МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації
до розв'язування задач з математичних методів
дослідження операцій
для студентів напряму підготовки
6.140103 «Туризм»

Київ 2015

УДК 519.8 (076.5)
ББК В 11р
В 558

Укладачі: *І. О. Ластівка, О. С. Давидов, І. В. Шевченко*
Рецензент *А. О. Антонова*

Затверджено методично-редакційною радою
Національного авіаційного університету
(протокол № від 2014 р.).

В 558 **Вища та прикладна математика:** методичні рекомендації до розв'язування задач з математичних методів дослідження операцій для студентів напряму підготовки 6.140103 «Туризм» / уклад. : І. О. Ластівка, О. С. Давидов, І. В. Шевченко. – К. : НАУ, 2015. – 72 с.

Методичні рекомендації, укладені відповідно до програми курсу «Вища та прикладна математика», зокрема, модуля IV «Спеціальні задачі дослідження операцій», містять основний теоретичний матеріал, приклади розв'язання типових задач. У кінці кожного практичного заняття запропоновано запитання і завдання для самоперевірки та самостійного розв'язання.

Для студентів усіх форм навчання напряму підготовки 6.140103 «Туризм».

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика» – опанування основних математичних понятть та методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу при моделюванні і розв'язуванні прикладних задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, оволодіння методами дослідження та розв'язування математичних задач, набуття первинних навичок математичного дослідження прикладних задач тощо.

Методичні рекомендації укладено відповідно до програми курсу «Вища та прикладна математика», зокрема, модуля IV «Спеціальні задачі дослідження операцій». Цей модуль є окремою самостійною дисципліною, що викладається в курсі дисципліни «Вища та прикладна математика» для студентів напряму підготовки 6.140103 «Туризм».

Дослідження операцій – дисципліна, що займається розробкою та практичним застосуванням методів управління різними організаційними системами. Навчальний курс дослідження операцій базується на математичному програмуванні та вивчає задачі оптимізації, їх постановку й знаходження розв'язку.

У пропонованих методичних рекомендаціях розглянуто лише деякі задачі лінійного та динамічного програмування. Наводяться методи розв'язування цих задач, які ґрунтуються на основних поняттях лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

У результаті засвоєння навчального матеріалу курсу студент повинен **знати**:

– загальну постановку задачі лінійного програмування;

– побудову моделей задач лінійного програмування та їх геометричну інтерпретацію;

– алгоритм симплекс-методу розв'язування задач лінійного програмування та основні поняття теорії двоїстості;

– постановку транспортної задачі;

– методи знаходження допустимого базисного розв'язку та метод потенціалів знаходження оптимального плану транспортної задачі;

– постановку задачі про призначення, алгоритм угорського методу;

– основні поняття теорії ігор, класифікацію моделей ігор;

– загальну постановку задачі динамічного програмування;

– принцип оптимальності, рівняння Беллмана та основні етапи розв’язання найпростіших задач динамічного програмування;

уміти:

– будувати моделі задач лінійного програмування, розв’язувати їх графічним та симплексним методами, шукати розв’язки двоїстих задач;

– будувати допустимий базисний розв’язок транспортної задачі методами північно-західного кута та мінімальної вартості, знаходити оптимальний план методом потенціалів;

– застосовувати угорський метод до розв’язування задачі про призначення;

– знаходити розв’язок матричної гри в чистих і змішаних стратегіях;

– записувати рівняння Беллмана задачі динамічного програмування;

– застосовувати алгоритми знаходження розв’язку до найпростіших задач динамічного програмування.

Плани практичних занять складено відповідно до робочої навчальної програми дисципліни «Вища та прикладна математика» та модуля IV «Спеціальні задачі дослідження операцій». Кожне практичне заняття містить необхідний теоретичний матеріал, розв’язання типових прикладів, запитання та завдання для самоперевірки, приклади для самостійного розв’язання, які сприятимуть кращому розумінню, засвоєнню та застосуванню основних теоретичних положень.

Практичне заняття 1

ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

План

1. Загальна постановка та побудова математичних моделей деяких економічних задач.
2. Різні форми запису задач лінійного програмування. Зведення загальної задачі лінійного програмування до задачі у стандартній або канонічній формі.
3. Геометрична інтерпретація та графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування.
4. Алгоритм симплексного методу. Суть однієї ітерації алгоритму.
5. Побудова двоїстої задачі до задачі лінійного програмування. Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої та двоїстої задач.

Література: [1]; [2]; [6].

Методичні рекомендації

Мета заняття – ознайомитися з деякими економіко-математичними моделями задач лінійного програмування (ЗЛП) та різними формами їх запису, навчитися розв'язувати ЗЛП графічним та симплексним методами, навчитися будувати двоїсті задачі та шукати їх розв'язки.

Після виконання практичного заняття студент повинен ***знати:*** загальні принципи побудови математичної моделі задачі, різні форми запису ЗЛП; алгоритм побудови допустимої області і цільової функції ЗЛП при застосуванні графічного методу; де знаходиться оптимальний розв'язок задачі на допустимій області; в якій формі запису ЗЛП може бути занесена в симплекс-таблицю; одну ітерацію алгоритму симплексного методу (СМ); коли алгоритм СМ закінчує роботу; як пов'язані між собою оптимальні розв'язки прямої і двоїстої задач; ***уміти:*** зводити ЗЛП до різних форм запису; навчитися розв'язувати ЗЛП графічним методом;

вибирати розв’язувальний елемент у симплекс-таблиці та виконувати симплекс-перетворення, тобто робити перехід від однієї симплекс-таблиці до іншої; розв’язувати пряму і двоїсту задачі.

Розглянемо основні планово-виробничі та економічні задачі.

1. *Задача про оптимальне використання ресурсів*. Для прозорості розглянемо частинний випадок цієї задачі. Нехай для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують чотири види ресурсів S_1, S_2, S_3, S_4. Запаси ресурсів, кількість одиниць ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, а також величину прибутку від реалізації одиниці продукції P_1 і P_2 наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Види ресурсів	Види продукції		Запаси ресурсів
	P_1	P_2	
S_1	1	3	18
S_2	2	1	16
S_3	-	1	5
S_4	3	-	21
Прибуток, грн.	20	30	

Визначити такий план випуску продукції, який максимізує прибуток підприємства при заданих ресурсах. Побудувати математичну модель задачі.

Розв’язання

Нехай x_1, x_2 – кількість одиниць продукції P_1 і P_2 відповідно, яку необхідно виготовити. Очевидно, що повинні виконуватись обмеження

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 \le 16; \\ \qquad\quad x_2 \le 5; \\ 3x_1 \qquad\ \le 21, \end{cases} \tag{1.1}$$

причому

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{1.2}$$

Скласти оптимальний план випуску продукції $X = \{x_1; x_2\}$, який би задовольняв обмеження (1.1), (1.2), і прибуток від реалізації продукції був би максимальним, тобто

$$20x_1 + 30x_2 \to \max .$$

Задачу легко узагальнити на випадок виготовлення *n* видів продукції при використанні *m* видів ресурсів.

2. *Задача на складання дієти*. Аналогічно попередньому випадку розглянемо частинний випадок цієї задачі. Нехай при відгодівлі тварин використовується два види кормів P_1 і P_2, які містять три види поживних речовин S_1, S_2, S_3. Кількість одиниць поживних речовин *i*-го виду $(i = 1, 2, 3)$, що містяться в одиниці корму *j*-го виду $(j = 1, 2)$, норма поживних речовин *i*-го виду, яка має бути забезпечена в щоденному раціоні, а також вартість одиниці корму *j*-го виду можна записати за допомогою табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин *i*-го виду, що містяться в одиниці корму *j*-го виду		Норма поживних речовин, яка має бути забезпечена в щоденному раціоні
	P_1	P_2	
S_1	3	1	9
S_2	1	2	8
S_3	1	6	12
Вартість одиниці корму *j*-го виду, грн	40	60	

Скласти такий мінімальний за вартістю добовий раціон, щоб кожна тварина щоденно отримувала кількість поживних речовин, не меншу за задану норму. Побудувати математичну модель задачі.

Розв'язання

Позначимо через x_1, x_2 кількість одиниць корму P_1 і P_2 відповідно, який передбачено в щоденному раціоні. У зв'язку з тим, що склад поживних речовин S_1, S_2, S_3 у раціоні має бути не меншим ніж відповідно 9, 8 і 12 одиниць, то маємо систему обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9; \\ x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases} \tag{1.3}$$

при цьому

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \tag{1.4}$$

Скласти такий оптимальний план щоденного раціону $X = \{x_1;\ x_2\}$, який би задовольняв обмеження (1.3), (1.4), і загальна вартість дієти була б мінімальною, тобто

$$40x_1 + 60x_2 \to \min .$$

Дану задачу також можна записати в загальній постановці.

3. *Задачу про перевезення (транспортна задача)* буде розглянуто окремо пізніше.

Попри змістовні відмінності, всі наведені приклади мають багато спільного, а саме – лінійність цільових функцій, що підлягають мінімізації (максимізації), та функцій, що входять в обмеження (рівності або нерівності).

Розглянемо різні форми запису задач лінійного програмування.

Загальна задача лінійного програмування. Цільова функція

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \tag{1.5}$$

за таких обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ \left(i = \overline{1,\ m}\right); \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ \left(i = \overline{1,\ m}\right); \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i \ \left(i = \overline{1,\ m}\right); \tag{1.8}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{1.9}$$

Знайти такий розв'язок $\overline{x} = \left(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots,\ x_n^0\right)$, що задовольняє обмеженням (1.6)–(1.9) і максимізує чи мінімізує цільову функцію (1.5).

ЗЛП називається записаною в *симетричній формі*, якщо необхідно визначити найбільше або найменше значення цільової функції

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \qquad (1.10)$$

за таких обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \left(i=\overline{1,\ m}\right); \qquad (1.11)$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right). \qquad (1.12)$$

Стандартна форма запису ЗЛП. Цільова функція

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \qquad (1.13)$$

обмеження:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \left(i=\overline{1,\ m}\right); \qquad (1.14)$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right). \qquad (1.15)$$

Будь-яка ЗЛП може бути зведена до стандартної форми (1.13) – (1.15). Якщо в загальній ЗЛП наявне обмеження-нерівність типу «$\le$», то до такого обмеження вводять додаткову змінну x_{n+i} зі знаком «+» (n – кількість змінних задачі; i – обмеження, до якого вводять додаткову змінну). До обмеження-нерівності типу «$\ge$» вводять додаткову змінну x_{n+i} зі знаком «–». Ці операції дозволяють обмеження-нерівності перетворити на обмеження-рівності. Змінні x_j, для яких умова невід’ємності не обумовлюється, подають у вигляді:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \text{ де } x_j^+ \ge 0,\ x_j^- \ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

Канонічна форма ЗЛП – це стандартна форма задачі, у якій кожне обмеження містить у собі змінну з коефіцієнтом одиниця в даному рівнянні і з коефіцієнтом нуль в усіх інших. Праві частини цих рівнянь додатні, тому канонічну форму ЗЛП можна записати так:

$$F(x)=(c,\ x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \to \min(\max), \qquad (1.16)$$

$$
\begin{cases}
x_1 + \ldots + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\
\quad ------------------------; \\
\quad x_l + \ldots + a_{lm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{lk}x_k + \ldots + a_{ln}x_n = b_l; \\
\quad ------------------------; \\
\qquad x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases} \tag{1.17}
$$

$$
x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n} \right). \tag{1.18}
$$

Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – це базисні змінні. Їм відповідають базисні вектори умов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Змінні $x_{m+1}, \ldots, x_n$ – позабазисні змінні, відповідно $A_{m+1}, ..., A_n$ – позабазисні вектори умов.

Канонічна форма (1.16) – (1.18) дозволяє відшукати початковий базисний розв'язок. Для цього позабазисні змінні покладаємо рівними нулю, тоді базисні дають розв'язок. Наша канонічна форма дає такий початковий базисний розв'язок:

$$
\overline{x} = \left\{ b_1;\, b_2;\, \ldots;\, b_m;\, 0;\, 0;\, \ldots;\, 0 \right\}.
$$

Ненульовий допустимий розв'язок ЗЛП називається *базисним*, якщо вектори умов, які відповідають додатнім компонентам цього розв'язку, є лінійно незалежними.

Братимемо до уваги, що нульовий розв'язок ЗЛП завжди буде базисним.

Базисний розв'язок називається *невиродженим*, якщо він містить рівно m додатних компонент.

Канонічна форма дає невироджений розв'язок.

Геометрична інтерпретація та графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування

Для вивчення геометричної інтерпретації та графічного методу розв'язання ЗЛП на площині розглянемо окремий випадок задачі, що записана в симетричній формі (1.10) – (1.12) на площині:

$$
F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max(\min); \tag{1.19}
$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ ---------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases} \tag{1.20}$$

$$x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0 . \tag{1.21}$$

Потрібно визначити вектор $\overline{x} = \left\{ x_1^0, x_2^0 \right\}$, який задовольняє систему обмежень (1.20), (1.21) і максимізує або мінімізує цільову функцію (1.19).

Теорема. Допустимий розв'язок ЗЛП є вершиною допустимої області тоді і саме тоді, коли цей розв'язок є базисним.

Почнемо з обмежень, які задають допустиму область нашої задачі – опуклий многогранник. *Опуклий многогранник* – це багатогранник, який разом з двома точками x_1 і x_2, які належать області D, містить в цій області й опуклу комбінацію цих точок, тобто $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in D$, $\lambda \in [0,1]$.

Геометрично це зображено на рис. 1.1.

Опукла множина
а

Вгнута множина
б

Рис. 1.1

Обмеження (1.21) говорять про те, що ми знаходимось в І чверті прямокутної системи координат.

Обмеження (1.20) задають допустиму область D як перетин півплощин. Допустима область може бути:

1) замкненою (рис. 1.2);

2) відкритою (рис. 1.3);

3) смугою, що міститься між двома паралельними прямими (рис. 1.4);

4) порожньою (рис. 1.5).

