УДК 658.562.012

ОЦЕНИВАНИЕ КАЧЕСТВА МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ КОРРЕЛЯЦИИ ЕГО ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Е. Володарский, доктор технических наук, профессор Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» (НТУУ КПИ),
Л. Кошевая, доктор технических наук, профессор Национального авиационного университета, г. Киев,
М. Добролюбова, кандидат технических наук, доцент НТУУ КПИ.

Рассмотрена возможность контроля стабильности многопараметрического технологического процесса при корреляции его показателей с использованием многопараметрического критерия Хоттелинга. На числовых примерах показано преимущество критерия Хоттелинга перед критерием Шухарта, который не может выявить разлаженности процесса в случае корреляции его показателей, что приводит к ошибочным решениям. Показаны возможности критерия Хоттелинга оценивать стабильность технологического процесса как поэтапно, так и в целом, выявить показатели или их сочетание, которые существенно влияют на статистическую управляемость технологического процесса.

Considered the possibility of controlling the stability of a multiparameter process with the correlation of its parameters using the Hotteling criterion. Numerical examples show the advantage of the Hotteling criterion over the Shewhart criterion, which can not reveal the process variability in the case of correlating its indices, which leads to erroneous solutions. Shown the possibilities of the Hotteling criterion to evaluate the stability of the technological process both in stages and in general, to reveal indicators or their combination, which significantly affect the statistical controllability of the technological process.

Е. Володарский

Ключевые слова: *технологический процесс, стабильность характеристик, многопараметрический контроль, корреляция, контрольные карты.*
Keywords: *technological process, stability of characteristics, multiparameter control, correlation, control charts.*

Л. Кошевая

М. Добролюбова

Статистические методы анализа точности и стабильности характеристик, которые используются для управления технологическими процессами и регламентированы нормативными документами, предусматривают, как правило, контроль процесса по одному показателю качества выпускаемой продукции. Это легко объяснить, по нашему мнению, простотой применяемых методов и их реализацией. Наиболее широкое применение нашли карты Шухарта [*ISO*].

Во многих случаях качество продукции характеризуется несколькими показателями, которые могут быть коррелированы. При этом независимый контроль по отдельным показателям может привести к ошибочным решениям о разлаженности (или наоборот) технологического процесса. Возможен как пропуск фактической разлаженности процесса, так и необоснованная остановка технологического процесса при выходе его контролируемых характеристик за контрольные пределы.

В связи с изложенным выше представляет интерес исследование возможностей многопараметрических критериев при оценке стабильности многопараметрического технологического процесса. В первую очередь представляет интерес критерий Хоттелинга, который ранее не использовался для этой цели вследствие сложности и громоздкости вычислений при определении его значений.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В случае контроля технологического процесса по нескольким параметрам карты Шухарта можно успешно использовать при уверенности, что эти параметры некоррелированы. При этом для совокупности контрольных карт Шухарта среднего значения ($\bar{x}$-карт) уровень значимости α_i при расчете для каждого показателя определяется, исходя из общего уровня значимости α_0 для характеристического результирующего вектора $\mathrm{\bar{X}}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_p\right)$ [1]. Если нет информации о значимости каждой из составляющих вектора $\mathrm{\bar{X}}$, то все α_i равны и определяются как $\alpha = \alpha_0/n$. При этом верхние и нижние контрольные границы для i-го параметра технологического процесса определяются из соотношений:

- для верхней границы:

$$UCL_i = \mu_{0i} + z_{(1-\alpha/2)}\sigma_i;$$

- для нижней границы:

$$LCL_i = \mu_{0i} - z_{(1-\alpha/2)}\sigma_i,$$

где μ_{0i} и σ_i — среднее значение и СКО, определенные по результатам предварительных исследований или указанные в нормативных документах.

В таком случае области рассеяния допустимых значений результирующего вектора $\bar{X}$ будет соответствовать гиперпараллелепипед со сторонами, соответствующими $(UCL_i - LCL_i)$.

