УДК 531.08:621.311.22

В. С. Горбатов, канд. техн. наук

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДОВ С ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ ЖИДКОСТИ

Приведены результаты аналитических исследований свободных колебаний некоторых видов трубопроводов с учетом их статической и физической нелинейности. Учет нелинейности работы трубопроводов позволяет на стадии проектирования уточнить прогноз их поведения.

Рассмотрим задачу о колебаниях (вибрации) и устойчивости трубопровода со статической нелинейностью. Расчетная схема трубопровода с жидкостью, движущейся с постоянной скоростью V, может быть представлена в виде балки, свободно лежащей на шарнирных неподвижных опорах.

Известно [1], что уравнение изогнутой оси балки с неподвижными опорами имеет вид

$$У^{IV} = \frac{1}{EI}\left[q + У^{//}\frac{EI}{2l}\int_0^l (У^/)^2\,dx \right], \qquad (1)$$

где EI –жесткость балки на изгиб,

EF –жесткость балки на растяжение.

Если под У(x,t) понимать отклонение от положения статического равновесия, то интенсивность погонной нагрузки от сил инерции будет равна

$$q = -m_m\,\ddot{У}_{(t)} - m_{ж}\left[\ddot{У}_{(t)} + 2VУ^/ + V^2У^{//} \right], \qquad (2)$$

где $m_т$ –погонная масса трубопровода,

$m_ж$ –погонная масса жидкости, протекающей в трубопроводе.

Подставив выражение (2) в уравнение (1) получаем уравнение в частных производных

$$У^{IV}_{(x)} + b\ddot{У}(t) + У^{//}(x)\left[C - a\int_0^l (У^/)^2\,dx \right] + dУ^/(x) = 0, \qquad (3)$$

$$\text{где } a = \frac{1}{2l\rho^2};\ \rho = \sqrt{\frac{I}{F}};\ b = \frac{1}{EI}\left(m_m + m_{ж}\right); C = \frac{m_{ж}V^2}{EI};\ d = 2\frac{m_{ж}V}{EI}. \qquad (4)$$

Постоянный член уравнения (3) учитывает инерционную силу кориолисова ускорения. Поскольку ее роль невелика [2], рассмотрим задачу без учета кориолисовой силы. Приняв в уравнении (3) величину d=0, получаем уравнение в виде

$$У^{IV} + b\ddot{У} + У^{//}\left[C - a\int_0^l (У^/)^2\,dx \right] = 0 \qquad (5)$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$У(x,t) = X(x)\cos\varphi(t) \qquad (6)$$

Приходим к уравнению фундаментальной функции задачи

$$X^{IV} + b\theta^2 X + X^{//}\left[C - \frac{3}{4}a\int_0^l (X^/)^2 dx\right] = 0, \qquad (7)$$

при $\ddot{\varphi} = 0$; $\dot{\varphi} = \theta = Const$; $\varphi = \theta t + \psi$;

θ -частота колебаний, ψ -начальная фаза колебаний.

Полагая в уравнении (7) величину a=0, получаем уравнение линейной задачи

$$X^{IV} + CX^{II} - b\theta^2 X = 0 .$$

Решением этого уравнения будет выражение

$$X(x) = У_м \sin\frac{\pi}{l}x .$$

Подставим это решение в нелинейный член уравнения (7) и, выполнив квадратуры, получаем уравнение

$$X^{IV} q_x X^{II} - b\theta^2 X = 0,$$

где $q_x = \frac{3}{8}\pi^2 \frac{a}{l} У^2{}_{\max} - C = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}\frac{У_{\max}}{l\rho}\right)^2 - \frac{m_ж V^2}{EI}$.

Отсюда определяем частоту нелинейных колебаний

$$\theta = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{1}{b}\left[1 + \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 q_z\right]} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_m + m_ж}\sqrt{1 = \frac{l^2}{\pi^2}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}\frac{У_m}{l\rho}\right)^2 - \frac{m_ж V^2}{EI}\right]}}$$

Условием потери устойчивости трубопровода будет

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \left[\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}\frac{У_{\max}}{l\rho}\right) - \frac{m_ж V^2}{EI}\right] = -1$$

Отсюда находим первую критическую скорость жидкости в трубопроводе

$$V_{кр} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{EI}{m_ж}} \times \sqrt{1 + 3\left(\frac{У_{\max}}{4\rho}\right)^2} \approx \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{EI}{m_ж}} \times \left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{У_{\max}}{4\rho}\right)^2\right]$$

При $V=V_{кр}$ наступает потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия и эффективная поперечная жесткость трубопровода как бы исчезает.

Приняв $У_{\max}=0$ в выражениях критических частот и скоростей, получаем известные [2,3] результаты для линейной постановки задачи.

Рассмотрим задачу о колебаниях и устойчивости трубопровода с физической нелинейностью. Такой трубопровод свободно оперт на две шарнирные опоры и выполнен из материала, не следующего закону Гука. Представим, что трубопровод имеет идеально гладкие стенки, а движущаяся внутри жидкость имеет постоянную скоростью V.

При умеренно больших перемещениях примем [1] уравнение изогнутой оси не линейно упругой балки в виде

$$У^{//}\left[EI_2 + \beta I_4 (У^{//})^2\right] = -M ,$$

где $I_2 = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}; I_4 = \frac{\pi(D^6 - d^6)}{512}$ -моменты инерции поперечного сечения трубы с внешним диаметром D и внутренним диаметром d.

