної параметричної ідентифікації та одночасного керування віртуальним об'єктом (4.63) за його оберненою моделлю, яка налаштовується. Закон керування цим об'єктом (а, отже, і істинним об'єктом (2.1)) визначається співвідношенням

$$u_n = u_{n-1} + \tilde{B}_n^{-1} \tilde{e}_n, \quad (4.65)$$

подібним до (4.3), з тією суттєвою різницею, що замість поточної оцінки B_n^+ у ньому фігурує оцінка \tilde{B}_n^{-1} , а замість вектора похибки e_n виду (2.8) – похибка

$$\tilde{e}_n = y^0 - \tilde{y}_n. \quad (4.66)$$

Процедура адаптивної параметричної ідентифікації визначається рекурентним співвідношенням

$$\tilde{b}_n^{(i)} = \begin{cases} \tilde{b}_{n-1}^{(i)}, & \text{якщо } |\tilde{e}_n^{*(i)}| \leq \varepsilon^{0(i)}, \\ \tilde{b}_{n-1}^{(i)} + \gamma_n^{(i)} \frac{\tilde{e}_n^{*(i)} - 2\varepsilon^{(i)} \text{sign } \tilde{e}_n^{*(i)}}{\|\nabla u_{n-1}\|_2^2} \nabla u_{n-1} & \text{в іншому випадку } (i=1, \dots, r), \end{cases} \quad (4.67)$$

запропонованим в [38, гл. 2]. В цьому співвідношенні $\varepsilon^{(i)}$ – оцінка зверху рівня збурення $v_n^{(i)}$, що фігурує в (2.4);

$$\varepsilon^{0(i)} > 2\varepsilon^{(i)} \quad (4.68)$$

– вибране конструктором число;

$$\tilde{e}_n^{*(i)} = \nabla \tilde{y}_n^{(i)} - \tilde{b}_{n-1}^{(i)T} \nabla u_{n-1} \quad (4.69)$$

– компоненти вектора $\tilde{e}_n^* = [\tilde{e}_n^{*(1)}, \dots, \tilde{e}_n^{*(r)}]^T$ поточних похибок оцінювання \tilde{B} , де

$$\nabla \tilde{y}_n^{(i)} := \tilde{y}_n^{(i)} - \tilde{y}_{n-1}^{(i)}; \quad (4.70)$$

$\tilde{b}_n^{(i)T} = [\tilde{b}_n^{(i1)}, \dots, \tilde{b}_n^{(ir)}]$ – i -й рядок матриці \tilde{B}_n ; коефіцієнти $\gamma_n^{(i)}$ вибираються згідно з (4.17), аби матриця \tilde{B}_n була невиродженою, тобто $\det \tilde{B}_n \neq 0$ для всіх n ($\det \tilde{B}_0 \neq 0$).

Схема алгоритму, який реалізує закон керування (4.65) – (4.70), зображена на рис. 4.8. Цей алгоритм включає наступні кроки:

Крок 1. Початок.

Крок 2. Ініціалізація інтервального матричного сімейства Ξ згідно з (3.1) та бажаних значень вихідних змінних y^0 .

Крок 3 Вибір матриці B_0 початкових оцінок з множини Ξ .

Крок 4. Вибір числа δ_0 відповідно до співвідношень (4.57), (4.58).

Крок 5. Обчислення початкових оцінок \tilde{B}_0 матриці коефіцієнтів підсилення віртуального об'єкта згідно з (4.51).

Крок 6. Для першого дискретного моменту часу $n=1$ і всіх наступних моментів часу виконувати кроки 7 – 16.

Крок 7. Вимірювання вихідних змінних $y_n^{(i)}$ ($i=1, \dots, r$) істинного об'єкта в n -й момент часу.

Крок 8. Обчислення вихідних змінних $\tilde{y}_n^{(i)}$ ($i=1, \dots, r$) віртуального об'єкта за формулою (4.64).

Крок 9. Обчислення різниці $\nabla \tilde{y}_n^{(i)}$ між поточним та попереднім виходами віртуального об'єкта за формулою (4.70).

Крок 10. Обчислення поточних похибок $\tilde{\epsilon}_n^{*(i)}$ оцінювання елементів матриці коефіцієнтів підсилення віртуального об'єкта в n -й момент часу за формулою (4.69)

Крок 11. Адаптивна параметрична ідентифікація елементів матриці \tilde{B}_n коефіцієнтів підсилення віртуального об'єкта за процедурою (4.67).

Крок 12. Обчислення матриці \tilde{B}_n^{-1} в n -й момент часу.

Крок 13. Обчислення похибки функціонування віртуальної системи в n -й момент часу за формулою (4.66).

Крок 14. Обчислення керувальних дій $u_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) за формулою (4.65).

Крок 15. Використання знайдених керувальних дій для керування істинним об'єктом протягом n -го інтервалу часу.

Крок 16. Перехід до $(n + 1)$ -го моменту часу, повернення до кроку 6.

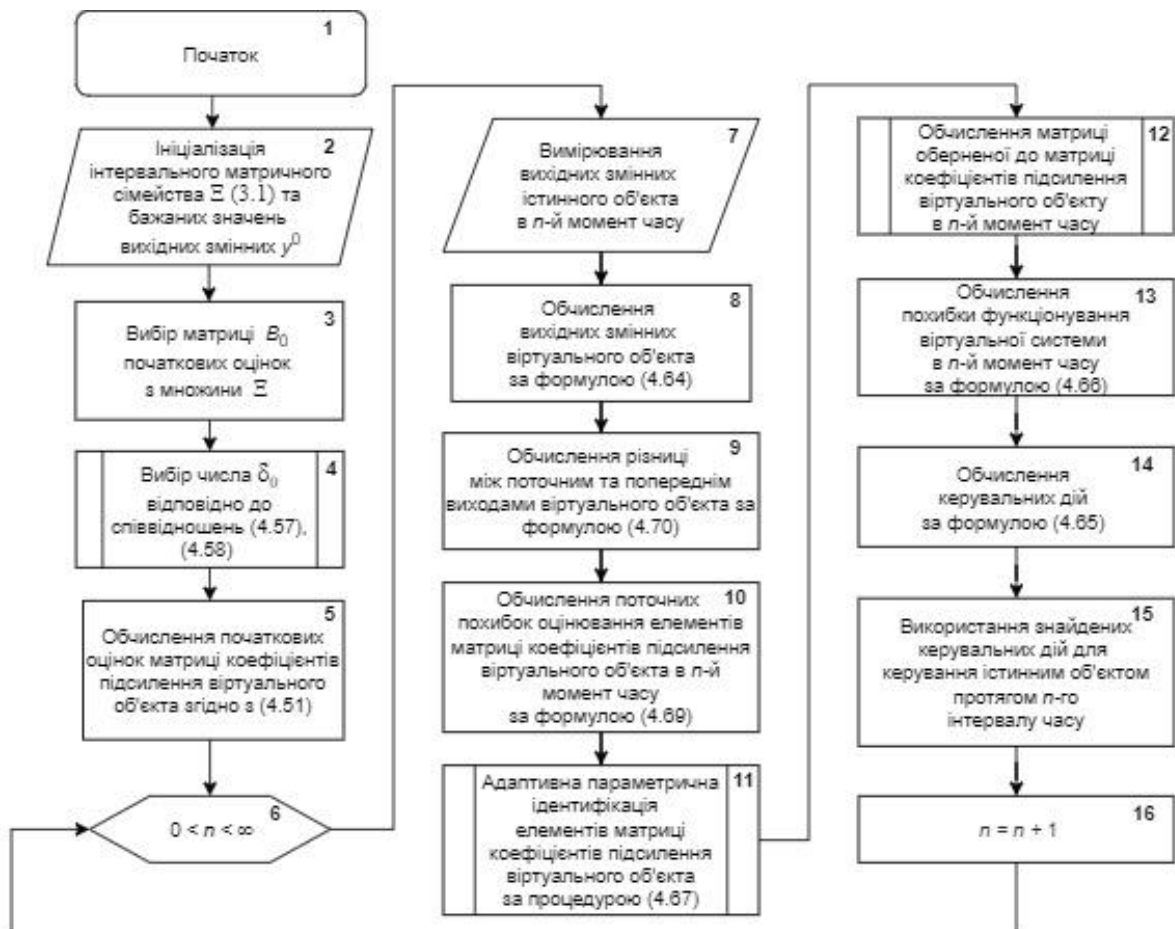


Рисунок 4.8 – Схема алгоритму керування за законом (4.63) – (4.70)

Структурна схема системи, що реалізує запропонований підхід до розв'язування задачі адаптивного параметричного оцінювання виродженої матриці B в замкненому контурі цієї системи, наведена на рис. 4.9.

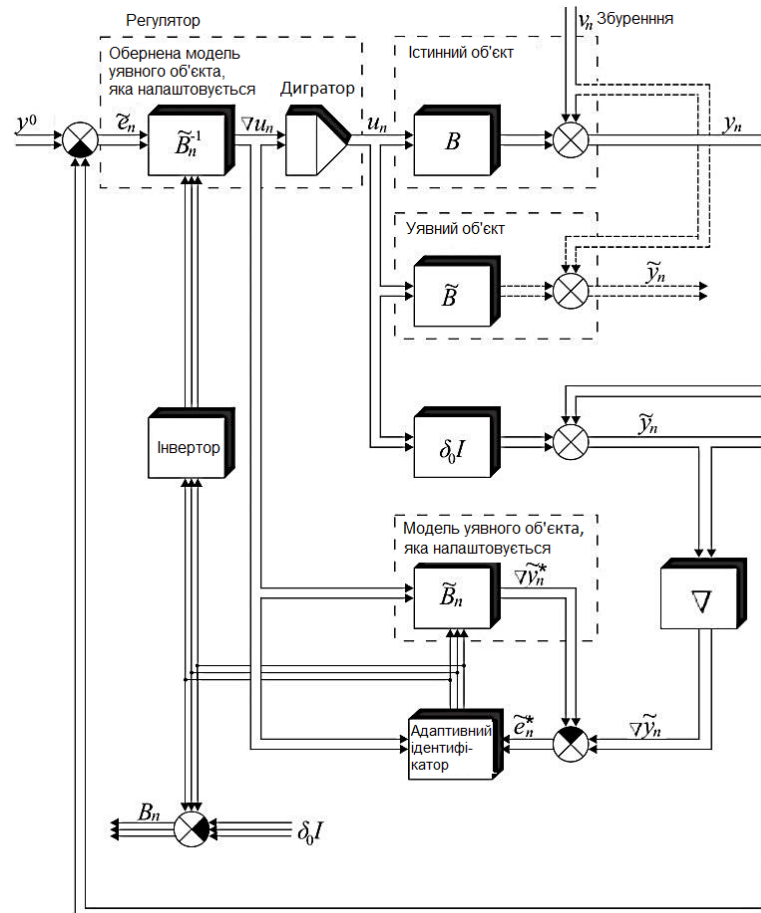


Рисунок 4.9 – Структурна схема замкненої системи (2.1), (4.63) – (4.70)

Асимптотичні властивості побудованої системи керування встановлює наступне твердження.

Твердження 4.3. Нехай виконані припущення (3.1), (2.4), (4.50), а також додаткове припущення (4.55). Розглянемо замкнену систему керування об'єктом (2.1), яка містить у контурі зворотного зв'язку регулятор (4.65), (4.66) і ідентифікатор, що реалізує рекурентну процедуру (4.67) – (4.70), де послідовності $\{\gamma_n^{(i)}\}$ вибираються таким чином, аби задовольнити умови (4.17) і виконати вимогу $\det \tilde{B}_n \neq 0$. Вибираємо будь-яку початкову оцінку $\tilde{B}_0 = B_0 + \delta_0 I$ з умов $\underline{b}^{(ij)} \leq b_0^{(ij)} \leq \bar{b}^{(ij)}$. Тоді вимоги (2.17), (2.18) граничної обмеженості $\{u_n\}$ і $\{y_n\}$ будуть виконані.

Доведенню цього твердження передую наступна лема, яка знадобиться також у подальших дослідженнях.

Лема 4.2. При $m=r$ і будь-яких $u_0 \in \mathbf{R}^r$, $\tilde{B}_0 : \det \tilde{B}_0 \neq 0$ замкнена система (4.64), (4.65) – (4.70) в умовах (2.4), коли $\det \tilde{B} \neq 0$, має такі асимптотичні властивості: а) оцінки \tilde{B}_n , що породжуються процедурою (4.67), збігаються за скінченний час; б) існує дискретний момент часу $n^* < \infty$ такий, що

$$\|u_n\|_2 \leq \|\tilde{B}^{-1}\|_2 (\|y^0\|_2 + 3\varepsilon^0/2) \quad \forall n \geq n^*, \quad (4.71)$$

де

$$\varepsilon^0 = +\sqrt{[\varepsilon^{0(1)}]^2 + \dots + [\varepsilon^{0(r)}]^2}. \quad (4.72)$$

Доведення. Справедливість положення а) прямо впливає з одного результату, отриманого в [38, п.4.2.3°], стосовно адаптивного керування багатовимірним об'єктом першого порядку

$$\tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} + \tilde{B}u'_n + v'_n, \quad (4.73)$$

еквівалентним об'єкту (4.63), але з іншим керуванням $u'_n := u_n - u_{n-1}$ і іншими збуреннями $v'_n := v_n - v_{n-1}$, які в силу (2.4), (2.5) обмежені за нормою: $\|v'_n\|_2 \leq 2\varepsilon$.

Згідно з цим результатом при виконанні умови (4.68) існує момент часу $n^* < \infty$ такий, що $\tilde{B}_n \equiv \tilde{B}_{n^*} \quad \forall n \geq n^*$. Доведення згаданого результату суттєво спирається на той факт, що при керуванні об'єктом (4.73) за законом

$$u'_n = \tilde{B}_n^{-1} \tilde{e}_n, \quad (4.74)$$

в якому уточнення рядків матриці \tilde{B}_n за процедурою (4.67) – (4.70), маємо

$$\|\tilde{b}^{(i)} - \tilde{b}_n^{(i)}\|_2 \leq \|\tilde{b}^{(i)} - \tilde{b}_{n-1}^{(i)}\|_2 \quad (i=1, \dots, r), \quad (4.75)$$

тобто $V_n = \|\tilde{b}^{(i)} - \tilde{b}_n^{(i)}\|_2$ – функція Ляпунова цієї процедури; при цьому сама замкнена система, яка містить об'єкт (4.73) і адаптивний регулятор (4.67) – (4.70), (4.74), дисипативна: існують деяка обмежена множина $S_{u'} \subset \mathbf{R}^r$ ($\text{diam } S_{u'} < \infty$) і в силу (2.4) обмежена множина $S_{u' \times \Omega} \subset \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r$ такі, що $u'_n \in S_{u'}$, а $\tilde{y}_n \in S_{u' \times \Omega}$ при $n \in [n^*, \infty)$.

Спираючись на другий результат, який був встановлений в [38, п. 4.2.3°], можна показати, що

$$|y^{0(i)} - \tilde{y}_n^{(i)}| \leq \varepsilon^{0(i)} \quad \forall n \geq n^{*(i)}, \quad n^{*(i)} < \infty \quad (i = 1, \dots, r),$$

звідси з врахуванням (4.72) за означенням евклідової норми $\|w\|_2$ вектора w маємо

$$\|y^0 - \tilde{y}_n\|_2 \leq \varepsilon^0 \quad \forall n \geq n^*, \quad (4.76)$$

де $n^* = \max\{n^{*(1)}, \dots, n^{*(r)}\}$. Беручи до уваги співвідношення

$$|\|w_1\| - \|w_2\|| \leq \|w_1 - w_2\|$$

між довільними двома векторами w_1 і w_2 при будь-якій векторній нормі $\|w\|$, наведене в [145, п. 14.29], на підставі (4.76) можна записати

$$\|y^0\|_2 - \|\tilde{y}_n\|_2 \leq \varepsilon^0 \quad \forall n \geq n^*. \quad (4.77)$$

Оскільки ж $|\theta_1 - \theta_2| \leq \theta^0 \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 \geq -\theta^0 \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}, \theta^0 > 0 \Rightarrow \theta_2 \leq \theta_1 + \theta^0$, то з нерівності (4.77) випливає, що

$$\|\tilde{y}_n\|_2 \leq \varepsilon^0 + \|y^0\|_2 \quad \forall n \geq n^*. \quad (4.78)$$

З іншого боку, на підставі рівняння (4.63) віртуального об'єкта за умови (4.52) маємо

$$u_n = \tilde{B}^{-1} \tilde{y}_{n+1} - \tilde{B}^{-1} v_n \quad \forall n.$$

Звідси в силу (2.4), (4.68), а також виразу (4.72) отримаємо

$$\|u_n\|_2 \leq \|\tilde{B}^{-1}\|_2 \|\tilde{y}_{n+1}\|_2 + \|\tilde{B}^{-1}\|_2 \varepsilon^0 / 2 \quad \forall n. \quad (4.79)$$

Підсилюючи нерівність (4.79) з використанням (4.78), приходимо до оцінки зверху (4.71), яка фігурує у положенні б) леми.

Встановлений факт завершує доведення леми.

Доведення твердження 4.3. В силу положення б) леми 4.2. і відомого в математичній літературі означення $\limsup_{n \rightarrow \infty} w = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w := \limsup_{n \rightarrow \infty} w_s$ (верхньої границі послідовності $\{w\}$ скалярних змінних негайно впливає гранична обмеженість $\{\|u_n\|\}$ в формі (2.17).

Неважко показати, що при виконанні вимоги (2.18), яку в термінах сучасної теорії керування (див., наприклад, монографії [90, 91]) записують тепер як

$$\{u_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_r, \quad (4.80)$$

маємо

$$\{y_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_m. \quad (4.81)$$

Дійсно, на підставі рівняння об'єкта (2.1) можна стверджувати, що в умовах (2.4), (4.80) гарантується гранична обмеженість послідовності $\{y_n\}$, записана у формі (4.81).

Отже, в умовах твердження 4.3 вимоги (2.17), (2.18) будуть виконані.

Твердження доведено.

Наслідок 4.1. В умовах твердження 4.3 гарантується збіжність B_n до B_∞ за кінцеве число кроків n^* ; при цьому всі скалярні функції $\|b^{(i)} - b_n^{(i)}\|$ не зростають.

4.2.3. Синтез адаптивного регулятора для керування об'єктом за наявності обмежених збурень невідомих рівнів. Нехай, як і раніше, є лінійний багатозв'язний об'єкт без пам'яті, який описується рівнянням (2.1) з невідомою квадратною матрицею коефіцієнтів підсилення, для якої задані апріорні інтервальні оцінки (3.1) її елементів. Як і в пункті 4.1.3, припускається, що оцінки зверху $\varepsilon^{(i)}$ рівнів збурень в (2.4) апріорі невідомі (це тут принциповий момент).

Закон керування віртуальним об'єктом (4.63), а значить й істинним об'єктом (2.1), будемо будувати у формі (4.65), (4.66).

Процедура адаптивної параметричної ідентифікації віртуального об'єкта (4.63) описується рекурентним співвідношенням

$$\tilde{b}_n^{(i)} = \tilde{b}_{n-1}^{(i)} - \gamma_n^{(i)} \frac{f(\tilde{e}_n^{*(i)}, \varepsilon_{n-1}^{(i)})}{1 + \|\nabla u_n\|^2} \nabla u_n \operatorname{sign} \tilde{e}_n^{*(i)}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (4.82)$$

запропонованим та обґрунтованим в [116, п. 4.2]. У цьому співвідношенні

$$f(e, \bar{\varepsilon}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |e| \leq \bar{\varepsilon}, \\ |e| - \bar{\varepsilon} & \text{при } |e| > \bar{\varepsilon} \end{cases}$$

– функція нечутливості, що залежить від змінної $\tilde{\varepsilon}_n^{*(i)}$, яка визначається виразом (4.69), а також від оцінки $\varepsilon_n^{(i)}$ невідомого рівня i -ї компоненти вектора збурень, яка була побудована на попередньому кроці; $\gamma_n^{(i)}$ – коефіцієнт, що обирається згідно з (4.17) таким чином, аби на кожному n -му кроці матриця \tilde{B}_n була невинродженою, тобто аби $\det \tilde{B}_n \neq 0$.

Процедура поточного оцінювання рівня кожного i -го збурення, згідно з [116, с. 118], визначається рекурентним співвідношенням

$$\varepsilon_n^{(i)} = \varepsilon_{n-1}^{(i)} + \gamma_n^{(i)} \frac{f(\tilde{\varepsilon}_n^{*(i)}, \varepsilon_{n-1}^{(i)})}{1 + \|\nabla u_n\|^2}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (4.83)$$

Схема алгоритму керування за законом (4.65), (4.66), (4.82) – (4.83) зображена на рис. 4.10. Цей алгоритм включає наступні кроки:

Крок 1. Початок.

Крок 2. Ініціалізація інтервального матричного сімейства Ξ згідно з (3.1) та бажаних значень вихідних змінних y^0 .

Крок 3. Вибір матриці B_0 початкових оцінок з множини Ξ .

Крок 4. Вибір числа δ_0 відповідно до співвідношень (4.57), (4.58).

Крок 5. Обчислення початкових оцінок \tilde{B}_0 матриці коефіцієнтів підсилення віртуального об'єкта згідно з (4.51).

Крок 6. Задати довільні початкові оцінки $\varepsilon_0^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) рівнів збурень.

Крок 7. Для першого дискретного моменту часу $n=1$ і всіх наступних моментів часу виконувати кроки 8 – 17.

Крок 8. Вимірювання вихідних змінних $y_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) істинного об'єкта в n -й момент часу.

Крок 9. Обчислення вихідних змінних $\tilde{y}_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) віртуального об'єкта за формулою (4.64).

Крок 10. Обчислення поточних похибок $\tilde{\varepsilon}_n^{*(i)}$ оцінювання елементів матриці коефіцієнтів підсилення віртуального об'єкта в n -й момент часу за формулою (4.69).

