МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕСНОЇ ЗМІННОЇ

Методичні рекомендації
до самостійної роботи для здобувачів вищої освіти
ОС “Бакалавр” технічних та економічних спеціальностей

Київ 2023

УДК 517.53 (072)
В 55

Укладачі:
І. О. Ластівка – д-р техн. наук, проф.;
Я. Г.Ляшенко – канд. фіз.–мат. наук, доц.;
В. К. Репета – канд. фіз.–мат. наук, доц.

Рецензент В.І.Трофименко – канд. пед. наук, доцент кафедри вищої математики (Національний авіаційний університет)

Затверджено науково-методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 4/23 від 13.04.2023 р.)

В 55 **Вища математика. Теорія функцій комплексної змінної:** методичні рекомендації до самостійної роботи уклад. : І. О. Ластівка, Я. Г. Ляшенко, В. К. Репета. – К.: НАУ, 2023.– 44 с.

Укладено відповідно до програми курсу «Вища математика». Наведено приклади розв’язання типових задач, запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для здобувачів вищої освіти ОС “Бакалавр” технічних та економічних спеціальностей.

ВСТУП

Самостійна робота здобувача вищої освіти є основним способом оволодіння навчальним матеріалом протягом часу, вільного від обов’язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь здобувачів з дисципліни «Вища математика» шляхом вироблення вміння самостійної роботи з навчальною літературою.

Самостійна робота здобувачів здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій. При цьому важливо звернути увагу на необхідність чіткого засвоєння основних термінів та означень, розуміння їх змісту, обов’язкового аналізу використання теоретичних відомостей для розв’язування пропонованих завдань.

Методичні рекомендації до самостійної роботи здобувачів вищої освіти укладено відповідно до навчальних програм курсу «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей.

У пропонованій методичній роботі наведено задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів. Значна кількість завдань для самостійної роботи має прикладну спрямованість.

Провідний викладач може коригувати кількість і зміст завдань, які студент повинен виконати самостійно протягом вивчення відповідного матеріалу.

Матеріал кожної теми відповідає робочій програмі дисципліни «Вища математика». Кожна тема містить основні методичні рекомендації, рекомендовану літературу, типові приклади з розв’язаннями та завдання для самостійного виконання, запитання для самоперевірки, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи здобувачів вищої освіти технічних та економічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичне та методичне підтримання навчального процесу студентів.

Тема 1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА І ДІЇ НАД НИМИ

План

1.Комплексні числа; алгебраїчна, тригонометрична, показникова форми запису; геометрична інтерпретація.

2. Дії з комплексними числами.

3. Формули Ейлера, Муавра, добування кореня *n*-го степеня з комплексного числа.

Література: [1] — [5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 здобувач повинен ***знати:*** означення комплексного числа, геометричну інтерпретацію, форми запису комплексного числа, формули Ейлера, Муавра, добування кореня *n*-го степеня з комплексного числа;
уміти: виконувати дії над комплексними числами, визначати модуль і аргумент комплексного числа, підносити комплексне число до n-го степеня та добувати корінь *n*-го степеня з комплексного числа.

Основні теоретичні відомості

Вираз

$$z = x + iy,$$

де x і y – дійсні числа, $i^2 = -1$, i — уявна одиниця, називають комплексним числом.

Число $x = \operatorname{Re} z$ — *дійсна частина* числа z; $y = \operatorname{Im} z$ — *уявна частина* числа z.

Геометрично комплексне число $z = x + iy$, зображають у площині Oxy точкою з координатами x та y або радіус-вектором точки $A(x; y)$ (рис. 1.1).

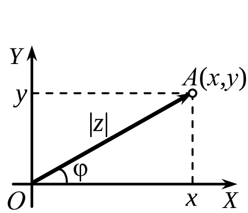

Рис. 1.1

Площину, точки якої зображають комплексні числа, називають *комплексною* *площиною і позначають буквою C*. Вісь *Ox* — *дійсна вісь*, *Oy* — *уявна вісь*.

Модуль комплексного числа $z = x + iy$ — довжина вектора $\overrightarrow{OA}$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Числа $z = x + iy$ та $\overline{z} = x - iy$ називають *спряженими*.

Справджуються рівності: $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$.

Аргумент числа z — це кут φ = Arg z, на який треба повернути навколо початку координат додатну частину дійсної осі x до збігу її напряму з напрямом вектора $\overrightarrow{OA}$. Кут φ є додатним, якщо таке обертання здійснюється проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним — у протилежному напрямі.