Дефференцируя это равенство и учитывая соотношения Журавского и выражение [2], то есть $M^{//}=Q^{/}=-q=m_т У+m_ж(У+V^2 У^{//})$, а, также пренебрегая малым влиянием кориолисовой силы ($2m_ж V^2 У^{/}$), получаем уравнение в частных производных

$$EI_2 У^{IV} + 6\beta I_4 У^{II}(У^{III})^2 + 3\beta l_4 (У^{II})^2 У^{IV} + m\ddot{У} + m_ж V^2 У^{//} = 0, \qquad (8)$$

где m= $m_т+m_ж$.

Подставляем решение $У(x,t)=X(x)\cos\varphi(t)$ в уравнение (8) и, используя приближенное равенство $\cos^3\varphi=\frac{1}{4}(\cos 3\varphi+3\cos\varphi)\approx\frac{3}{4}\cos\varphi$, приходим к уравнению фундаментальной функции

$$X^{IV}\left[EI_2+\frac{9}{4}\beta I_4(X^{II})^2\right]+X^{II}\left[m_{ж}V^2+\frac{9}{2}\beta I_4(X^{II})^2\right]-m\theta^2X=0. \qquad (9)$$

Полученное уравнение можно представить в виде

$$X^{IV}\left[1+\lambda(X^{II})^2\right]+X^{II}\left[\psi+2\lambda(X^{II})^2\right]-b\theta^2X=0.$$

где $b=\frac{m}{EI_2}$; $\lambda=\frac{9}{4}\frac{\beta I_4}{EI_2}$; $\psi=\frac{m_{ж}V^2}{EI_2}$.

Решение уравнения (9) ищем как для линейной задачи в виде

$$X(x)=У_{м}\sin\frac{\pi}{l}x. \qquad (10)$$

Подставив решение (10) в уравнение (9) и учитывая приближенные равенства

$(\sin\frac{\pi}{l}x)^3\approx\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{l}x$; $\sin\frac{\pi}{l}x(\cos\frac{\pi}{l}x)^2\approx\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{l}x$; получаем

$$У_{\max}\left[\frac{\pi^4}{l^4}\left(1+\frac{3}{4}\lambda\frac{\pi^4}{l^4}У_{\max}\right)-\frac{\pi^2}{l^2}\left(\psi+\frac{1}{2}\lambda\frac{\pi^6}{l^6}У_{\max}^2\right)-b\theta^2\right]\sin\frac{\pi}{l}x=0$$

Приравняв выражения в квадратных скобках, приходим к формуле для частоты нелинейных колебаний

$$\theta=\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI_2}{m_т+m_{ж}}}\sqrt{1+\frac{l^2}{\pi^2}\left(\frac{27\pi^6\beta I_4}{16EI_2l^4}У_{\max}^2-\frac{m_{ж}V^2}{EI_2}\right)}.$$

Полагая здесь V=0, имеем

$$\theta=\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI_2}{m_т+m_{ж}}}\sqrt{1+\frac{l^2}{\pi^2}\left(\frac{9\pi^4\beta I_4}{16EI_2l^4}У_{\max}^2\right)}\approx\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI_2}{m}}\left(1+\frac{27\pi^6\beta I_4}{32EI_2l^4}У_{\max}^2\right).$$

Приравняв нулю выражение под вторым радикалом, находим критическую скорость, при достижении которой трубопровод потеряет устойчивость

$$V_{кр}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{EI}{m_{ж}}\left(1+\frac{27\beta I_4\pi^4}{16EI_2l^4}У_{\max}^2\right)}\approx\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{EI}{m_{ж}}}\left(1+\frac{27\beta I_4\pi^4}{32EI_2l^4}У_{\max}^2\right).$$

Анализ полученных выражений позволяет сделать вывод о том, что при жесткой нелинейности ($\beta\rangle 0$) критическая скорость будет выше, чем при линейной задаче [4], при мягкой нелинейности ($\beta\langle 0$)- меньше.

Известно [4], что при расчетах вибрации трубопроводов энергетических установок необходимо как можно точнее установить частоты собственных колебаний трубопроводов. Это необходимо для того, чтобы избежать резонансных режимов вибрации, ведущих к разрушению элементов энергетических установок, или разработать способы снижения амплитуд колебаний до допустимых величин. Полученные в работе выражения позволяют уточнить частоты собственных колебаний при учете нелинейности системы. Изменения частот собственных колебаний возможно с помощью вибрации величин масс и жесткостей элементов трубопроводов, что легко выполнить по материалам настоящей работы.

Список литературы

1. *Бондарь Н.Г* .Нелинейные автономные задачи механики упругих систем.-Киев:Будівельник,1971.-140с.
2. *Пановко Я.Г.,Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем.-М.:Наука,1967.-175с.
3. *Федосьев В.И.* О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости. В кн.: Инженерный сборник.т.10.-М. 1951.с.251-257.
4. *Самарин А.А.* Вибрации трубопроводов энергетических установок и методы их устранения.-М.:Энергия,1979.-288с.

Сведения об авторе

Горбатов Виталий Сергеевич (1940) закончил Днепропетровский государственный университет в 1963 г. Кандидат технических наук, децент Киевского международного университета гражданской авиации. Научная деятельность связана с решением прикладных задач динамики упругих систем с учетом нелинейности их работы. Автор 96 научных и учебно-метадических работ.

Відомості про автора

Горбатов Віталій Сергійович (1940) закінчив Дніпропетровський державний університет у 1963 р. Кандидат технічних наук, децент Київського міжнародного університету цивільної авіації. Наукова діятельність пов'язана з рішенням прикладних задач динаміки пружніх систем з урахуванням нелінійності їх праці. Автор 96 науковых та учбово-метадичних праць.