УДК 625.717.2

И.Л. Машков

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОБОБЩЕННЫМ ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

В работе рассмотрен алгоритм построения определяющих состояний и формул приближенного интегрирования. Основные положення метода изложены для случая смешанной граничной осесимметричной задачи определения напряженно-деформированного состояния тел вращения сложной формы.

При формировании основных положений обобщенного проекционно-сеточного метода [3] применительно к случаю осесимметричной задачи определения напряженно-деформированного состояния тел вращения сложной формы принято, что в заданной области Ω выбрано общее число N узлов. Значения искомых функций перемещений u, w неизвестны соответственно в N_u и N_w узлах. Для каждого i-го узла выделяется подобласть Ω_i, которой принадлежит N_i из принятого набора N узлов, в том числе i-ый узел. Этот узел является основным и может находиться как внутри, так и на границе подобласти [2]. Подобласти могут пересекаться, т.е. узел, принадлежащий одной подобласти, одновременно может быть граничным или внутренним узлом другой подобласти. Общее число неизвестных $n = \sum_{i=1}^{N_u} N_i^{(u)} + \sum_{i=1}^{N_w} N_i^{(w)}$.Каждая из подобластей может быть отнесена к тому или иному типу в соответствии с ее формой, числом узлов, размерами.

Процесс реализации обобщенного проекционно-сеточного метода может быть разделен на следующие этапы:

– формирование граничной задачи, соотношений между компонентами напряженно-деформированного состояния, уравнений равновесия, граничных условий, анализ и математическое моделирование формы заданного тела вращения;

– составление сеточных операторов метода в зависимости от конфигурации и размеров подобласти, положения узла, играющего роль основного и граничных условий на той части границы всей области, которая совпадает с границей рассматриваемой подобласти;

– запись соответствующего оператора для очередного рассматриваемого узла с учетом принятой общей нумерации узлов; при этом формируется разрешающая система линейных алгебраических уравнений;

– решение разрешающей системы и вычисление узловых значений компонентов напряженно-деформированного состояния.

Для определения неизвестных значений функций необходимо составить и решить систему n линейных алгебраических уравнений. Каждое из таких уравнений соответствует определенному типу конечного элемента, который характеризуется в данном случае формой подобласти, системой узлов, положением основного узла, определяющим состоянием и строится в соответствии с разработанным алгоритмом метода [3]. Во многих случаях оказывается достаточным применение подобласти с девятью узлами в форме прямоугольника и девятиузловой подобласти с двумя криволинейными границами [3]. Такими подобластями представляется возможным аппроксимировать с заданной точностью практически любую область.

Из рассмотренных этапов реализации обобщенного проекционно-сеточного метода наиболее трудоемким является этап составления сеточных операторов. Метод представляет собой дискретную форму метода определяющих состояний [1], основанную на применении

финитных функций [4]. В качестве неизвестных разыскиваются значения искомых компонентов вектора смещения в выбранных узлах области *Ω*. В общем случае область имеет форму клина, который определяется углом *φ*. В случае осесимметричной задачи рассматривается область с углом $\varphi = 1$, так как все параметры задачи не зависят от угла *φ*.

Для i-го конечного элемента ($i=1,2,\dots, N$), занимающего область Ω_i с границей S_i можно записать интегральное соотношение теоремы о взаимности работ [5]

$$\int_{\Omega_i} (R^{/}u + Z^{/}w)d\Omega + \int_{S_i} (\overline{R^{/}}u + \overline{Z^{/}}w)dS = \int_{\Omega_i} (Ru^{/} + Zw^{/})d\Omega + \int_{S_i} (\overline{R}u^{/} + \overline{Z}w^{/})dS \quad (1)$$

где штрихом обозначены компоненты некоторого вспомогательного, без штрихов – искомого состояний.

Вычислив значения всех компонентов определяющего состояния в узлах области Ω_i интегральное соотношение (1) можно представить в виде:

$$A_u(u,w) = \sum_{j=1}^{N_i^{(u)}} (\alpha_{uj}u_j + \alpha_{wj}w_j) + \sum_{j=1}^{N_{is}^{(u)}} \beta_{Rj}\overline{R_j} = \sum_{j=1}^{N_i^{(u)}} d_j R_j u_{ij}^{/} \quad (2)$$

где:

$$\alpha_{uj} = d_j R_{ij}^{/} + g_j \overline{R_{ij}^{/}}; \quad \alpha_{wj} = d_j Z_{ij}^{/} + g_j \overline{Z_{ij}^{/}}; \; j = 1,2,\dots, N_{is}^{(u)};$$

$$\alpha_{uj} = d_j R_{ij}^{/}; \;\; \alpha_{wj} = d_j Z_{ij}^{/}; \; j = N_{is}^{(u)} + 1, N_{is}^{(u)} + 2, N_i^{(u)};$$

$$\beta_{Rj} = -g_j u_{ij}^{/}; \; j = 1,2,\dots, N_{is}^{(u)};$$

Выражение (2) является записью в общем виде дискретного оператора метода, соответствующего выбранному типу конечного элемента и применяемым формулам приближенного интегрирования. В оператор (2) подставляются все заданные условиями величины компонентов искомого состояния в узлах. Компоненты искомого состояния в тех узлах, где они не заданы условиями задачи, выражаются через перемещения в узлах конечного элемента.