Для проверки гипотезы H_0: $\mu = \mu_0$ в одномерном случае по выборке объемом n при известной дисперсии генеральной совокупности, — используется статистика

$$z = \left(\bar{x} - \mu_0\right)\Big/\left(\sigma/\sqrt{n}\right). \quad (1)$$

При рассмотрении многомерной случайной величины, если возвести левую и правую части выражения (1) во вторую степень, получим выражение:

$$z^2 = n\left(\bar{x} - \mu_0\right)^2 (\sigma)^{-1}, \quad (2)$$

которое в матричной форме можно представить как

$$T_H^2 = n\left(\mathrm{\bar{X}} - \boldsymbol{\mu_0}\right)^T \boldsymbol{\Sigma^{-1}}\left(\mathrm{\bar{X}} - \boldsymbol{\mu_0}\right). \quad (3)$$

Полученное выражение является обобщенной характеристикой Хотеллинга (T^2 — статистика Хотеллинга), которая применяется при оценивании качества многопараметрического технологического процесса при наличии корреляции его показателей [2].

Многомерной случайной величине соответствует ковариационная матрица

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \ldots & \rho_{1p}\sigma_1\sigma_p \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \ldots & \rho_{2p}\sigma_2\sigma_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_{p1}\sigma_p\sigma_1 & \rho_{p2}\sigma_p\sigma_2 & \ldots & \sigma_p^2 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где ρ_{ij} — коэффициенты корреляции между величинами $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_j$ ($i, j = 1, \ldots, p$ — число случайных величин — контролируемых параметров).

При известной ковариационной матрице Σ статистика Хотеллинга имеет хи-квадрат распределение. В этом случае при статистическом контроле многопараметрического объекта положение контролируемой границы на заданном уровне значимости α определяется непосредственно по таблице квантилей распределения хи-квадрат, т.е.

$$T_{kp}^2 = \chi^2_{(1-\alpha),p}.$$

Следует также отметить особенность применения критерия T^2 Хотеллинга — на основании известной ковариационной матрицы Σ можно рассчитывать «точечные» значения T_H^2.

Отличие результатов, полученных с использованием карт Шухарта и Хоттелинга при контроле многопараметрического процесса, рассмотрим на примере 1.

Пример 1. Качество технологического процесса определяется двумя ($p = 2$) параметрами x_1 и x_2. Во время предварительных исследований установлены показатели процесса, которые принимаются за нормированные (опорные) значения [кляч]:

- средние значения показателей $\mu_1 = 2$ и $\mu_2 = 12$;
- стандартные отклонения $\sigma_1 = 0,35$ и $\sigma_2 = 1$;
- коэффициент корреляции между показателями $\rho = 0,5$.

Для оценивания стабильности технологического процесса проведено $n = 10$ контрольных исследований через равные промежутки времени. Каждая из контрольных подгрупп содержит по $n = 5$ единичных результатов. В таблице 1 приведены средние значения показателей (оценок) $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ для всех 10 подгрупп.

Вначале рассмотрим стабильность технологического процесса, используя $\bar{x}$-карты Шухарта, приняв общий уровень статистической значимости $\alpha_0 = 0,005$. При этом уровень значимости для расчета каждого показателя, в предположении их независимости, составит $\alpha_0/2 = 0,0025$. Исходим из выражений для верхней UCL и нижней LCL контрольных границ:

$$UCL = \mu + \sigma/\sqrt{n} \text{ и } LCL = \mu - \sigma/\sqrt{n},$$

определим соответственно

$$UCL_1 = 2,47 \text{ и } LCL_1 = 1,53;$$

$$UCL_2 = 13,35 \text{ и } LCL_2 = 10,65.$$

Построим $\bar{x}$-карты для показателей $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ (рис. 1).

Как следует из приведенных на рис. 1 изменений показателей, контролируемый процесс является управляемым.