Якщо $z \neq 0$, то

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,$$

де $\arg z \in (-\pi; \pi]$ — *головне* значення аргументу числа z, $\operatorname{Arg} z$ — *загальне* значення аргументу z ; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Форми запису комплексного числа z (вираз у правій частині):

$z = x + iy$ — алгебраїчна форма;

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрична форма;

$z = |z|e^{i\varphi}$ — показникова форма;

Формула Муавра:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (1.1)$$

Формула добування кореня n-го степеня з комплексного числа z:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (1.2)$$

де φ = arg z, $\sqrt[n]{|z|}$ — арифметичне значення кореня, $k = 0; 1; \ldots; n-1$.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть дійсну та уявну частини комплексних чисел:

а) $z_1 = \dfrac{1}{i}$; б) $z_2 = i^{31}$; в) $z_3 = (2i-1)(3i+2)$; г) $z_4 = \dfrac{i+3}{4-3i}$.

Розв'язання: а)

$$z_1 = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i = 0 + (-1)i \Rightarrow \operatorname{Re} z_1 = 0, \operatorname{Im} z_1 = -1;$$

б) $z_2 = i^{33} = i^{32} i = \left(i^2\right)^{16} \cdot i = (-1)^{16} \cdot i = i \Rightarrow \operatorname{Re} z_2 = 0, \operatorname{Im} z_2 = 1$;

в) $z_3 = (2i-1)(3i+2) = 2i \cdot 3i + 4i - 3i - 2 = 6i^2 + i - 2 =$
$= -6 + i - 2 = -8 + i \Rightarrow \operatorname{Re} z_3 = -8, \operatorname{Im} z_3 = 1$;

г) $z_4 = \dfrac{i+3}{4-3i} = \dfrac{(i+3)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{4i+12+3i^2+9i}{16-9i^2} =$

$$= \frac{4i+12-3+9i}{16+9} = \frac{9+13i}{25} = \frac{9}{25} + \frac{13}{25} i \Rightarrow \operatorname{Re} z_4 = \frac{9}{25}, \operatorname{Im} z_4 = \frac{13}{25}.$$

Коментар. Під час ділення комплексного числа z_1 на число z_2 застосовують перетворення: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}$ ($z_2 \neq 0$).

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $z^2 - 4z + 5 = 0$.

Розв'язання. Маємо квадратне рівняння з від'ємним дискримінантом: $D = 16 - 4 \cdot 5 = -4 = (2i)^2$. Отже, рівняння має пару комплексно-спряжених коренів: $z_1 = \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i$; $z_2 = \dfrac{4-2i}{2} = 2 - i$.

Приклад 3. Знайдіть модулі та головні значення аргументів комплексних чисел і запишіть їх у тригонометричній формі:

а) $z_1 = -2$; б) $z_2 = 1 - \sqrt{3} i$; в) $z_3 = 3i$; г) $z_4 = 4 + 3i$.

Розв'язання: а) число z_1 — дійсне від'ємне. Його модуль дорівнює відстані від точки $M_1(-1;\ 0)$ до початку координат комплексної площини (рис.1.2): $|z_1| = 2$, $\arg z_1 = \varphi_1 = \pi$, $z_1 = \cos\pi + i \sin\pi$;

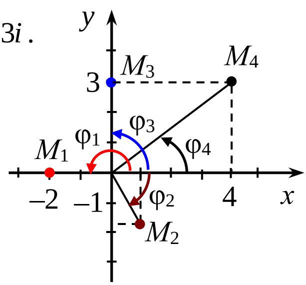

Рис. 1.2

б) $|z_2| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$,

$\cos\varphi_2 = \dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi_2 = -\dfrac{\pi}{3} \in (-\pi;\pi]$.

Отже, $z_2 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$;

в) число $z_3 = 3i$ — суто уявне, його модуль — відстань від точки $M_3(0;3)$ до початку координат: $|z_3| = 3$; $\arg z_3 = \dfrac{\pi}{2}$, тоді $z_3 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;

г) $|z_4| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \cos\varphi_4 = \dfrac{4}{5}$, $\sin\varphi_4 = \dfrac{3}{5}, \varphi_4 = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$, тоді $z_4 = 5\left(\cos\varphi_4 + i\sin\varphi_4\right)$.

Приклад 4. Обчисліть за формулою Муавра $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{12}$.

Розв'язання. У тригонометричній формі число $z = 1-\sqrt{3}i$ має вигляд $z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ (див. приклад 2, б)).

За формулою Муавра (1.1) дістанемо

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^{12} = 2^{12}\left(\cos\left(12\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(12\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) =$$

$$= 2^{12}\left(\cos(-4\pi) + i\sin(-4\pi)\right) = 2^{12}\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 2^{12} = 4096.$$

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $z^4 + 16 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $z^4 = -16$ і подамо число –16 у тригонометричній формі: $-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$.