Якщо цільову функцію (1.19) прирівняти до будь-якої сталої (const), то їй відповідатиме пряма на площині. Якщо ця стала $\text{const} = 0$, то пряма пройде через початок координат.

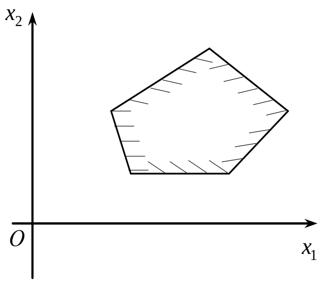


Рис. 1.2

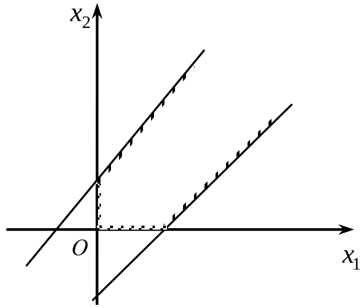


Рис. 1.3

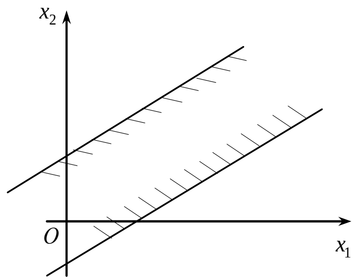


Рис. 1.4

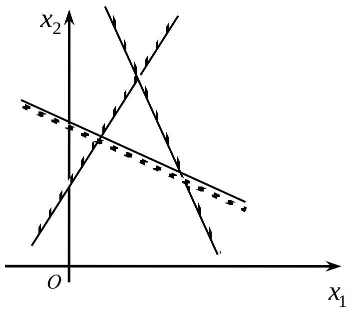
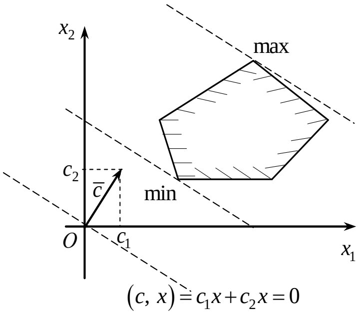


Рис. 1.5

Із аналітичної геометрії відомо, що з прямою на площині пов’язаний вектор нормалі – вектор, перпендикулярний до даної прямої. У нашому випадку це вектор $\overline{c} = \{c_1;\, c_2\}$.

Для того, щоб графічно знайти розв’язок ЗЛП, потрібно побудувати пряму, яка відповідає цільовій функції, переміщувати паралельно самій собі в напрямку вектора нормалі для задачі на максимум і в протилежний бік – для задачі на мінімум.

Розв’язок знаходиться там, де востаннє пряма дотикається до допустимої області: це може бути або у вершині допустимої області (рис. 1.6, *а*), або на грані (1.6, *б*). В останньому випадку будь-яка точка грані може бути розв’язком.



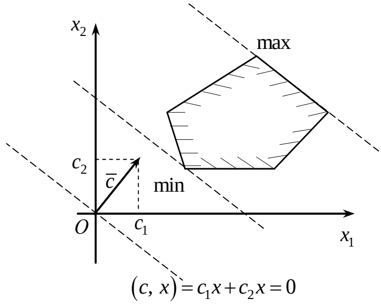


Рис. 1.6, *а* Рис. 1.6, *б*

Зауваження. Якщо допустима область порожня – задача розв'язків не має.

Приклад 1. Розв'язати графічним методом ЗЛП:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 3x_1 - x_2 \le 6; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0\,.$$

Розв'язання

Спочатку будуємо допустиму область (рис. 1.7):

$-x_1 + 3x_2 = 6 -$ ï ðÿì à(1): $3x_1 - x_2 = 6 -$ ï ðÿì à(2):

x_1	0	3
x_2	2	3

x_1	2	3
x_2	0	3

Із цільовою функцією пов'язаний вектор нормалі: $\overline{c} = \{1;\, 1\}$.

Пряма (3), перпендикулярна до вектора нормалі, відповідає цільовій функції. У нашому випадку розв'язується задача на максимум, тому розв'язок знаходитиметься у точці *M.* Для обчислення координат точки *M* потрібно розв'язати систему рівнянь, які відповідають прямим (1), (2), перетин яких задає точку *M*, тобто систему вигляду

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 6, \\ 3x_1 - x_2 = 6. \end{cases}$$

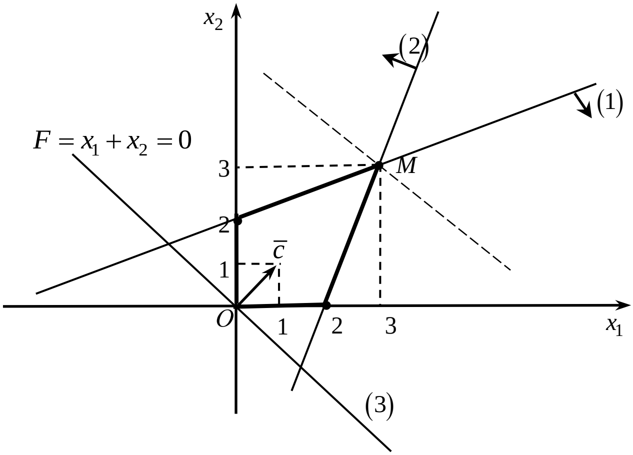


Рис. 1.7

Для розв'язання системи рівнянь застосуємо метод Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -24; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -24;$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Отже, точка *M* має координати $(3;\ 3)$. При цьому $F_{\max} = x_1 + x_2 = 6$.

Симплексний метод розв'язування ЗЛП

Симплекс-метод є універсальним методом розв'язання ЗЛП. За його реалізації здійснюється орієнтоване перебирання вершин допустимої області, щоб перейти від одного базисного розв'язку до іншого. Розглянемо, в чому полягає суть алгоритму СМ.

ЗЛП зводиться до запису задачі в канонічній формі (1.16 – 1.18). Зведену задачу для зручності обчислень заносять до симплекс-таблиці, яку розглянемо одразу на прикладі. Одна ітерація алгоритму полягає в обчисленні оцінки $\Delta_j = z_j - c_j = C_Б \cdot A_j - c_j$

для всіх позабазисних змінних (c_j – коефіцієнти цільової функції, $\tilde{N}_{\acute{A}}$ – коефіцієнти цільової функції, які відповідають базисним векторам умов, тобто $\tilde{n}_1; c_2; \ldots; c_m$, A_j – вектори умов нашої системи обмежень). Для базисних змінних ці оцінки завжди дорівнюють 0.

Якщо всі оцінки $\Delta_j \le 0$ (для задачі на min), то початковий розв'язок, який дає задача в канонічній формі, є оптимальним. Якщо хоч одна з оцінок $\Delta_к > 0$, то в цьому випадку розглядаємо *k*-й вектор умов задачі, тобто вектор A_k – *розв'язувальний стовпчик* нашої задачі. Якщо таких оцінок більше, ніж одна, обираємо максимальну з них:

$$\Delta_k = \max_{\Delta_j > 0} \left\{ \Delta_j \right\}.$$

Якщо в обраному векторі умов усі коефіцієнти від'ємні, то в цьому випадку говорять, що цільова функція необмежена на допустимій множині:

– для задачі на min необмежена знизу;

– для задачі на max – зверху.

Якщо якийсь коефіцієнт обраного стовпчика більший за нуль, наприклад a_{lk} , то розглядаємо рядок, який відповідає цьому коефіцієнту, тобто *l*-й рядок.

Якщо в обраному стовпчику додатних коефіцієнтів більше ніж один, дістаємо оцінку

$$\theta = \min_{a_{lk} > 0} \left\{ \frac{b_l}{a_{lk}} \right\},$$

тобто беремо відношення елементів стовпчика правих частин до елементів обраного стовпчика і розглядаємо рядок, який відповідає цьому мінімальному відношенню. Він називається *розв'язувальним* рядком. Нехай це буде *l*-й рядок. Елемент a_{lk} , розташований на перетині розв'язувального стовпчика і розв'язувального рядка, називається *розв'язувальним елементом*.

Згідно з методом Гаусса, елемент a_{lk} розв'язувального стовпчика набуває значення 1, а всі інші елементи цього стовпчика набувають значень 0. При цьому вектор умов A_k входить до числа базисних векторів, а з базиса виходить вектор A_l.

Після усіх цих операцій переходимо до нової вершини допустимої багатогранної множини, і весь процес обчислень повторюється.

Розглянемо, як працює симплекс-метод для задачі, записаної в симетричній формі та розв'язаної графічно в прикладі 1.

Приклад 3. Розв'язати симплексним методом ЗЛП:

$$z = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 3x_1 - x_2 \le 6; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

Зведемо задачу до канонічної форми:

$$z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max;$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6;$$

$$3x_1 - x_2 + \ \ x_4 = 6;$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4} \right).$$

Занесемо дані задачі в канонічній формі до симплекс-таблиці (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

N	Б	$C_{Á}$	$À_0$	1	1	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_3	0	6	-1	3	1	0
2	A_4	0	6	$\boxed{3}$	-1	0	1
$\Delta_j = z_j - c_j$				-1	-1	0	0

І крок. $\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \quad \Delta_1 = \Delta_2 = -1$. Неістотно, який вектор ввести в базис: A_1 або A_2.

Оцінка $\theta = \min\left(6/3\right) = 2$, тому за алгоритмом вводимо в базис A_1, виводимо з базису A_4, тобто $A_1 \to Á \to À_4$ (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

N	Б	$C_{\text{Á}}$	$\grave{A}_0$	1	1	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_3	0	8	0	$\boxed{8/3}$	1	$1/3$
2	A_1	1	2	1	$-1/3$	0	$1/3$
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	$-4/3$	0	$1/3$

II крок. $\Delta_2 < 0$, оцінка $\theta = \min\left(8/\left(8/3\right)\right) = 3$. Згідно з алгоритмом, $A_2 \to \text{Á} \to \grave{A}_3$ (табл. 1.5).

Таблиця 1.5

N	Б	$C_{\text{Á}}$	$\grave{A}_0$	1	1	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_2	1	3	0	1	$3/8$	$1/8$
2	A_1	1	3	1	0	$1/8$	$9/24$
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	0	$4/8$	$1/2$

У табл. 1.5 усі $\Delta_j \geq 0$, тому ця таблиця дає оптимальний розв'язок $\overline{x}_{\text{îïò}} = \{3; 3;\ 0;\ 0\}$.

Оптимальний розв'язок вихідної задачі містить лише дві координати, тому $\overline{x}_{\text{îïò}} = \{3; 3\}$.

Теорія двоїстості

Нехай шукану задачу задано у такій симетричній формі:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\,; \tag{1.22}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \left(i = \overline{1, m}\right); \tag{1.23}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{1.24}$$

Розглянемо побудову двоїстої задачі:

1) якщо вихідна задача сформульована на максимум, то двоїста до неї формулюється на мінімум;

2) коефіцієнти цільової функції вихідної задачі стають вільними членами системи обмежень двоїстої задачі;

3) вільні члени системи обмежень вихідної задачі стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі;

4) матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі є транспонованою до матриці коефіцієнтів системи обмежень вихідної задачі;

5) знаки нерівностей в обмеженнях двоїстої задачі протилежні знакам нерівностей обмежень вихідної задачі.

Якщо вихідну задачу записано в симетричній формі, то двоїста до неї теж буде симетричною:

$$z' = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min; \tag{1.22′}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \left(j = \overline{1,n} \right); \tag{1.23′}$$

$$y_i \ge 0 \left(i = \overline{1,m} \right). \tag{1.24′}$$

Задачі (1.22) – (1.24) і (1.22′) – (1.24′) називають *двоїстими* або *спряженими*. Їх оптимальні розв’язки тісно пов’язані між собою.

Теорема двоїстості. Якщо одна із задач має розв’язок, то і друга задача теж має розв’язок, до того ж для оптимальних розв’язків цих задач $\overline{x} = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n \right)$ і $\overline{y} = \left(y_1; y_2; \ldots; y_m \right)$ виконується умова

$$z\left(\overline{x}\right) = z'\left(\overline{y}\right),$$

тобто значення цільових функцій збігаються.

Зауваження. 1. Якщо цільова функція однієї із двоїстих задач необмежена, то двоїста задача не має допустимих розв’язків.

2. Розв’язок двоїстої задачі можна отримати в останній симплекс-таблиці вихідної задачі в рядку оцінок у стовпчиках, які відповідають додатковим змінним.

3. Розв’язок задачі (1.22) – (1.24) можна отримати множенням на (–1) відповідних елементів рядка оцінок останньої симплекс-таблиці двоїстої задачі.

Якщо вихідна задача подається в стандартній формі, то двоїста до неї задача буде несиметричною (на двоїсті змінні не накладається умова невід’ємності (1.24').

Нехай пряму задачу задано у стандартному вигляді:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_{i,} \ \left(i = \overline{1,m}\right);$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Двоїста задача:

$$z' = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min ; \qquad (1.25)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (1.26)$$

Нехай вихідна задача має вигляд:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \ \left(i = \overline{1,m}\right);$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Двоїста задача:

$$z' = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max ; \qquad (1.27)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \leq c_j \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (1.28)$$

У двоїстих задачах (1.25), (1.26) і (1.27), (1.28) не накладається умова невід’ємності на змінні.

Приклад 3. Нехай пряму задачу записано в вигляді:

$$z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,3}\right).$$

Запишемо двоїсту задачу:

$$z' = 9y_1 + 5y_2 \to \min\,;$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 3; \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 1; \\ 5y_1 + y_2 \ge 2; \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0;\; y_2 \ge 0\,.$$

Зведемо вихідну задачу до канонічного вигляду і занесемо її в симплекс-таблицю (табл. 1.6).

Оскільки вихідна задача сформульована на $\max$, то оптимальний розв’язок буде тоді, коли $\Delta_j \ge 0$.