Оценим стабильность этого же технологического процесса, используя карты Хотеллинга. Как уже отмечалось, в качестве контрольной линии выбирается квантиль хи-квадрат распределения для уровня статистической значимости $\alpha = 0,005$ и число степеней свободы $p = 2$ [3], т. е.

$$UCL = T_{kp}^2 = \chi^2_{(1-\alpha),p} = \chi^2_{(0,995),2} = 10,6.$$

Таблица 1. Средние значения показателей $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$

Table 1. Average values of indicators $\overline{x}_1$ and $\overline{x}_2$

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{x}_1$	2,05	1,87	2,36	1,99	2,11	2,35	2,16	1,75	2,36	2,32
$\overline{x}_2$	12,28	11,37	10,82	11,13	12,23	13,29	12,06	12,75	13,25	13,11
T_H^2	0,39	2,01	24,43	4,89	0,53	9,16	1,23	10,72	8,9	7,02

Затем, в соответствии с выражением (3), необходимо для каждой подгруппы наблюдений рассчитать T_H^2. При двухпараметрическом контроле ковариационная матрица запишется как

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\left(1-\rho^2\right),$$

а дискриминант $\det\Sigma = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)$, тогда обратная матрица примет вид:

$$\sum\nolimits^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)} & -\dfrac{\rho}{\sigma_1\sigma_2\left(1-\rho^2\right)} \\ -\dfrac{\rho}{\sigma_2\sigma_1\left(1-\rho^2\right)} & \dfrac{1}{\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)} \end{vmatrix}.$$

Подставив численные значения в выражение (3), получим для первой подгруппы

$$T_{H1}^2 = 5\times\begin{vmatrix} 2,05-2 & 12,28-12 \end{vmatrix}\times$$
$$\times\begin{vmatrix} 3,81 & -1,90 \\ -1,90 & 1,33 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 2,05 & 2 \\ 12,28 & 12 \end{vmatrix} = 0,39.$$

Аналогично вычислим T_{Hi}^2, $i=\overline{2,10}$. Полученные результаты представлены в нижней строке таблицы 1. Контрольная карта Хотеллинга, отображающая результаты вычислений, представлена на рис. 2.

Как следует из рис. 2, процесс является статистически неуправляемым: нарушение имеет место в подгруппах 3 и 8.

Теперь рассмотрим результаты контроля в плоскости показателей $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$. Исходя из плотности совместного нормального распределения

$$f(x) = (2\pi)^{-1}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\left(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu\right)^T\Sigma^{-1}\left(\overline{\boldsymbol{X}}-\mu\right)/2\right],$$

уравнение эллипса рассеяния, являющегося фактически границами карты Хотеллинга, примет вид:

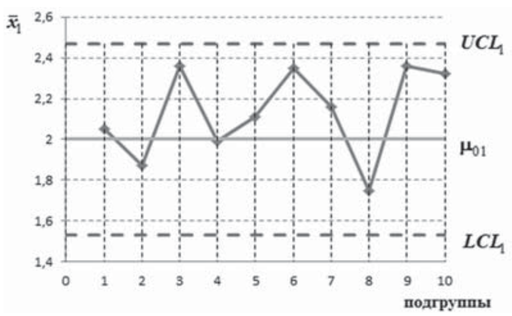
$$\frac{1}{(1-\rho)^2}\times$$
$$\times\left(\frac{\left(\overline{x}_1-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{\left(\overline{x}_1-\mu_1\right)\left(\overline{x}_2-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\left(\overline{x}_2-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\chi^2_{(1-\alpha),2}.$$

Нахождение точек, соответствующих значениям средних в подгруппах, в границах этого эллипса, свидетельствует о статистическом управлении технологическим процессом, т.е. рассеяние значений обусловлено влиянием случайных величин. Точки, соответствующие подгруппам 3 и 8 (выборкам из $n=5$ наблюдений), находятся вне эллипса (рис. 3), что свидетельствует о разлаженности технологического процесса. Штриховой линией показан прямоугольник, соответствующий границам карт Шухарта. Оба выборочных средних оказываются внутри контрольных границ карт Шухарта.