- Крок 11.* Адаптивна параметрична ідентифікація елементів матриці \tilde{B}_n коефіцієнтів підсилення віртуального об'єкта за процедурою (4.82).
- Крок 12.* Обчислення рівня кожного i -го збурення за процедурою (4.83).
- Крок 13.* Обчислення матриці \tilde{B}_n^{-1} в n -й момент часу.
- Крок 14.* Обчислення похибки функціонування віртуальної системи в n -й момент часу за формулою (4.66).
- Крок 15.* Обчислення керувальних дій $u_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) за формулою (4.65).
- Крок 16.* Використання знайдених керувальних дій для керування істинним об'єктом протягом n -го інтервалу часу.
- Крок 17.* Перехід до $(n + 1)$ -го моменту часу і повернення до кроку 7.

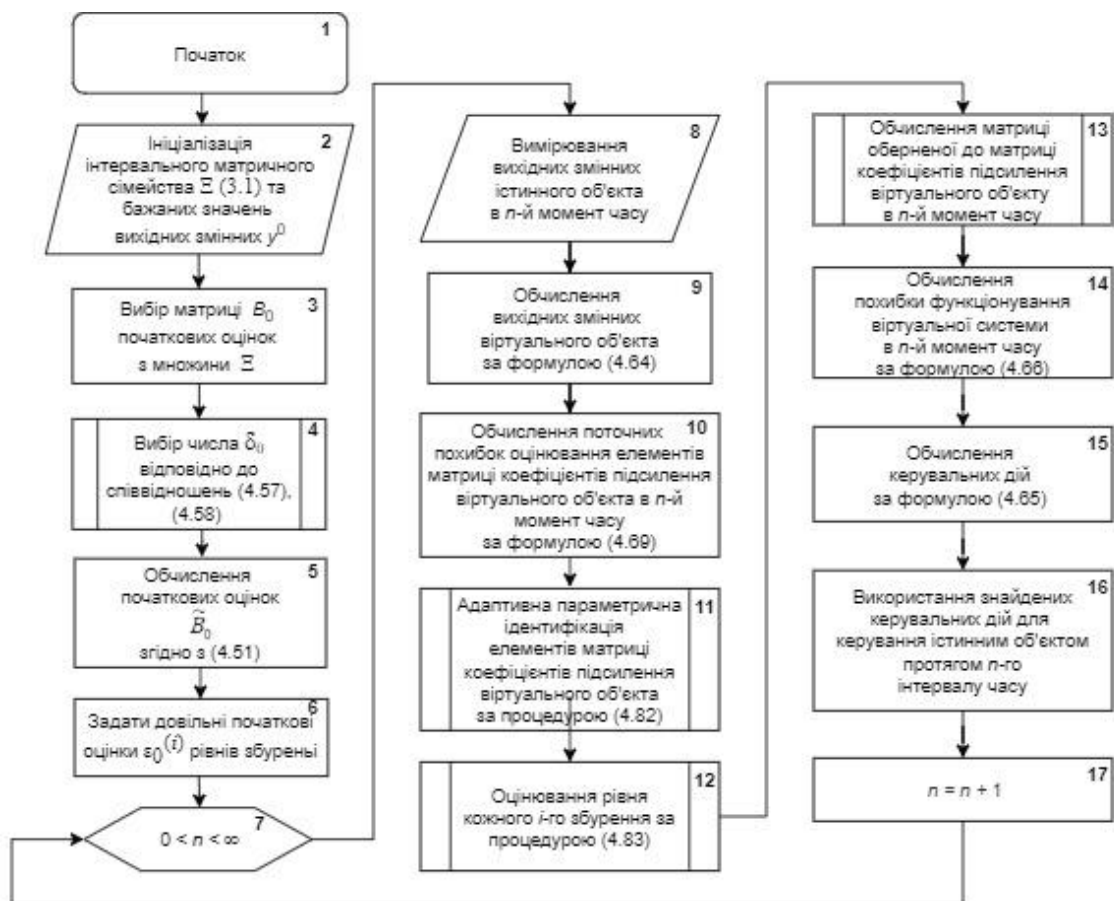


Рисунок 4.10 – Схема алгоритму керування за законом (4.65), (4.66), (4.82) – (4.83)

Асимптотичні властивості побудованих алгоритмів адаптивного оцінювання встановлює наступне твердження.

Твердження 4.4. Нехай виконані припущення (2.4), (3.1), а також додаткове припущення (4.55). Розглянемо замкнену систему керування об'єктом (2.1), що

містить у контурі зворотного зв'язку регулятор (4.65), (4.66) і ідентифікатор (4.82) – (4.83), у якому числа $\gamma_n^{(i)}$ вибираються з умови (4.17) таким чином, аби виконати вимогу $\det \tilde{B}_n \neq 0$. Прийmemo $\varepsilon_0^{(i)} = 0$ для всіх $i = 1, \dots, r$ і виберемо будь-яку початкову оцінку $\tilde{B}_0 = B_0 + \delta_0 I$ з умов $\underline{b}^{(ij)} \leq b_0^{(ij)} \leq \bar{b}^{(ij)}$.

Тоді:

1) послідовність $\{\tilde{B}_n\} := \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots$, породжена процедурою (4.82), збігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}_n = \tilde{B}_\infty;$$

2) послідовності оцінок $\{\varepsilon_n^{(i)}\} = \varepsilon_0^{(i)}, \varepsilon_1^{(i)}, \dots$ породжені процедурою (4.83), збігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\varepsilon_n^{(i)}\} = \varepsilon_\infty^{(i)}, \quad i = 1, \dots, r;$$

3) система керування (2.1), (4.65), (4.66), (4.82) – (4.83) дисипативна.

Доведення. Справедливість положень 1) і 2) прямо випливає з результатів, отриманих в [116, п. 4.2]. Техніка доведення суттєво використовує той факт, що послідовності функцій

$$V^{(i)}(n) = V_{\tilde{b}}^{(i)}(n) + V_\varepsilon^{(i)}(n),$$

де

$$V_{\tilde{b}}^{(i)}(n) := \|\tilde{b}^{(i)} - \tilde{b}_n^{(i)}\|^2, \quad V_\varepsilon^{(i)}(n) := \|2\varepsilon - \varepsilon_n^{(i)}\|^2,$$

а $\tilde{b}^{(i)} = [\tilde{b}^{(i1)}, \dots, \tilde{b}^{(ir)}]^T$, є незростаючими невід'ємними функціям від n ; вони виступають тут як функції Ляпунова процедури (4.82) – (4.83).

Доведення положення 3) базується на встановленій в [116, п. 4.2], властивості обмеженості послідовностей $\{\tilde{y}_n^{(i)}\}$ вихідних величин об'єкта, який описується рівнянням (4.63). У силу цієї властивості маємо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{y}_n\| < \infty. \quad (4.84)$$

Підстановка (4.63) в (4.84) дозволяє записати

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\tilde{B}u_n + v_n) < \infty.$$

Оскільки ж $\{v_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_m$, а \tilde{B} – невироджена матриця, то із цього співвідношення випливає, що $\{u_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_m$). Звідси в силу обмеженості $\{v_n\}$ випливає обмеженість $\{y_n\}$. А це в остаточному підсумку доводить справедливість положення 3) твердження.

Твердження 4.4 доведено.

4.2.4. Числові приклади та моделювання.. Для перевірки працездатності й ефективності запропонованого методу адаптивного керування багатозв'язним об'єктом без пам'яті з можливо виродженими матрицями коефіцієнтів підсилення в умовах інтервальної невизначеності (3.1) були проведені два модельні експерименти.

Модельний експеримент 4.1. В цьому експерименті моделювалась система (2.1), (4.65) – (4.70) при $r = 2$ й таких значеннях елементів матриці B : $b^{(11)} = 4$, $b^{(12)} = 2$, $b^{(21)} = 2$, $b^{(22)} = 1$ ($\det B = 0$). Ап'риорні оцінки (3.1) цих елементів були задані наступним чином: $1 \leq b^{(11)} \leq 5$, $0 \leq b^{(12)} \leq 2$, $0 \leq b^{(21)} \leq 2$, $1 \leq b^{(22)} \leq 2$. За формулами (4.59) – (4.61) послідовно були знайдені величини $\underline{\beta}_{\min}^{(1)} = -1$, $\underline{\beta}_{\min}^{(2)} = -1$, $\bar{\beta}_{\max}^{(1)} = 7$, $\bar{\beta}_{\max}^{(2)} = 4$, $\underline{\beta}_{\min} = -1$, $\bar{\beta}_{\max} = 7$. Оскільки в даному експерименті так виявилось, що $|\underline{\beta}_{\min}| < |\bar{\beta}_{\max}|$, то згідно з (4.62) треба було взяти $\delta_0 > 1$. Тому було прийнято $\delta_0 = 1,1$. З умов $b_0^{(11)} \in [1, 5]$, $b_0^{(12)} \in [0, 2]$, $b_0^{(21)} \in [0, 2]$, $b_0^{(22)} \in [1, 2]$ були взяті такі оцінки елементів B_n : $b_0^{(11)} = 1$, $b_0^{(21)} = 0$, $b_0^{(12)} = 1$, $b_0^{(22)} = 1,9$; при цьому $\tilde{b}_0^{(11)} = 2,1$, $\tilde{b}_0^{(12)} = 1$, $\tilde{b}_0^{(21)} = 0$, $\tilde{b}_0^{(22)} = 3$.

Послідовність $\{v_n^{(i)}\}$ ($i = 1, 2$) генерувалася як послідовність незалежних псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[-1, 1]$. При проведенні експерименту покладено $y^0 = [1, 3]^T$.

Результати проведеного експерименту показані на рис. 4.11 і 4.12.

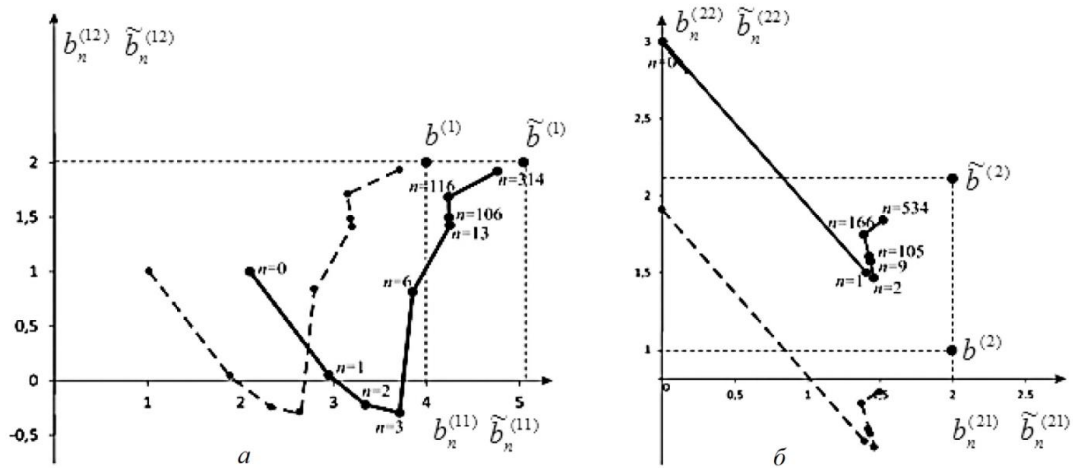


Рисунок 4.11 – Процеси адаптивного оцінювання векторів параметрів віртуального об’єкта (суцільна лінія) та істинного об’єкта (пунктирна лінія) в модельному експерименті 4.1

Рис. 4.11 наочно ілюструє як властивість (4.75) наближення оцінок $\tilde{b}_n^{(i)}$ до $\tilde{b}^{(i)}$ ($i=1,2$), так і встановлену в наслідку 4.1 властивість наближення оцінок $b_n^{(i)}$ до $b^{(i)}$ ($i=1,2$) при $n \rightarrow \infty$, а рис. 4.12 – властивість обмеженості $\{u_n\}$ і $\{y_n\}$, встановлену в твердженні 4.3.

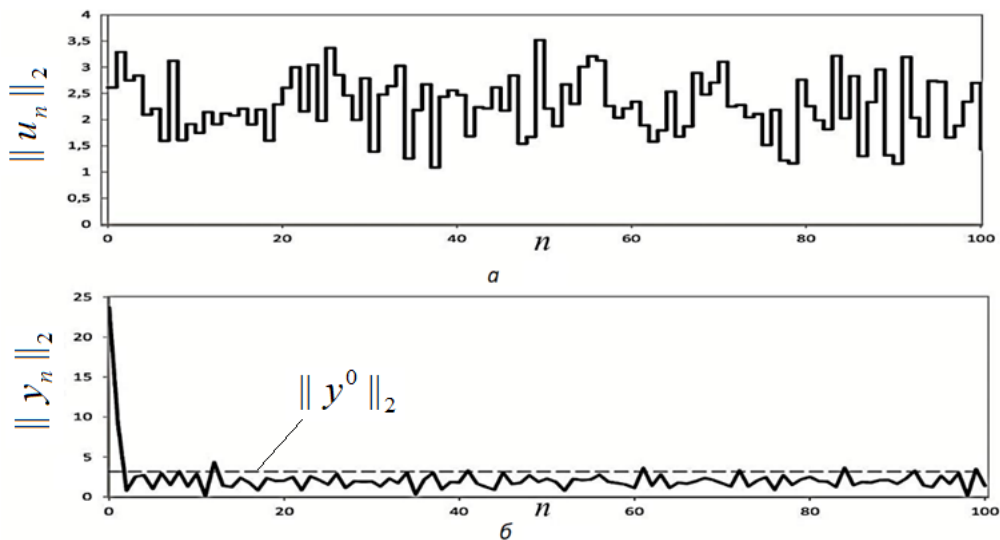


Рисунок 4.12 – Процеси в замкненій адаптивній системі керування (2.1), (4.63) – (4.70) в модельному експерименті 4.1

Модельний експеримент 4.2. В цьому експерименті всі вихідні дані крім рівнів збурень та результати розрахунків були взяті такими ж самими, як і в

експерименті 4.1. Конкретніше, на відміну від умов модельного експеримента 4.1 послідовності $\{v_n^{(i)}\}$ ($i=1, 2$) генерувалися як послідовності незалежних псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалах $[-1, 1]$, $[-0,5, 0,5]$.

Для перевірки працездатності й ефективності запропонованого методу адаптивної параметричної ідентифікації проводилося моделювання системи (2.1), (4.65), (4.66) з алгоритмом адаптації (4.82) – (4.83).

Результати проведеного експерименту показані на рис. 4.13 – 4.16.

Як видно з рис. 4.13, 4.14 оцінки $\tilde{b}_n^{(11)}$, $\tilde{b}_n^{(12)}$, $\tilde{b}_n^{(21)}$, $\tilde{b}_n^{(22)}$ та $\varepsilon_n^{(i)}$ у процесі адаптації стабілізуються. Рис. 4.15 і 4.16 наочно демонструють встановлену в твердженні 4.4 властивість 3) обмеженості $\{u_n\}$ та $\{y_n\}$.

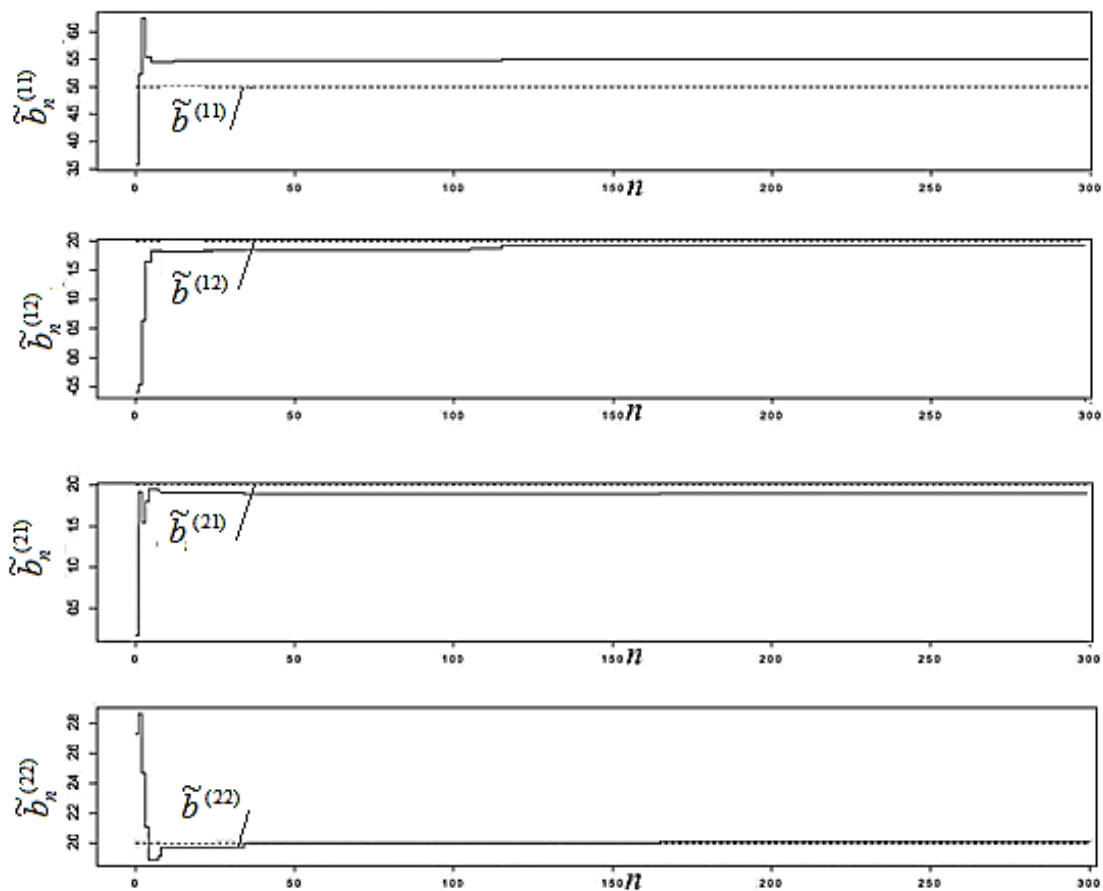


Рисунок 4.13 – Поточні оцінки $\tilde{b}_n^{(11)}$, $\tilde{b}_n^{(12)}$, $\tilde{b}_n^{(21)}$, $\tilde{b}_n^{(22)}$

в модельному експерименті 4.2

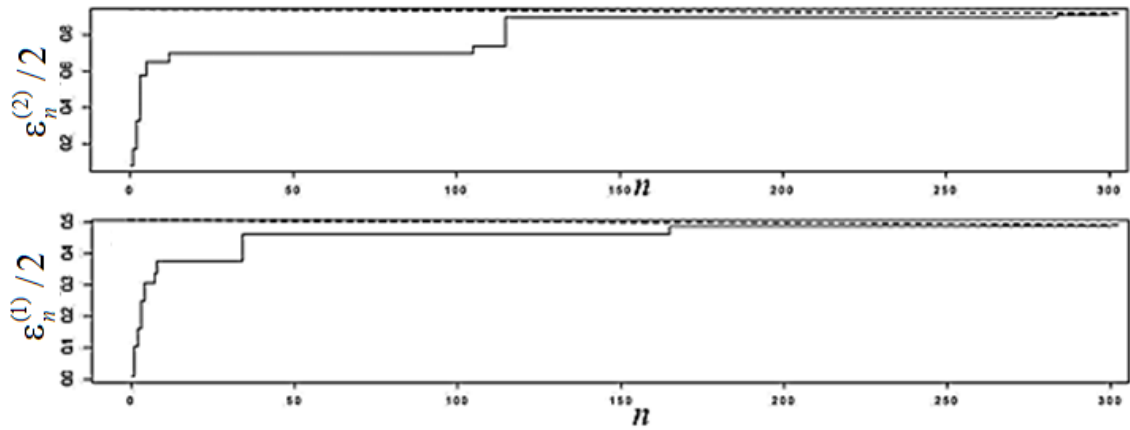


Рисунок 4.14 – Поточні змінні $\epsilon_n^{(1)}/2$ та $\epsilon_n^{(2)}/2$ в модельному експерименті 4.2

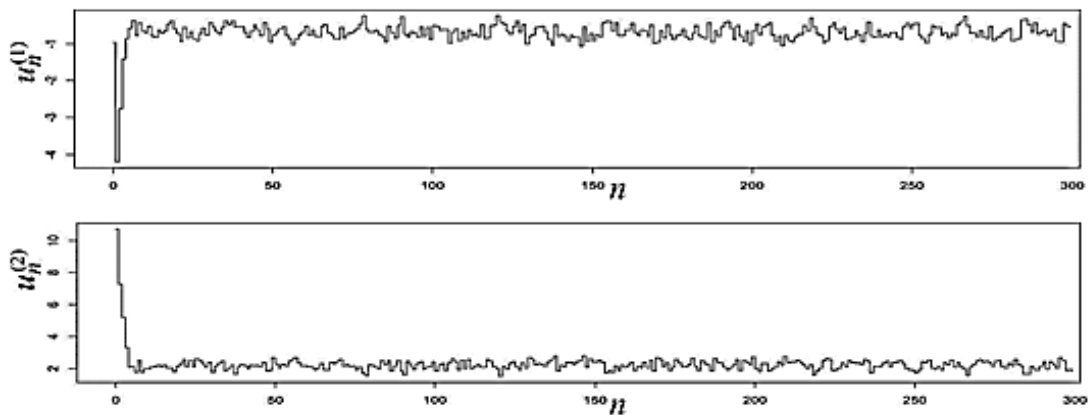


Рисунок 4.15 – Керувальні впливи $u_n^{(1)}$ та $u_n^{(2)}$ в модельному експерименті 4.2

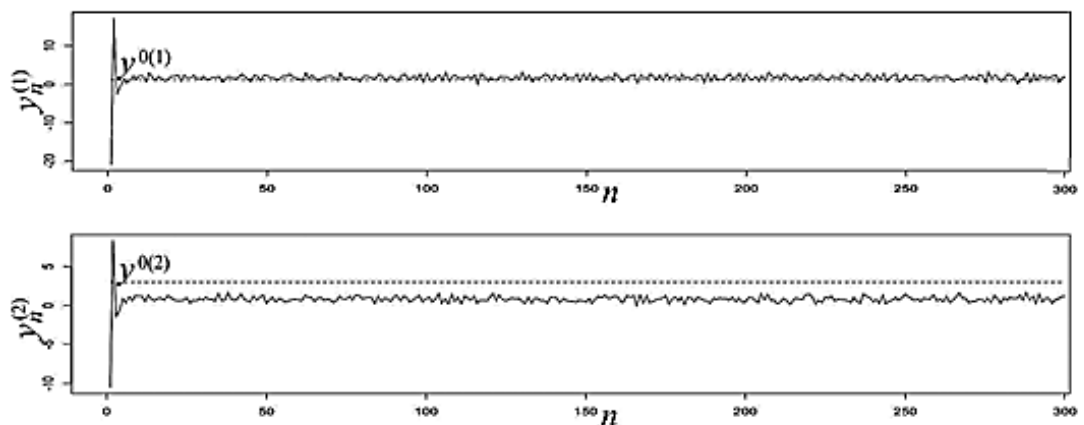


Рисунок 4.16 – Вихідні змінні $y_n^{(1)}$ та $y_n^{(2)}$ в модельному експерименті 4.2

Отже, використання запропонованого алгоритму адаптивного оцінювання невідомих параметрів деякого віртуального об'єкта й алгоритму адаптивного оцінювання невідомих рівнів збурень дозволяє в принципі здійснювати робастне

керування таким об'єктом за наявності будь-яких параметричних і непараметричних невизначеностей .