Таблиця 1.6

N	Á	$\tilde{N}_{Á}$	$\grave{A}_0$	3	1	2	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	0	9	1	3	5	1	0
2	A_5	0	5	2	2	1	0	1
$\Delta_j = z_j - c_j$				-3	-1	-2	0	0

Застосовуємо декілька разів алгоритм симплекс-методу, в результаті чого маємо останню симплекс-таблицю (табл. 1.7).

Таблиця 1.7

N	Á	$\tilde{N}_{Á}$	$\grave{A}_0$	3	1	2	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	3	16/9	1	7/9	0	1/9	5/9
2	A_3	2	13/9	0	4/9	1	2/9	–1/9
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	20/9	0	1/9	13/9

Оскільки в табл. 1.7 всі $\Delta_j \ge 0$, то маємо оптимальний розв’язок. Позабазисні змінні покладаємо рівними 0, тоді базисні змінні дають нам розв’язок $\bar{x} = \left\{\frac{16}{9};\, 0;\, \frac{13}{9}\right\}$.

Оптимальний розв’язок двоїстої задачі знаходиться в рядку оцінок вихідної задачі в останній симплекс-таблиці (див. табл. 1.7) в стовпчиках, які відповідають додатковим змінним (або векторам A_4, A_5).

Отже, розв’язком двоїстої задачі є $\bar{y} = \left\{ \frac{1}{9}; \frac{13}{9} \right\}$. Виконується умова теореми двоїстості $z_{\max} = z'_{\min} = \frac{74}{9}$.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановки задач про оптимальне використання ресурсів і на складання дієти.
2. Як записується ЗЛП у загальній, симетричній, стандартній, канонічній формах?
3. Що називається базисним розв’язком ЗЛП?
4. Що називається невиродженим розв’язком?
5. Що називається опуклим багатогранником і як будується допустима область ЗЛП?
6. Як графічно визначити оптимальний розв’язок ЗЛП?
7. Для яких форм запису ЗЛП можна застосовувати алгоритм симплекс-методу?
8. Як вибрати розв’язувальний стовпчик та розв’язувальний рядок? Який елемент називається розв’язувальним?
9. Коли алгоритм симплекс-методу завершує роботу?
10. Сформулюйте алгоритм запису двоїстої задачі, якщо вихідну записано в симетричній формі.
11. Який зв’язок між розв’язками вихідної і двоїстої задач? Яка необхідна і достатня умова того, щоб розв'язки $\bar{x}$ і $\bar{y}$ були розв'язками пари двоїстих задач?
12. Як будується двоїста задача, якщо вихідна задана в стандартній формі?

Приклади для самостійного розв’язування

Приклад 1. Ювелірна майстерня виготовляє прикраси двох видів A_1 і A_2. Для цього використовуються дорогоцінні метали B_1, B_2, B_3. Питомі витрати на одиницю виробу, запаси металів і вартість одиниці кожного виробу подано в табл. 1.8.

Таблиця 1.8

Види металу	Вироби		Запаси (г)
	A_1	A_2	
B_1	1	1	6
B_2	0	1	4
B_3	6	1	10
Вартість виробу (тис. грн)	1	2	

Оганізувати виробництво прикрас так, щоб прибуток від їх реалізації був би максимальним. Побудувати математичну модель задачі.

Приклад 2. Із Києва до Хмельницького необхідно перевезти обладнання трьох типів: не менше 200 одиниць 1-го типу, не менше 8 одиниць 2-го типу, не менше 150 одиниць 3-го типу. Для перевезення обладнання завод може замовити два види транспорту T_1, T_2. Кількість обладнання, що вміщується в певний вид транспорту, витрати, пов'язані з експлуатацією одиниці транспорту (у грн) наведено в табл. 1.9.

Спланувати перевезення так, щоб транспортні витрати були мінімальними. Побудувати математичну модель задачі.

Таблиця 1.9

Тип обладнання	Кількість обладнання, що вміщується на одиницю виду транспорту	
	T_1	T_2
1	7	5
2	4	1
3	3	12
Витрати, пов'язані з експлуатацією одиниці транспорту, грн	8	12

Приклад 3. Записати в стандартній та канонічній формах ЗЛП

$$F = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 8; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,3} \right).$$

Приклад 4. Знайти графічним методом розв'язок ЗЛП

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4; \\ x_1 - x_2 \le 3; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0.$$

Відповідь: $\overline{x} = \{10; 7\}$, $F_{\max} = 37$.

Приклад 5. Знайти графічним методом розв'язок ЗЛП
$$F(x) = -7x_1 - 5x_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 \ge -18; \\ 10x_1 - 14x_2 \le -8; \\ 7\tilde{o}_1 + 5x_2 \ge 35; \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

Â³äïîâ³äü: $F_{\min}(x) = \infty.$

Приклад 6. Застосувавши симплекс-метод, знайти розв'язок ЗЛП з умови прикладу 4.

Приклад 7. Побудувати двоїсту задачу для ЗЛП з умови прикладу 4 і відшукати її розв'язок.

Практичне заняття 2

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА. ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ. ПОБУДОВА ПОЧАТКОВОГО ОПОРНОГО ПЛАНУ

План

1. Економічна постановка транспортної задачі лінійного програмування.
2. Математична постановка транспортної задачі лінійного програмування.
3. Метод північно-західного кута.
4. Метод мінімальної вартості.

Література*:* [1]; [2]; [3]; [6].

Методичні рекомендації

Мета заняття – навчитися робити постановку транспортної задачі лінійного програмування (ТЗЛП) і знаходити початковий базисний розв'язок. Після виконання практичного заняття студент повинен ***знати:*** що таке збалансована транспортна задача (ТЗ); що являє собою невироджений базисний розв'язок ТЗ; алгоритм північно-західного кута; алгоритм мінімальної вартості; **у*міти:*** згідно з умовою ТЗ будувати розподільну транспортну таблицю; будувати допустимий базисний розв'язок (ДБР) за методами північно-західного кута та мінімальної вартості.

Економічна постановка транспортної задачі. Маємо m постачальників і n споживачів. Тобто є m пунктів відправлення $A_1, A_2, ..., A_m$, в яких міститься відповідно $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць однорідного вантажу, і n пунктів призначення $B_1, B_2, ..., B_n$ з потребами $b_1, b_2, ..., b_n$ відповідно. Передбачено, що від кожного постачальника A_i до кожного споживача B_j існує транспортна комунікація. Відомі транспортні затрати c_{ij} перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення.

Розглянемо випадок, коли загальний запас вантажу в пунктах відправлення дорівнює сумарним потребам у пунктах призначення, тобто виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \qquad (2.1)$$

У цьому випадку ТЗ називається *задачею закритого типу* або *збалансованою задачею*.

Потрібно скласти такий план перевезень, тобто визначити, скільки одиниць вантажу потрібно відправити з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення, щоб задовольнити всі потреби споживачів і при цьому сумарні транспортні затрати були б мінімальними.

Математична постановка ТЗ. Нехай x_{ij} – кількість вантажу, який перевозиться з пункту A_i в пункт B_j. Запишемо умови для кожного постачальника та кожного споживача:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,\, m}\right); \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,\, n}\right); \tag{2.3}$$

$$x_{ij} \ge 0 .$$

План

$$X = \left\{x_{ij}\right\},\ i = \overline{1,\, m};\ j = \overline{1,\, n} \tag{2.4}$$

повинен забезпечити мінімальну сумарну вартість перевезень, тобто потрібно знати

$$\min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}\right). \tag{2.5}$$

Оскільки ТЗ є частинним випадком ЗЛП з $\left(m \times n\right)$ невідомими і $\left(m + n\right)$ обмеженнями в формі рівнянь, для неї мають силу всі загальні означення останньої. Сформулюємо деякі твердження:

1) збалансована ТЗ завжди допустима і має оптимальний розв’язок;

2) не всі обмеження (2.2) і (2.3) є лінійно незалежними. Дійсно, якщо підсумувати (2.2) і (2.3) в силу (2.1), отримаємо одне і теж. Тому існує хоча б одна лінійна залежність. Звідси випливає, що невироджений базисний розв’язок ТЗЛП повинен містити в собі $\left(m + n - 1\right)$ зайнятих клітинок;

3) якщо в ТЗ всі числа a_i $\left(i = \overline{1,\, m}\right)$, b_j $\left(j = \overline{1,\, n}\right)$ – цілі, то хоча б один оптимальний розв’язок задачі – цілочисельний.

Оскільки вся інформація, яка стосується ТЗЛП, зводиться до матриці $C = \left\{c_{ij}\right\}$, $j = \overline{1,\, n}$, $i = \overline{1,\, m}$, до величин $a_1, a_2, ..., a_m$ і $b_1, b_2, ..., b_n$, то для наочності умови ТЗ зобразимо у вигляді *розподільної транспортної таблиці* (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

<table>
<tr><td rowspan="3">Поста чальники</td><td colspan="5">Споживачі</td><td>Запаси вантажу</td></tr>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td></td><td>B_n</td><td>a_i</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>C_{11}</td><td>C_{12}</td><td></td><td>C_{1n}</td><td>a_1</td></tr>
</table>

	A_2	C_{21}	C_{22}		C_{2n}	a_2
	...	...	...	...	...	...
	A_m	C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	a_m
Потреби у вантажі	b_j	b_1	b_2		b_n	$\sum_i a_i = \sum_j b_j$

Розв’язання ТЗЛП, як і будь-якої іншої ЗЛП, починається з побудови початкового базисного розв’язку. Існують різні методи визначення ДБР: північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги, апроксимації Фогеля. Зупинимось на перших двох.

Метод північно-західного кута

Пошук розв’язку за цим методом починають із лівого верхнього кута транспортної таблиці. Ресурси першого постачальника розподіляються так: спочатку максимально задовольняють потреби першого споживача, потім другого і т.д. до повного розподілення вантажу, який міститься в пункті відправлення A_1. Потім аналогічно розподіляють ресурси другого постачальника, третього тощо. В результаті отримаємо ДБР ТЗ у вигляді ступінчатої структури.

Приклад 1. Побудувати методом північно-західного кута початковий розв’язок ТЗ, якщо

$$a_i = (14;\ 20;\ 26;\ 41)\ ;\ b_j = (30;\ 22;\ 15;\ 34)\ ;$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 70 & 38 & 24 & 92 \\ 58 & 18 & 54 & 72 \\ 19 & 10 & 100 & 30 \\ 3 & 36 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Транспортна задача збалансована, оскільки $\sum_i a_i = \sum_j b_j = 101$. Розподіл ресурсів починаємо з верхньої лівої клітинки транспортної таблиці (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	70	38	24	92	14

	14				
A_2	58 16	18 4	54	72	20
A_3	19	10 18	100 8	30	26
A_4	3	36	12 7	8 34	41
b_j	30	22	15	34	$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 101$

ДБР заданої транспортної задачі може бути записаний у вигляді матриці

$$X = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 34 \end{pmatrix}.$$

У таблиці 2.2 маємо $m+n-1=4+4-1=7$ заповнених клітинок, тому цей розв'язок є невиродженим і йому відповідають витрати

$$f_1 = 14\cdot 70 + 16\cdot 58 + 4\cdot 18 + 18\cdot 10 + 8\cdot 100 + 7\cdot 12 + 34\cdot 8 = 3316.$$

Метод мінімальної вартості

Характерним для цього методу є те, що розподіл вантажів починається з клітинки, що відповідає найменшому тарифу з усієї таблиці тарифів c_{ij}. Відповідна клітинка завантажується максимально. При цьому можливі три випадки:

а) ресурси відповідного постачальника вичерпано;

б) потреби відповідного споживача повністю задоволено;

в) випадок а) і б) одночасно, тобто коли повністю розподілено вантаж постачальника і повністю задоволено потреби споживача.

Таблиця тарифів зменшується шляхом викреслення у випадку а) рядка, б) стовпчика, в) рядка та стовпчика.

Далі в зменшеній таблиці тарифів знову вибирають клітинку з найменшим тарифом і процес розподілу продовжують доти, доки будуть розподілені всі запаси і задоволені всі потреби споживачів.

Приклад 2. Побудувати методом мінімальної вартості початковий допустимий розв'язок для ТЗ з прикладу 1.

Розв'язання

Розподіл вантажів зображено в табл. 2.3.

ДБР може бути записаний у вигляді матриці

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 19 \\ 0 & 22 & 0 & 4 \\ 30 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 2.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	70	38	24 14	92	14
A_2	58	18	56 1	72 19	20
A_3	19	10 22	100	30 4	26
A_4	3 30	36	12	8 11	41
b_j	30	22	13	34	$\sum_{i=1} a_i = \sum_{j=1} b_j$

Знову бачимо, що в табл. 2.3 заповнених клітинок сім, тому розв'язок невироджений. Цьому допустимому плану відповідають витрати:

$$f_2 = 14 \cdot 24 + 1 \cdot 56 + 19 \cdot 72 + 22 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 30 \cdot 3 + 11 \cdot 8 = 2278.$$

Зауваження. Порівнюючи витрати на перевезення, ми бачимо, що початковий розв'язок, отриманий методом мінімальної вартості, кращий, ніж розв'язок, отриманий методом північно-західного кута.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте економічну постановку ТЗ.
2. Яка ТЗ називається задачею закритого типу?
3. Дайте математичну постановку ТЗ.
4. Що називається невиродженим базисним розв'язком?
5. Які ви знаєте методи побудови початкового розв'язку?
6. У чому полягає суть методу північно-західного кута?
7. У чому полягає суть методу мінімальної вартості?

Приклади для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти початковий ДБР методом північно-західного кута та методом мінімальної вартості ТЗЛП, якщо:

$$a_i = (100; 150; 50);\ b_j = (75; 80; 60; 85);\ C_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Порівняйте ці розв’язки.

Приклад 2. Побудувати початковий ДБР методом північно-західного кута та методом мінімальної вартості ТЗЛП, що задано табл. 2.4. Порівняйте ці розв’язки.