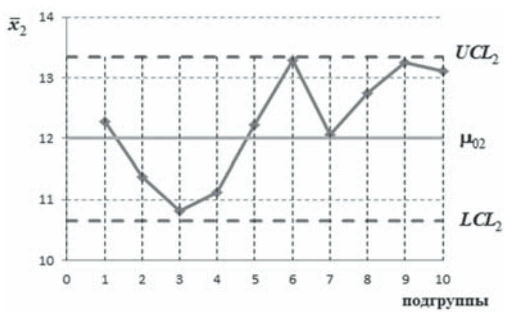
Как следует из приведенного примера, карты Шухарта не «улавливают» ни одного из нарушений процесса, отображенных картой Хоттелинга.

В случае, когда ковариационная матрица неизвестна, T^2-распределение используется аналогично t-распределению Стьюдента, но только для многомерного случая.

Во многих практических задачах дисперсии и ковариации, как правило, неизвестны и должны быть оценены по выборке. В многомерном случае вычисляется несмещенная оценка $\boldsymbol{S}$ матрицы Σ. В этом случае статистика T_H^2-Хотеллинга задается



а)



b)

Рис. 1. Контрольные $\overline{x}$-карты Шухарта, а) для показателя $\overline{x}_1$; b) для показателя $\overline{x}_2$

Fig. 1. Control $\overline{x}$-cards-Shuhart a) for index $\overline{x}_1$; b) for index $\overline{x}_2$

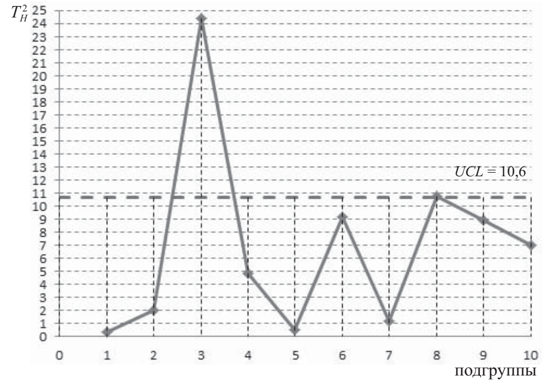


Рис. 2. Контрольные карта Хотеллинга для двухпараметрического технологического процесса

Fig. 2. Hotelling control charts for a two-parameter process

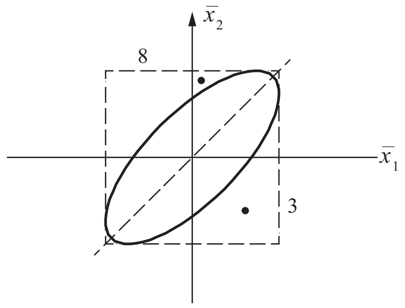


Рис. 3. Рассеяние выборочных средних $\bar{x}_i$ $(i = \overline{2,10})$ подгрупп

Fig. 3. Scattering of sample means $\bar{x}_i$ $(i = \overline{2,10})$ of subgroups

формулой:

$$T_H^2 = n\left(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0\right)^T \boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0\right). \qquad (5)$$

Если гипотеза $H_0: \mu = \mu_0$ верна, — то величина

$$F = \left((n-p)/p(n-1)\right)\cdot T_H^2. \qquad (6)$$

имеет нецентральное F-распределение с p и $(n-1)$ степенями свободы.

Полученное на основании выражения (5) значение T_H^2 сопоставляется с критическим значением для заданного уровня статистической значимости α и числами степеней свободы $\nu_1 = p$ и $\nu_2 = n - p$ $(n-1 \geq p)$. Критическое значение статистики Хотеллинга определяется как

$$T^2_{\alpha,p,(n-p)} = \left(\left(p(n-1)\right)/(n-p)\right)F_{\alpha,p,(n-p)}. \qquad (7)$$

В этом случае несмещенная оценка ковариационной матрицы определяется на основании выражения:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{n-1}\begin{vmatrix} x_{11}-\mu_{01} & x_{21}-\mu_{02} & \dots & x_{p1}-\mu_{0p} \\ x_{12}-\mu_{01} & x_{22}-\mu_{02} & \dots & x_{p2}-\mu_{0p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}-\mu_{01} & x_{2n}-\mu_{02} & \dots & x_{pn}-\mu_{0p} \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} x_{11}-\mu_{01} & x_{12}-\mu_{01} & \dots & x_{1n}-\mu_{01} \\ x_{21}-\mu_{02} & x_{22}-\mu_{02} & \dots & x_{2n}-\mu_{01} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1}-\mu_{0p} & x_{p2}-\mu_{0p} & \dots & x_{pn}-\mu_{0p} \end{vmatrix},$$

где n — число точек в выборе/подгруппе.