В ходе разработки алгоритма метода в приложении к расчету тел вращения сложной формы получены выражения для компонентов, входящих в формулу (2), а также компоненты формулы приближенного интегрирования по поверхности для криволинейного участка границы с произвольно расположенным средним узлом.

В рассматриваемом классе задач в узлах выбранной сетки имеем по два неизвестных перемещения *u* и *w*. Поэтому для каждого узла с неизвестными перемещениями *u* и *w* строим по два определяющих состояния с перемещениями, равными попеременно единице для одного из неизвестных перемещений в основном узле и нулю для остальных узлов и другого перемещения.

В ходе реализации метода используются формулы приближенного интегрирования и интегралы, входящие в выражение (1) могут быть представлены в виде:

$$\int_{\Omega_i} R^{/}u d\Omega \approx \sum_{j=1}^{N_i^{(u)}} d_j R_j^{/} u_j \; ; \;\; \int_{\Omega_i} Z^{/}w d\Omega \approx \sum_{j=1}^{N_i^{(u)}} d_j Z_j^{/} w_j$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

$$\int_{\Omega_i} \overline{Z}\, w^{/} dS \approx \sum_{j=1}^{N_{is}^{(u)}} g_j \overline{Z}_j w_j^{/}$$

Коэффициенты можно представить выражением

$$d_j = \sum_{j=1}^{N_i^{(u)}} P_j^{(mt)} \qquad (4)$$

где $P_j^{(mt)} = \beta_i A_m A_t$. (5)

Значения коэффициентов в общем виде можно определить по следующей зависимости:

$$K_{mt} = \frac{1}{m+2}\left[\sum_{p=1}^{2m+5}\frac{c}{p+t}B_1\left(Z_3^{(p+t)} - Z_1^{(p+t)}\right) + \sum_{k=1}^{2m+1}\frac{l}{k+t+2}B_2\left(Z_3^{(k+t+2)} - Z_1^{(k+t+2)}\right) + \frac{3m(m-1)}{t+5}B_3\left(Z_3^{(t+5)} - Z_1^{(t+5)}\right)\right] \qquad ,(6)$$

m=0,1,2; t=0,1,2.

Выражения для коэффициентов и получены из предположения, что криволинейная граница рассматриваемой подобласти аппроксимируется параболой [3].

Изложенная последовательность действий реализуется для всех выбранных типов конечных элементов. В результате, в общем случае, получаем полную разрешающую систему уравнений для определения перемещений в выбранных узлах.

Таким образом, в процессе развития обобщенного проекционно-сеточного метода применительно к расчету тел вращения сложной формы получены следующие результаты:

– для девятиузловой подобласти с двумя криволинейными границами построена аппроксимирующая функция, выражаемая степенным многочленом;

– разработан алгоритм построения определяющих состояний и формул приближенного интегрирования для подобластей данного типа;

– метод развит применительно к расчету тел вращения сложной формы, находящихся под осесимметричной нагрузкой.

Стремление к более точному решению задач неизбежно приводит к большому числу неизвестных и, как следствие, к системам уравнений высокого порядка со значительными погрешностями в процессе решения. В этой связи целесообразным представляется развитие обобщенного проекционно-сеточного метода в качестве контрольного для МКЭ и других методов, а также для получения в ряде задач более точных результатов вычислений и экономии времени затрачиваемого для их решения [2].

Характерной особенностью метода является его общность и оптимальная трудоемкость реализации при определении основных компонентов напряженно-деформированного состояния конструкции.

Список литературы

1. *Лисицин Б.М.* Об одном методе решения задач теории упругости //Прикл. механика.– 1967. №4. – с.87-92.
2. *Лисицин Б.М.* Об одном варианте проекционно-сеточного метода для решения задач механики деформированного твердого тела //Прикл. механика.–1987. №11.– с.62-71.
3. *Лисицин Б.М., Машков И.Л.* Развитие обобщенного проекционно-сеточного метода применительно к решению осесимметричных задач теории упругости //Сопротивление материалов и теория сооружений.–1988. Вып.52.– с.59-63.
4. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы.–М.: Наука, 1981.– 416 с.
5. *Новожилов В.В.* Теория упругости.–Л.:Судпромгиз, 1958.–370 с.