

УДК 624.012

**СОЗДАНИЕ ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНОГО КОМПЛЕКСНОГО
РАСЧЕТА НА ОСНОВЕ СТАЛЬНОГО КАРКАСА С АНАЛИЗОМ
УСТОЙЧИВОСТИ СТАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ И УЧЕТОМ
НЕЛИНЕЙНОЙ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА**

*д.т.н., доц. Лапенко А.И., студ. Сокур И.А.
Национальный авиационный университет, Киев*

В большинстве современных конечно-элементных программ, предназначенных для расчета строительных конструкций, анализ устойчивости проводится в предположении о линейно-упругой работе материала.

Напомним, что в работе [1], на основе использования концепции Шенли, был предложен алгоритм корректировки модулей (АКМ), позволяющий свести задачу физически-нелинейной устойчивости конструкции к последовательному решению задач обычной линейной устойчивости с корректировкой на каждом шаге модулей упругости. Для корректировки модулей в [1] предлагалось использовать следующую формулу:

$$E_k = \frac{N_{k-1}^{sh}}{N_{k-1}^{lin}} E_{k-1} \quad (1)$$

Где E_{k-1} –модуль упругости на $(k-1)$ -й итерации; E_k модуль упругости на k -й итерации; N_{k-1}^{lin} – значение усилия в рассматриваемом элементе, соответствующее критической нагрузке для системы, полученной из решения линейно-упругой задачи устойчивости на $(k-1)$ -й итерации; N_{k-1}^{sh} – значение критического усилия, определяемое на основе концепции Шенли о касательном модуле для рассматриваемого элемента на $(k-1)$ -й итерации. Итерационный процесс завершается при сходимости значений собственных чисел и значений модулей упругости. Данный подход хорошо описывает устойчивость конструкций из центрально-сжатых стержней, но не учитывает влияния изгибающих моментов (или эксцентриситетов приложения нагрузки) приводящего к снижению значений критических параметров нагрузки. В реальной инженерной практике при анализе устойчивости сложных строительных конструкций случай строго центрального сжатия встречается редко.

В [2] предложено для расчета устойчивости систем со сжато-изогнутыми стержнями, работающими за пределом упругости, модифицировать АКМ. В формуле (1) вместо предельного усилия для центрально-сжатого стержня предлагается использовать значение предельного усилия для сжато-изогнутого стержня, определяемое по критерию «нулевой отпорности» [3] (т.е. по условию достижения сжимающим усилием в элементе своего максимального значения). Тогда получим:

$$E_k = \frac{N_{k-1}^m}{N_{k-1}^{lin}} E_{k-1} \quad (2)$$

Где N_{k-1}^m – предельное значение, определяемое из решения задачи «нулевой отпорности» сжатого-изгибаемого стержня с учетом пластичности на $(k-1)$ -й итерации.

Рассмотрим подробнее алгоритм корректировки модулей использованием критерия «нулевой отпорности».

1. На предварительном этапе (нулевая итерация) решается задача статики для системы, материал которой считается линейно-упругим. Затем решается задача устойчивости и определяется параметр критической нагрузки p_0 .

2. Для итераций $k = 1, 2, \dots, n$ для каждого конечного элемента определяется усилие N_{k-1}^{lin} , соответствующее критической нагрузке для системы ($N_{k-1}^{lin} = p_{k-1} N^s$ где N^s – усилие в элементе, определяемое из статического расчета системы на нулевой итерации). Если напряжения в элементе превышают предел пропорциональности, то решается Рис. 1 задача «нулевой отпорности» и определяется По формуле (2) определяется новое значение модуля упругости для элемента E_k .

3. Решается задачи устойчивости для всей системы, определения параметра критической нагрузки p_k .

4. Проверяются критерии сходимости итерационного алгоритма по параметру критической нагрузки $|p_k - p_{k-1}| \leq \Delta_p$ и $\max_m |E_{m,k-1} - E_{m,k}| \leq \Delta_p$ где m пробегает по всем конечным элементам системы. Если критерии выполняются, то расчет завершается, иначе алгоритм повторяется, начиная с шага 2.

Рассмотрим задачу о «нулевой отпорности» для отдельного элемента n -й итерации. Для этого перейдем к задаче о шарнирно опертом стержне, сжатом силой P , приложенной с эксцентриситетом e (рис. 1).