Расчетное значение статистики Хотеллинга, определенное на основании выражения (5), сравнивается с критическим значением $T^2_{\alpha,p,(n-p)}$. Если T_H^2 больше критического значения, то гипотеза не принимается.

Рассмотрим особенности применения карт Хотеллинга с неизвестным СКО на примере 2.

Пример 2. С целью контроля технологического процесса взято n единичных выборочных значений через равные интервалы времени. Данные приведены в таблице 2.

Нормой для первого показателя является $\mu_{01} = 20$, а для второго — $\mu_{20} = 1$.

На основании имеющихся данных получают оценку ковариационной матрицы:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{10-1}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 14-15,3 & 12-15,3 & 16-15,3 & \dots & 19-15,3 & 9-15,3 \\ 19-16,9 & 15-16,9 & 17-16,9 & \dots & 18-16,9 & 20-16,9 \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 14-15,3 & 19-16,9 \\ 12-15,3 & 15-16,9 \\ 16-15,3 & 17-16,9 \\ \dots & \dots \\ 19-15,3 & 18-16,9 \\ 9-15,3 & 20-16,9 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 134,1 & -87,7 \\ -87,7 & 148,9 \end{vmatrix} = 150,98.$$

Расчетное значение статистики Хотеллинга, определенное на основании выражения (5), сравнивается с критическим значением $T^2_{\alpha,p,(n-p)}$. Если T_H^2 больше критического значения, то гипотеза о стабильности технологического процесса не принимается.

Таким образом, при известных (заданных) среднеквадратических отклонениях показателей качества технологического процесса можно, вычисляя статистику Хотеллинга T_{Hi}, выявлять разлаженность процесса в реальном масштабе времени. При неизвестных СКО оценивается статистическая управляемость процессом за определенный период.

Следует отметить, что сам по себе критерий Хотеллинга позволяет оценить состояние процесса в целом, не выделяя причину его разлаженности. Карта Хотеллинга не показывает, с каким непосредственно показателем (или совместным влиянием показателей) связано нарушение процесса.

Для проверки гипотезы о том, что причиной разлаженности процесса является j-й показатель, используется частный критерий Хотеллинга [2].

Проверяется гипотеза $T^2_{Hj} > T^2_{kp}$, где

$$T^2_{Hj} = n\left[\mathrm{C}_j^T\left(\bar{\mathrm{X}}_j - \boldsymbol{\mu}_{0j}\right)^2\right]\Big/\left[\mathrm{C}_j^T\mathrm{S}\mathrm{C}_j\right], \qquad (8)$$

где C_j — специальный вектор, нивелирующий значения всех признаков, кроме j-го, и является

Таблица 2. Исходные данные для примера 2
Table 2. Initial data for example 2

№ точки (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Среднее значение $\overline{x}_i$
x_{1t}	14	12	16	14	15	18	22	20	19	9	15,3
x_{2t}	19	15	19	17	24	12	10	15	18	20	16,9

вектором-столбцом, содержащем нули во всех строках, кроме j-ой, где стоит единица.

Возвратимся к рассмотрению примера 2. На основании исходных данных, приведенных в табл. 2, рассчитаем T^2-критерий Хотеллинга

$$T_H^2 = 10\times\begin{vmatrix}15,3-20 & 16,9-12\end{vmatrix}\times$$
$$\times\begin{vmatrix}0,0987 & -0,0645\\ -0,0645 & 0,1093\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}15,3-20\\ 16,9-12\end{vmatrix} = 28,1.$$

Критические значения T^2-критерия для $\alpha = 0,05$ и чисел степеней свободы $p = 2$, $(n-p) = 8$ определим на основании выражения (7)

$$T_{kp}^2 = \left(2(10-1)/(10-2)\right)\cdot 4,459 = 10,03.$$

Таким образом, $T_H^2 = 28,1 > T_{kp}^2 = 10,03$, значит, технологический процесс является статистически неуправляемым.