Таблиця 2.4

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4	1	2	5	3	200
A_2	2	1	8	3	5	100
A_3	4	8	7	1	2	150
A_4	6	2	5	7	4	50
b_j	150	150	50	60	90	

Практичне заняття 3

МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ

План

1. Суть методу потенціалів.
2. Постановка транспортної задачі лінійного програмування відкритого типу.
3. Метод розв’язку транспортної задачі з розбалансом.

Література: [1]; [2]; [3]; [6].

Методичні рекомендації

Мета заняття – навчитися розв’язувати ТЗЛП методом потенціалів; навчитися розв’язувати ТЗЛП з розбалансом. Після виконання практичного заняття студент повинен ***знати:*** як записується двоїста задача до задачі (2.1) – (2.5); двоїстий критерій оптимальності розв’язку ТЗЛП; суть методу потенціалів; постановку ТЗ відкритого типу, як вона зводиться до задачі закритого типу; ***уміти:*** будувати потенціали для кожного постачальника і кожного споживача; перевіряти отриманий розв’язок на оптимальність; знаходити новий розв’язок; розв’язувати ТЗЛП з розбалансом.

Кожному постачальнику і кожному споживачеві ставлять у відповідність числа $u_i \left(i=\overline{1,\,m}\right)$ і $v_j \left(j=\overline{1,\,n}\right)$, які називають *потенціалами постачальників і споживачів* відповідно.

Тоді двоїста задача до задачі (2.1) – (2.5) полягає у визначенні потенціалів u_i і v_j, які задовольняють обмеження

$$v_j - u_i \le \tilde{n}_{ij},\, i=\overline{1,\,m};\ j=\overline{1,\,n}$$

і максимізують цільову функцію

$$\sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i .$$

Теорема (двоїстий критерій оптимальності для ТЗЛП). Допустимий базисний розв’язок $x^0=\left\{x_{ij}^0\right\}$ оптимальний тоді і тільки тоді, коли існують такі потенціали $u_i,\ i=\overline{1,\,m};\ v_j,\ j=\overline{1,\,n}$, що

$$v_j - u_i = c_{ij},\ i,j : x_{ij}^0 > 0; \tag{3.1}$$

$$v_j - u_i \le c_{ij},\ i,j : x_{ij}^0 = 0. \tag{3.2}$$

Алгоритм методу потенціалів базується на цьому критерії. Знаходиться вихідний ДБР, наприклад, за допомогою одного з методів, наведених в практичному занятті 2. Із кожним розв’язком пов’язана система потенціалів, яка визначається згідно з формулою (3.1). Передбачається, що ДБР – невироджений, тому в системі (3.1) є $\left(m+n-1\right)$ рівняння і $\left(m+n\right)$ невідомих. Відповідно до цього один з потенціалів, який вибирається довільно, може бути покладений довільній константі (найчастіше нулю). Після цього система стає замкненою, і обчислюються всі інші потенціали.

Далі перевіряється умова (3.2). Якщо умова (3.2) виконується, то ДБР – оптимальний. Якщо існує клітинка (k,l) така, що $v_l - u_k > c_{kl}$, то змінна x_{kl} повинна бути введена в число базисних. А якщо таких клітинок декілька, то вибирають клітинку (k,l) за умовою

$$\left[\left(v_l - u_k\right) - \tilde{n}_{kl}\right] = \max\left[\left(v_j - u_i\right) - c_{ij}\right].$$

Для перерозподілу поставок будують цикл. У вершинах циклу розставляють знаки «+» і «–», починаючи з клітинки (k,l), у яку ставлять знак «+», потім вздовж циклу знаки чергуються.

Далі обчислюємо оцінку θ для клітинок циклу зі знаком «–», тобто визначаємо:

$$\theta = \min\left\{x_{ij}^0\right\},\ (i,j)\ \text{є «–»}.$$

Будуємо новий базисний розв’язок

$$\tilde{o}^1 = \left\{x_{ij}^1,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right\}$$

за таким правилом:

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} x_{ij}^0, \text{ÿêù î } (i,j) - \text{í å í àëåæèòü ì í î æèí ³ âåðø èí öèêëó;} \\ x_{ij}^0 + \theta, \text{ÿêù î } (i,j) - \text{í àëåæèòü ì í î æèí ³ âåðø èí öèêëó ç³ çàêî ì «+»;} \\ x_{ij}^0 - \theta, \text{ÿêù î } (i,j) - \text{í àëåæèòü ì í î æèí ³ âåðø èí öèêëó ç³ çí àêî ì «–».} \end{cases}$$

У результаті виконання наведених дій клітинка (k,l) стає заповненою і вводиться до сукупності базисних, а клітинка з мінімальним числом x_{ij}^0 стає порожньою і перестає бути базисною. Новий розв’язок перевіряють на оптимальність згідно з умовою (3.2) розглянутого алгоритму і все повторюється.

Розглянемо застосування методу потенціалів для розв’язування ТЗ.

Приклад 1. Знайти методом потенціалів оптимальний розв’язок ТЗ, якщо

$$a_i = (100;\ 200;\ 100),\ b_j = (80;\ 140;\ 100;\ 80),\ C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Маємо задачу закритого типу. Вихідний ДБР побудуємо методом північно-західного кута, а потім покладаємо $u_3 = 0$ і визначаємо всі інші потенціали (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	2 80	5 20	4	6	100	0
A_2	8	4 − 120	3 + 80	8	200	1
A_3	5	1 + 	4 − 20	5 80	100	0
b_j	80	140	100	80	$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 400$	
v_j	2	5	4	5		

Далі застосовуємо метод потенціалів (табл. 3.2, 3.3).

Таблиця 3.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	2 80	5 − 20	4	6 + 	100	-1
A_2	8	4 100	3 100	8	200	-3
A_3	5	1 + 20	4	5 − 80	100	0
b_j	80	140	100	80	$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 400$	
v_j	-2	1	0	5		

Таблиця 3.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	2 80	5	4	6 20	100	-1
A_2	8	4 100	3 100	8	200	-3
A_3	5	1 40	4	5 60	100	0
b_j	80	140	100	80	$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 400$	
v_j	1	1	0	5		

Критерій оптимальності (табл. 3.3) виконується, тому ця таблиця дає оптимальний розв'язок:

$$X=\begin{pmatrix}80 & 0 & 0 & 20\\ 0 & 100 & 100 & 0\\ 0 & 40 & 0 & 60\end{pmatrix},\quad Z_{\min}=1120.$$

Транспортна задача лінійного програмування з розбалансом

Транспортна задача лінійного програмування, в якій виконується умова

$$\text{а) } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ або б) } \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

називається задачею *відкритого типу* або *задачею з розбалансом*.

У випадку а) всіх потреб споживачів задовольнити неможливо, але розв'язок, який відповідає мінімальним транспортним витратам, побудувати можна. Для цього вводять фіктивного постачальника A_{m+1}, якому приписують запас вантажу, що дорівнює $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j-\sum_{i=1}^{m} a_i$. Усі тарифи на перевезення вантажу від цього фіктивного постачальника вважатимемо рівними нулю, тобто $c_{m+1,j}=0$ для будь-якого $j=\overline{1,n}$.

У транспортній таблиці додається один рядок. На цільову функцію це не вплине, а система обмежень задачі стане сумісною. Відкрита модель ТЗЛП перетворюється на закриту. Ця розширена ТЗЛП може бути розв'язана методом потенціалів. Нехай x^* – оптимальний розв'язок цієї задачі. Тоді $x^*_{m+1,j}>0,\quad j=\overline{1,n}$ – об'єм вантажу, не доставленого споживачеві B_j.

У випадку б) в математичну модель ТЗ вводиться фіктивний пункт призначення B_{n+1} з потребами $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i-\sum_{j=1}^{n} b_j$. Усі тарифи на перевезення в цей пункт вважатимемо рівними нулю, тобто $c_{i,n+1}=0,\ i=\overline{1,m}$.

У транспортній таблиці додається один стовпчик. Відкрита модель задачі перетворюється на закриту. Для нової задачі цільова функція та сама, що і для вихідної, оскільки ціни на додаткові перевезення дорівнюють нулю. Ця задача може бути розв’язана методом потенціалів. Нехай x^* – оптимальний розв’язок цієї задачі. Тоді $x^*_{i,n+1} > 0,\ i = \overline{1,m}$ – залишок вантажу на складі з номером $\grave{A}_i$.

Зауваження. На будь-якій ітерації в методі потенціалів базисний розв’язок розглядають невиродженим, тобто таким, який повинен містити $m+n-1$ зайнятих клітинок.

Приклад 2. Знайти оптимальний розв’язок ТЗЛП, умову якої задано в табл. 3.4.

Таблиця 3.4

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	^{17}	^{10}	^{5}	^{5}	^{13}	34
A_2	^{12}	^{28}	^{25}	^{9}	^{10}	18
A_3	^{14}	^{15}	^{18}	^{9}	^{28}	6
A_4	^{25}	^{16}	^{21}	^{12}	^{8}	12
b_j	20	20	10	15	35	

Розв’язання

Перевіряємо задачу на збалансованість: $\sum_{i=1}^{4} a_i = 70;\ \sum_{j=1}^{5} b_j = 100.$

Оскільки $\sum_{i=1}^{4} a_i < \sum_{j=1}^{5} b_j$, то вводимо фіктивного постачальника A_5 з вантажем $a_5 = 100 - 70 = 30$. Запишемо розширену розподільчу таблицю (табл. 3.5), до якої потім застосуємо метод потенціалів. Початковий базисний розв'язок знайдемо методом мінімальної вартості.

Таблиця 3.5

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	^{17}	^{20} 9	^{7} 10	^{5} 15	^{13}	34	0
A_2	^{12} 1	^{28}	^{25}	^{9}	^{10}	18	-3

	8						
A_3	^{14} 2	^{15} 4	^{18}	^{9}	^{28}	6	-5
A_4	^{25}	^{16} − 7	^{21}	^{12}	^{8} + 5	12	-6
A_5	^{0}	^{0} +	^{0}	^{0}	^{0} − 30	30	2
b_j	2 0	20	10	15	35		
v_j	9	10	7	5	2		

У табл. 3.5 $m+n-1=5+5-1=9$, тобто розв'язок невироджений. Подальший розв'язок наведено в таблицях 3.6 – 3.8.

Таблиця 3.6

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	^{17}	^{20} 9	^{7} 10	^{5} 15	^{13}	34	0
A_2	^{12} 18 −	^{28}	^{25}	^{9}	^{10} +	18	-3
A_3	^{14} 2 +	^{15} − 4	^{18}	^{9}	^{28}	6	-5
A_4	^{25}	^{16}	^{21}	^{12}	^{8} 12	12	2
A_5	^{0}	^{0} + 7	^{0}	^{0}	^{0} − 23	30	10
b_j	20	20	10	15	35		
v_j	9	10	7	5	2		

Таблиця 3.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	^{17}	^{20} 9	^{7} 10	^{5} 15	^{13}	34	0
A_2	^{12} − 14	^{28}	^{25}	^{9}	^{10} + 4	18	0
A_3	^{14} 6	^{15}	^{18}	^{9}	^{28}	6	-2
A_4	^{25}	^{16}	^{21}	^{12}	^{8} 12	12	2
A_5	^{0} +	^{0} 11	^{0}	^{0}	^{0} − 19	30	10
b_j	20	20	10	15	35		
v_j	9	10	7	5	2		

Таблиця 3.8

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i

$\grave{A}_1$	^{17}	^{20} 9	^{7} 10	^{5} 15	^{13}	34	0
$\grave{A}_2$	^{12}	^{28}	^{25}	^{9}	^{10} 18	18	0
$\grave{A}_3$	^{14} 6	^{15} 4	^{18}	^{9}	^{28}	6	-4
$\grave{A}_4$	^{25}	^{16}	^{21}	^{12}	^{8} 12	12	-6
$\grave{A}_5$	^{0} 14	^{0} 11	^{0}	^{0}	^{0} 5	30	10
b_j	20	20	10	15	35		
v_j	9	10	7	5	2		

В останній таблиці (табл. 3.8) виконується критерій оптимальності, тому ця таблиця дає оптимальний розв’язок:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 10 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 14 & 11 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad Z_{\min} = 745.$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Як записується двоїста задача до ТЗ закритого типу?
2. Як формулюється двоїстий критерій оптимальності для ТЗЛП?
3. Як визначаються потенціали?
4. Дайте означення ТЗ відкритого типу.
5. Як ТЗ відкритого типу (два випадки) зводиться до задачі закритого типу?

Приклади для самостійного розв’язування

Приклад 1. Розв’язати ТЗЛП (табл. 3.9), застосувавши метод потенціалів. Початковий розв’язок знайти методом північно-західного кута та методом мінімальної вартості.

Таблиця 3.9

$\grave{A}_i$ \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i

$\grave{A}_1$	3	8	2	1	65
$\grave{A}_2$	5	7	4	2	55
$\grave{A}_3$	3	2	8	6	70
b_j	30	60	58	42	

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 58 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 42 \\ 10 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Z_{\min} = 436.$

Приклад 2. Розв'язати ТЗЛП відкритого типу, застосувавши метод потенціалів, якщо $a_i = (160; 140; 60)$, $b_j = (80; 80; 60; 80)$,

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\tilde{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 & 20 \\ 20 & 80 & 0 & 0 & 40 \\ 60 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Z_{\min} = 780.$

Практичне заняття 4

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ. АЛГОРИТМ УГОРСЬКОГО МЕТОДУ

План

1. Економічна постановка та математична модель задачі про оптимальні призначення.
2. Суть угорського методу розв'язування поставленої задачі.

Література: $[2]; [4]; [6]$.

Методичні рекомендації

Мета заняття – навчитися робити постановку задачі про призначення та застосовувати угорський алгоритм. Після виконання практичного заняття студент повинен ***знати:*** економічну постановку задачі про оптимальні призначення; алгоритм угорського методу; ***уміти:*** записувати математичну модель задачі про оптимальні призначення; застосовувати алгоритм угорського методу до поставленої задачі.

Економічна постановка задачі. Є n видів робіт та n виконавців цих робіт. Передбачено, що i-й виконавець може виконати будь-яку j-ту роботу, але з цим пов'язані витрати c_{ij}.