4.3. Синтез адаптивного регулятора для керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті з прямокутними матрицями коефіцієнтів підсилення

4.3.1. Постановка задачі. Нехай, як і раніше, багатозв'язний об'єкт без пам'яті описується рівнянням (2.1), в якому B – деяка прямокутна $m \times r$ -матриця коефіцієнтів підсилення, причому $m > r$, тобто число вихідних змінних перевищує число керувальних дій. Припускається, що B – матриця довільного (ненульового) рангу:

$$1 \leq \text{rank } B \leq r (= \min\{r, m\}). \quad (4.85)$$

Як і в підрозділі 4.2, вводиться припущення, що елементи $b^{(ij)}$ ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, r$) матриці B невідомі; відомі лише апріорні оцінки знизу й зверху цих елементів у формі (3.1). Вважається, що $v_n^{(i)}$ – довільні обмежені за рівнем збурення (згідно з (2.4)); при цьому припускається, що числа $\varepsilon^{(i)}$ відомі конструктору системи.

Задача керування об'єктом (2.1) формулюється наступним чином. Потрібно в умовах (4.85), (3.1), (2.4) побудувати адаптивний робастний регулятор, здатний гарантувати граничну обмеженість послідовностей $\{u_n\} = u_1, u_2, \dots$, і $\{e_n\} = e_1, e_2, \dots$, у формі (2.17), (2.18), тобто дисипативність системи керування за наявності довільної невідомої матриці B , елементи якої належать інтервальним множинам виду (3.1).

На перший погляд здається, що для адаптивного керування об'єктом (2.1) при $m > r$ достатньо вибрати r яких-небудь вихідних змінних і побудувати систему керування таким об'єктом зі зворотними зв'язками за цими вибраними вихідними змінними, залишивши решту $m - r$ вихідних змінних у «вільному» режимі, як в свій час пропонувалось у відомій книзі [107, с. 141] в рамках розв'язання задачі неадаптивного керування динамічним об'єктом з прямокутною

матрицею коефіцієнтів підсилення повного рангу. Проте навіть в цьому слушному випадку питання вибору r вихідних змінних, що мають підлягати керуванню, залишається відкритим. А у випадку ж, коли згадана матриця має неповний ранг, така можливість взагалі відпадає.

В основу запропонованого в дисертації підходу до розв'язання поставленої вище задачі адаптивного керування багатозв'язним об'єктом (2.1) у загальному випадку, коли B – невідома $m \times r$ -матриця довільного рангу ($\text{rank } B \leq r$), покладена ідея одночасного адаптивного керування істинним об'єктом і деякими віртуальними об'єктами з квадратними невірдженими матрицями та концепція скінченно-збіжних процедур адаптації, яка була висунута В. А. Якубовичем в 60-х роках минулого сторіччя і отримала суттєвий розвиток у главах 2 і 4 монографії [38].

4.3.2. Синтез робастного адаптивного регулятора. Для побудови цього регулятора введемо підматриці $B[i_1[k], \dots, i_r[k] | 1, \dots, r] \in \mathbf{R}^{r \times r}$ [143, ч. I, пп. 2.2], рядки яких співпадають з рядками матриці B , що мають номери $i_1[k], \dots, i_r[k]$ ($1 \leq i_1[k] < \dots < i_r[k] \leq m$). Кількість таких підматриць складає $N = \binom{m}{r} \geq 3$.

Позначивши $B[k]$ підматрицю, яка відповідає k -й підмножини чисел $\{i_1[k], \dots, i_r[k]\}$, можна записати рівняння k відповідних об'єктів з квадратними матрицями коефіцієнтів підсилення наступним чином:

$$y_n[k] = B[k]u_{n-1} + v_{n-1}[k], \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.86)$$

Тут $y_n[k] = [y_n^{(i_1[k])}, \dots, y_n^{(i_r[k])}]^T \in \mathbf{R}^r$, а $v_n[k] = [v_n^{(i_1[k])}, \dots, v_n^{(i_r[k])}]^T \in \mathbf{R}^r$.

Відповідно до підходу, запропонованого в підрозділі 4.2, пропонується перейти від керування об'єктами (4.86) до керування віртуальними об'єктами, що описуються рівняннями

$$\tilde{y}_n[k] = \tilde{B}[k]u_{n-1} + v_{n-1}[k], \quad k = 1, \dots, N \quad (4.87)$$

з тими ж самими векторами керувальних дій u_{n-1} і збурень $v_{n-1}[k]$. У цих рівняннях $\tilde{y}_n[k]$ позначає m -вимірний вихідний вектор k -го віртуального об'єкта; $\tilde{B}[k]$ – матриця коефіцієнтів підсилення, що визначається як

$$\tilde{B}[k] = B[k] + \delta_0[k]I_r, \quad (4.88)$$

де $\delta_0[k]$ – фіксоване число. Це число розраховується окремо для кожного $k = 1, \dots, N$, використовуючи техніку, описану в підрозділі 4.2. Саме, беручи до уваги обмеження (3.1), завжди можна знайти таке $\delta_0[k]$, аби забезпечити виконання вимоги

$$\det \tilde{B}[k] \neq 0 \quad \forall k = 1, \dots, N. \quad (4.89)$$

З (4.86) – (4.88) випливає, що

$$\tilde{y}_n[k] = y_n[k] + \delta_0[k]u_{n-1}. \quad (4.90)$$

Цей вираз показує, що хоча $\tilde{B}[k]$ та $B[k]$ залишаються невідомими, однак компоненти всіх N векторів $\tilde{y}_n[k]$ можна опосередковано «виміряти» за відомими компонентами векторів y_n і u_{n-1} .

Якщо умови (4.89) виконуються, то проблема адаптивної стабілізації істинного об'єкта (2.1) може бути зведена до проблеми одночасної адаптивної стабілізації всіх N віртуальних об'єктів (4.87) з невідомими, але завідома невинродженими матрицями $\tilde{B}[k]$ ($k = 1, \dots, N$) шляхом формування в кожний момент n набору $U_n = \{u_n[1], \dots, u_n[N]\}$ «потенційно» можливих векторів керувальних дій та вибору одного з цих них відповідно до певного правила, наведеного нижче.

Закон адаптивного керування кожним віртуальним об'єктом виберемо у формі

$$u_n[k] = u_{n-1} + \tilde{B}_n^{-1}[k] (y^0[k] - \tilde{y}_n[k]), \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.91)$$

де $y^0[k] = [y^{0(i_1[k])}, \dots, y^{0(i_r[k])}]^T$, а $\tilde{B}_n[k] \in \mathbf{R}^{r \times r}$ – поточна оцінка невідомої $r \times r$ -матриці $\tilde{B}[k]$, для якої має бути виконана вимога

$$\det \tilde{B}_n[k] \neq 0 \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad n \in N_+. \quad (4.92)$$

В якості процедури адаптації, як і в підрозділі 4.2, пропонується використати стандартну рекурентну процедуру адаптивної функціональної ідентифікації кожного k -го віртуального об'єкта (4.86), що описується співвідношенням

$$\tilde{b}_n^{(i)}[k] = \begin{cases} \tilde{b}_{n-1}^{(i)}[k], & \text{якщо } |\tilde{e}_n^{*(i)}[k]| \leq \varepsilon^{0(i)}, \\ \tilde{b}_{n-1}^{(i)}[k] + \gamma_n^{(i)} \frac{\tilde{e}_n^{*(i)}[k] - 2\varepsilon^{(i)} \operatorname{sign} \tilde{e}_n^{*(i)}[k]}{\|\nabla u_{n-1}\|_2^2} \nabla u_{n-1} & \text{в іншому випадку,} \\ i = i_1[k], \dots, i_r[k], \quad k = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.93)$$

Тут $\tilde{b}_n^{(i)}[k]$ позначає r -вимірний вектор, отриманий транспонуванням i -го рядка матриці $\tilde{B}_n[k]$;

$$\tilde{e}_n^{*(i)}[k] = \tilde{y}_n^{(i)}[k] - \tilde{y}_{n-1}^{(i)}[k] - \tilde{b}_{n-1}^{(i)\top}[k] \nabla u_{n-1} \quad (4.94)$$

– i -а компонента вектора $\tilde{e}_n^*[k] \in \mathbf{R}^r$ похибки ідентифікації k -го віртуального об'єкта в n -й момент часу; коефіцієнти $\gamma_n^{(i)}$ вибираються згідно з (4.17), аби була виконана вимога (4.92); величини $\varepsilon^{0(i)}$ задовольняють вимоги (4.68).

Одночасно з адаптивною процедурою (4.93), (4.94) має здійснюватися процедура оцінювання елементів невідомої матриці B , що визначається за рекурентним співвідношенням

$$b_n^{(i)} = \begin{cases} b_{n-1}^{(i)}, & \text{якщо } |e_n^{*(i)}| \leq \varepsilon^{0(i)}, \\ b_{n-1}^{(i)} + \gamma_n^{(i)} \frac{e_n^{*(i)} - 2\varepsilon^{(i)} \operatorname{sign} e_n^{*(i)}}{\|\nabla u_{n-1}\|_2^2} \nabla u_{n-1} & \text{в іншому випадку} \quad (i = 1, \dots, m). \end{cases} \quad (4.95)$$

У цьому співвідношенні $b_n^{(i)\top}$ – i -й рядок матриці B_n ;

$$e_n^{*(i)} = y_n^{(i)} - y_{n-1}^{(i)} - b_{n-1}^{(i)\top} \nabla u_{n-1} \quad (4.96)$$

– i -а компонента вектора $e_n^* = y_n - y_{n-1} - B_{n-1} \nabla u_{n-1}$ похибки ідентифікації; числа $\varepsilon^{0(i)}$ вибрані так, аби задовольняти вимоги (4.68).

Використання процедури (4.95), (4.96) дозволяє оцінити m прогнозованих похибок $\tilde{e}_{n+1}^{(i)}[k]$ ($i = 1, \dots, m$) істинного об'єкта (2.1) для кожного k -го керування у формі (4.91), за такою формулою

$$|\bar{e}_{n+1}^{(i)}[k]| = |y^{0(i)} - b_n^{(i)T} u_n[k]| + \varepsilon^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.97)$$

Синтез адаптивного регулятора завершується вибором вектора керувальних дій u_n з набору $U_n = \{u_n[1], \dots, u_n[N]\}$, в якому вектори $u_n[k]$ визначаються відповідно до (4.91), шляхом мінімізації верхньої грані 1-норми вектора $\bar{e}_{n+1}[k]$ за k при всіх $v_n \in \Omega$, що зрештою приводить до закону керування

$$u_n = u_{n-1} + \tilde{B}_n^{-1}[k_n] (y^0[k_n] - \tilde{y}_n[k_n]). \quad (4.98)$$

Тут k_n – довільне число з набору $\{1, \dots, N\}$, коли $n = 0$, а коли $n = 1, 2, \dots$, то

$$k_n = \begin{cases} \arg \min_{k: u_n[k] \in U_n} \|y^0 - B_n u_n[k]\|_1, & \text{якщо } \tilde{B}_n[k] = \tilde{B}_{n-1}[k] \quad \forall k = 1, \dots, N, \\ k_{n-1} & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.99)$$

Схема синтезованого адаптивного алгоритму керування подана на рис. 4.17.

Цей алгоритм включає наступні кроки:

Крок 1. Початок.

Крок 2. Ініціалізація інтервального матричного сімейства Ξ згідно з (3.1) та бажаних значень вихідних змінних y^0 .

Крок 3. Вибір матриці B_0 початкових оцінок з множини Ξ .

Крок 4. Формування підматриць $B_0[k]$ ($k = 1, \dots, N$).

Крок 5. Вибір чисел $\delta_0[k]$ так, аби гарантувати невиродженість матриць коефіцієнтів підсилення всіх N квадратних віртуальних об'єктів відповідно до співвідношень (4.57), (4.58).

Крок 6. Обчислення початкових оцінок матриць $\tilde{B}_0[k]$ коефіцієнтів підсилення всіх N квадратних віртуальних об'єктів.

Крок 7. Ініціалізація k_n при $n=0$ як довільного числа з набору $\{1, \dots, N\}$.

Крок 8. Для першого дискретного моменту часу $n=1$ і всіх наступних моментів часу виконувати кроки 9 – 22.

Крок 9. Вимірювання вихідних змінних $y_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) істинного об'єкта в n -й момент часу.

Крок 10. Обчислення вихідних змінних $\tilde{y}_n^{(i)}[k]$ ($k = 1, \dots, N$) всіх N квадратних віртуальних об'єктів за формулою (4.90).

Крок 11. Обчислення всіх N векторів поточних похибок $\tilde{e}_n^{*(i)}[k]$ оцінювання елементів матриць коефіцієнтів підсилення віртуальних систем в n -й момент часу за формулою (4.94).

Крок 12. Адаптивна параметрична ідентифікація елементів матриць $\tilde{B}_n[k]$ коефіцієнтів підсилення всіх N квадратних віртуальних об'єктів за процедурою (4.93).

Крок 13. Обчислення поточних похибок $e_n^{*(i)}$ оцінювання елементів матриці B_n коефіцієнтів підсилення істинного об'єкта в n -й момент часу за формулою (4.96)

Крок 14. Адаптивна параметрична ідентифікація елементів матриці B_n коефіцієнтів підсилення істинного об'єкта за процедурою (4.95).

Крок 15. Перевірка умови $\tilde{B}_n[k] = \tilde{B}_{n-1}[k] \quad \forall k = 1, \dots, N$, якщо умова виконується, то наступним виконуємо крок 16, а якщо не виконується – переходимо до кроку 19.

Крок 16. Обчислення матриць $\tilde{B}_n^{-1}[k]$ обернених до матриць коефіцієнтів підсилення всіх N квадратних віртуальних об'єктів.

Крок 17. Обчислення всіх N прогнозованих похибок $\tilde{e}_{n+1}[k]$ за формулою (4.97).

Крок 18. Вибір k_n як номера віртуального об'єкта, що дає найменшу 1-норму прогнозованої похибки $\tilde{e}_{n+1}[k]$ і перехід до кроку 21.

Крок 19. Обчислення матриць $\tilde{B}_n^{-1}[k_{n-1}]$ оберненої до матриці коефіцієнтів підсилення k_n -го віртуального об'єкта.

Крок 20. Покласти $k_n = k_{n-1}$.

Крок 21. Обчислення керувальних дій $u_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) за формулою (4.98).

Крок 22. Використання знайдених керувальних дій для керування істинним об'єктом протягом n -го інтервалу часу.

Крок 23. Перехід до наступного $(n + 1)$ -го моменту часу і перехід до кроку 8.

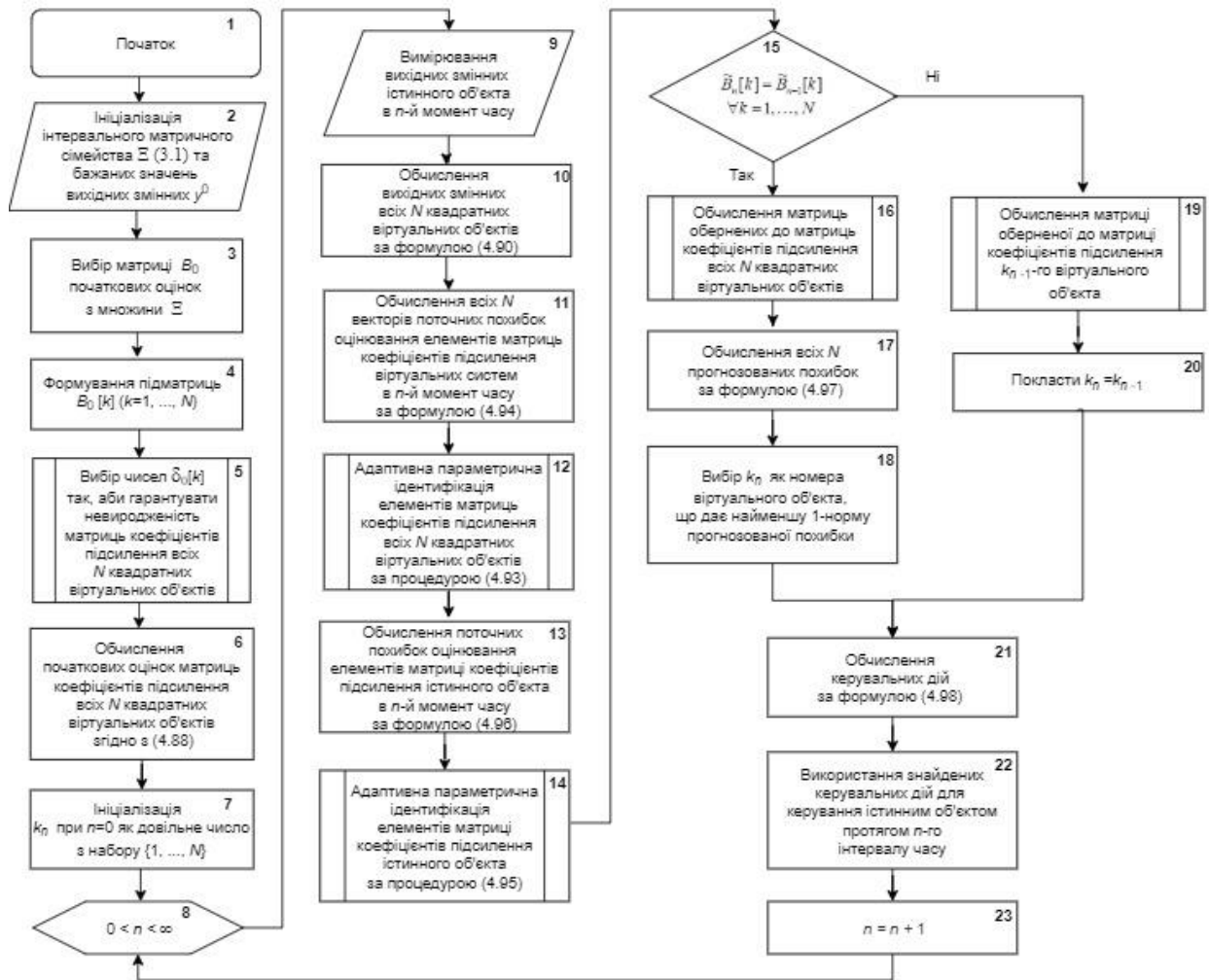


Рисунок 4.17 – Схема алгоритму керування за законом(4.91) – (4.99) разом з (4.86) – (4.90)

4.3.3. Асимптотичні властивості синтезованої системи. Для встановлення цих властивостей насамперед покажемо, що при будь-якому $u_0 \in \mathbf{R}^r$ існує скінченний момент часу $n = \bar{n} \in N_+$, в який за процедурою (4.93) не стане уточнюватися жодна з оцінок $\tilde{B}_n[1], \dots, \tilde{B}_n[N]$ матриць коефіцієнтів підсилення віртуальних об'єктів, тобто

$$\tilde{B}_n[k] = \tilde{B}_{\bar{n}-1}[k] \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (\bar{n} < \infty). \quad (4.100)$$

Для встановлення цього факту припустимо, що такого моменту не існує. Відповідно до співвідношення (4.99), яке фігурує у запропонованому законі керування, це припущення означає, що

$$k_n \equiv k_{n_0}, \quad n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$$

Тут n_0 позначає момент часу, коли розпочалося керування віртуальним об'єктом з певним номером $k_{n_0} \in \{1, \dots, N\}$ (одночасно з керуванням істинним об'єктом (2.1)) за законом (4.98) у формі

$$u_n = u_{n-1} + \tilde{B}_n^{-1}[k_{n_0}](y^0[k_{n_0}] - \tilde{y}_n[k_{n_0}]). \quad (4.101)$$

В силу леми 4.2 при керуванні за законом (4.101) віртуальним об'єктом, який описується рівнянням

$$\tilde{y}_n[k_{n_0}] = \tilde{B}[k_{n_0}]u_{n-1} + \tilde{v}_{n-1}[k_{n_0}],$$

процес уточнення оцінки $\tilde{B}_n[k_{n_0}]$ неодмінно має завершитися в деякий скінченний момент часу $n = \bar{n}[k_{n_0}]$, тобто

$$\tilde{B}_n[k_{n_0}] \equiv \tilde{B}_{\bar{n}[k_{n_0}]}[k_{n_0}] \quad \forall n \geq \bar{n}[k_{n_0}];$$

при цьому послідовність $\{u_n\}$ залишається обмеженою зверху деякою константою C_u рівномірно за n , тобто

$$\sup_{n \geq n_0} \|u_n\| \leq C_u < \infty, \quad (4.102)$$

принаймні доти, доки буде здійснюватися керування за цим законом на базі віртуального об'єкта з матрицею коефіцієнтів підсилення $\tilde{B}[k_{n_0}]$.