Для выявления причин неуправляемости рассмотрим частный критерий Хотеллинга, полагая последовательно $j=1$ и $j=2$ (выявление признака, который привел к неуправляемости процесса).

Для $x_1\,\boldsymbol{C}_1^T = \begin{vmatrix}1 & 0\end{vmatrix}$ и после подстановки в (8) получим

$$T_{H1}^2 = \frac{10\times\begin{vmatrix}1 & 0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}-4,7\\ 4,9\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}1 & 0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}14,90 & -9,74\\ -9,74 & 16,50\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix}} = \frac{230,4}{14,9} = 15,48.$$

Аналогично вычислим частное значение коэффициента Хотеллинга для x_2:

$$T_{H2}^2 = \frac{10\times\begin{vmatrix}0 & 1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}-4,7\\ 4,9\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}0 & 1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}14,90 & -9,74\\ -9,74 & 16,50\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}} = \frac{240,1}{16,5} = 14,55.$$

Поскольку $T_{H1}^2 > T_{kp}^2$ и $T_{H2}^2 > T_{kp}^2$, то можно с вероятностью $P = (1-\alpha) = 0,95$ сделать вывод, что технологический процесс является неустойчивым, и на его стабильность влияют оба показателя (параметра).

В заключение следует отметить, что не всегда конкретный параметр является причиной разлаженности технологического процесса. Так, в рассмотренном примере 1 разлаженность процесса была в третьей и восьмой подгруппах (точки 3 и 8). Однако, расчет частных критериев Хотеллинга показал [3], что

* для выборки 3: $T_1^2 = 5,31$ и $T_2^2 = 6,96$;
* для выборки 8: $T_1^2 = 2,56$ и $T_2^2 = 2,81$.

Следовательно, ни первый, ни второй показатели не являются причиной нарушения технологического процесса. Причина — в совместном влиянии этих показателей.

ВЫВОДЫ

При контроле однопараметрических технологических процессов широко используются карты Шухарта. Однако, при контроле двух- и более параметрических процессов, из-за наличия корреляции между показателями качества, их применение в большинстве случаев дает ложный результат (как выявление, так и не выявление разлаженности процесса). Достоверный результат в таком случае дает применение многопараметрических критериев.

До последнего времени применение многопараметрических критериев было ограничено сложностью вычислений. Однако широкое распространение современных средств вычислительной техники сняло эти ограничения. Среди множества многопараметрических методов использование критерия Хотеллинга позволяет определить ход технологического процесса как поэтапно, так и в целом, выявить показатель или сочетание показателей, существенно влияющих на статистическую управляемость технологического процесса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. В.Н. Клячкин. Многомерный статистический контроль технологического процесса. — М.: Финансы и статистика (V.N. Klyachkin. Mnogomernyy statisticheskiy kontrol' tekhnologicheskogo protsessa. — M: Finansy i statistika), 2003. — 192 c/s.
2. Montgomery D. C. (2009) Introduction to Statistical Quality Control, 6th Ed. — John Wiley & Sons. — 734 P.
3. Смирнов Н.И., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятности и математической статистики для технических приложений. — М.: Наука (Smirnov N.I., Dunin-Barkovskiy I.V. Kurs teorii veroyatnostey matematicheskoy statistiki dlya tekhnicheskikh prilozheniy. — M.: Nauka), 1969. — 512 c/s.

Отримано / received: 13.08.2017.
Стаття рекомендована до публікації д.т.н., проф. Христо Родєвим (Болгарія).
Prof. Chzysto Rodiev, D. Sc. (Techn.), Bulgaria, recommended this article to be published.