Ці витрати утворюють матрицю $C = \left\{c_{ij}\right\}$, $i = \overline{1,\, n};\ j = \overline{1,\, n}.$ Потрібно призначити кожного виконавця на виконання однієї роботи так, щоб пов'язані з цим витрати були мінімальними.

Математична модель задачі. Знайти матрицю $X = \left\{x_{ij}\right\}$, $i = \overline{1,\, n};\ j = \overline{1,\, n}$ розв'язків поставленої задачі, де

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ÿêù î } i\text{-é âèêî í àâåöü âèêî í óº } j\text{-òó ðî áî òó,} \\ 0, \text{ ÿêù î } i\text{-é âèêî í àâåöü í å âèêî í óº } j\text{-òó ðî áî òó.} \end{cases}$$

При цьому виконуються такі обмеження:

$\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\left(i = \overline{1,n}\right)$ – кожен виконавець отримав роботу;

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\left(j = \overline{1,n}\right)$ – кожна робота отримала виконавця

і мінімізується така цільова функція:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

Поставлену задачу розв'язують угорським методом. Розглянемо суть цього методу.

Крок 0. Перетворюємо матрицю C на матрицю $C'\ \left(C \to C'\right)$:

$$C' = \left\{c'_{ij}\right\} = \left\{c_{ij} - \min_{1 \le i \le n} c_{ij}\right\}.$$

Матрицю C' перетворюємо на матрицю $D\left(C' \to D\right)$:

$$D = \left\{ d_{ij} \right\} = \left\{ c'_{ij} - \min_{1 \le j \le n} c'_{ij} \right\}.$$

Матриця D містить у собі щонайменше один нуль у кожному рядку і кожному стовпчику.

Крок 1. а) Позначаємо зірочкою «*» будь-який нуль першого стовпчика матриці D, позначаємо зірочкою «*» будь-який нуль другого стовпчика матриці D, який не лежить у рядку з раніше позначеним нулем. Якщо такого немає, переходимо до третього стовпчика і так далі;

б) якщо кількість нулів із «*» дорівнює n, тобто $0^* = n$, то на цьому зупиняємося і задача вважається розв'язаною. До того ж на місці x_{ij}, які відповідають 0*, ставимо 1, інші елементи прирівнюємо до нуля;

в) якщо $0^* < n$, то переходимо на крок 2.

Крок 2. а) Позначаємо «+» стовпчики, які містять 0*, і вважаємо елементи цих стовпчиків *зайнятими*. Надалі з'являться і зайняті рядки. *Незайняті елементи* – це елементи, які лежать на перетині незайнятого рядка і незайнятого стовпчика;

б) якщо в матриці немає жодного незайнятого нуля, то переходимо на крок 5;

в) якщо є незайняті нулі, то позначаємо штрихом «'» перший незайнятий нуль, продивляючись по черзі рядки матриці D;

г) якщо в рядку з $0'$ немає 0*, то переходимо на крок 4.

Крок 3. Знімаємо зайнятість «+» з елементів стовпчика (позначаємо $\oplus$), в яких є 0*, і вважаємо їх незайнятими. Елементи рядка з $0'$ вважаємо зайнятими (ставимо «+» на i-му рядку) і переходимо на крок 2, пункт *б*.

Крок 4. Будуємо ланцюжок від $0'$ до 0*, далі по горизонталі до $0'$; далі по вертикалі до 0* і так далі, доки він не обірветься на одному з $0'$ (можливо, на першому). Знімаємо зірочки «*» з нулів вздовж ланцюжка, а кожний штрих «'» замінюємо на «*». Знімаємо всі позначки, крім зірочок «*». При цьому кількість 0* збільшилась на один. Далі переходимо на крок 1, пункт *б*.

Крок 5. Знаходимо мінімальний незайнятий елемент, який віднімаємо від елементів усіх незайнятих рядків, і додаємо до елементів усіх зайнятих стовпчиків, при цьому з'явиться щонайменше один незайнятий нуль, далі переходимо на крок 2, пункт *в*.

Зауваження. 1. Якщо в задачі про оптимальні призначення цільову функцію треба максимізувати, то для її розв’язання можна застосувати угорський метод, замінивши матрицю C на $(-C)$.

2. За означенням у задачі про оптимальні призначення матриця витрат квадратна. Якщо матриця C не є квадратною, то вона перетворюється до такої додаванням потрібної кількості додаткових рядків або стовпців з відповідними елементами $c_{ij} = 0$.

У першому випадку роботи, що отримали оптимальні призначення в додаткових рядках, залишаються без виконавців. У другому – виконавці, що отримали оптимальні призначення в додаткових стовпцях, залишаються без роботи.

Приклад. Розв’язати угорським методом задачу про призначення, задану матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 20 & 16 \\ 12 & 13 & 17 & 14 \\ 14 & 16 & 19 & 18 \\ 14 & 15 & 18 & 20 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Виконуємо дії згідно з алгоритмом угорського методу.

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 20 & 16 \\ 12 & 13 & 17 & 14 \\ 14 & 16 & 19 & 18 \\ 14 & 15 & 18 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow C' \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow D \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & \oplus & + & - \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0^* & 0 & 0' \\ 1 & \boxed{1} & 0^* & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

$\boxed{1}$ – мінімальний незайнятий елемент матриці за алгоритмом.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} + & \oplus & \oplus & - \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0^* & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0^* & 1 & 0' \\ 1 & 0' & 0^* & 1 \\ 2 & 0' & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} - \\ + \\ + \\ - \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0^* & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0^* \\ 1 & 0' & 0^* & 1 \\ 2 & 0^* & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

В отриманій матриці кількість нулів з зірочкою дорівнює 4 (розміру матриці C), тому вона дає оптимальний розв’язок задачі:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно з цією матрицею, оптимальні призначення запишуться так:

$$1 \to 1 \quad 2 \to 4 \quad 3 \to 3 \quad 4 \to 2$$

Витрати від оптимального призначення становлять

$$F = 11 + 14 + 19 + 15 = 59.$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте економічну постановку задачі про оптимальні призначення.
2. Як будується математична модель задачі про оптимальні призначення?
3. У чому полягає суть угорського методу?

Приклади для самостійного розв'язування

Розв'язати задачі про призначення угорським методом за заданими матрицями.

Приклад 1.

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \textit{ Відповідь: } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ F = 10.$$

Приклад 2.

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 \\ 5 & 14 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 12 & 14 & 10 & 4 \\ 14 & 16 & 18 & 19 & 10 & 12 \\ 12 & 10 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 12 & 10 & 12 & 10 & 12 \end{pmatrix}. \text{ *Відповідь:* } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ F = 43.$$

Практичне заняття 5

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ІГОР. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНФЛІКТНИХ СИТУАЦІЙ. ГРА В ЧИСТИХ СТРАТЕГІЯХ. ГРА ДВОХ ОСІБ У ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЯХ

План

1. Основні означення теорії ігор.
2. Загальна постановка задачі.
3. Знаходження розв’язку гри в чистих стратегіях.
4. Математична постановка та розв’язання гри в змішаних стратегіях.

Література*:* [1]; [3]; [5].

Методичні рекомендації

Мета заняття – навчитися розв’язувати матричні ігри в чистих та в змішаних стратегіях. Після виконання практичного заняття студент повинен ***знати*****:** основні поняття теорії матричних ігор; загальну постановку задачі; ***уміти***: знаходити розв’язки матричної гри в чистих стратегіях; записувати математичну модель і розв’язувати матричну гру в змішаних стратегіях.

Ситуація, в якій беруть участь сторони, інтереси яких повністю або частково протилежні, називається *конфліктною*. *Грою* називається математична модель конфліктної ситуації.

У грі є щонайменше дві сторони, які протистоять одна одній. Кожний гравець може вибирати певний план дій, що називається *стратегією*. Гравець може діяти за однією стратегією або за їх комбінацією. Якщо використовується лише одна стратегія, вона називається *чистою*. У відповідь суперник може також застосувати одну з чистих стратегій або їх комплекс. Залежно від вибраної кожним учасником стратегії визначаються певні виграші. Якщо маємо *парну гру*, тобто двоє учасників, то виграш підраховується для одного з них, тоді програш другого визначається як від'ємний виграш. Кількісна оцінка наслідків гри називається *платежем.*

Парна гра називається *грою з нульовою сумою* або *антагоністичною*, якщо виграш одного гравця дорівнює програшу другого, тобто сума виграшів дорівнює нулю.

Отже, *матричною грою* називається скінченна безкоаліційна гра двох гравців із нульовою сумою.

Зауваження. Матрична гра завжди має розв'язок, і вона, як буде показано далі, легко зводиться до ЗЛП.

Для знаходження розв'язку гри потрібно визначити для кожного гравця *оптимальну стратегію*, тобто один з гравців повинен отримати максимальний виграш за умови, що другий гравець дотримується своєї стратегії; разом із тим другий гравець повинен мати мінімальний програш за умови, що перший дотримується своєї стратегії.

Загальна постановка матричної гри. Нехай перший гравець має m стратегій A_i $\left(i=\overline{1,\, m}\right)$, а другий – n стратегій B_j $\left(j=\overline{1,\, n}\right)$. Кожна зі стратегій є *чистою*. Вважаємо, що перший гравець застосовує i-ту стратегію з m можливих, а другий, не знаючи вибору першого, обирає j-ту стратегію з n можливих. Кожній парі стратегій поставлено у відповідність число a_{ij} – виграш першого гравця (програш другого гравця).

Зауваження. Для визначеності завжди відноситимемо величину a_{ij} до першого гравця, тоді виграш другого дорівнює $(-a_{ij})$.

Із чисел a_{ij} складемо матрицю

$$P=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка називається *платіжною матрицею* або *матрицею гри*.

Дані гри запишемо в табл. 5.1.

Рядки табл. 5.1 відповідають стратегіям першого гравця, а стовпці – стратегіям другого. Для кожної i-ї стратегії першого гравця визначаємо мінімальну величину виграшу як найменше значення a_{ij} у i-му рядку таблиці: $\min\limits_{j} a_{ij}$. Далі відмічаємо той рядок, де це значення (виграш) буде найбільшим і позначаємо його через α:

$$\alpha=\max_{i}\min_{j} a_{ij},\ i=\overline{1,\ m},\ \ j=\overline{1,\ n}.$$

Таблиця 5.1

Стратегії другого гравця / Стратегії першого гравця	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Число α називається *нижньою ціною гри* або *максиміном* і вказує на гарантований виграш першого гравця за будь-якої стратегії другого. Відповідна максиміну стратегія (рядок, табл. 5.1) називається *максимінною*.

Для кожної j-ї стратегії другого гравця визначаємо максимальну величину програшу як найбільше значення a_{ij} у j-му стовпці таблиці: $\max\limits_{i} a_{ij}$. Далі відмічаємо той стовпець, де це значення (програш) буде найменшим, і позначаємо його через β:

$$\beta=\min_{j}\max_{i} a_{ij},\ i=\overline{1,\ m},\ \ j=\overline{1,\ n}.$$

Число β називається *верхньою ціною гри* або *мінімаксом* і вказує на гарантований програш другого гравця. Відповідна мінімаксу стратегія (стовпець, табл. 5.1) називається *мінімаксною*.

Іншими словами, при застосуванні чистих стратегій перший гравець може гарантувати собі виграш, не менший за α, а другий – не допустити виграшу першого, більшого за β.

Якщо $\alpha = \beta = v$, то гра називається *грою із сідловою точкою*, а число v *– ціною гри*.

Сідловою точкою називається пара оптимальних стратегій (i^*, j^*), за якої досягається рівність $\alpha = \beta = v$, тобто якщо перший гравець дотримується стратегії i^*, то другий не може діяти краще, ніж застосувати стратегію j^*. Тому пара стратегій (i^*, j^*) визначає оптимальну чисту стратегію.

Для гри із сідловою точкою знаходження розв'язку полягає у виборі максимінної та мінімаксної стратегій, які є оптимальними.

Математична модель матричної гри в змішаних стратегіях. Якщо гра не має сідлової точки, то застосування чистих стратегій не дає оптимального розв'язку гри. Тоді оптимальний розв'язок гри знаходять, застосовуючи певні комбінації чистих стратегій, тобто *змішані стратегії*. Нехай гравці можуть застосовувати свої стратегії з певними ймовірностями. Завдання кожного з них перед грою полягає у визначенні цих ймовірностей. *Змішаною стратегією* називається набір ймовірностей застосування чистих стратегій.

Змішані стратегії позначають як вектори:

– для першого гравця – $\overline{X} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, де

$$x_i \geq 0, \; i = 1, ..., m, \; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1; \tag{5.1}$$

– для другого гравця – $\overline{Y} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, де

$$y_j \geq 0, \; j = 1, ..., n, \; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \tag{5.2}$$

Розв'язком задачі вважається знаходження векторів $\overline{X} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ і $\overline{Y} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ з метою визначення оптимального значення ціни гри та оптимальних стратегій.

Ціна гри v задовольняє нерівності

$$\alpha \le v \le \beta,$$

де α і β відповідно нижня та верхня ціна гри.

Згідно з основною теоремою теорії ігор (Д. Неймана), будь-яка матрична гра має розв’язок у змішаних стратегіях.

Теорема 1. Для того, щоб число v було ціною гри, а вектори $\bar{X}^* = \{x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*\}$ і $\bar{Y}^* = \{y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*\}$ – оптимальні змішані стратегії, необхідно і достатньо виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge v, \ j = 1, 2, ..., n \ \text{ і } \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le v, \ i = 1, 2, ..., m. \qquad (5.3)$$

До нерівностей (5.3) приєднуємо умови (5.1), (5.2) і отримуємо дві системи обмежень для знаходження розв’язку гри:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge v \ \left(j = \overline{1, n} \right); \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1; \\ x_i^* \ge 0 \ \left(i = \overline{1, m} \right); \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le v \ \left(i = \overline{1, m} \right); \\ \sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1; \\ y_j^* \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n} \right). \end{cases} \qquad (5.4)$$

Співвідношення (5.4) визначають математичну модель матричної гри в змішаних стратегіях.