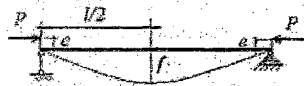


Рис. 1. Расчетная схема стержня, сжатого силой P , приложенной с эксцентриситетом e

Подобная задача решается в [3] путем интегрирования дифференциальных уравнений нелинейного деформирования стержня. В связи с тем, что такой подход требует значительного времени на вычисления, а решать задачу требуется для каждого конечного элемента, используем упрощенный подход. Следуя [4] допустим, что изогнутая линия стержня представляет собой полуволну синусоиды:

$$\vartheta = f \sin \frac{\pi z}{l} \quad (3)$$

где z – координата, отсчитываемая вдоль оси стержня; l – расчетная длина стержня; f – прогиб в центральном сечении. С учетом этого предположения для определения критической нагрузки достаточно будет рассматривать равновесие центрального сечения стержня.

Расчетную длину стержня для i -й итерации получим из формулы Эйлера при известном значении усилия и значении модуля упругости E_k для элемента на предыдущей итерации:

$$l_k = \pi \sqrt{E_k I / N_k^{lin}}, \quad \lambda_k = \frac{l_k}{i} = \pi \sqrt{E_k F / N_k^{lin}}, \quad (4)$$

где l_k и λ_k – расчетная длина и гибкость стержня на k -й итерации; I, i, F – соответственно момент инерции, радиус инерции и площадь сечения.

Введем систему координат, ось которой проходит через центр тяжести сечения и направлена вдоль одной из его главных осей. Координата u отсчитывается от левого края сечения. Пусть h – размер сечения; δ – длина участка упругого сжатия или растяжения; x – положение нейтральной линии; σ_{ny} – предел пропорциональности материала; ε_{ny} – соответствующая ему деформация.

Рассмотрим геометрическую сторону задачи.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{ny}}{\delta} = \frac{\sigma_{ny}}{E_0 \delta} \quad (5)$$

Здесь $E_0 = E$ – истинный модуль упругости материала, совпадающий с модулем упругости на нулевой итерации. Выражение для кривизны изогнутой оси стержня с учетом допущения о малости прогибов имеет вид:

$$x = \mp \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} \quad (6)$$

Тогда с учетом (3) при $z = l/2$ получим:

$$\frac{1}{\rho} = f \frac{\pi^2}{l^2} \quad (7)$$

Далее приняв во внимание (5) получим связь между прогибом f и параметром эпоры δ :

$$f = \frac{\sigma_{ny}}{E_0 \delta} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} = \left(\frac{l}{i}\right)^2 \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{ny}}{E_0}}\right)^2 \frac{i^2}{\delta} \quad (8)$$

Обозначим через $\bar{\lambda}_k$ и f_k приведенную гибкость и прогиб для k -й итерации соответственно, тогда с учетом (4) и (8) получим:

$$\bar{\lambda}_k = \lambda_k \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{ny}}{E_0}}\right) = \sqrt{\frac{\sigma_{ny} E_k F}{N_k^{lin} E_0}}, \quad f_k = \frac{i_k^2 \bar{\lambda}_k^2}{\delta} \quad (9)$$

Для моделирования нелинейного материала будем пользоваться диаграммой Прандтля:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \text{sing}(\varepsilon) \sigma_T, & |\varepsilon| \geq \varepsilon_T \\ E\varepsilon, & |\varepsilon| < \varepsilon_T \end{cases} \quad (10)$$

Здесь σ – напряжение; ε – деформация; σ_T – предел текучести (совпадает с пределом пропорциональности), $(\varepsilon_T - \sigma_T) / E$.

Также для стальных элементов будем использовать унифицированную диаграмму строительных сталей П.Д. Одесского и Г.Е. Бельского [5] с аппроксимацией по формуле, предложенной в [3]:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_T \operatorname{sing}(\varepsilon) \left\{ 0,8 + k \times \operatorname{arctg} \left[\frac{0,8\varepsilon - 0,8\varepsilon_T}{k\varepsilon_T} \right] \right\}, & |\varepsilon| > 0,8\varepsilon_T \\ \sigma_T \varepsilon / \varepsilon_T, & |\varepsilon| \leq 0,8\varepsilon_T \end{cases} \quad (11)$$

Здесь безразмерный коэффициент $k = 0,1413$.

Введем безразмерные величины: $\hat{x} = x/h$, $\hat{u} = u/h$, $\hat{f} = f/h$, $\hat{\delta} = \delta/h$, $\hat{\sigma} = \sigma/h$ составим уравнения равновесия для сечения стержня (в безразмерном виде):

$$\begin{cases} \hat{N} - \int_0^1 \hat{\sigma}(\hat{u}) d\hat{F} = 0 \\ \hat{N}(\hat{e} + \hat{x}_c + \hat{f}) - \int_0^1 \hat{u} \cdot \hat{\sigma}(\hat{u}) d\hat{F} = 0, \hat{N} = N/(\sigma_T h^2), \end{cases} \quad (12)$$

где \hat{e} и \hat{x}_c — безразмерные эксцентриситет и координата центра тяжести сечения соответственно.