З іншого боку, за наявності обмеження (4.102) маємо

$$\sup_{n \geq n_0} \|\nabla u_n\| \leq C_{\nabla u} < \infty \quad (4.103)$$

з деякою константою $C_{\nabla u}$. При виконанні ж умов (4.68) і (4.103) будуть виконані всі умови, сформульовані в [38, теорема 2.1.1a]. Це дає підстави стверджувати, що існує момент часу $n = \tilde{n}$, коли оцінки $\tilde{B}_n[k]$ для всіх $k \in \{1, \dots, N\} \setminus k_{n_0}$ стабілізуються:

$$\tilde{B}_{\bar{n}}[k] = \tilde{B}_{\bar{n}+1}[k] = \tilde{B}_{\bar{n}+2}[k] = \dots$$

Проведений аналіз прямо показує, що при

$$\bar{n} = \max \{ \bar{n}[k_{n_0}], \tilde{n} \} (< \infty)$$

буде виконана рівність (4.100). А це протирічить прийнятому припущенню. Отже, існує скінченний момент часу $n = \bar{n}$, коли в силу (4.98), (4.99) настане потреба у переході до керування істинним об'єктом на базі, взагалі кажучи, іншого віртуального об'єкта.

Припустимо далі, що в деякій n -й момент часу згідно з процедурою (4.93) не відбулось уточнення жодного з r рядків оцінки $\tilde{B}_n[k]$ матриці $\tilde{B}[k]$ коефіцієнтів підсилення деякого k -го віртуального об'єкта ($k \in \{1, \dots, N\}$), на який покладено функцію керування істинним об'єктом:

$$\tilde{B}_n[k] = \tilde{B}_{n-1}[k]. \quad (4.104)$$

(За доведеним вище така подія неодмінно має настати.) Повторюючи тепер майже повністю хід доведення леми 4.2, можна показати, що в $(n-1)$ -ий момент, який передую згаданій події, буде

$$\|u_{n-1}\|_2 \leq \|\tilde{B}^{-1}[k]\|_2 (\|y^0[k]\|_2 + 3\varepsilon^0[k]/2), \quad (4.105)$$

де $\varepsilon^0[k] = +\sqrt{[\varepsilon^{0(i,k)}]^2 + \dots + [\varepsilon^{0(i_r,k)}]^2}$. Зрозуміло, що для будь-якого $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ згідно з оцінкою (4.105) подія (4.104) свідчить про те, що

$$u_{n-1} \in S \subset \mathbf{R}^r \quad (4.106)$$

де $S = \{u : \|u\|_2 \leq R_S\}$ – обмежена множина, яка являє собою кулю в \mathbf{R}^r (круг при $r = 2$) радіуса

$$R_S = \max_{j=1, \dots, N} \|\tilde{B}^{-1}[j]\|_2 (\|y^0[j]\|_2 + 3\varepsilon^0[j]/2) < \infty.$$

Таким чином, якщо на деякому n -му кроці не відбулося уточнення жодної з N оцінок $\tilde{B}_{n-1}[1], \dots, \tilde{B}_{n-1}[N]$, породжених процедурами (4.93) на попередньому кроці (за доведеним вище такий момент неодмінно наступить), то формування вектора керувальних дій

$$u_n = \arg \min_{k: u_n[k] \in U_n} \|y^0 - B_n u_n[k]\|_1 \quad (4.107)$$

відповідно до (4.98), (4.99) неминуче передує подія (4.106), коли вектор u_n опиниться в одній і тій же обмеженій області S незалежно від того за яким з N віртуальних об'єктів здійснювалося керування об'єктом (2.1) в $(n-1)$ -й момент часу. При цьому послідовність $\{u_n\}$, сформована згідно з (4.107), буде, зрозуміло, залишатися в області S лише до тих пір, поки оцінки матриць коефіцієнтів підсилення віртуальних об'єктів, на базі яких відбувалося керування істинним об'єктом, відповідно до (4.93) не потребували уточнення. Але якщо в деякий момент $n = n'$ виникне така потреба, то послідовність $\{u_n\}$, звісно ж, покине цю область S . Тим не менш (це принциповий момент), якщо навіть буде спостерігатися явище, коли $u_{n'} \in S$, а $u_{n'+1}, u_{n'+2}, \dots \notin S$, то гарантується, що $u_n \in S_0 \quad \forall n > n'$, де $S_0 \supset S$ – обмежена область в \mathbf{R}^r (див. доведення положення а) леми 4.2). Цим самим переконуємося, що $u_n \in S_0 \quad \forall n \in N_+$, тобто що синтезована адаптивна система керування дисипативна:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| < \infty.$$

Встановлена вище властивість граничної обмеженості послідовності $\{u_n\}$ дозволяє, очевидно, формально записати

$$\|\nabla u_n\| \in \ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty. \quad (4.108)$$

Враховуючи тепер обмеженість $\{\nabla u_n\}$, виражену у формі (4.108), і згадуючи умову (4.68), бачимо, що всі вимоги, які згідно з [38, теорема 2.1.1а] гарантують скінчену збіжність рекурентних процедур (4.93), (4.95) оцінювання матриць $\tilde{B}[1], \dots, \tilde{B}[N]$ і матриці B відповідно, можна зробити наступний висновок: існує скінченний момент $n = n^*$ ($n^* < \infty$) такий, що оцінки $\tilde{B}_n[k]$ ($k \in \{1, \dots, N\}$ та B_n стабілізуються:

$$\tilde{B}_n[k] \equiv \tilde{B}^*[k], \quad B_n \equiv B^* \quad \forall n \geq n^*. \quad (4.109)$$

Згідно зі співвідношенням (4.99) після завершення адаптивного оцінювання всіх $N + 1$ невідомих матриць, тобто при $n \in [n^*, \infty)$, керування об'єктом (2.1) остаточно має здійснюватися шляхом вибору з U_n потрібного вектора u_n за формулою (4.107), у якій у відповідності до (4.109) слід покласти $B_n = B^*$; при цьому при будь-якому $v_n \in \Omega$ мінімізується верхня грань 1-норми прогнозованої в n -й момент часу похибки $\vec{e}_{n+1}[k]$ керування об'єктом (2.1):

$$\vec{e}_{n+1} = \min_{k: u_n[k] \in U_n} \vec{e}_{n+1}[k], \quad (4.110)$$

де $\vec{e}_{n+1}[k]$ визначається виразом (4.97).

Проведений вище аналіз асимптотичних властивостей синтезованої адаптивної системи керування об'єктом (2.1) з прямокутною матрицею коефіцієнтів підсилення $B \in \mathbf{R}^{m \times r}$ у підсумку дозволяє сформулювати наступний результат.

Твердження 4.5. Якщо виконані припущення (2.4), а система керування містить об'єкт (2.1) з прямокутною матрицею $B \in \mathbf{R}^{m \times r}$ ($m > r$) коефіцієнтів підсилення, заданою умовами (3.1), і адаптивний регулятор (4.91) – (4.99) разом з (4.86) – (4.90), то:

- а) вимоги (2.17), (2.18) граничної обмеженості $\{u_n\}$ і $\{y_n\}$ виконуються;
- б) процедури (4.93), (4.95) адаптивного оцінювання збігаються в деякий скінченний момент часу n^* , при якому оцінки \tilde{B}_n , B_n стабілізуються (згідно з (4.109));
- в) верхня грань 1-норми вектора прогнозованої на один крок вперед похибки керування у формі (4.97) мінімізується (згідно з (4.110)).

Перед тим, як завершити дослідження асимптотичної поведінки синтезованої адаптивної системи керування об'єктом (2.1) при $m > r$, доречно зробити кілька зауважень.

Зауваження 4.3. Встановлений факт збіжності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}_n[k] = \tilde{B}^*[k], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \equiv B^*$$

рекурентних процедур оцінювання (4.93), (4.95) відповідно вказує лише на функціональну ідентифікацію віртуальних об'єктів (4.87) й істинного об'єкта (2.1): адже, нагадаємо, зовсім не стверджується, що $\tilde{B}_n[k] = \tilde{B}[k]$, $B_n \equiv B$ (див. [38, гл. 4]).

Зауваження 4.4. На відміну від процедур адаптивного оцінювання, які припиняються через скінченний час, перехід від керування одним віртуальним об'єктом до іншого може, звісно, відбуватися як завгодно довго.

Зауваження 4.5. Нажаль, поставлена вище мета адаптивного керування об'єктом (2.1) з невідомою $m \times r$ -матрицею B коефіцієнтів підсилення досягається ціною «зверхпараметризації»: число оцінюваних параметрів, рівне $r^2 N = r^2 \binom{m}{r}$, може значно перевищувати число rm невідомих елементів матриці B коефіцієнтів підсилення.

4.3.4. Числовий приклад. Математичне моделювання. Для демонстрації ефективності запропонованого методу адаптивного керування у випадку, коли $r = 2$, $m = 3$, був проведений один модельний експеримент з адаптивною системою (2.1), (4.98), (4.99). В цьому експерименті матриця B навмисно була взята як

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1,5 \end{pmatrix}, \quad (4.111)$$

аби вона мала неповний ранг ($\text{rank } B = 1$). Оскільки $N = 3$, ця матриця визначає такі три підматриці:

$$B[1] = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B[2] = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1,5 \end{pmatrix}, \quad B[3] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Апріорні оцінки (3.1) елементів матриці B виду (4.111) були вибрані наступним чином: $1 \leq b^{(11)} \leq 5$, $0 \leq b^{(12)} \leq 2$, $0 \leq b^{(21)} \leq 2$, $1 \leq b^{(22)} \leq 2$, $1 \leq b^{(31)} \leq 4$, $0 \leq b^{(32)} \leq 5$. Числа $\delta_0[1] = 1,1$, $\delta_0[2] = 1,2$ та $\delta_0[3] = 1,3$ були розраховані за

методом, запропонованим в пункті 4.2.2, таким чином, аби гарантувати невиродженість матриць $\tilde{B}[1]$, $\tilde{B}[2]$, $\tilde{B}[3]$.

Початкова оцінка матриці B_0 , яка потрібна для реалізації процедури (4.95), була вибрана як

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1,9 \\ 2 & 2,1 \end{pmatrix}$$

з умови $b_0^{(11)} \in [1, 5]$, $b_0^{(12)} \in [0, 2]$, $b_0^{(21)} \in [0, 2]$, $b_0^{(22)} \in [1, 2]$, $b_0^{(31)} \in [1, 4]$, $b_0^{(32)} \in [0, 5]$. При цьому всі матриці $\tilde{B}_0[1]$, $\tilde{B}_0[2]$ та $\tilde{B}_0[3]$ обчислені за формулою (4.88) виявились невиродженими (як і повинно бути).

Рис. 4.18 і 4.19 демонструють результати моделювання синтезованої системи керування для випадку, коли послідовності $\{v_n^{(i)}\} = v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots$ генерувалися як послідовність незалежних псевдовипадкових чисел, взятих в інтервалах $-0,1 \leq v_n^{(1)} \leq 0,1$, $-0,2 \leq v_n^{(2)} \leq 0,2$, $-0,08 \leq v_n^{(3)} \leq 0,08$, а вектор бажаних значень вихідних величин був заданий як $y^0 = [1, 3, 7]^T$.

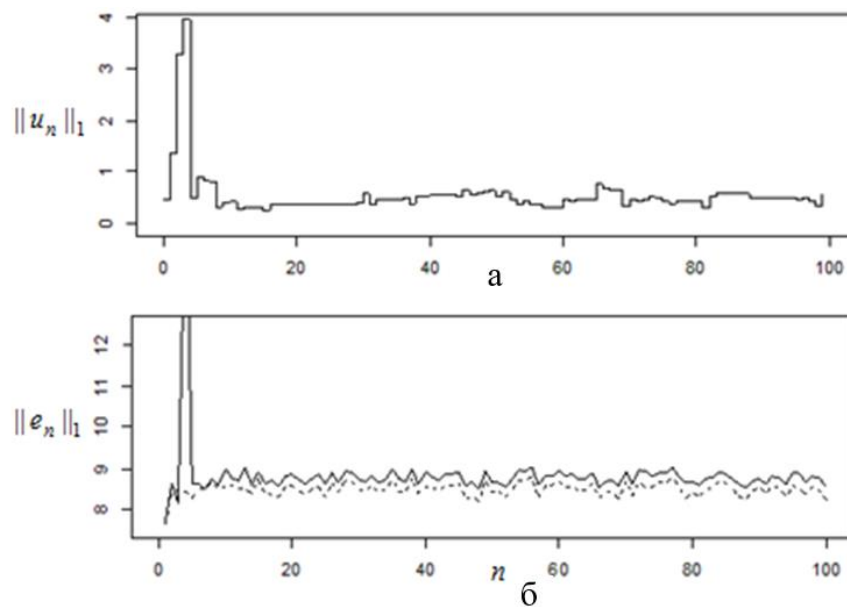


Рисунок 4.18 – Поведінка системи керування: а) 1-норма вектора керування; б) 1-норма вектора вихідних величин в адаптивному (суцільна лінія) та оптимальному (пунктирна лінія) випадках

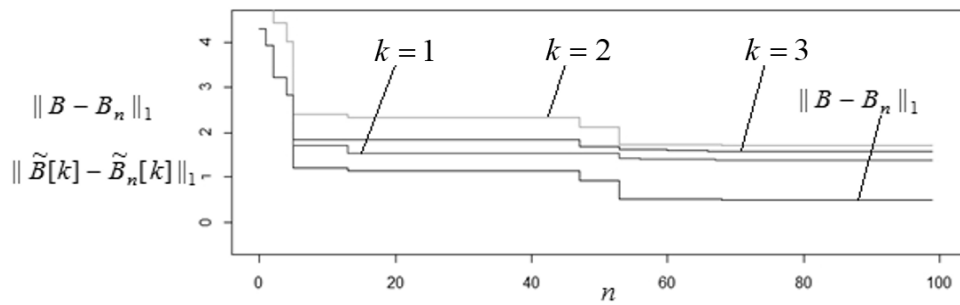


Рисунок 4.19 – Змінні, що описують процеси адаптивного оцінювання

Рис. 4.18,б ілюструє ефективність запропонованого адаптивного регулятора для керування багатозв'язним об'єктом без пам'яті з невідомою прямокутними матрицями коефіцієнтів підсилення.

Висновки до розділу 4

1. Побудовані за методом псевдооберненої моделі адаптивні регулятори, параметри яких уточнюються в кожний дискретний момент часу, на основі комбінації стандартних процедур точкового й множинного оцінювання невідомої матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта, дозволяють стабілізувати лінійний багатозв'язний об'єкт без пам'яті з одним каналом передачі керувальних дій і будь-яким числом вихідних змінних, не меншим 2, за наявності обмежених збурень як з відомими, так і невідомими рівнями.

2. Розроблений метод адаптивного керування лінійним багатозв'язним об'єктом без пам'яті, основу якого складає висунута ідея одночасної адаптивної стабілізації істинного об'єкта з довільною квадратною матрицею коефіцієнтів підсилення і так званого віртуального об'єкта з невідомою, але заздалегідь не виродженою квадратною матрицею коефіцієнтів підсилення, дає можливість стабілізувати істинний об'єкт в умовах обмежених збурень, рівні яких можуть бути як відомими, так і невідомими.

3. Розроблені метод і алгоритм адаптивного керування багатозв'язними лінійними об'єктами без пам'яті в умовах параметричної невизначеності за

наявності обмежених неконтрольованих збурень у випадку, коли число вихідних змінних перевищує число каналів передачі керувальних дій, дозволяє забезпечити стійкість замкненої системи при будь-якій матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта.

4. Розповсюдження запропонованого методу адаптивного керування лінійним багатозв'язним об'єктом без пам'яті з невідомою квадратною матрицею коефіцієнтів підсилення на випадок прямокутної матриці будь-якого рангу показує працездатність і ефективність цього методу.

Результати присвячені питанням адаптивного керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті розглянуто в [4, 6, 8, 12, 15, 18 – 22, 25, 26].

РОЗДІЛ 5

ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ПОБУДОВИ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИМИ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ ЗА МЕТОДОМ ПСЕВДООБЕРНЕНОЇ МОДЕЛІ

5.1. Керування багатозв'язним технологічним процесом поділу складних сумішей в ректифікаційній колоні

5.1.1. Опис технологічного процесу. Ректифікацією називають технологію поділу гомогенних сумішей рідин, частково або повністю розчинних одна в одній, які мають різні температури кипіння й парціальні тиски пари, [139, с. 39]. Цей процес з початку ХІХ століття вважається одним з найважливіших технологічних процесів спиртової та нафтової промисловості. В даний час ректифікацію у всьому світі застосовують в різних областях хімічної промисловості, де виділення компонентів у чистому вигляді має дуже важливе значення (в виробництвах органічного синтезу ізотопів, полімерів, напівпровідників і різних інших речовин високої чистоти).



Рисунок 5.1 – Зовнішній вигляд промислових ректифікаційних колон

Ректифікаційні колони застосовуються в процесах дистиляції, екстрактивної ректифікації, екстракції рідин, теплообміну між парою і рідиною і в інших процесах. Один і той же принцип дії ректифікаційної колони використовується як

у відносно простих лабораторних приладах, так і в складних промислових установках нафтопереробної, нафтохімічної, хімічної, газової, броварної і інших галузей. Діаметр промислових ректифікаційних колон може досягати 16 метрів, а висота - 90 метрів і більше, рис. 5.1.

5.1.2. Математична модель технологічного процесу ректифікації.

Ректифікацію зазвичай здійснюють у колонних апаратах шляхом багаторазового часткового випарювання суміші (бінарної або багатокомпонентної) і конденсації пари, що утворюється. При цьому відбувається багаторазовий контакт між рідкою й паровою фазами, що рухаються в більшості випадків протитечією одна до іншої.

На рис. 5.2 наведена принципіальна схема процесу ректифікації для поділу бінарних сумішей. Вона складається з тарілчастої ректифікаційної колони 1, дефлегматора 2, теплообмінників 3 і 4 для підігріву вихідної сировини й охолодження пари відповідно, і кип'ятильника 5. Вихідними змінними тут слугують склад дистилляту x_D й кубового продукту x_B . Керувальними діями (при керуванні за схемою так званої LV - конфігурації [148]) виступають витрата L флегми і витрата V кубового залишку, що повертаються.

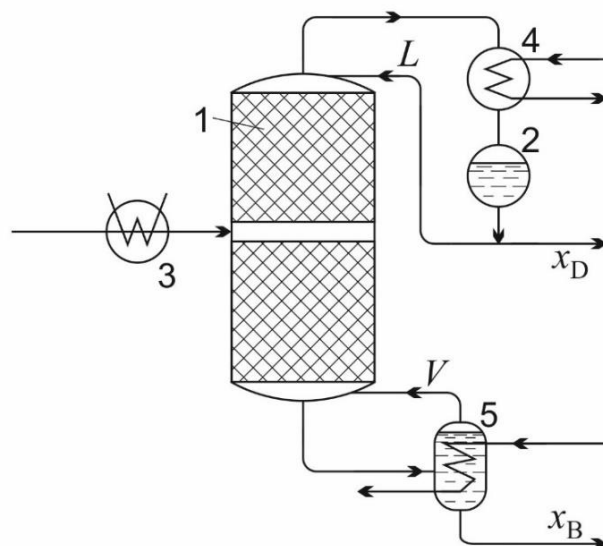


Рисунок 5.2 – Принципіальна схема процесу ректифікації

Задача керування технологічним процесом ректифікації (в LV - конфігурації) полягає в тому, аби підтримувати склад дистилляту й кубового продукту на

заданих рівнях шляхом відповідних змін витрат флегми L і кубового залишку V , що повертаються.

Згідно з [147, с. 1093] лінеаризація рівняння, яке пов'язує вихідні змінні x_D, x_B з керувальними діями L, V , в припущенні, що динаміка цього технологічного процесу як об'єкта керування може бути достатньо точно описана лінійною моделлю першого порядку з деякою сталою часу τ , приводить до такої матриці коефіцієнтів підсилення в рівнянні об'єкта:

$$W_0(s) = \frac{1}{\tau s + 1} B. \quad (5.1)$$

Тут

$$B = \begin{pmatrix} b^{(11)} & b^{(12)} \\ b^{(21)} & b^{(22)} \end{pmatrix}$$

– матриця коефіцієнтів підсилення за прямими $b^{(11)}, b^{(22)}$ і перехресними $b^{(12)}, b^{(21)}$ зв'язками між вхідними і вихідними змінними, числові значення яких наведені в роботі [147]. У цій роботі вперше, мабуть, була помічена така характерна особливість процесу ректифікації: хоча матриця B не вироджена ($\det B \neq 0$), проте виявляється, що вона погано обумовлена (її так зване число обумовленості $\text{cond } B$, яке визначається як $\text{cond } B := \|B\| \|B^{-1}\|$ [145, п. 16.4], таке, що $\text{cond } B \gg 1$).

Застосування стандартного апарату z -перетворення [141] до (5.1) дозволяє побудувати дискретну модель процесу ректифікації за наявності неперервних неконтрольованих збурень $v^{(1)}(t), v^{(2)}(t)$ у формі різницевого рівняння першого порядку

$$y_n - \alpha y_{n-1} = B u_{n-1} + v_{n-1}, \quad (5.2)$$

у якому $\alpha = \exp(-T_0/\tau)$, а $y_n = [x_D(n), x_B(n)]^T$, $u_n = [L(n), V(n)]^T$ – вектори вихідних змінних і керувальних дій відповідно в n -й момент часу.

Неважко бачити, що при відносно великому значенні інтервалу T_0 квантування сигналів у часі від рівняння (5.2) можна з прийнятною точністю

перейти до рівняння типу (2.1), оскільки $\alpha \rightarrow 0$ при $T_0 \rightarrow \infty$. А це рівняння, нагадаємо, є рівняння двохзв'язного об'єкта без пам'яті з квадратною матрицею $B \in \mathbf{R}^{r \times r}$ коефіцієнтів підсилення.