Для розв’язування ігор 2×2, $2 \times n$ і $n \times 2$ корисною буде наступна теорема.

Теорема 2. Якщо перший гравець застосовує оптимальну змішану стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри v незалежно від того, з якими ймовірностями застосовуватиме другий гравець стратегії, що ввійшли до оптимальної.

Приклад 1. Знайти розв’язок гри, заданої матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Спочатку перевіримо наявність сідлової точки (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Стратегії другого гравця / Стратегії першого гравця	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	5	2	1	3	1
A_2	6	3	2	2	2
A_3	2	4	0	1	0
$\max\limits_i a_{ij}$	6	4	2	3	$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2$ $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2$

Нижня ціна гри $\alpha = \max\{1, 2, 0\} = 2$. Гравець A для максимізації мінімального виграшу має обрати другу стратегію A_2, яка є максимінною в цій грі.

Верхня ціна гри $\beta = \min\{6, 4, 2, 3\} = 2$. Гравець B для мінімізації максимального програшу має обрати третю стратегію B_3, яка є мінімаксною.

Оскільки $\alpha = \beta = 2$, то гра має сідлову точку і ціна гри $v = 2$. Маємо гру в чистих стратегіях.

Відповідь. Ціна гри $v = 2$, максимінна стратегія – A_2, мінімаксна – B_3.

Приклад 2. Знайти розв’язок гри, що задана матрицею $P = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв’язання

Перевіримо наявність сідлової точки цієї гри (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

Стратегії другого гравця / Стратегії першого гравця	B_1	B_2	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	3	6	3
A_2	7	5	5
$\max\limits_i a_{ij}$	7	6	$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 5$ $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 6$

Нижня ціна гри $\alpha = \max\{3, 5\} = 5$, верхня ціна – $\beta = \min\{7, 6\} = 6$. Оскільки $\alpha = 5 \neq \beta = 6$, то маємо гру в змішаних стратегіях, і ціна гри v знаходиться в межах $5 \le v \le 6$.

Змішану стратегію гравця A задамо вектором $\bar{X} = \{x_1, x_2\}$, а гравця B вектором $\bar{Y} = \{y_1, y_2\}$.

З урахуванням теореми 2 складемо систему рівнянь (5.4) для знаходження оптимальної змішаної стратегії гравця A:

$$\begin{cases} 3x_1^* + 7x_2^* = v; \\ 6x_1^* + 5x_2^* = v; \\ x_1^* + x_2^* = 1; \\ x_i^* \ge 0 \ (i = 1, 2). \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, маємо

$$x_1^* = \frac{2}{5};\ x_2^* = \frac{3}{5};\ v = \frac{27}{5} = 5,4.$$

Очевидно, що значення ціни гри $v = 5,4$ задовольняє нерівності $5 \le v \le 6$.

Знайдемо оптимальну змішану стратегію гравця B:

$$\begin{cases} 3y_1^* + 6y_2^* = v; \\ 7y_1^* + 5y_2^* = v; \\ y_1^* + y_2^* = 1; \\ y_j^* \ge 0 \ (j = 1, 2). \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, маємо

$$y_1^* = \frac{1}{5};\ y_2^* = \frac{4}{5};\ v = \frac{27}{5}.$$

Отже, розв'язком гри є оптимальні змішані стратегії $\bar{X}^* = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}$, $\bar{Y}^* = \left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}$; ціна гри $v = \frac{27}{5}$.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Що таке конфліктна ситуація?
2. Що називається грою, парною грою?

3. Що таке платіж?
4. Що називається грою з нульовою сумою?
5. Дайте означення оптимальної стратегії.
6. Опишіть постановку матричної гри.
7. Що називається нижньою та верхньою ціною гри?
8. Що таке гра із сідловою точкою?
9. Охарактеризуйте змішану стратегію.
10. Як будується математична модель матричної гри в змішаних стратегіях?

Приклади для самостійного розв'язування

Знайти розв'язок гри, що задана матрицею.

Приклад 1. $Đ=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: Ціна гри $v = 2$, максимінна стратегія – A_2 (другий рядок матриці P), мінімаксна – B_4 (четвертий стовпчик матриці P).

Приклад 2. $P=\begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $X^* = \left\{\frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right\}, Y^* = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}, \ v = 12.$

Практичне заняття 6

ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

План

1. Загальна постановка задачі динамічного програмування.
2. Принцип оптимальності.
3. Рівняння Беллмана.

Література: [1]; [3]; [4]; [5]; [7].

Методичні рекомендації

Мета заняття – ознайомитися з загальною постановкою задач динамічного програмування та засвоїти процес знаходження розв'язку багатокрокових задач. Після виконання практичного заняття студент повинен ***знати*:** постановку задачі динамічного програмування; необхідні умови застосування методу динамічного програмування до розв'язування оптимізаційних задач; поняття умовної оптимізації; принцип оптимальності; ***уміти***: записувати рівняння станів та рівняння Беллмана; записувати умовний максимум цільової функції на n-му кроці; відшукувати умовне оптимальне управління на n-му кроці.

Динамічне програмування (ДП) – метод оптимізації, що застосовується до операцій, у яких процес прийняття рішень розбито на етапи (кроки).

Загальна постановка задачі ДП. Розглянемо керований процес, перебіг якого можна розбити на кроки, що задаються. У результаті управління (прийняття певного рішення) X система (об'єкт) S переходить із початкового стану s_0 в стан s_n. Вважатимемо, що управління можна розбити на n кроків, тобто рішення приймається послідовно на кожному кроці, а управління, що переводить систему з початкового стану в кінцевий, є сукупністю n покрокових управлінь.

Нехай X_k $(k=\overline{1,n})$ – управління на k-му кроці, що переводять систему S зі стану s_0 у стан s_n; s_k – стан системи після k-го кроку управління: s_0, $s_1, \ldots,$ s_{k-1}, $s_k, \ldots,$ s_{n-1}, s_n. Маємо послідовність станів системи (рис. 6.1).

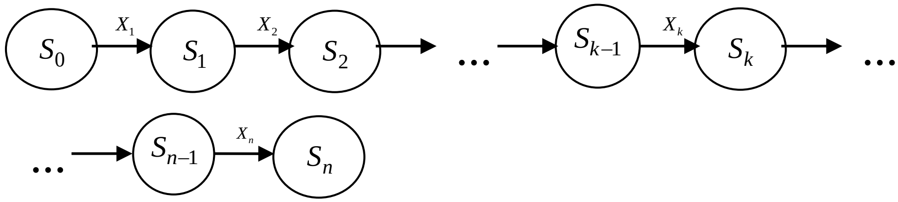


Рис. 6.1

Умова відсутності післядії. Стан s_k, до якого перейшла система S, залежить лише від попереднього стану s_{k-1} і управління на k-му кроці X_k і не залежить від того, як система S потрапила в стан s_{k-1}.

Умова відсутності післядії записується *рівняннями станів*

$$s_k = \varphi_k\left(s_{k-1}, X_k\right),\ k=\overline{1,n}. \tag{6.1}$$

Ефективність k-го кроку

$$Z_k = F_k\left(s_{k-1}, X_k\right),\ k=\overline{1,n}$$

залежить від стану s_{k-1} системи та вибраного управління X_k.

Цільова функція задачі ДП є адитивною відносно показників ефективності Z_k на кождному кроці:

$$Z=\sum_{k=1}^{n} Z_k=\sum_{k=1}^{n} F_k\left(s_{k-1}, X_k\right), \tag{6.2}$$

тобто є загальною (сумарною) ефективністю за n кроків.

Отже, постановка задачі динамічного програмування полягає в знаходженні такого оптимального управління X, яке б перевело систему S зі стану s_0 у стан s_n і мінімізувало чи максимізувало цільову функцію (6.2).

Зауваження. Надалі для визначеності розглядатимемо задачу максимізації цільової функції.

Принцип оптимальності. Яким би не був стан системи S після будь-якої кількості кроків, на черговому кроці слід вибирати управління так, щоб ефективність розглядуваного кроку в сумі з оптимальною ефективністю на всіх наступних кроках була максимальною.

Згідно з наведеним принципом, оптимальну стратегію управління можна отримати, якщо спочатку знайти оптимальну стратегію управління на n-му (останньому) кроці, потім на двох останніх кроках, потім на трьох останніх кроках і т.д. до першого кроку.

Отже, процес розв’язування задачі ДП доцільно починати зі знаходження оптимального розв’язку на останньому n-му кроці.

На n-му кроці вибираємо управління X_n так, щоб для будь-яких станів s_{n-1} отримати максимум цільової функції на цьому кроці:

$$Z_n^*\left(s_{n-1}\right)=\max_{X_n} F_n\left(s_{n-1}, X_n\right). \tag{6.3}$$

Функція $Z_n^*\left(s_{n-1}\right)$ в формулі (6.3) називається *умовним максимумом цільової функції на n-му кроці*, а управління X_n (також залежить від s_{n-1}) – *умовним оптимальним управлінням на n-му кроці* і позначається $X_n^*\left(s_{n-1}\right)$.

Розв’язавши однокрокову задачу за рівнянням (6.3), знайдемо для всіх можливих станів s_{n-1} дві функції

$$Z_n^*\left(s_{n-1}\right) \text{ і } X_n^*\left(s_{n-1}\right).$$

Далі до n-го кроку приєднаємо $\left(n-1\right)$-й крок і маємо вже двокрокову задачу. Значення цільової функції на двох останніх кроках дорівнює

$$Z_{n-1}+Z_n^*=F_{n-1}\left(s_{n-2}, X_{n-1}\right)+Z_n^*\left(s_{n-1}\right). \tag{6.4}$$

За принципом оптимальності для будь-яких s_{n-2} управління вибирають так, щоб воно разом з оптимальним управлінням на останньому n-му кроці приводило до максимуму цільову функцію на двох останніх кроках.

Знайшовши максимум виразу (6.4), який залежить від s_{n-2}, за всіма можливими управліннями X_{n-1} отримуємо *умовний максимум цільової функції на двох останніх кроках*

$$Z_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)=\max_{X_{n-1}}\left\{F_{n-1}\left(s_{n-2}, X_{n-1}\right)+Z_n^*\left(s_{n-1}\right)\right\}. \tag{6.5}$$

Відповідне управління X_{n-1} на $\left(n-1\right)$-му кроці називається *умовним оптимальним управлінням на $\left(n-1\right)$-му кроці* і позначається $X_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$.

Із рівняння (6.5) отримуємо дві функції

$$Z_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right) \text{ і } X_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right).$$

Далі до двох кроків приєднуємо $(n-2)$-й крок і маємо вже трикрокову задачу і т.д. На кожному етапі приєднання проводимо вищезазначені міркування.

Цільова функція на $(n-k)$ останніх кроках при довільному управлінні X_k на k-му кроці та оптимальному управлінні на наступних $(n-k)$ кроках дорівнює

$$F_k\left(s_{k-1}, X_k\right) + Z_{k+1}^*\left(s_k\right).$$

За принципом оптимальності X_k вибирається з умови максимуму цієї суми, а саме:

$$\begin{gathered} Z_k^*\left(s_{k-1}\right) = \max_{X_k}\left\{F_k\left(s_{k-1}, X_k\right) + Z_{k+1}^*\left(s_k\right)\right\}, \\ k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1. \end{gathered} \qquad (6.6)$$

У співвідношенні (6.6) $X_k = X_k^*\left(s_{k-1}\right)$ – *умовне оптимальне управління на* k *-му кроці*.

Зауваження. У формулі (6.6) вираз в фігурних дужках залежить лише від s_{k-1} і X_k, оскільки s_k можна визначити з рівняння станів (6.1).

Рівняння (6.6) називають *рівняннями Беллмана*. Ці рівняння дозволяють визначити попереднє значення функції, якщо відомі наступні. Якщо з (6.3) знайти $Z_n^*\left(s_{n-1}\right)$, то при $k = n-1$ з (6.6) можна визначити вираз для $Z_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$ і відповідне $X_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$. Далі, скориставшись $Z_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$, знаходимо рівняння станів за допомогою формул (6.6), (6.1).

Процес розв'язання рівнянь (6.3) і (6.6) називається *умовною оптимізацією*, в результаті якої маємо дві послідовності:

- $Z_n^*\left(s_{n-1}\right)$, $Z_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$, …, $Z_2^*\left(s_1\right)$, $Z_1^*\left(s_0\right)$ – умовні максимуми цільової функції на останньому, двох останніх, …, на n кроках;
- $X_n^*\left(s_{n-1}\right)$, $X_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$, …, $X_2^*\left(s_1\right)$, $X_1^*\left(s_0\right)$ – умовні оптимальні управління на n-му, $(n-1)$-му, …, першому кроках.

Використовуючи ці послідовності, можна знайти розв'язок задачі ДП за даними n і s_0.

$Z_1^*\left(s_0\right)$ – умовний максимум цільової функції за n кроків за умови, що система перебувала в стані s_0, тобто

$$Z_{\max} = Z_1^*\left(s_0\right).$$

Далі використовуємо послідовність умовних оптимальних управлінь і рівняння станів (6.1).

При фіксованому s_0 маємо $X_1^* = X_1^*\left(s_0\right)$. Далі з рівнянь (6.1) визначаємо $s_1^* = \varphi_1\left(s_0, X_1^*\right)$ і підставляємо цей вираз в $X_2^* = X_2^*\left(s_1\right)$; визначаємо з рівнянь (6.1) $s_2^* = \varphi_2\left(s_1, X_2^*\right)$ і підставляємо в $X_3^* = X_3^*\left(s_2\right)$ і так рухаємося до $X_n^* = X_n^*\left(s_{n-1}\right)$.