Введем обозначения для безразмерных силы и момента в сечении относительно левого края (в зависимости от характеристик эпюры $\hat{\delta}$):

$$\hat{N}(\hat{x}, \hat{\delta}) = \int_0^1 \hat{\sigma}(\hat{u}, \hat{x}, \hat{\delta}) d\hat{F}, \quad \hat{M}(\hat{x}, \hat{\delta}) = \int_0^1 \hat{u} \cdot \hat{\sigma}(\hat{u}, \hat{x}, \hat{\delta}) d\hat{F} \quad (13)$$

Задача определения критической силы для сжатого изгибаемого стержня в безразмерном виде для i -й итерации с учетом (9), (12), (13) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \hat{N}_k^m = \max_f \hat{N}(\hat{x}, \hat{\delta}) \\ \hat{N}(\hat{x}, \hat{\delta}) \cdot (\hat{e}_k + \hat{x}_c + \hat{f}) - \hat{M}(\hat{x}, \hat{\delta}) = 0 \\ \hat{\delta} = (i^2 \sigma_{ny} E_k F) / (N_k^{lim} E_0 \hat{f}) \end{cases} \quad (14)$$

Необходимо отметить, что предложенный способ решения задачи «нулевой отпорности» накладывает ограничение на диапазон значений эксцентриситета силы e , а именно $e \geq e_{\min} > 0$. Тогда в случае нулевых моментов значение e можно, например, положить равным $1/750 + i/20$, что соответствует требованиям к конструктивным расчетам, изложенным в Пособии к СНиП 11-23-81*, и, таким образом, уже на этапе общих расчетов позволяет начать учитывать требования норм.

Анализ результатов показывает, что критическая нагрузка, полученная по критерию «нулевой отпорности» в 1,26 раза меньше нагрузки полученной по концепции Шенли и в 2,09 раза меньше критической нагрузки без учета физической нелинейности. Также весьма важным является то, что формы потери устойчивости, полученные с использованием концепции Шенли и критерия «нулевой отпорности», существенно отличаются. Это означает, что расчетные длины элементов, необходимые для дальнейших нормативных расчетов, также будут различны. Такое существенное различие в результатах с использованием концепции Шенли и критерия «нулевой отпорности» связано с тем, что концепция Шенли не учитывает эпору изгибающих моментов, которые существенны для верхнего пояса (рис. 2).

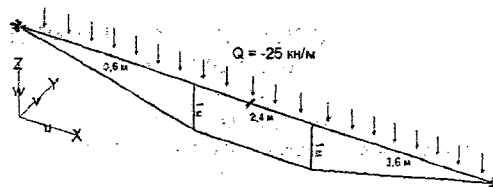


Рис. 2. Схема фермы

Для иллюстрации применимости критерия «нулевой отпорности» в условиях отсутствия моментов и других несовершенств рассмотрим еще одну задачу. В [6] приведены результаты испытаний устойчивости пространственной рамы, нагруженной одинаковыми узловыми нагрузками, действующими на узлы рамы. Здесь важным являлось то, что верхние узлы и ригели рамы полностью контактировали с прессом (т.е., удерживались от горизонтальных смещений и поворотов).

Решение данной задачи на устойчивость в линейно упругой постановке приводит к завышению полной нагрузки почти в 6 раз.

Таким образом переход в алгоритме корректировке модулей от использования концепции Шенли к критерию «нулевой отпорности» позволяет учесть влияние эксцентриситетов силы и моментов, что делает предложенный алгоритм применимым к расчету не только отдельных элементов, но и сложных строительных конструкций.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Улитин В.В. Физически нелинейный анализ устойчивости конструкций. — СПб.: ГИОРД, 2007. — 96 с.
2. Солдатов А.Ю., Лебедев В.Л., Семенов В.А. Анализ устойчивости строительных конструкций с учетом физической нелинейности методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений.
3. Грудев И.Д. Устойчивость стержневых элементов в составе стальных конструкций. — М.: МИК, 2005. — 320 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
5. Одесский П.Д., Бельский Г.Е. О едином подходе к использованию диаграмм работы строительных сталей // Промышленное строительство, 1980, № 7. С. 4—6.
6. Сон М.П. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости пространственных рамных систем и разработка инженерной методики определения критической силы с учетом нелинейности. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. — М., 2010.
7. Стороженко Л.Л., Лапенко О.І. Залізобетонні конструкції в незнімній опалубці. — Полтава: АСМІ, 2008. — 312 с.