5.1.3. Керування за методом оберненої моделі. Беручи до уваги, що $\det B \neq 0$, для керування даним технологічним процесом в принципі можна було б скористатися методом оберненої моделі, описаним, наприклад, в [124, с. 200]. За цим методом закон керування об'єктом (2.1) в умовах невиродженості матриці B має такий вигляд:

$$u_n = u_{n-1} + B^{-1}e_n. \quad (5.3)$$

Тут, як і раніше, $e_n = y^0 - y_n$, де $y^0 = [x_D^0, x_B^0]^T$ – вектор заданих значень вихідних змінних x_D і x_B .

Нажаль, керування за законом (5.3) в умовах дії неконтрольованих збурень приводить до помітних коливань компонентів вектора u_n , якщо B – погано обумовлена матриця (в практичному плані такі коливання вельми небажані). Аби переконатися в цьому, на підставі (2.1), (5.3) запишемо співвідношення

$$u_n = B^{-1}y^0 - B^{-1}v_{n-1}, \quad (5.4)$$

яке зв'язує послідовності $\{u_n\}$ і $\{v_n\}$.

Проаналізуємо другий доданок $\tilde{y}_n = -B^{-1}v_{n-1}$ у правій частині виразу (5.4), котрий визначає змінну складову вектора u_n , яка залежить від v_{n-1} . Припускаючи, як і в розділі 2, що $v_n \in \Omega$, де

$$\Omega = [-\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(1)}] \times [-\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(2)}]$$

– обмежена область в \mathbf{R}^2 з діаметром $\text{diam } \Omega = 2\varepsilon = 2\sqrt{[\varepsilon^{(1)}]^2 + [\varepsilon^{(2)}]^2}$, оцінимо «розмах» коливань $\{u_n\}$, викликаних коливаннями компонент $v_n^{(1)}$ і $v_n^{(2)}$ вектора v_n у межах $-\varepsilon^{(1)} \leq v_n^{(1)} \leq \varepsilon^{(1)}$, $-\varepsilon^{(2)} \leq v_n^{(2)} \leq \varepsilon^{(2)}$ відповідно. З цією метою розглянемо відношення

$$\kappa = \frac{\|B^{-1}v_{n-1}\|_2}{\|v_{n-1}\|_2}, \quad (5.5)$$

що характеризує, у скільки разів евклідова норма змінної \tilde{u}_n може перевищувати евклідову норму вектора v_{n-1} збурення, яке згідно з (5.4) породжує вектор u_n .

З (5.5) видно, що

$$\kappa^2 = \frac{v_{n-1}^T [(B^{-1})^T B^{-1}] v_{n-1}}{v_{n-1}^T v_{n-1}} \quad (5.6)$$

– не що інше, як так зване відношення Релея [145, п. 15.4], в якому при $\det B \neq 0$ матриця $[(B^{-1})^T B^{-1}]$ – додатно визначена матриця: $[(B^{-1})^T B^{-1}] > 0$ (див. [145, пп. 11.37, 12.48]). Виявляється, що коли $B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, то справедлива низка співвідношень

$$\begin{aligned} \kappa_{\max}^2 &= \max_{v_{n-1} \in \Omega \setminus \{0_2\}} \frac{v_{n-1}^T [(B^{-1})^T B^{-1}] v_{n-1}}{v_{n-1}^T v_{n-1}} = \\ &= \lambda_{\max} [(B^{-1})^T B^{-1}] \text{ (згідно з [145, п 15.38])} = \\ &= \rho_{\max}^2 (B^{-1}) \text{ (згідно з [145, п 11.39])} \geq \\ &\geq \lambda_{\max}^2 (B^{-1}) \text{ (згідно з нерівністю Брауна [143, частина III, п 1.51])} = \\ &= \lambda_{\min}^{-2} (B) \text{ (згідно з [145, п 7.51])}. \end{aligned}$$

Звідси $\kappa_{\max} \geq 1/|\lambda_{\min}(B)|$. Отже, в силу (5.6) маємо

$$\max_{\tilde{u}_n \in \tilde{U}} \|\tilde{u}_n\|_2 \geq \max_{v_{n-1} \in \Omega} \|v_{n-1}\|_2 / |\lambda_{\min}(B)|, \quad (5.7)$$

де \tilde{U} – область можливих векторів \tilde{u}_n , породжених всіма можливими векторами v_{n-1} з області Ω .

Як видно з (5.7), максимум норми складової \tilde{u}_n може значно перевищити максимум норми вектора v_{n-1} , коли $|\lambda_{\min}(B)|$ – достатньо мале число, що має місце, коли матриця B погано обумовлена:

$$\max_{\tilde{u}_n \in \tilde{U}} \|\tilde{u}_n\|_2 \gg \max_{v_{n-1} \in \Omega} \|v_{n-1}\|_2 \quad \text{при } \text{cond } B \gg 1.$$

Для ілюстрації цього прикрого факту розглянемо відображення областей $\Omega \rightarrow \tilde{U}$ на конкретному практичному прикладі взятої з роботи [147, с. 1093]

матриці B коефіцієнтів підсилення моделі реального технологічного процесу ректифікації

$$B = \begin{pmatrix} 0,878 & -0,864 \\ 1,082 & -1,096 \end{pmatrix}, \quad \text{яка дає} \quad B^{-1} = \frac{1}{343} \begin{pmatrix} 13700 & -10800 \\ 13525 & -10975 \end{pmatrix};$$

при цьому $\text{cond } B \cong 142$. В умовах даного прикладу при $\Omega = [-0,2, 0,2] \times [-0,2, 0,2]$ за формулою $\tilde{u} = -B^{-1}v$, де $v \in \Omega$, була визначена область \tilde{U} , яка дає уявлення про відображення $\Omega \rightarrow \tilde{U}$ (рис. 5.3).

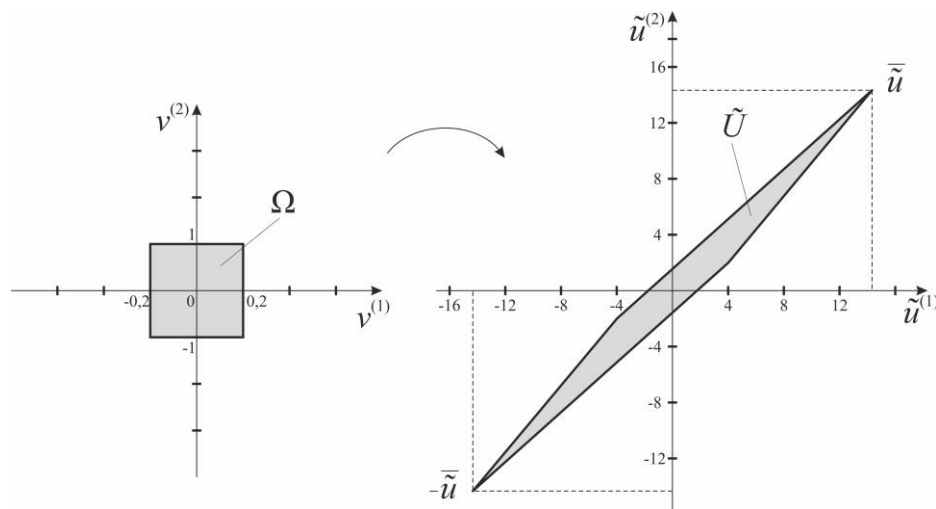


Рисунок 5.3 – Відображення $\Omega \rightarrow \tilde{U}$ для конкретного числового прикладу

З розгляду рис. 5.3 можна побачити, що $\max_{\tilde{U}} \|\tilde{u}_n\|_2 = \|\bar{\tilde{u}}_n\|_2 = \|\bar{-\tilde{u}}_n\|_2 \approx 19,8$ приймає досить велике значення порівняно зі значеннями $\max_{\Omega} \|v_n\|_2 \approx 0,28$. При цьому, коли компоненти $v_n^{(1)}$ і $v_n^{(2)}$ вектора v_n пробігають значення в межах $-0,2 \leq v_n^{(1)} \leq 0,2$, $-0,2 \leq v_n^{(2)} \leq 0,2$, то компоненти $\tilde{u}_n^{(1)}$ і $\tilde{u}_n^{(2)}$ вектора \tilde{u}_n будуть пробігати значення в таких межах: $-14,3 \leq \tilde{u}_n^{(1)} \leq 14,3$, $-13,7 \leq \tilde{u}_n^{(2)} \leq 13,7$. А це вказує на можливість появи помітних коливань змінних компонент керуючих дій $u_n^{(1)}$ і $u_n^{(2)}$ за наявності нерегулярних збурень $v_n^{(1)}$ і $v_n^{(2)}$.

Модельний експеримент 5.1. Аби продемонструвати, як буде вести себе система керування процесом ректифікації за методом оберненої моделі, проводилось математичне моделювання системи (2.1), (2.8), (5.3) в умовах наведеного вище числового прикладу. Послідовності $\{v_n^{(1)}\}$ і $\{v_n^{(2)}\}$ генерувалися

як послідовності псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалах $[-0,2, 0,2]$. Вектор заданих значень вихідних величин був заданий як $y^0 = [0,4, 0,6]^T$. Тривалість експерименту складала 100 тактів.

Результати моделювання подані на рис. 5.4. Ці результати показують, що керування за законом (5.3) при $v_n^{(1)} \in [-0,2, 0,2]$, $v_n^{(2)} \in [-0,2, 0,2]$, і $\text{cond } B \cong 142$ може привести до помітних коливань норми $\|u_n\|_2$ вектора керувальних дій у доволі широких межах ($1,69 \leq \|u_n\|_2 \leq 7,3$) на часовому інтервалі $n \in [0, 100]$ (рис. 5.4,а), тоді як коливання норми похибки $\|e_n\|_2$ на цьому ж часовому інтервалі не буде перевищувати числа $2\varepsilon \approx 5,6$ (рис. 5.4,б).

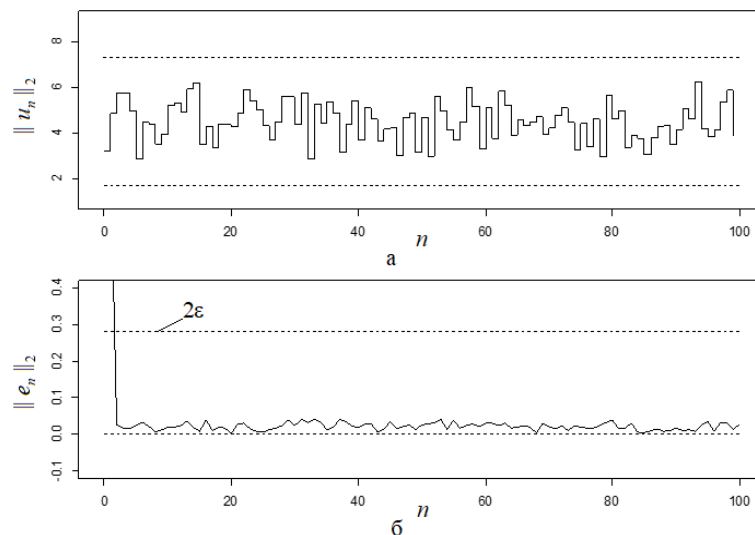


Рисунок 5.4 – Процеси керування об’єктом (2.1) в умовах експерименту 5.1: а – евклідова норма вектора керування; б – евклідова норма вектора похибки

Аби уникнути значних коливань $\|u_n\|_2$, в рамках загальної ідеології псевдообернення спершу було розроблено один метод, названий модифікованим методом псевдооберненої моделі. Цей метод аналізується в наступному пункті.

5.1.4. Керування за модифікованим методом псевдооберненої моделі. Згідно з цим методом керування об’єктом (2.1) в умовах $\text{cond } B \gg 1$ має здійснюватися за законом

$$u_n = u_{n-1} + B_0^+ e_n, \quad (5.8)$$

в якому B_0 – найближча до B (в певному сенсі) вироджена матриця ($\det B_0 = 0$).

В якості критерію близькості B_0 до B пропонується використовувати фробеніусову норму

$$\|\Delta\|_F := \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r |\delta^{(ij)}|^2 \right)^{1/2} \quad (5.9)$$

матриці $\Delta = (\delta^{(ij)}) = B_0 - B$ з елементами $\delta^{(ij)} = b_0^{(ij)} - b^{(ij)}$ (означення $\|\cdot\|_F$ можна знайти, наприклад, в [90, додаток 5]).

В силу (5.9) задача пошуку мінімуму норми $\|\Delta\|_F$ зводиться, очевидно, до стандартної задачі умовної оптимізації в наступній формі

$$\min_{\substack{\text{vec } \hat{B}_0 \in \underbrace{\mathbf{R}^{\times \dots \times \mathbf{R}}}_{r^2}}} \sum_{i,j=1}^r \|\text{vec } \hat{B}_0 - \text{vec } B\|_2^2 : \det \hat{B}_0 = 0. \quad (5.10)$$

тут $\text{vec } P := [p^{(11)}, \dots, p^{(NN)}]^T$ – взяте з [90, с. 220] позначення N^2 -вимірного вектора, який утворюється витягуванням в стовпець $N \times N$ -матриці $P = (p^{(ij)})$. У свою чергу, задача (5.10) розв'язується, як відомо, класичним методом множників Лагранжа [147, глава 8] шляхом мінімізації функції Лагранжа

$$\Psi(\text{vec } \hat{B}_0, \Lambda) = (\hat{b}_0^{(11)} - b^{(11)})^2 + \dots + (\hat{b}_0^{(rr)} - b^{(rr)})^2 + \Lambda \det \hat{B}_0,$$

яка залежить від множника Лагранжа Λ і змінних $\hat{b}_0^{(11)}, \dots, \hat{b}_0^{(rr)}$, з умов $\partial\Psi(\cdot, \cdot)/\partial\hat{b}_0^{(ij)} = 0$, $\partial\Psi(\cdot, \cdot)/\partial\Lambda = 0$ Розв'язання такої задачі в кінцевому рахунку приводить до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} 2(\hat{b}_0^{(ij)} - b^{(ij)}) + \Lambda \frac{\partial}{\partial\hat{b}_0^{(ij)}} \det \hat{B}_0 &= 0, \quad i, j = 1, \dots, r, \\ \det \hat{B}_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

з $r^2 + 1$ невідомими $\hat{b}_0^{(ij)}$ і Λ . Розв'язок системи (5.11) дає

$$\text{vec } B_0 = \arg \min_{\substack{\text{vec } \hat{B}_0 \in \underbrace{\mathbf{R}^{\times \dots \times \mathbf{R}}}_{r^2}}} \sum_{i,j=1}^r \|\text{vec } \hat{B}_0 - \text{vec } B\|_2^2 \Rightarrow B_0.$$

З результатів, які містяться у твердженні 3.1, негайно випливає, що для забезпечення дисипативності замкненої системи керування (2.1), (2.8), (5.8) достатньо виконання вимоги

$$\|B_0^+ \Delta\| < 1 \quad (5.12)$$

при будь-якій нормі $\|\cdot\|$, оскільки у даному випадку $\Xi = \{B\}$ – одноточкова множина (невизначеність відсутня). Ця вимога накладає певні обмеження зверху на допустиму величину норми $\|\Delta\|$. З іншого боку, згідно з [145, п. 16.3] для існування виродженої матриці B_0 при $\det B \neq 0$ треба, аби норма $\|\Delta\|$ задовольняла вимогу

$$\|\Delta\| < \|B^{-1}\|^{-1}. \quad (5.13)$$

Таким чином, вимоги (5.12) і (5.13) визначаються умови, при яких гарантується можливість реалізації модифікованого методу псевдооберненої моделі I.

Нажаль цей метод в принципі не забезпечує астатизм замкненої системи астатизм замкненої системи (2.1), (2.8), (5.8) за відсутності збурень $v_n^{(1)}$, $v_n^{(2)}$, хоча він здатний придушити значні коливання $\|u_n\|$ при $v_n \neq 0_2$.

Для демонстрації особливостей модифікованого методу псевдооберненої моделі I проводився модельний експеримент з системою керування (2.1), (2.8), (5.8) у тих же самих умовах, що й експеримент 5.1.

Модельний експеримент 5.2. Проведенню цього експерименту передувало знаходження норми $\|B^{-1}\|_2$ і матриці B_0 з умови (5.10). Це дало

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0,90 & -0,85 \\ 1,80 & -1,70 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

При цьому $\det B_0 = 0$, як і має бути, а $\|\Delta\|_2 \approx 0,94$. За формулою (2.26) була знайдена псевдообернена матриця

$$B_0^+ = \frac{1}{613} \begin{pmatrix} 72 & 144 \\ -68 & -136 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

а за відомою формулою

$$\|B^{-1}\|_2 = \max_{i=1,2} \rho_i^{1/2}(B^{-1}),$$

наведеною у довідковій літературі (див., наприклад, [145, п. 14.48]), було знайдено $\|B^{-1}\|_2 \approx 71,87$. Перевірка вимог (5.12) і (5.13) показала, що вони виконані: $\|B_0^+ \Delta\|_2 \approx 0,304 < 1$, $\|\Delta\|_2 \approx 0,94 > 1/71,87 \approx 0,013$.

На рис. 5.5 показані результати моделювання систем (2.1), (2.8), (5.8) в умовах, коли $y^0 = [0,4, 0,6]^T$, а $\{v_n^{(1)}\}$ і $\{v_n^{(2)}\}$ – послідовності псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[-0,2, 0,2]$.

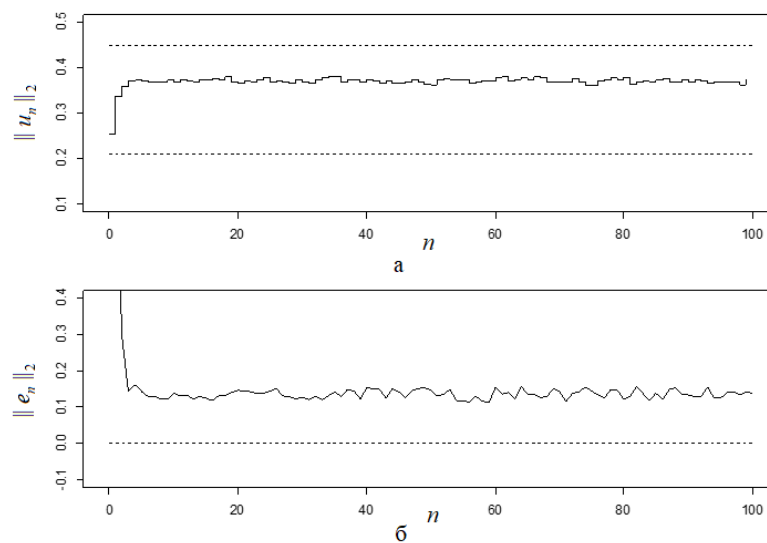


Рисунок 5.5 – Процеси керування об'єктом (2.1) в умовах експерименту 5.2:

a – евклідова норма вектора керування; b – евклідова норма вектора похибки

Як видно з рис. 5.5,а, перехід до закону керування (5.8) дозволяє помітно придушити коливання вектора u_n і його норма $\|u_n\|_2$ на часовому інтервалі $n \in [0, 100]$ залишилась у відносно «вузьких» межах $0,21 \leq \|u_n\|_2 \leq 0,45$ (порівняємо рис. 5.5,а з рис. 5.4,а. Однак даний закон не здатний забезпечити астатизм замкненої системи (2.1), (2.8), (5.8) за відсутності збурень: адже не стверджується, що $e_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, коли $v_n \equiv 0_2$. А коли $v_n \neq 0_2$, то звичайно спостерігається коливання $\|e_n\|_2$ в межах $0,49 \leq \|e_n\|_2 \leq 0,96$ (рис. 5.5,б).

Вільним від недоліків, притаманних методам, що розглядалися вище, виявився інший метод, який розглядається далі.

5.1.5. Керування за методом зваженої оберненої / псевдооберненої моделі.

Для реалізації цього методу, який доречно назвати методом зваженої оберненої/псевдооберненої моделі, закон керування об'єктом (2.1) будується у формі

$$u_n = u_{n-1} + (c_0 B^{-1} + c_1 B_0^+) e_n. \quad (5.16)$$

де $c_0, c_1 > 0$ – вагові коефіцієнти, вибором яких завжди можна забезпечити дисипативність системи керування. Цей метод акумулює переваги і можливості методу оберненої моделі та модифікованого методу псевдооберненої моделі.

Теоретично неважко показати, що існують числа c_0, c_1 такі, що замкнена система керування, яка містить об'єкт (2.1) і регулятор (5.16) спільно з (2.8), в умовах обмежених збурень $\{v_n^{(1)}\}, \{v_n^{(2)}\}$ ($\{v_n\} \in \ell_\infty \times \ell_\infty$) буде дисипативною. Насправді, на підставі (5.1), (2.1), (2.8) маємо

$$u_n = \underbrace{[(1 - c_0)I_2 - c_1 B_0^+ B]}_K u_{n-1} + Ay^0 - Av_{n-1}, \quad (5.17)$$

де $A = c_0 B^{-1} + c_1 B_0^+$.

Як видно, належним вибором чисел $c_0 \in (0, 1)$ і $c_1 \in (0, 1)$ у виразі матриці

$$K = (1 - c_0)I_2 - c_1 B_0^+ B,$$

що фігурує в (5.17), завжди можна забезпечити виконання умови

$$\|K\|_2 = \|(1 - c_0)I_2 - c_1 B_0^+ B\|_2 < 1, \quad (5.18)$$

яка гарантує граничну обмеженість $\{u_n\}$ при $\{v_n\} \in \ell_\infty \times \ell_\infty$.

Відомо [142], що за умови (5.18) і відсутності збурень ($v_n^{(1)} \equiv 0, v_n^{(2)} \equiv 0$) існує границя послідовності $\{u_n\}$:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_\infty. \quad (5.19)$$

Беручи тепер до уваги властивість (5.19), зрештою переконуємося, що

$$u_\infty = B^{-1} y^0.$$

А це згідно з (2.1) в силу (5.19) означає, що $y_\infty = y^0$ при $v_n \equiv 0_2$, де $y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Тим самим переконуємося, що система керування об'єктом (2.1) за законом (5.16) астатична.