Отже, маємо оптимальний розв'язок задачі ДП

$$X^* = \left(X_1^*,\ X_2^*, ...,\ X_n^*\right).$$

Приклад 1. Корпорація має k підприємств. Для їх розвитку корпорації надано кошти в кількості K тис. грн на період m років. Ці кошти на початку кожного року розподіляються між підприємствами. Одночасно з цим між підприємствами розподіляється отриманий ними за минулий рік прибуток. Отже, на початку кожного i-го року досліджуваного періоду j-те підприємство отримує для використання x_i^j тис. грн. Задача зводиться до визначення таких розподілів x_i^j наданих коштів між підприємствами та їх прибутком, за яких за m років забезпечується максимальний прибуток всіма підприємствами.

Сформулювати загальну постановку задачі.

Розв'язання

Вважатимемо, що j-му підприємству на i-й рік надано x_i^j тис. грн, розглядатимемо даний розподіл коштів як реалізацію управління X_i. Отже, управління X_i полягає в тому, що на i-му кроці першому підприємству надається x_i^1 тис. грн, другому x_i^2 тис. грн тощо. Сукупність чисел x_i^1, x_i^2, …, x_i^k визначає сукупність управлінь X_1, X_2, …, X_m на m кроках.

За цільову функцію взято сумарний прибуток за m років, який залежить від усієї сукупності управлінь: $Z = F\left(X_1,\ X_2, ..., X_m\right)$.

Задача зводиться до вибору таких управлінь X_i^* (розподілу коштів), за яких функція Z набуває максимального значення.

Математична постановка задачі. Визначити максимальне значення функції

$$Z = \sum_{i=1}^{k} F_i\left(x_i\right)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = K,\ x_i \ge 0\ \left(i = \overline{1, k}\right).$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Яка задача називається задачею динамічного програмування?
2. Назвіть необхідні умови застосування методу динамічного програмування до розв'язування оптимізаційних задач.
3. У чому полягає принцип оптимальності?
4. Що таке умовне оптимальне управління, умовний максимум цільової функції на k -му кроці?
5. Запишить рівняння Беллмана.
6. Що називається умовною оптимізацією?

Приклади для самостійного розв’язування

Приклад 1. Для збільшення обсягів продукції чотирьом підприємствам надається $K = 700$ тис. грн. Кошти x_k $\left(k = \overline{1, 4}\right)$, надані кожному підприємству, забезпечують прибуток у кінці року $F\left(x_k\right)$ (значення x_k і $F\left(x_k\right)$). Визначити кількість коштів, які необхідно надати кожному підприємству, щоб забезпечити максимальний сумарний прибуток. Записати математичну постановку задачі.

Практичне заняття 7

НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ЗАДАЧА ПРО НАБІР ВИСОТИ ЛІТАКОМ

План

1. Постановка задачі про оптимальний режим набору висоти та швидкості.

2. Розв’язання задачі про оптимальний режим набору висоти та швидкості.

Література: [4]; [7]; [8].

Методичні рекомендації

Мета заняття – ознайомитися з постановкою задачі про оптимальний режим набору висоти та швидкості. Після виконання практичного заняття студент повинен ***знати*** постановку задачі про оптимальний режим набору висоти та швидкості та ***уміти*** розв’язувати задачу про оптимальний режим набору висоти та швидкості.

Однією з найпростіших задач ДП є задача про оптимальний режим набору висоти та швидкості літальним апаратом.

Постановка задачі. Нехай літак перебуває на висоті H_0 і має швидкість V_0. Він повинен піднятися на висоту H_k і мати швидкість V_k. Витрати пального під час підйому літака з будь-якої висоти H_1 на будь-яку висоту $H_2 > H_1$ при сталій швидкості, а також витрати пального при збільшенні швидкості від будь-якого значення V_1 до будь-якого значення $V_2 > V_1$ при сталій висоті відомі.

Визначити оптимальне управління набором висоти й швидкості, за якого загальні витрати пального мінімальні.

Оскільки стан системи S (літака) описується двома параметрами – висотою H і швидкістю V, то розв’язок шукатимемо на площині VOH в прямокутнику, обмеженому прямими $V = V_0$, $V = V_k$, $H = H_0$, $H = H_k$ (рис. 7.1).

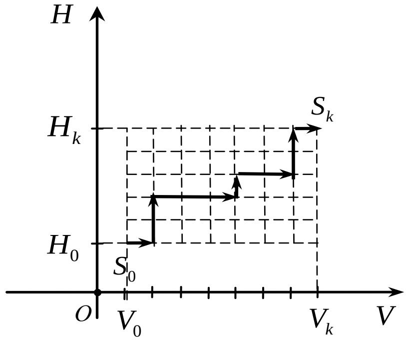


Рис. 7.1

На рис. 7.1 точки $S_0\left(V_0, H_0\right)$ і $S_k\left(V_k, H_k\right)$ визначають початковий і кінцевий стани системи.

Розіб'ємо відрізок H_0H_k на n_1, а відрізок V_0V_k – на n_2 рівних частин (етапів, кроків). Вважатимемо, що за один крок літак може або збільшити висоту на величину $\Delta H = \dfrac{H_k - H_0}{n_1}$, або збільшити швидкість на величину $\Delta V = \dfrac{V_k - V_0}{n_2}$. Сумарна кількість кроків переходу літака зі стану S_0 у стан S_k становить $m = n_1 + n_2$.

Є багато варіантів руху (управлінь) системи S зі стану S_0 в стан S_k, що являють собою ламані лінії. Необхідно з множини управлінь вибрати таке, за якого мінімізуються витрати пального Z, що є сумою витрат пального на кожному кроці відповідної ламаної лінії. Більш детально процес розв'язання задачі розглянемо на прикладі.

Приклад. Розв'язати задачу про оптимальний режим набору висоти та швидкості. Умову задачі наведено на рис. 7.2.

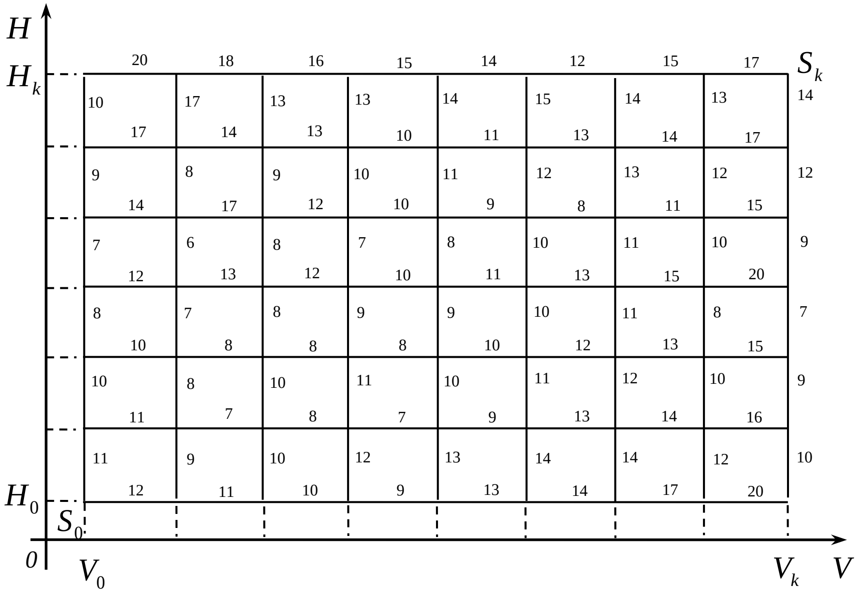


Рис. 7.2

Розв’язання

На кожному кроці задано витрати пального: на вертикальних лініях – витрати під час набору висоти, а на горизонтальних – під час зміни швидкості.

Увесь процес розв’язання розбито на $m = 8 + 6 = 14$ кроків. Беручи до уваги принцип оптимальності, починаємо проводити оптимізацію з останнього кроку. В точку S_k (рис. 7.3) можна потрапити або з точки A_1, або з точки A_2 єдиним способом. Отже, на останньому кроці управління єдине. Якщо на передостанньому кроці ми перебували в точці A_1, то в точку S_k літак може потрапити лише внаслідок збільшення швидкості (рух по горизонталі), й витрати пального при цьому становлять 17 од.

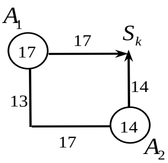


Рис. 7.3

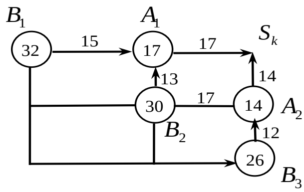


Рис. 7.4

Якщо ж на передостанньому кроці ми перебували в точці A_2, то в точку S_k можна потрапити лише внаслідок набору висоти (рух по вертикалі), й витрати пального при цьому становлять 14 од. Ці значення є одночасно й мінімальними, записуємо їх у кружки біля точок A_1 і A_2. Надалі в кружках позначатимемо мінімальні витрати пального при переміщенні літака з даної точки в кінцеву. Оптимальне управління відмічаємо стрілкою, що виходить з кружка.

Далі сплануємо передостанній (тринадцятий) крок. Для вибору умовно оптимальних управлінь на цьому кроці необхідно розглянути можливі стани, в які може потрапити система на дванадцятому кроці. У точки A_1 і A_2 за один крок можна потрапити з точок B_1, B_2, B_3 (рис. 7.4). Знайдемо умовно оптимальне управління для цих станів і відповідні цьому управлінню витрати пального. Зокрема для точки B_1 вибору немає: рух лише по горизонталі (збільшення швидкості) і витрати пального становлять $15+17=32$ од. (це значення вписано в кружок біля точки B_1). Умовно оптимальне управління зображено стрілкою. Із точки B_2 в S_k можливі два шляхи: через точку A_1 або точку A_2. У першому випадку витрати становлять $13+17=30$ од., а в другому – $17+14=31$ од. Вибираємо управління через точку A_1 і записуємо мінімальниі витрати в кружок біля цієї точки. Отже, оптимальна траєкторія з точки B_2 в S_k проходить через A_1, шлях відмічаємо стрілкою. Для точки B_3 рух можливий лише по вертикалі (набір висоти), і витрати пального становлять $12+14=26$ од. (це значення вписано в кружок біля точки B_3). Умовно оптимальне управління зображено стрілкою.

Для точок B_1, B_2, B_3 вибрано умовно оптимальні управління, тобто тринадцятий крок сплановано.

Продовжуємо процес умовної оптимізації, послідовно рухаючись від точки до точки справа наліво і зверху вниз до точки S_0. Для цього стану вибираємо вже не умовне, а оптимальне управління та отримуємо оптимальне управління для всього процесу, якому відповідають мінімальні витрати пального 139 од. (рис. 7.5).

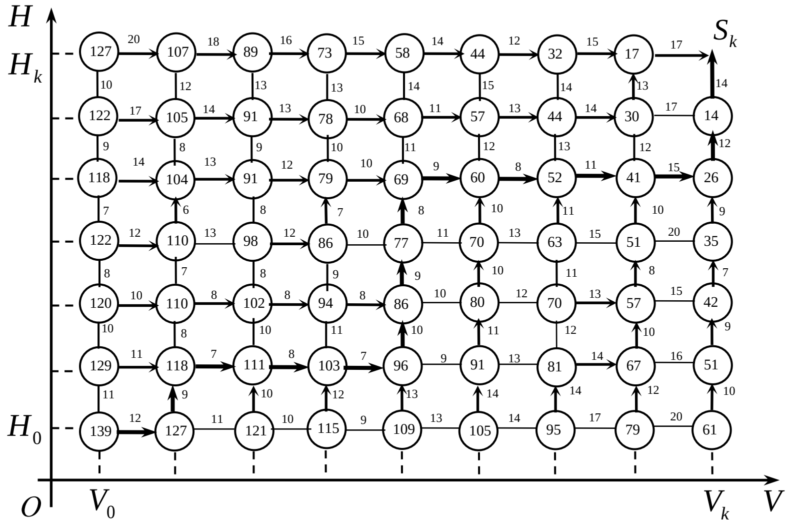


Рис. 7.5

Оптимальним управлінням буде «рух за виділеними стрілками» від точки S_0 до точки S_k (див. рис. 7.5). Оптимальному управлінню відповідають мінімальні витрати пального 139 од.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте загальну постановку задачі про оптимальний режим набору висоти та швидкості.

Приклади для самостійного розв'язування

Приклад. Нехай літак перебуває в точці S_0 на висоті H_0 і має швидкість V_0. Він повинен піднятися в точку S_k на задану висоту H_k, а його швидкість доведена до значення V_k. Відомі витрати пального під час підйому літака з будь-якої висоти H_1 на будь-яку висоту $H_2 > H_1$ при сталій швидкості, а також витрати пального при збільшенні швидкості від будь-якого значення V_1 до будь-якого значення $V_2 > V_1$ при сталій висоті (рис. 7.6). Визначити оптимальне управління набором висоти й швидкості, за якого загальні витрати пального мінімальні.

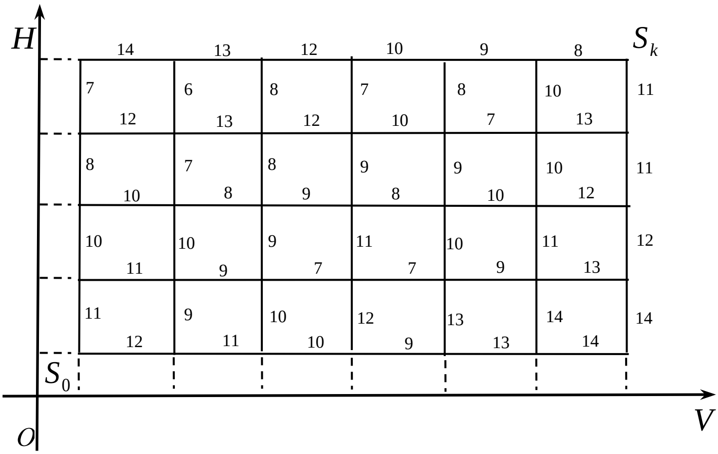


Рис. 7.6

Відповідь: мінімальні витрати становлять 88 од.