Схема алгоритму керування об'єктом (2.1) за законом (5.16) спільно з (2.8) показана на рис. 5.6. Цей алгоритм здійснюється наступними кроками:

Крок 1. Початок.

Крок 2. Ініціалізація матриці B коефіцієнтів підсилення моделі реальної системи.

Крок 3. Знаходження за методом множників Лагранжа найближчої до B виродженої матриці B_0 .

Крок 4. Обчислення матриці B^{-1} , оберненої до матриці B .

Крок 5. Обчислення матриці B_0^+ , псевдооберненої до матриці B_0 , за формулою (2.26).

Крок 6. Задання бажаних значень, а саме: складу дистилляту x_D^0 й кубового продукту x_B^0 .

Крок 7. Знаходження вагових коефіцієнтів c_0, c_1 .

Крок 8. Для першого дискретного моменту часу $n=1$ і всіх наступних моментів часу виконувати кроки 9 – 12.

Крок 9. Вимірювання в n -й момент часу вихідних величин, а саме: складу дистилляту x_D й кубового продукту x_B .

Крок 10. Обчислення похибок функціонування системи керування за формулою (2.8).

Крок 11. Обчислення керувальних дій, а саме: витрат флегми L і кубового залишку V за формулою (5.16).

Крок 12. Перехід до $(n+1)$ -го моменту часу і повернення до кроку 8.

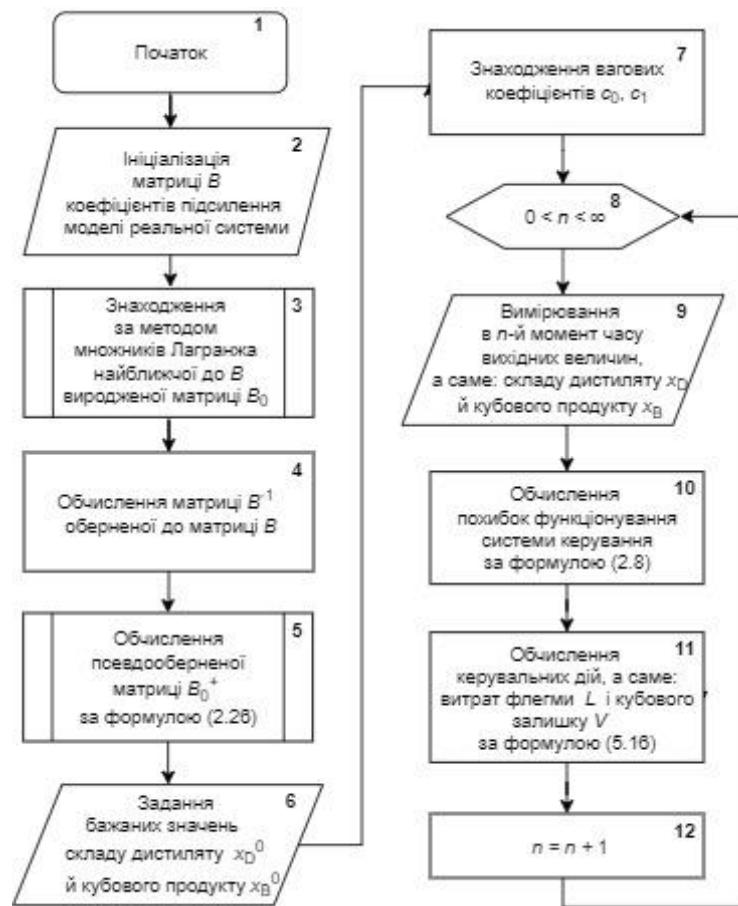


Рисунок 5.10 – Схема алгоритму керування технологічним процесом поділу складних сумішей в ректифікаційній колоні

Аби проілюструвати можливості запропонованого методу зваженої оберненої/псевдооберненої моделі, проводився наступний модельний експеримент.

Модельний експеримент 5.3. Як і в попередніх експериментах, моделювалась система керування тим же самим об'єктом і з тими ж самими значеннями елементів матриці B , як і в модельних експериментах 5.1 та 5.2, та з псевдовипадковими послідовностями збурень $\{v_n^{(1)}\}$, $\{v_n^{(2)}\}$, обмежених тими ж самими рівнями.

Результати цього модельного експерименту наведені на рис. 5.7. Ці результати показують, що керування об'єктом (2.1) за законом (5.16) дозволяє помітно зменшити коливання змінної $\|u_n\|_2$ у порівнянні з коливаннями цієї ж змінної при керуванні за законом (5.3) (порівняємо рис 5.4,а і рис. 5.7,а). При цьому спостерігається суттєве зменшення максимального значення норми похибки

системи керування, яка в стаціонарному режимі функціонування цієї системи може бути оцінена величиною $\max_{n \in [20, 100]} \|e_n\|_2 \approx 0,03$ (див. рис. 5.7,б), тоді як при керуванні за законом (5.8) вона складала величину, не меншу, ніж 0,1 (див. рис. 5.4,б).

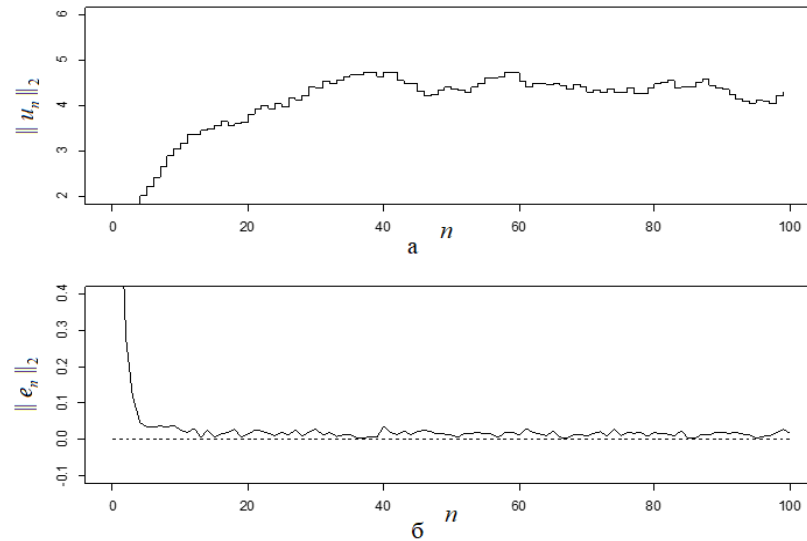


Рисунок 5.7 – Процеси керування об'єктом (2.1) в умовах експерименту 5.3:

а – евклідова норма вектора керування; *б* – евклідова норма вектора похибки

Проведений порівняльний аналіз можливостей трьох методів керування показує незаперечну перевагу останнього.

5.2. Автоматичне керування технологічним процесом розподілу дуття за фурмами доменної печі

5.2.1. Загальна характеристика процесу розподілу дуття як об'єкта керування. Відомо [149 – 151], що техніко-економічні показники процесу плавки чавуну в доменній печі суттєво залежать від ступеня рівномірності розподілу дуття за фурмами, розташованими, як видно з рис. 5.8, по колу горна доменної печі.

Нерівномірність витрати дуття за фурмами по колу горна доменної печі суттєво впливає на розміри зон горіння, глибину проникнення газового потоку до центру горна, зміну поля температур вздовж радіуса і кола горна, на форму і

розташування зони розм'якшення, на хімічний склад і фізичний стан матеріалів, на нерівномірність сходу шихти, на розпал профілю печі, що істотно позначається на рівності ходу доменної печі, її продуктивності, питомій витраті коксу і якості чавуну [149].

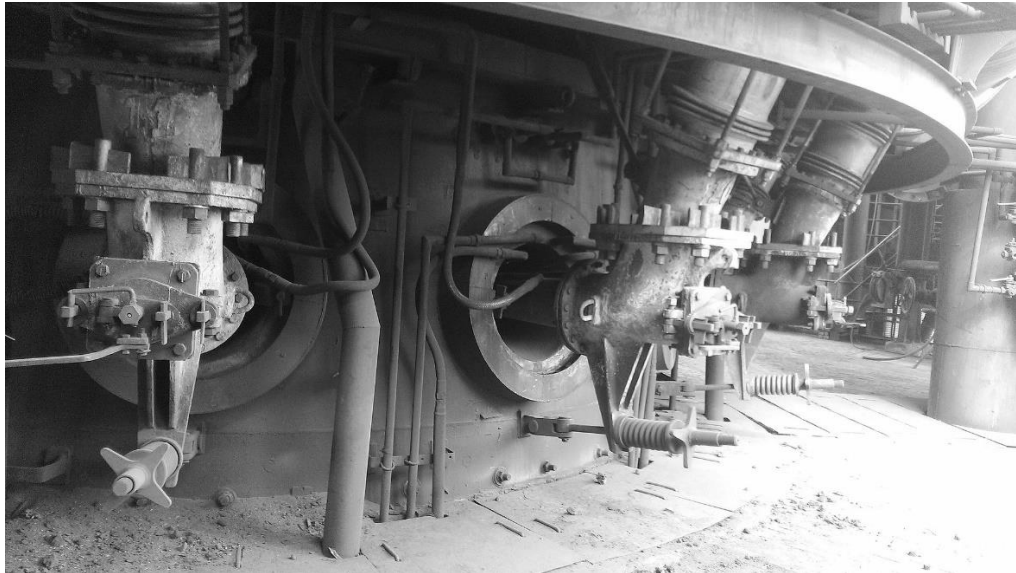


Рисунок 5.8 – Зовнішній вигляд фурм доменної печі №9 об'ємом 5000 м³ на підприємстві АТ «Полтавський турбомеханічний завод»

Ефективним засобом впливу на хід печі «знизу» видається автоматичний розподіл дуття за фурмами [151, п. 4.3.2]; при цьому в якості об'єкта керування тут виступає система повітропроводів, що складається з розподільного кільця і 16-ти радіальних повітропроводів (рис. 5.9,а). До них подається гаряче повітря – дуття. Витрати Q_i дуття в кожній i -й фурмі вимірюють опосередковано за інформацією про перепади тиску ΔP_i на звужуючих пристроях 1 ($i=1, \dots, 16$) і тиску P_0 газу в трубопроводі. Регулювання витрат дуття на фурмах здійснюють зміною положень d_i дросельних заслінок 2 ($i=1, \dots, 16$), розташованих у фурменних рукавах (див. рис. 5.9,а). На кожну окрему i -у фурму діє, як відомо [150], суттєво «індивідуальне» неконтрольоване низькочастотне збурення v_i , викликане зміною опору шихти над фурмою.

Як об'єкт автоматичного керування система розподілу дуття за 16-ма фурмами доменної печі являє собою багатозв'язний об'єкт без пам'яті (рис. 5.9,б).

Вихідними змінними цього об'єкта виступають безпосередньо не самі витрати Q_1, \dots, Q_{16} дуття в кожній фурмі, а їхній розподіл, конкретніше, різниця між витратами дуття сусідніх фурм, тобто величини $\Delta Q_{1,2}, \Delta Q_{2,3}, \dots, \Delta Q_{15,16}$ та $\Delta Q_{16,1}$ [150]. Рівняння, яке описує цей об'єкт у дискретному часі $n = 1, 2, \dots$, має вигляд

$$\Delta Q(n) = B d(n-1) + v(n-1). \quad (5.20)$$

У цьому рівнянні $\Delta Q(n) = [\Delta Q_{1,2}(n), \Delta Q_{2,3}(n), \dots, \Delta Q_{16,1}(n)]^T$ – 16-вимірний вектор вихідних змінних, компоненти якого визначаються так:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{i,i+1}(n) &= Q_i(n) - Q_{i+1}(n) \quad \text{при } i = 1, \dots, 15, \\ \Delta Q_{16,1}(n) &= Q_{16}(n) - Q_1(n); \end{aligned}$$

$d(n) = [d_1(n), \dots, d_{16}(n)]^T$ – 16-вимірний вектор керувальних дій; $v(n) = [v_1(n), \dots, v_{16}(n)]^T$ – 16-вимірний вектор неконтрольованих збурень; B – матриця розміром 16×16 . Рівняння (5.20) описує математичну модель технологічного процесу розподілу дуття як 16-зв'язаного об'єкта без пам'яті.

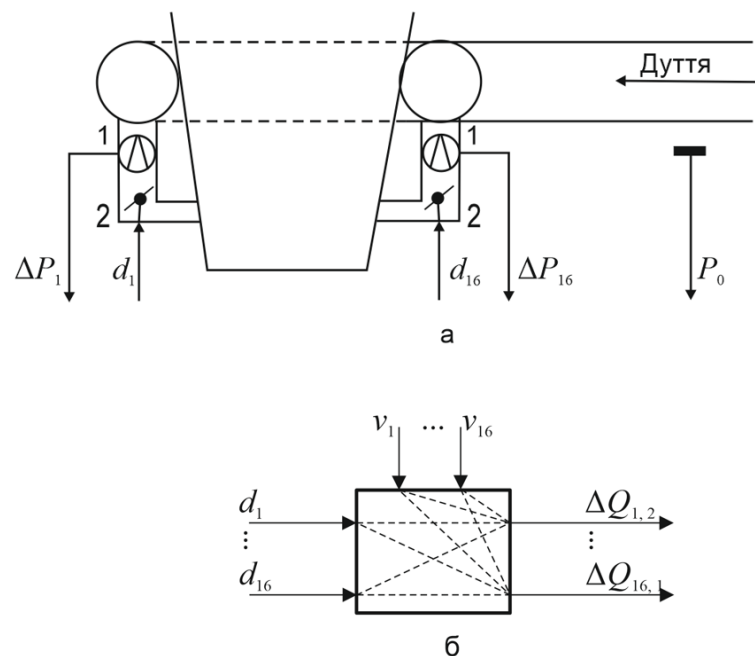


Рисунок 5.9 – Схема технологічного процесу розподілу дуття за фурмами доменної печі як об'єкта керування: а – принципальна схема; б – структурна схема

Специфічною особливістю даного об'єкта є те, що матриця $B \in \mathbf{R}^{16 \times 16}$ коефіцієнтів підсилення, що фігурує в рівнянні (5.20), вироджена [131, с. 301].

5.2.2. Керування системою розподілу дуття за методом псевдооберненої моделі. Оскільки матриця B точно невідома, а $\det B = 0$, то для ефективного керування даною системою (об'єктом) в реальних виробничих умовах було запропоновано метод псевдооберненої моделі, обґрунтований в розділах 2 і 3 дисертації. Згідно з цим методом керування об'єктом (5.20) має здійснювати за законом

$$d(n) = d(n-1) + B_0^+ e(n). \quad (5.21)$$

Тут B_0^+ – матриця, псевдообернена матриці B_0 коефіцієнтів підсилення деякої моделі даного об'єкта, а $e(n) = \Delta Q^0 - \Delta Q(n)$ – відхилення поточного розподілу витрат дуття за фурмами від заданого розподілу $\Delta Q^0 = [\Delta Q_{1,2}^0, \Delta Q_{2,3}^0, \dots, \Delta Q_{16,1}^0]^T$.

Схема запропонованого автором алгоритму керування об'єктом (5.20) за законом (5.21), (2.8) зображена на рис. 5.10. Цей алгоритм включає наступні кроки:

Крок 1. Початок.

Крок 2. Ініціалізація матриці B_0 коефіцієнтів підсилення моделі реальної системи.

Крок 3. Обчислення матриці B_0^+ , псевдооберненої до матриці B_0 , за формулою (2.26).

Крок 4. Введення бажаних значень $Q_{1,2}^0, Q_{2,3}^0, \dots, Q_{16,1}^0$ витрат дуття за всіма 16-ма фурмами.

Крок 5. Введення бажаних значень $\Delta Q_{1,2}^0, \Delta Q_{2,3}^0, \dots, \Delta Q_{16,1}^0$ розподілу витрат дуття.

Крок 6. Для першого дискретного моменту часу $n=1$ і всіх наступних моментів часу виконувати кроки 7 – 11.

Крок 7. Вимірювання перепадів тиску ΔP_i ($i=1, \dots, 16$) і тиску P_0 газу в трубопроводі в n -й момент часу.

Крок 8. Визначення величин $\Delta Q(n)$ розподілу витрат дуття в n -й момент часу.

Крок 9. Обчислення похибок функціонування системи за формулою (2.8).

Крок 10. Обчислення компонент вектора керувальних дій $d_i(n)$ ($i=1, \dots, 16$) положень заслінок за формулою (5.21).

Крок 11. Перехід до $(n+1)$ -го моменту часу і повернення до кроку 6.

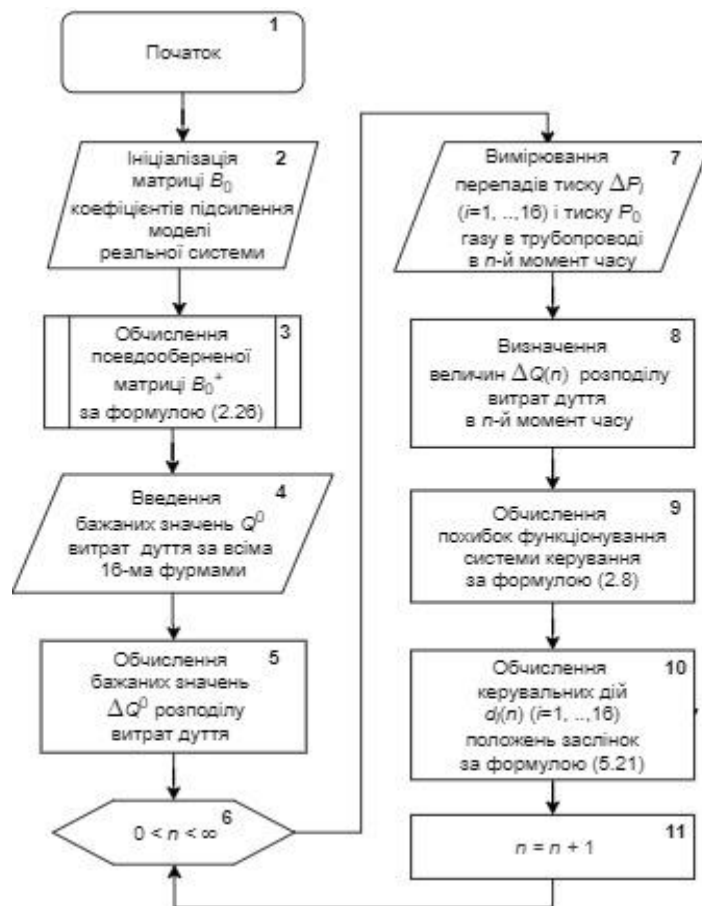


Рисунок 5.10 – Схема алгоритму керування технологічним процесом розподілу дуття за фурмами доменної печі

За даними промислової експлуатації існуючої наразі системи автоматичного розподілу дуття за фурмами, встановленій на доменній печі №9 підприємства АТ «Полтавський турбомеханічний завод», та наявною технічною документацією на цю систему була складена матриця розміром 16×16 $B_0 = (b_0^{ij})$ коефіцієнтів підсилення моделі реальної системи. Вказана матриця наведена в Додатку А.

Звертає не себе увагу те, що всі її діагональні елементи $b_0^{(ii)}$ ($i=1, \dots, 16$) виявилися додатними: $b_0^{(11)} = 0,9$, $b_0^{(22)} = 0,5$, $b_0^{(33)} = 0,75$, $b_0^{(44)} = 1,3$, $b_0^{(55)} = 1,05$, $b_0^{(66)} = 0,1$, $b_0^{(77)} = 1,9$, $b_0^{(88)} = 1,35$, $b_0^{(99)} = 0,3$, $b_0^{(10\ 10)} = 0,13$, $b_0^{(11\ 11)} = 1,71$, $b_0^{(12\ 12)} = 0,18$, $b_0^{(13\ 13)} = 1,42$, $b_0^{(14\ 14)} = 0,01$, $b_0^{(15\ 15)} = 1,73$, $b_0^{(16\ 16)} = 0,52$ (як і повинно бути [131, с. 294]).

Для обчислення значень елементів псевдооберненої матриці B_0^+ було використане комп'ютерне програмне середовище R для статистичних обчислень, аналізу та зображення даних в графічному вигляді. Розрахована в такий спосіб матриця B_0^+ , яка наведена в Додатку А, була необхідна для практичної реалізації запропонованого закону керування (5.21).

Розроблені автором програмно-алгоритмічні засоби, орієнтовані на експлуатацію в складі цифрової системи автоматичного керування розподілом дуття на даному підприємстві, були випробувані у промислових умовах цього підприємства (копія відповідного документу, який був наданий розробнику методу й алгоритму керування згаданим технологічним процесом, розміщена в Додатку Б).

При проведенні випробувань розроблених програмно-алгоритмічних засобів бажані значення Q^0 витрат дуття за всіма 16-ма фурмами були взяті однаковими, а саме $Q_{1,2}^0 = Q_{2,3}^0 = \dots = Q_{16,1}^0 = 500 \text{ м}^3/\text{хв}$; при цьому заданий розподіл витрат дуття складав $\Delta Q_{1,2}^0 = \Delta Q_{2,3}^0 = \dots = \Delta Q_{16,1}^0 = 0 \text{ м}^3/\text{хв}$.

Фрагменти зареєстрованих результатів випробувань наведені на рис. 5.11.