Практичне заняття 8

ЗАДАЧА ПОШУКУ НАЙКОРОТШОГО ШЛЯХУ. ПРАКТИЧНІ ПРИКЛАДИ ЗАДАЧІ ПОШУКУ НАЙКОРОТШОГО ШЛЯХУ

План

1. Постановка задачі про найкоротший шлях.
2. Розв’язування задачі про найкоротший шлях.

Література: [5]; [8]; [9].

Методичні рекомендації

Мета заняття – ознайомитися з постановкою задачі пошуку найкоротшого шляху та методами її розв'язування. Після виконання практичного заняття студент повинен ***знати*** постановку задачі про найкоротший шлях та ***уміти*** розв'язувати задачу про найкоротший шлях.

Загальну постановку задачі про вибір оптимального маршруту та її розв'язання покажемо на конкретному прикладі.

Приклад 1. Розв'язати задачу орієнтованої транспортної мережі для конфігурації шляхів, заданої в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Шлях	Дов-жина	Шлях	Дов-жина	Шлях	Дов-жина	Шлях	Дов-жина
1–2	7	2–6	8	4–6	9	6–9	4
1–3	5	3–5	6	5–7	6	7–10	9
1–4	6	3–6	3	5–8	8	8–10	7
2–5	4	4–5	10	6–8	5	9–10	11

Розв'язання

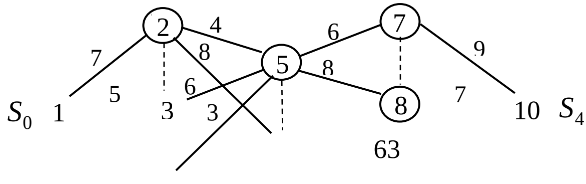
За умовою задачі транспортна мережа складається з 10 пунктів і задано відстані між пунктами (табл. 8.1). Задача має певні обмеження – рух можливий лише зліва направо (без повернення).

Отже, за даних умов необхідно з усіх можливих маршрутів (з 1-го пункту до 10-го) спланувати найкоротший маршрут.

На рис. 8.1 зображено орієнтовну мережу і відстань між її пунктами (дані з табл. 8.1). Задачу можна розв'язати шляхом перебору всіх можливих маршрутів і вибрати той, який буде найкоротшим. Очевидно, що таких маршрутів буде багато. Тому розглянемо процес розв'язування задачі з позиції принципів динамічного програмування, тобто перехід системи зі стану S_0 (пункт 1) у стан S_4 (пункт 10).

Крок 1, $S_0 - S_1$: перехід системи з пункту 1 в один з пунктів 2, 3, 4.

Крок 2, $S_1 - S_2$: перехід системи з пунктів 2, 3, 4 в один з пунктів 5, 6.



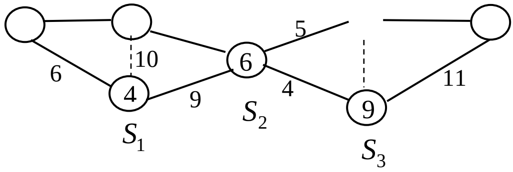


Рис. 8.1

Крок 3, $S_2 - S_3$: перехід системи з пунктів 5, 6 в один із пунктів 7, 8, 9.

Крок 4, $S_3 - S_4$: перехід системи з пунктів 7, 8, 9 у пункт 10.

Маємо чотириетапну задачу динамічного програмування. Під управлінням розуміємо ребра, що з'єднують відповідні кружки даного кроку. Із рис. 8.1 видно, що кожний стан на початку *k*-го кроку $\left(k = \overline{1,4}\right)$ і відповідне управління на цьому кроці однозначно визначають стан до кінця *k*-го кроку.

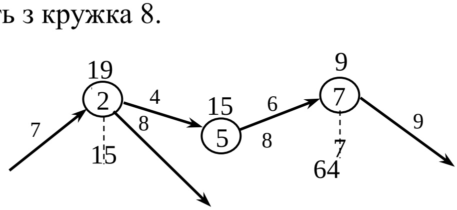
Умовним мінімумом цільової функції на *k*-му кроці є відстань між пунктами мережі даного кроку. Ці відстані задано для всіх можливих станів і всіх можливих управлінь. Адитивна цільова функція $Z_{\min}$ – це сумарні умовні мінімуми цільової функції за k кроків, тобто сумарна відстань під час переходу зі стану S_0 в стан S_4.

Отже, розв'язати задачу про вибір оптимального маршруту означає знайти множину управлінь $X^* = \left(X_1^*,\ X_2^*, ...,\ X_n^*\right)$ на кожному кроці, що забезпечує мінімізацію цільової функції

$$Z_{\min} = \sum_{x_k} F_k\left(s_{k-1},\ X_k\right).$$

Керуючись принципом оптимальності, процес розв'язування проводимо від кінцевого стану S_4 (пункт 10) до початкового S_0 (пункт 1) (рис. 8.2).

Крок 4. У пункт 10 можна потрапити з одного з пунктів 7, 8, 9. Стрілки з пунктів 7, 8, 9 – це умовні управління. Якщо рухаємося з пункту 7, то відстань становить 9 од., з пункту 8 – 7 од., з пункту 9 – 11 од. Ці значення записуємо біля кружків. Мінімальними з них є 7 од. Оптимальне управління позначаємо «жирною» стрілкою, що виходить з кружка 8.



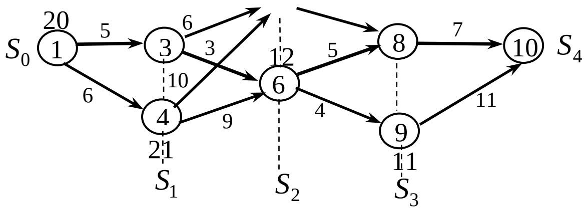


Рис. 8.2

Крок 5. В пункти 7, 8, 9 за один крок можна потрапити з пунктів 5 і 6. Знайдемо умовне оптимальне управління і відповідну йому відстань. Зокрема, в пункт 7 можна потрапити лише одним шляхом – з пункту 5, і загальна відстань буде $9+6=15$ од., в пункт 8 є два шляхи – з пунктів 5 і 6. У першому випадку відстань становить $7+8=15$ од., а в другому – $7+5=12$ од. Вибираємо оптимальне управління з пункту 6.

Аналогічно продовжуємо процес умовної оптимізації на кроках 2 і 1. Отже, оптимальний маршрут перевезення вантажів вказано на рис. 8.2 «жирними» стрілками: $1 \to 3 \to 6 \to 8 \to 10$. При цьому мінімальна відстань з пункту 1 в пункт 10 становить $Z_{\min} = 20$.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте загальну постановку задачі про пошук найкоротшого шляху.

Приклади для самостійного розв'язування

Приклад. Розв'язати задачу орієнтованої мережі для конфігурації шляхів (табл. 8.2).

Таблиця 8.2

Шлях	Дов-жина	Шлях	Дов-жина	Шлях	Дов-жина	Шлях	Дов-жина
1–2	12	3–5	18	5–8	13	7–8	21
1–3	12	3–6	21	5–9	17	7–9	12

1–4	13	3–7	15	6–8	20	7–10	17
2–5	3	4–6	21	6–9	14	8–10	6
2–6	8	4–7	20	6–10	19	9–10	10

Відповідь: Оптимальна конфігурація: $1 \to 2 \to 5 \to 8 \to 10$. При цьому мінімальна відстань з пункту 1 в пункт 10 становить $Z_{\min} = 34$.

Практичне заняття 9

ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТУ ПЕРЕВЕЗЕННЯ ВАНТАЖІВ

План

1. Алгоритм визначення оптимального маршруту перевезення вантажів.

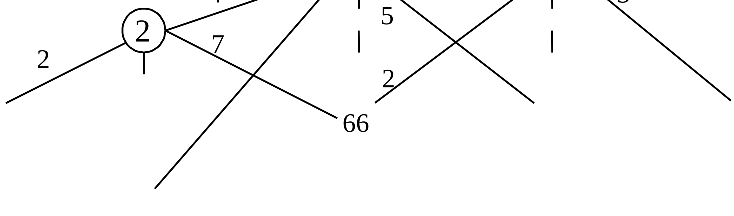
Література: $[5]$; $[8]$; $[9]$.

Методичні рекомендації

Мета заняття – ознайомитися з постановкою та алгоритмом розв’язання задачі визначення оптимального маршруту перевезення вантажів. Після виконання практичного заняття студент повинен ***знати*** постановку задачі визначення оптимального маршруту та **у*міти*** розв’язувати задачу визначення оптимального маршруту.

Загальну постановку задачі про вибір оптимального маршруту перевезення вантажів та її розв’язання покажемо на конкретному прикладі.

Приклад. На даній мережі доріг (рис. 9.1) вказано вартості доставки одиниці вантажу з пункту в пункт. Знайти найбільш економний маршрут перевезення вантажу з пункту 1 в пункт 10.



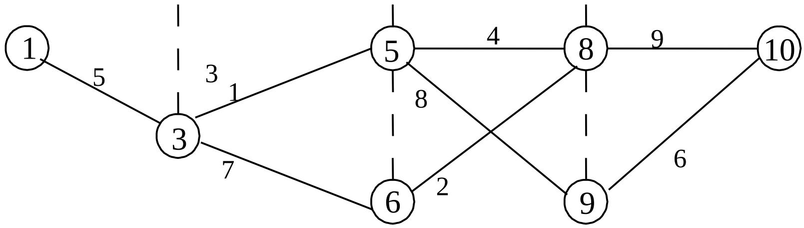


Рис. 9.1

Розв'язання

Згідно з концепцією динамічного програмування, процес прийняття рішення розіб'ємо на кроки, тобто розіб'ємо всі пункти мережі на групи. До групи I віднесемо пункт 1, до групи II – пункти 2 і 3, до групи III віднесемо пункти 4, 5, 6, до групи IV – пункти 7, 8, 9 і до V – пункт 10 (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

I	II	III	IV	V
1	2	4	7	10
-	3	5	8	-
-	-	6	9	-

Після розбиття пунктів мережі на групи формування найбільш оптимального маршруту може бути реалізовано за чотири кроки. Результати обчислень наведемо у табл. 9.2.

Починаючи з четвертого кроку прочитаємо оптимальне управління. Із табл. 9.2 видно, що з пункту 10 потрібно переправляти вантаж до пункту 7, звідти – до пункту 5, далі – до пункту 3, а з пункту 3 – до пункту 1. При безумовній оптимізації залишається пройти ще раз весь оптимізаційний процес, починаючи з першого кроку. Найбільш економний маршрут проходить через пункти 1, 3, 5, 7, 10.

Таблиця 9.2

I	II	III	IV	V
1	-	-	-	-
2	2	-	-	-
3	5	-	-	-
4	-	6_4	-	-
5	-	6_3	-	-
6	-	12_3	-	-
7	-	-	8_5	-
8	-	-	10_5	-
9	-	-	14_5	-

10	-	-	-	11_7

Відповідь: оптимальний маршрут $1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 10$, мінімальні витрати перевезення становлять 11 одиниць.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку визначення оптимального маршруту перевезення вантажів.

Приклади для самостійного розв'язування

Приклад. На даній мережі доріг (рис. 9.2) вказано вартість доставки одиниці вантажу з пункту в пункт. Знайти найбільш економний маршрут перевезення вантажу з пункту 1 в пункт 10. Чому дорівнюють сумарні витрати доставки вантажу оптимальним маршрутом?

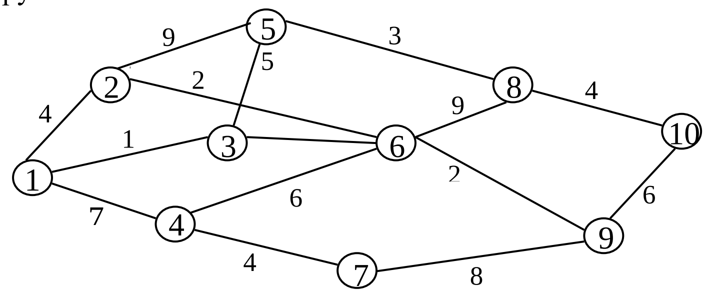


Рис. 9.2

Відповідь: $1 \to 3 \to 5 \to 8 \to 10;\ Z_{\min} = 13$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособ. для студентов эконом. спец. вузов. / И. Л. Акулич. – М. : Высш. шк., 1986 – 319 с.

2. *Глушик М. М.* Математичне програмування : навч. посіб. / М. М. Глушик, І. М. Копич, О. С. Пенцак, В. М. Сороківський. – Львів : Новий Світ – 2000, 2005. – 216 с.

3. *Кремер Н. Ш.* Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 407 с.

4. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций : учебн. / Ю. П. Зайченко. – 6-е изд., перераб. и доп.– К. : Слово, 2003. – Библиогр. 66 наим. – 688 с.

5. *Бурий В. В*. Математичне програмування. Модуль 2. Спеціальні методи математичного програмування : навч. посіб. / В. В. Бурий, О. С. Давидов, І. В. Шевченко. – К. : НАУ, 2008. – 124 с.

6. *Ластівка І. О.* Математичне програмування : методичні рекомендації до практичних занять / І. О. Ластівка, О. С. Давидов. – К. : НАУ-друк, 2010. – 84 с.

7. *Крюков М. М.* Дослідження операцій у транспортних системах у прикладах і задачах : навч. посіб. / М. М. Крюков, Т. В. Кравець, Т. В. Крижановська, В. С. Коновалюк, Т. М. Семененко. – К. : ДЕТУТ, 2010. – 199 с.

8. *Кузнецов Ю. Н.* Математическое программирование : учебник / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М. : Высш. школа, 1980 – 302 с.

9. *Романовская А. М.* Динамическое программирование : учеб. пособ. / А. М. Романовская, М. В. Мендзив. – Омск : Издатель Омский институт (филиал) РГТЭУ, 2010. – 58 с.

Навчальне видання

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації
до розв'язування задач з математичних методів
дослідження операцій
для студентів напряму підготовки
6.140103 «Туризм»

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ДАВИДОВ Олександр Сергійович
ШЕВЧЕНКО Ірина Вікторівна