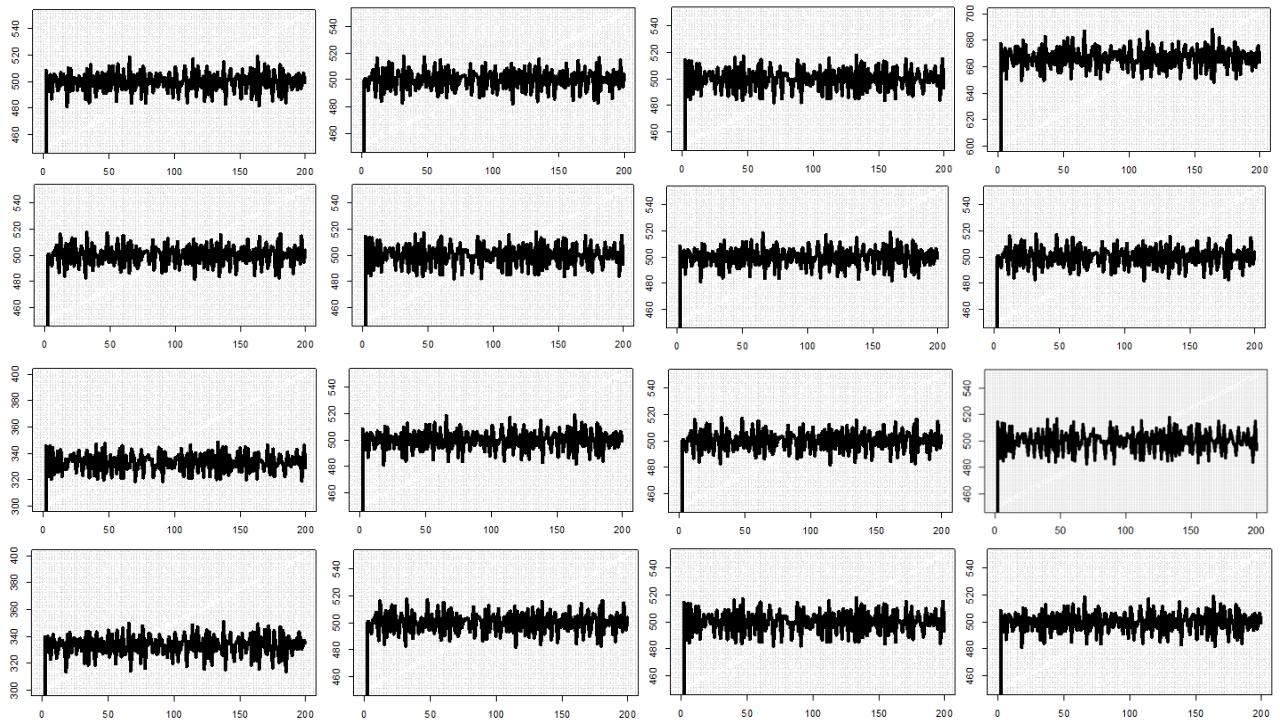


Рисунок 5.11. Витрати дуття по 16-ти фурмам доменної печі №9 об'ємом 5000 м³ на підприємстві АТ «Полтавський турбомеханічний завод»

Результати випробувань наочно свідчать про працездатність та ефективність запропонованих в роботі нових науково-технічних рішень щодо керування даним технологічним процесом за методом псевдооберненої моделі.

Висновки до розділу 5

1. Запропонований і обґрунтований вдосконалений метод псевдооберненої моделі для керування технологічним процесом ректифікації в практичному плані має переваги над відомим методом оберненої моделі, який реалізується на базі стандартного ПД-регулятора, оскільки він здатний як придушити коливання, викликані діями неконтрольованих випадкових збурень, так і забезпечити астатизм замкненої системи керування за відсутності збурень.

2. В рамках розроблених методу і алгоритму псевдооберненої моделі для керування 16-вимірним об'єктом без пам'яті з виродженою матрицею коефіцієнтів підсилення вдалося експериментально в умовах промислового підприємства забезпечити прийнятний розподіл дуття за фурмами доменної печі.

Результати розділу 5 опубліковані в [3, 13, 14, 30].

ВИСНОВКИ

В дисертації розв'язана актуальна науково-технічна задача розроблення і дослідження дискретних систем керування лінійними і деякими класами нелінійних багатозв'язних об'єктів без пам'яті з числом каналів передачі керувальних дій, що не перевищує числа вихідних змінних, при повній і неповній інформації про матрицю коефіцієнтів підсилення об'єкта незалежно від її рангу. За отриманими при виконанні роботи результатами досліджень можна зробити наступні висновки.

1. Замкнена система керування, побудована за методом псевдооберненої моделі при відомій матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта, має положення рівноваги незалежно від рангу цієї матриці, причому при повному ранзі цієї матриці положення рівноваги – одноточкова множина, а при неповному ранзі – деякий лінійний многовид.

2. Якщо вектор бажаних значень вихідних величин системи сталий, а збурення відсутні, то при повній апріорній інформації відносно матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта і будь-якому її рангу метод псевдооберненої моделі дає змогу мінімізувати верхню межу евклідової норми вектора похибок замкненої системи керування в кожний дискретний момент часу. В тих самих умовах гарантується стійкість, а за наявності обмежених збурень – дисипативність цієї системи.

3. При виконанні певних умов, встановлених в роботі, за наявності інтервальної невизначеності відносно елементів матриці коефіцієнтів підсилення лінійного багатозв'язного об'єкта без пам'яті незалежно від рангу цієї матриці гарантується існування положень рівноваги замкненої системи керування, що містить такий об'єкт і регулятор, побудований на основі лінійної псевдооберненої моделі. Ці умови конструктивні: їх можна доволі просто перевірити методами лінійного програмування.

4. При певних умовах за наявності інтервальних обмежень на елементи невідомої матриці коефіцієнтів підсилення об'єкта розроблений метод псевдооберненої моделі дозволяє забезпечити робастну стійкість замкненої системи керування лінійними і деякими класами нелінійних багатозв'язних об'єктів без пам'яті, коли збурення відсутні, та дисипативність такої системи при обмежених збуреннях. Встановлені умови допускають перевірку такими ж засобами, як і перевірку умов існування положення рівноваги.

5. Розроблений в рамках концепції псевдообернення метод адаптивної стабілізації лінійного багатозв'язного об'єкта без пам'яті з одним каналом передачі керувальних дій і кількома вихідними змінними, що передбачає використання стандартних процедур адаптивної ідентифікації, здатний забезпечити дисипативність замкненої системи керування за наявності як параметричної, так і непараметричної невизначеності, пов'язаної з відсутністю апріорної інформації про рівні невимірюваних збурень.

6. Розроблений метод адаптивної стабілізації лінійних багатозв'язних об'єктів без пам'яті, основу якого складає висунута ідея одночасного керування істинним і так званими віртуальними об'єктами на основі стандартних процедур адаптивного оцінювання, дозволяє стабілізувати такі об'єкти в умовах інтервальної невизначеності відносно елементів матриць коефіцієнтів підсилення незалежно від рангу цих матриць.

7. Математичне моделювання системи керування технологічним процесом ректифікації, яке реалізує запропоновані метод і алгоритм керування багатозв'язним об'єктом без пам'яті за наявності поганообумовленої матриці коефіцієнтів підсилення, продемонструвало можливість придушення коливань керувальних дій, викликаних збуреннями, і забезпечення астатизму цієї системи. Розроблені алгоритми керування багатозв'язним об'єктом без пам'яті за наявності виродженої матриці коефіцієнтів підсилення, які пройшли випробування в реальних умовах АТ «Полтавський турбомеханічний завод» у складі програмно-алгоритмічного забезпечення системи автоматичного керування процесом розподілу дуття за фурмами доменної печі, показали свою ефективність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Pseudoinversion in the problems of robust stabilizing multivariable discrete-time control systems of linear and nonlinear static objects under bounded disturbances. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. N 3. P. 57 – 70.
2. Zhitetskii L. S., Skurikhin V. I., Solovchuk K. Yu. Stabilization of a nonlinear multivariable discrete-time time-invariant plant with uncertainty on a linear pseudoinverse model. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2017. N 5. P. 12 – 26.
3. Гриценко В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Предельные возможности метода псевдообращения для управления линейными многосвязными объектами без памяти: гарантированные результаты. *Доповіди НАН України*. 2019. №8. С. 16 – 24.
4. Zhiteckii L. S., Azarskov V. N., Solovchuk K. Yu. Solving a problem of adaptive stabilization for some static MIMO systems. *Cybernetics and Computer Engineering*. 2019. N 3 (197). P. 33 – 50.
5. Соловчук К. Ю. Математичні моделі типових неперервних технологічних процесів, орієнтованих на комп'ютерне керування. *Управляющие системы и машины*. 2018. № 5. С. 79 – 92.
6. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Adaptive stabilization of some multivariable systems with nonsquare gain matrices of full rank. *Кибернетика и вычислительная техника*. 2018. № 2 (192). С. 44 – 61.
7. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Discrete-time steady-state control of interconnected systems based on pseudoinversion concept. *Кибернетика и вычислительная техника*. 2017. № 189. С. 29 – 43.
8. Zhiteckii L. S., Nikolaienko S. A., Solovchuk K. Yu. Adaptation and learning in some classes of identification and control systems. *Cybernetics and Computer Engineering*. 2015. N 181. С. 47 – 65.
9. Скурихин В. И., Гриценко В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Метод обобщенного обратного оператора в задаче оптимального управления линейными многосвязными статическими объектами. *Доповіди НАН України*. 2014. №8. С. 57 – 66.
10. Azarskov V. N., Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Discrete-time control of linear multivariable systems with either singular or ill-conditioned transfer function matrices. *Proceedings of the National Aviation University*. 2014. N 2. P. 19 – 27.
11. Скурихин В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Управление многосвязными объектами с вырожденными и плохо обусловленными

- передаточными матрицами на основе метода псевдообратного оператора. *Управляющие системы и машины*. 2013. №3. С. 14 – 20, 29.
12. Azarskov V. N., Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Adaptive robust control of multivariable static plants with possibly singular transfer matrix. *Electronics and Control Systems*. 2013. N 4. P. 47 – 53.
 13. Соловчук К. Ю. Управление в многосвязных системах с плохо обусловленной передаточной матрицей объекта. *Математические машины и системы*. 2013. №2. С. 45 – 45.
 14. Азарсков В. Н., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Управление многосвязными технологическими процессами в условиях неопределенности с использованием концепции обобщенного инвертирования. *Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Естественные и технические науки*. 2014. №5/6. С. 11 – 20 (РИНЦ).
 15. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Robust adaptive pseudoinverse model-based control of an uncertain SIMO memoryless system with bounded disturbances. *IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering UKRCON-2019* : proc. Lviv, 2019. P. 628 – 633 .
 16. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Analysis of Multivariable Regulation Systems Using Pseudo-Inverse Model-Based Controllers. *IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering UKRCON-2017* : proc. Kiev, 2017. P. 894 – 899.
 17. Zhiteckii L. S., Azarskov V. N., Solovchuk K. Yu., Sushchenko O. A. Discrete-time robust steady-state control of nonlinear multivariable systems : a unified approach. *19th IFAC World Congress* : proc. Cape Town, 2014. P. 8140 – 8145.
 18. Azarskov V. N., Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. A robust adaptive automatic MIMO process control in the presence of great parametric uncertainty. *Aviation in the XXI-st Century : the VI World Congress Safety in Aviation and Space Technologies* : proc. Kiev : NAU, 2014. V. 2. P. 351 – 355.
 19. Житецкий Л. С., Азарсков В. Н., Соловчук К. Ю. Адаптивное робастное управление многосвязными статическими объектами с прямоугольными матрицами коэффициентов усиления. *XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019* : тр. Всерос. совещания. Москва : ИПУ, 2019. С. 713 – 718.
 20. Азарсков В. Н., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Идентификационный подход к задаче робастного управления многосвязными статическими объектами с нестохастическими неопределенностями. *Идентификация систем и задачи управления SICPRO'15* : тр. X международной конференции. Москва : ИПУ, 2015. С. 520 – 538.

21. Азарсков В. Н., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Параметрическая идентификация многосвязного статического объекта в замкнутом контуре управления: специальный случай. *XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014* : тр. Всерос. совещания. Москва : ИПУ, 2014. С. 2764 – 2776.
22. Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Adaptive pseudoinverse model-based control of some memoryless SISO and MIMO systems. *Автоматика/Automatics – 2018* : матеріали XXV міжнародної конференції. Львів : ЛПТ, 2018. С. 145 – 146.
23. Соловчук К. Ю. Робастное управление одним классом нелинейных статических объектов с использованием метода псевдообращения. *Автоматика/Automatics – 2016* : матеріали XXIII міжнародної конференції. Суми : СумДУ, 2016. С. 65 – 66.
24. Azarskov V. N., Zhiteckii L. S., Solovchuk K. Yu. Robustness analysis of some multivariable feedback control systems containing generalized inverse model-based controllers. *Infocom Advanced Solution 2015* : матеріали міжнародної конференції. Київ : КПІ, 2015. V. 1. P. 94 – 95.
25. Azarskov V. N., Rudiuk G. I., Kurganskyi O. Yu., Solovchuk K. Yu. Adaptive robust control of linear MIMO static plant with an arbitrary transfer matrix and bounded noise: a generalization. *Автоматика/Automatics – 2015* : матеріали XXII міжнародної конференції. Одеса : ОНПУ, 2015.
26. Азарсков В. Н., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Робастно-адаптивное управление многосвязным статическим объектом с вырожденной передаточной матрицей. *Автоматика/Automatics – 2014* : матеріали XXI міжнародної конференції. Київ : КПІ, 2014.
27. Азарсков В. Н., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Optimal and suboptimal control of static multivariable plants based on generalized inverse matrix approach. *Автоматика/Automatics – 2013* : матеріали XX міжнародної конференції. Миколаїв : НУК, 2013. С. 65 – 66.
28. Скурихин В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Оптимальное управление многосвязными статическими объектами с произвольными передаточными матрицами. *Автоматика/Automatics – 2013* : матеріали XX міжнародної конференції. Миколаїв : НУК, 2013. С. 63 – 64.
29. Скурихин В. И., Житецкий Л. С., Соловчук К. Ю. Метод псевдообратного оператора в задаче оптимального управления многосвязным объектом с вырожденной передаточной матрицей. *Автоматика/ Automatics – 2012* : матеріали XIX міжнародної конференції. Київ : НУХТ, 2012. С. 63 – 64.
30. Соловчук К. Ю. Системы управления технологическими процессами на основе встроенных псевдообратных моделей. *Математичне та імітаційне*

- модельовання систем. МОДС 2012* : матеріали VII міжнародної науково-практичної конференції. Чернігів : ЧТУ. 2012. С. 185 – 189.
31. Соловчук К. Ю. Керування дискретними багатовимірними об'єктами з виродженими передавальними матрицями за наявності обмежених збурень. *Інформатика та системні науки* : наук. праці III Всеукраїнської науково-практичної конференції. Полтава : ПУЕТ, 2012. С. 634 – 636.
 32. *Основы управления технологическими процессами* / под. ред. Н. С. Райбмана. М. : Наука, 1978. 440 с.
 33. Mort N. Multivariable process control. *IFAC Symposium on Advances in Control Education (ACE'94)* : proc. Tokyo, 1994. Vol. 27, N 9. P. 161 – 164.
 34. Schuler S., Münz U., Allgöwer F. Decentralized state feedback control for interconnected process systems. *8th IFAC Symposium on Advanced Control of Chemical Processes* : proc. Singapore, 2012. – Vol. 45, N 15. P. 1 – 10.
 35. Ray W. H. *Advanced process control*. NY : McGraw-Hill, 1981 (Рос. переклад: Рей У. Методы управления технологическими процессами : монография. М. : Мир, 1983. 368 с.)
 36. King M. *Process control: a practical approach, second edition*. NY : Wiley, 2016. 624 p.
 37. Морозовский В. Т. *Многосвязные системы автоматического регулирования* : монография. М. : Энергия, 1970. 288 с.
 38. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. *Адаптивное управление динамическими объектами* : монография. М. : Наука, 1981. 448 с.
 39. Mesarović M. D. *The control of multivariable systems*. NY : J. Wiley & Sons Inc., 1960. 112 p.
 40. Мееров М. В. Системы многосвязного регулирования. *Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика*, 1961. №6.
 41. Мееров М. В. *Системы многосвязного регулирования* : монография. М. : Наука, 1965. 384 с.
 42. Морозовский В. Т. О полной и частичной автономности многомерных линейных САР. *Автоматика и телемеханика*, 1962. Т. 23, № 9. С. 1186 – 1201.
 43. Морозовский В. Т. О синтезе корректирующих перекрестных связей в многомерных системах многоуровневого регулирования. *Изв. АН СССР, Техническая кибернетика*, 1963. № 3. С. 18 – 26.
 44. Соболев О. С. Анализ структуры многомерной автоматической системы с нелинейной связью, *Автоматика и телемеханика*, 1964. Т. 25, № 3. С. 347 – 355.
 45. Соболев О. С. *Методы исследования линейных многосвязных систем* : монография. М. : Энергоатомиздат, 1985. 120 с.

46. Янушевский Р. Т. Об аналитическом конструировании одного класса многосвязных систем, *Автоматика и телемеханика*, 1967. Т. 28, № 8. С. 25 – 31.
47. Янушевский Р. Т. *Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления* : монография. М. : Наука, 1973. 464 с.
48. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. *Многомерные дискретные системы управления* : монография. М. : Наука, 1966. 416 с.
49. Суд-Злочевський А. І. До питання про зв'язане регулювання кількох параметрів. *Автоматика*, 1959, №3. С. 3 – 10.
50. Чинаев П. И. *Методы анализа и синтеза многомерных автоматических систем* книга : монография. Киев : Техніка, 1969. 378 с.
51. Павлов В. В. *Инвариантность и автономность нелинейных систем управления* : монография. Киев : Наукова думка, 1971. 272 с.
52. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. *Системы управления с динамическими моделями* : монография. Харьков : Основа, 1996. 211 с.
53. *Проектирование многоканальных систем оптимального управления* / Кузнецов Б. И. и др. : монография. Киев : Техника, 1993. 243 с.
54. Gubarev V. F., Mishchenko M. D., Snizhko B. M. Model predictive control for discrete MIMO linear systems. *Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems : Theory and Applications. Dedicated to Prof. V. M. Kuntsevich* / eds. Kondratenko Y. P. et al. Cham : Springer Nature Switzerland AG, 2019. P. 63 – 81.
55. Davison E. The output control of linear time-invariant multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1972. Vol. 17, N 5. P. 621 – 631.
56. Maciejowski J. M. *Multivariable feedback design*. Berkshire : Addison-Wesley, 1989. 409 p.
57. Skogestad S., Postlethwaite I. *Multivariable feedback control*. Chichester : Wiley, 1996. 559 p.
58. Glad T., Ljung L. *Control theory: multivariable and nonlinear methods*. NY : Taylor & Francis, 2000. 467 p.
59. Albertos P., Sala A. *Multivariable control systems: an engineering approach*. NY : Springer, 2004. 358 p.
60. Ивахненко А. Г. *Электроавтоматика*. Киев : Гостехиздат УССР, 1957. 450 с.
61. Кухтенко А. И. *Проблема инвариантности в автоматике*. Киев : Гостехиздат УССР, 1963. 376 с.
62. Павлов В. В. Инвариантность и автономность в многомерных существенно нелинейных автоматических систем. *Многосвязные и инвариантные*

- системы. Нелинейные и дискретные системы* : тр. III Всесоюз. совещ. по автоматическому управлению (технической кибернетики). Одесса, 1965. М. : Наука, 1968.
63. Полуэктов Р. А. Ограничения, вызванные объектом, в задачах синтеза многомерных замкнутых систем. *Автоматика и телемеханика*, 1966. № 3. С. 26 – 33.
 64. Полуэктов Р. А. *Теория синтеза многомерных линейных систем управления* : автореф. дис. д-ра техн. наук. Л., 1966. 25 с.
 65. Мисриханов М. Ш. Инвариантное управление многосвязными системами с заданными свойствами. *Вестн. Иванов. Гос. энергет. ун-та*, 2002. №4.
 66. Мисриханов М. Ш. *Классические и новые методы анализа многомерных динамических систем* : монография. М. : Энергоатомиздат, 2004. 566 с.
 67. Мисриханов М. Ш. *Инвариантное управление многомерными системами : алгебраический подход* : монография. М. : Наука, 2007. 236 с.
 68. Крутько П. Д. *Обратные задачи динамики управляемых систем : линейные модели* : монография. М. : Наука, 1987. 304 с.
 69. Пухов Г. Е., Жук К. Д. *Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов* : монография. Киев : Наук. думка, 1966. 218 с.
 70. Seraji H. Minimal inversion, command tracking and disturbance decoupling in multivariable systems. *Int. J. Control*, 1989. N 6. P. 2093 – 2191.
 71. Lyubchik L. M. Adaptive systems with identifier synthesis for dynamic plants with incomplete measurements. *Evaluating of Adaptive Control Strategies in Industrial Applications. IFAC Workshop Series* : proc. Tbilisi, 1990, Vol. 7. P. 171 – 176.
 72. Lyubchik L. M., Kostenko Yu. T. The output control of multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances : the inverse model approach. *2nd Europ. Control Conf.* : proc. Groningen, 1993. Vol. 2. P. 1160–1165.
 73. Lyubchik L. M. Dynamic sensors distortion compensation by means of input estimation algorithms. *IFAC Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control Applications* : proc. Budapest, 1994. Vol. 27, Is. 3. P. 211–216.
 74. Lyubchik L. M. Kostenko Yu. T. Discrete inverse model-based invariant systems design. *Asian Control Conf.* : proc. Tokyo, 1994. P. 241–244.
 75. Lyubchik L. M. Inverse model control and subinvariance in linear discrete multivariable systems. *3rd European Control Conf.* : proc. Roma, 1995. Vol. 4, part 2. P. 3651–3659.
 76. Lyubchik L. M. Disturbance rejection in linear discrete multivariable systems : inverse model approach. *18th IFAC World Congress* : proc. Milano, 2011. P. 7921 – 7926.

77. Liu C., Peng H. Inverse-dynamics based state and disturbance observers for linear time-invariant systems. *ASME J. of Dyn. Syst., Meas. and Control*, 2002. Vol. 124, N 5. P. 376 – 381.
78. Silverman L. M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1969. Vol. 14, N 3. P. 270 – 276.
79. Sain M. K., Massey J. L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1969. Vol. 14, N 2. P. 141 – 149.
80. Singh S. N. Invertibility of observable multivariable nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1982. Vol. 27, N 2. P. 487 – 489.
81. Коган М. М. Решение обратных задач о наилучшем возмущении и минимаксном управлении для линейных непрерывных систем. *Автоматика и телемеханика*, 1997. № 4. С. 22 – 30.
82. Пушков С. Г. Обращение линейных систем на основе реализации в пространстве состояний. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2018. № 1. С. 9 – 19.
83. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. *Методы робастного обращения динамических систем* : монография. М. : Физматлит, 2009. 221 с.
84. Francis B. A. A course in H_∞ control theory. Berlin : Springer Verlag, 1987. 156 p.
85. Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P. P., Francis B. A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1989. Vol. 34, N 8. P. 831 – 847.
86. Dahleh M. A., Pearson J. B. l_1 optimal feedback controllers for discrete-time systems. *American Control Conf.* : proc. Seattle, 1986. P. 1964 – 1968.
87. Якубович Е. Д. Оптимальное управление линейной дискретной системой при наличии неизмеряемого возмущения. *Автоматика и телемеханика*, 1977. № 4. С. 49 – 54.
88. Dahleh M. A., Pearson J. B. l_1 optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1987. Vol. 32, N 4. P. 314 – 322.
89. Катковник В. Я. Оптимизация многомерной замкнутой системы в случае объекта с прямоугольной передаточной матрицей. *Автоматика и телемеханика*, 1968. № 4. С. 23 – 33.
90. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. *Робастная устойчивость и управление* : монография. М. : Наука, 2002. 303 с.
91. Соколов В. Ф. *Робастное управление при ограниченных возмущениях* : монография. Сыктывкар : Коми научный центр УрО РАН, 2011. 218 с.
92. Кунцевич В. М. *Управление в условиях неопределенности : гарантированные результаты в задачах управления и идентификации* : монография. Киев : Наук. думка, 2006. 264 с.

93. Safonov M. G. *Stability and robustness of multivariable feedback systems*. Cambridge : MIT Press, 1980. 188 p.
94. Glover K. Robust stabilization of linear multivariable systems : relations to approximation. *International Journal of Control*, 1986. Vol. 43. P. 741 – 766.
95. Morari M., Zafiriou E. *Robust process control*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1989. 488 p.
96. Khammash M., Pearson J. B. Analysis and design for robust performance with structured uncertainty. *Systems and Control Letters*, 1993. Vol. 20, N 3. P. 179 – 188.
97. Khammash M., Pearson J. B. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1991. Vol. 36, N 4. P. 398 – 412.
98. Sánchez-Peña R., Sznajder M. *Robust systems: theory and applications*. NY : Wiley, 1998. 490 p.
99. Weinmann A. *Uncertain models and robust control*. London : Springer-Verlag, 1991. 722 p.
100. Barmish B. R. *New tools for robustness of linear systems*. NY : MacMillan, 1995. 394 p.
101. Kogan J. *Robust stability and convexity*. London : Springer-Verlag, 1995. 171 p.
102. Ackermann J. *Robust control: the parameter space approach*. London : Springer-Verlag, 2002. 483 p.
103. *Robust control* / ed. Dorato P. NY : IEEE Press, 1987.
104. *Recent advances in robust control : selected conference papers* / eds. Dorato P., Yedavalli R. K. NY : IEEE Press, 1990. 512 p.
105. *Robustness of dynamic systems with parameter uncertainties* / eds. Mansour M., Balemi S., Truöl W. Monte Verita : Birkhauser, 1992. 318 p.
106. Срагович В. Г. *Адаптивное управление* : монография. М. : Наука, 1981. 384 с.
107. Goodwin G. C., Sin K. S. *Adaptive filtering, prediction and control*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1984. 540 p.
108. Фрадков А. Л. *Адаптивное управление в сложных системах : беспойсковые методы* : монография. М. : Наука, 1990. 296 с.
109. Landau I. D., Lozano R., M'Saad M. *Adaptive control*. London : Springer, 1997. 562 p.
110. Кунцевич В. М., Лычак М. М. *Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход* : монография. Киев : Наук. Думка, 1985. 248 с.
111. Tao G. *Adaptive control design and analysis*. NY : John Wiley and Sons, 2003. 618 p.

112. Narendra K. S., Annaswamy A. M. *Stable adaptive systems*. NY : Dover Publication, 2012. 895 p.
113. Åström K. J., Wittenmark B. *Adaptive control* : 2nd ed. NY : Dover Publication, 2013. 600 p.
114. Никифоров В. О. *Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений* : монография. СПб. : Наука, 2003. 282 с.
115. Ioannou P. A., Sun J. *Robust adaptive control*. Upper Saddle River : Prentice-Hall, 1996 (reprint in 2003). 821 p.
116. Житецкий Л. С., Скурихин В. И. *Адаптивные системы управления с параметрическими и непараметрическими неопределенностями* : монография. Киев : Наук. думка, 2010. 301 с.
117. Борзенко И. М. *Адаптация, прогнозирование и выбор решений в алгоритмах управления технологическими процессами* : монография. М. : Энергоатомиздат, 1984. 144 с.
118. Александровский Н. М., Егоров С. В., Кузин Р. Е. *Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами* : монография. М. : Энергия, 1973. 272 с.
119. Бодянский Е.В., Руденко О.Г. *Адаптивные модели в системах управления техническими объектами* : монография. К. : УМК ВО, 1988. 212 с.
120. Романенко В. Д., Игнатенко Б. В. *Адаптивное управление технологическими процессами на базе микро-ЭВМ* : монография. К. : Вища шк., 1990. 334 с.
121. Мееров М. В., Литвак Б. Л. К вопросу оптимизации нелинейных многосвязных объектов без памяти. *Теория и методы построения систем многосвязного регулирования* / под ред. Б. Н. Петрова, М. В. Меерова. М. : Наука, 1973. С. 111 – 118.
122. Зак Ю. А. Применение методов стохастического программирования для решения некоторых задач оптимизации многосвязных объектов без памяти. *Теория и методы построения систем многосвязного регулирования* / под ред. Б. Н. Петрова, М. В. Меерова. М. : Наука, 1973. С. 170 – 183.
123. Lee T., Adams G., Gaines W. *Computer process control: modeling and optimization*. NY : Wiley, 1968. (Рос. переклад: Ли Т. Г., Адамс Г. Э., Гейнз У. М. *Управление процессами с помощью вычислительных машин. Моделирование и оптимизация* : монография. М. : Сов. радио, 1972. 312 с.)
124. Пухов Г. Е., Хатиашвили Ц. С. *Модели технологических процессов* : монография. Киев : Техника, 1974. 223 с.
125. Жук К. Д., Пятенко Т. Г., Скурихин В. И. Вопросы синтеза управляющих моделей в многосвязных автоматических системах. *Методы мат. моделирования и теория электр. цепей* : тр. сем. Киев : Изд-во АН УССР, 1964. С. 3–17.

126. Скурихин В. И., Житецкий Л. С., Проценко Н. М. *Итеративно-табличные автоматы* : монография. Киев : Наук. думка, 1977. 165 с.
127. Скурихин В. И., Проценко Н. М., Житецкий Л. С., Потапова Т. П. Об оценке допустимой неадекватности модели объекта при построении системы управления технологическим процессом по методу обратного оператора. *Электронное моделирование*, 1982. № 6. С. 11 – 16.
128. Катковник В. А., Первозванский А. А. Методы поиска экстремума и задачи синтеза многомерных систем управления. *Адаптивные автоматические системы* / под ред. Г. А. Медведева. М. : Сов. радио, 1972. С. 17 – 42.
129. Катковник В. Я. Градиентные законы управления в задачах стабилизации многомерных систем управления. *Теория и методы построения систем многосвязного регулирования* / под ред. Б. Н. Петрова, М. В. Меерова. М. : Наука, 1973. С. 84 – 93.
130. Бунич А. Л. О некоторых нестандартных задачах синтеза дискретных систем. *Автоматика и телемеханика*, 2000. № 6. С. 114 – 123.
131. Соболев О. С. Многоканальное регулирование взаимосвязанных безынерционных каналов. *Теория и методы построения систем многосвязного регулирования* / под ред. Б. Н. Петрова, М. В. Меерова. М. : Наука, 1973. С. 293 – 301.
132. Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П. Псевдообращение в задачах управления и наблюдения. *Автоматика*, 1993. №5. С.69 – 81.
133. Бакан Г. М., Волосов В. В., Сальников Н. Н. Адаптивное управление линейным статическим объектом по модели с неизвестными параметрами. *Кибернетика*, 1984. № 2. С. 63 – 68.
134. Бакан Г. М. Адаптивное управление многомерным статическим объектом в условиях неопределенности. *Автоматика и телемеханика*, 1987. № 1. С. 76 – 88.
135. Люблинский Б. С., Фрадков А. Л. Адаптивное управление нелинейными статическими объектами с неявно заданной характеристикой. *Автоматика и телемеханика*, 1983. №4. С. 126 – 136.
136. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. М. : Наука, 1987. 711 с.
137. Цыпкин Я. З. *Адаптация и обучение в автоматических системах* : монография. М.: Наука, 1968. 400 с.
138. Острём К., Витенмарк Б., *Системы управления с ЭВМ* : монография. М. : Мир, 1987. 480 с.
139. Липатов Л. Н. *Типовые процессы химической технологии как объекты управления* : монография. М. : Химия, 1973. 320 с.

140. Алиев Р. А. *Промышленные инвариантные системы автоматического управления* : монография. М. : Энергия, 1971. 112 с.
141. Yuz J. I., Goodwin G. C. *Sampled-data models for linear and nonlinear system*. London : Springer-Verlag, 2014. 289 с.
142. Директор С., Рорер Р. *Введение в теорию систем* : монография. М. : Мир, 1974. 464 с.
143. Marcus M., Mink H. *A survey of matrix theory and matrix inequalities*. Boston : Allyn and Bacon, Inc., 1964. (Рос. перевод: Маркус М., Минк Х. *Обзор по теории матриц и матричных неравенств* : пер. с англ. под ред. В.Б. Лидского. М. : Наука, 1972. 232 с.)
144. Алберт А. *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание* : монография. М. : Наука, 1977. 224 с.
145. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления* : монография. М. : Наука, 1984. 320 с.
146. Белоусов Е. Г. *Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование* : монография. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. 196 с.
147. Поляк Б. Т. *Введение в оптимизацию* : монография. М. : Наука, 1983. 384 с.
148. Skogestad S., Morari M., Doyle J. Robust control of ill-conditioned plants: High purity distillation. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 1988. N. 12. P. 1092 – 1105.
149. Полинов А. А., Павлов А. В., Онорин О. П., Спирин Н. А., Гурин И. А. Распределение дутья по воздушным фурмам доменной печи. *Металлург*, 2018. № 5. С. 23–27.
150. Варламов Г. К., Крышино Г. Р., Лавипчук Н. С., Соболев О. С., Циммерман А. Ф., Хвилевичкий Л. О. Пневматический многоканальный регулятор для системы автоматического распределения дутья по фурмам доменной печи. *Пневно- и гидроавтоматика* / под ред. М. А. Айзермана. М. : Наука, 1964. 263 с.
151. Кондратенко М. М. *Автоматизація металургійних машин і агрегатів* : конспект лекцій. Кривий Ріг: Вид-во КТУ, 2005. 64 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Матриця коефіцієнтів підсилення B_0 технологічного процесу розподілу дуття за
 фурмами доменної печі як об'єкта автоматичного керування
 та відповідна їй псевдообернена матриця B_0^+

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 1,2 & -1,1 & 0,5 & 0,9 & -0,7 & 1,3 & 0,87 \\ -0,68 & 0,5 & -1,32 & 0,57 & 1,36 & 0,82 & 0,29 & 0,14 \\ 1,38 & 0,29 & 0,75 & 1,39 & 0,28 & 0,56 & -1,14 & 0,63 \\ 0,02 & 1,42 & 0,68 & 1,3 & -1,49 & 1,96 & 0,38 & 1,36 \\ 0,83 & 0,91 & 1,67 & 0,24 & 1,05 & -0,94 & 1,32 & 0,17 \\ 1,03 & 1,24 & 1,05 & 0,13 & 1,74 & 0,1 & -0,79 & 0,34 \\ 0,34 & -1,06 & 0,59 & -1,42 & 0,93 & 1,37 & 1,9 & 1,39 \\ 1,71 & 1,82 & 0,77 & -0,55 & 0,97 & 1,83 & 1,61 & 1,35 \\ -1,38 & 1,03 & 0,51 & 0,33 & -1,14 & 1,12 & -0,35 & 0,81 \\ -0,12 & 0,32 & 0,63 & 0,37 & 1,14 & 0,39 & -0,65 & 0,04 \\ 0,22 & 1,92 & 1,35 & 1,25 & -0,26 & 0,41 & 0,32 & 1,16 \\ 0,62 & 1,67 & 0,38 & 1,28 & 1,24 & 1,28 & -1,43 & 1,67 \\ 1,4 & 0,39 & 0,17 & 0,97 & -0,35 & 0,84 & 0,73 & 0,55 \\ -1,34 & 1,97 & 1,26 & 1,45 & 0,72 & -0,19 & 1,64 & 0,68 \\ 0,94 & 0,56 & -0,73 & 0,53 & 0,91 & -1,32 & 0,28 & -1,32 \\ 1,33 & 0,49 & 1,63 & -1,06 & -1,34 & 0,63 & 0,72 & 0,61 \end{pmatrix}$$

-0,65	1,8	0,62	-1,03	1,27	1,3	1,52	-0,38
0,37	1,16	1,31	1,37	0,35	1,36	1,09	0,3
-1,35	-0,68	0,09	0,71	0,61	-0,97	1,45	0,13
1,48	-0,39	-1,03	0,38	1,26	-0,14	0,25	1,65
0,37	0,18	-1,17	0,83	1,34	1,11	-1,64	-0,32
1,26	1,97	0,65	1,09	-0,39	1,49	0,34	0,8
1,15	1,86	-0,38	-0,37	0,94	0,24	0,27	0,7
0,72	-0,64	-0,19	1,45	1,63	0,92	-1,06	0,85
0,3	1,01	0,33	0,77	-0,16	-1,39	-0,5	0,96
0,95	0,13	1,26	-0,23	0,31	-1,45	1,38	1,41
0,32	-1,13	1,71	1,02	-0,75	0,69	-1,39	-0,13
1,01	-0,73	1,39	0,18	-1,09	1,1	0,94	0,34
1,18	-1,4	-1,36	-0,39	1,42	1,25	0,75	0,69
1,38	0,32	0,91	-0,08	1,03	0,01	-0,07	1,28
1,31	0,95	1,34	-1,42	0,91	0,23	1,73	-0,37
1,34	0,29	1,83	-0,65	-0,92	-0,64	1,31	0,52

$$B_0^+ = \begin{pmatrix} 0,0241 & -0,2556 & 0,1267 & 0,0033 & -0,3431 & 0,2903 & 0,1198 & 0,1272 \\ -0,1298 & -0,1934 & 0,1702 & -0,11 & -0,2117 & 0,0661 & -0,2533 & 0,4183 \\ -0,2994 & -0,1256 & 0,366 & -0,1382 & -0,0999 & 0,1496 & 0,1061 & 0,0231 \\ -0,3109 & -0,2891 & 0,5017 & -0,0394 & -0,7223 & 0,3777 & 0,3552 & 0,0005 \\ -0,2642 & -0,197 & 0,269 & -0,2428 & -0,3283 & 0,1287 & 0,1654 & 0,2671 \\ -0,8036 & -0,4849 & 0,8575 & -0,2806 & -1,3329 & 0,481 & 0,4714 & 0,6345 \\ -0,3214 & -0,1598 & 0,4163 & -0,2291 & -0,6458 & 0,1953 & 0,1976 & 0,2965 \\ 0,8232 & 0,4675 & -0,7888 & 0,3443 & 1,3394 & -0,6923 & -0,1666 & -0,6199 \\ 0,0532 & 0,3237 & -0,4439 & 0,2372 & 0,7742 & -0,387 & -0,0432 & -0,2867 \\ -0,0833 & -0,1905 & 0,2292 & -0,0033 & -0,361 & 0,34 & 0,2339 & 0,0328 \\ 0,2497 & 0,1803 & -0,2512 & 0,0581 & 0,1382 & -0,1094 & 0,0206 & -0,173 \\ 0,169 & 0,6331 & -0,2612 & 0,1631 & 0,8623 & -0,3362 & -0,275 & -0,2526 \\ 0,4316 & 0,3878 & -0,4417 & 0,282 & 0,9133 & -0,4875 & -0,1407 & -0,2938 \\ 0,1098 & 0,0966 & -0,1348 & 0,0079 & -0,0583 & 0,1794 & -0,0632 & -0,1084 \\ -0,0179 & 0,3315 & 0,1075 & -0,0278 & 0,3454 & -0,2353 & -0,2144 & -0,0774 \\ 0,3232 & -0,2082 & -0,2503 & 0,0444 & -0,5186 & 0,5107 & -0,1211 & 0,0007 \end{pmatrix}$$

-0,0893	-0,0245	0,3272	-0,2689	0,0925	-0,1218	0,1725	-0,1449
0,1304	-0,6648	-0,5699	0,303	-0,2404	0,5312	0,1805	0,1079
-0,0628	-0,5158	-0,2231	0,0764	-0,0754	0,4848	0,0628	0,1292
-0,0985	-0,6662	0,3315	-0,2201	0,0591	0,4968	0,4014	-0,3907
-0,1006	-0,413	-0,2476	0,1911	-0,1422	0,4794	0,1866	-0,1888
-0,0491	-1,6971	-0,3333	0,0874	-0,2315	1,1465	0,6956	-0,3028
-0,1722	-0,8685	-0,1548	-0,1258	-0,0569	0,7871	0,2087	-0,006
0,1918	1,6007	0,3811	0,2218	0,1525	-1,2657	-0,6827	0,2269
0,1811	0,6004	0,0606	0,2391	0,0561	-0,612	0,0528	0,1509
0,1055	-0,446	0,0464	-0,1412	-0,1088	0,1971	0,2502	-0,1569
-0,0264	0,6798	0,5818	-0,2482	0,0845	-0,4701	-0,0819	-0,005
0,1213	0,6805	0,0274	-0,0127	0,0418	-0,6236	-0,3318	0,2958
0,1702	1,0858	0,2631	-0,053	0,1118	-0,8756	-0,1875	0,0604
-0,181	0,013	0,1048	-0,0968	0,1888	-0,0051	-0,2128	0,0261
-0,0015	-0,1131	-0,5598	0,2914	-0,0263	0,1402	-0,1499	0,4048
-0,2836	0,6463	0,4174	-0,6124	0,328	-0,0212	-0,4579	-0,182

ДОДАТОК Б

АКТ № __

про впровадження результатів дисертаційної роботи

складено «23» жовтня 2018 р.

Ми, що нижче підписалися, представники Виконавця, асистент кафедри Комп'ютерних інформаційних технологій і систем Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, аспірантка Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН України та МОН України Соловчук Клавдія Юріївна з однієї сторони; і представник Замовника,

АТ Полтавський турбомеханічний завод

з іншої сторони, цим актом підтверджуємо факт впровадження в практичну діяльність розробок алгоритмів і висновків, дисертаційної роботи на тему:

«Методи та алгоритми керування багатозв'язними об'єктами без пам'яті в умовах невизначеності»,

що подається аспіранткою Соловчук К.Ю. на здобуття вченого ступеня кандидата технічних наук.

Впроваджений результат	Ефект
Математичні моделі та алгоритми керування технологічними процесами виробництва з багатозв'язними об'єктами без пам'яті в умовах параметричної невизначеності	Результати роботи були використані для аналізу ефективності та оптимізації технологічних процесів розподілу дуття по фурмам доменної печі, матриця коефіцієнтів підсилення якої є виродженою

Акт виданий без фінансових зобов'язань підприємства перед автором.

Роботу здав:

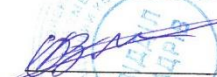
Від виконавця

 (Соловчук К.Ю.)



Роботу прийняв:

Від замовника Начальник ПЕБ ЕЗУ

 (Обіход В.В.)



ДОДАТОК В

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з науково-педагогічної
та навчальної роботи

Національного університету

«Полтавська політехніка
імені Юрія Кондратюка»

Б.О. КОРОБКО



лютого 2020 року

АКТ

реалізації в освітньому процесі Національного університету
«Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»
результатів досліджень отриманих у дисертаційній роботі за
спеціальністю 05.13.03 — «Системи та процеси керування»
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук
Соловчук Клавдії Юріївни на тему «Методи та алгоритми керування
багатозв'язними об'єктами без пам'яті в умовах невизначеності»

Комісія в складі: голови комісії – завідувача кафедри автоматики, електроніки та телекомунікацій, доктора технічних наук, доцента Шефера О.В., та членів комісії – директора Науково-навчального інституту інформаційних технологій та механотроніки, кандидата технічних наук, доцента Хоменко І.В. та завідувача кафедри вищої та прикладної математики, кандидата фізико-математичних наук, доцента Ічанської Н.В., у період із 10 лютого 2020 року по 14 лютого 2020 року провела роботу по встановленню фактичного використання в навчальному процесі Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» результатів дисертаційної роботи Соловчук Клавдії Юріївни.

На основі наданої дисертаційної роботи та наукових статей комісія встановила, що в навчальному процесі використовуються наступні результати:

- синтез оптимального регулятора для керування виродженими квадратними об'єктами;
- метод оптимального керування прямокутними об'єктами при повній інформації про параметри цих об'єктів;
- методи і алгоритми робастного керування об'єктами з довільними матрицями коефіцієнтів підсилення в умовах параметричної невизначеності;
- синтез адаптивного регулятора для керування виродженими багатовимірними об'єктами за наявності параметричної невизначеності.

На основі аналізу наданих матеріалів комісія встановила, що отримані наукові результати дисертаційної роботи та опубліковані в фахових статтях наукові результати Соловчук К.Ю. використовуються в навчальному процесі Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» при дипломному та курсовому проектуванні, а також при викладанні навчальної дисципліни «Теорія автоматичного керування».

Голова комісії

Зав. кафедри автоматики, електроніки та телекомунікацій, д. т. н., доцент

О.В. Шефер

Члени комісії:

Директор Науково-навчального інституту інформаційних технологій та механотроніки,
к. т. н., доцент

І.В. Хоменко

Зав. кафедри вищої та прикладної математики, к. ф-м. н., доцент

Н.В. Ічанська