За формулою (1.2) отримаємо

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

Послідовно визначаємо усі чотири корені заданого рівняння:

$$k=0:\ z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\ ;$$

$$k=1:\ z_2=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2};$$

$$k=2:\ z_3=2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2};$$

$$k=3:\ z_4=2\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right)=$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}\ .$$

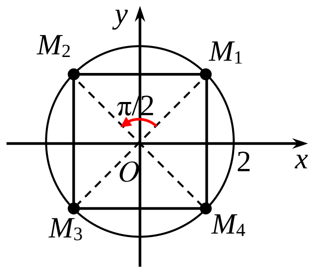

Рис. 1.3

Геометрично точки $M_k(x_k;y_k)$, що відповідають отриманим кореням $z_k=x_k+i\,y_k$, — вершини квадрата, вписаного у коло радіуса 2 з центром у початку координат (рис. 1.3).

Запитання для самоперевірки

1.Що називають уявною одиницею? Що називають комплексним числом?

2. Як геометрично позначають комплексне число?

3. Що називають модулем і аргументом комплексного числа?

4. Як записують комплексне число в тригонометричній і показниковій формах?

5. За якими правилами виконують арифметичні дії з комплексними числами?

6. Запишіть формулу Ейлера, Муавра, добування кореня n-го степеня з комплексного числа z.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть дійсну та уявну частини комплексних чисел:

а) $z=i^{45}+\frac{1}{i^{41}}$; б) $z=\left(4-i\right)\left(2+5i\right)+\frac{(1-i)^2}{1+i}$.

Завдання 2. Запишіть у тригонометричній формі комплексні числа:

а) $z=4$; б) $z=-1+i$; в) $z=-\sqrt{3}-i$; г) $z=-i$; д) $z=\sqrt{3}-\sqrt{6}i$.

Завдання 3. Обчисліть за формулою Муавра:

а) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{15}$; б) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{12}$.

Завдання 4. Розв'яжіть рівняння: а) $z^2-6z+13=0$; б) $z^2=4i$; в) $z^3=-8$.

Відповіді: 1. а) $\operatorname{Re} z=0, \operatorname{Im} z=0$; б) $\operatorname{Re} z=12, \operatorname{Im} z=17$. **2.** а) $z=4\left(\cos 0+\right.$ $\left.+i\sin 0\right)$; б) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; в) $z=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; г) $z=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; д) $z=3\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$, де $\varphi=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right)$. **3.** а) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$; б) 4096. **4.** а) $3+2i,\quad 3-2i$. б) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; в) $1+\sqrt{3}i, -2;\ 1-\sqrt{3}i$.

Тема 2. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

План

1. Означення функції комплексної змінної.
2. Основні області в комплексній площині.
3. Ряди з комплексними членами.
4. Основні елементарні функції.

Література: [1] — [5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 здобувач повинен ***знати:*** означення функції комплексної змінної, основні криві й області в комплексній площині, означення основних елементарних функцій та їхні властивості;

уміти: виокремлювати дійсну й уявну частини функції комплексної змінної, досліджувати ряди з комплексними членами на збіжність, зображувати в комплексній площині лінії та області, задані рівняннями й нерівностями.

Основні теоретичні відомості

Означення функції комплексної змінної. Якщо кожному $z \in D \subset C$ поставлено у відповідність за певним законом одне або декілька комплексних чисел $w \in E \subset C$, то кажуть, що на множині D визначено *функцію комплексної змінної*, і пишуть $w = f(z)$.

Якщо кожному $z \in D$ ставиться у відповідність тільки одне число w, то функцію $w = f(z)$ називають *однозначною*, а якщо більше, ніж одне значення w — *багатозначною*.

Функцію $w = f(z)$ можна записати у вигляді

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

де $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ — дійсні функції дійсних аргументів x та y.

Основні області в комплексній площині. Множину D комплексної площини називають *областю*, якщо вона є *відкритою* і *зв'язною*, тобто:

1) разом із кожною точкою із D цій множині цілком належить і певний круг із центром у цій точці;

2) будь-які дві точки множини D можна сполучити неперервною лінією, що повністю лежить в D.

Область D називають однозв'язною, якщо разом із будь-якою неперервною замкненою самонеперетинаючою кривою, проведеною в D, області D належить і вся область, що обмежена цією кривою.

Приклади однозв'язних областей: круг $|z - z_0| < R$, вся комплексна площина z, півплощини $\operatorname{Re} z > 0$ та $\operatorname{Im} z < 0$ тощо.

Зазначимо, що кільце $r < |z - z_0| < R$, де $0 \le r < R$, — це двозв'язна область.

Околом (δ-околом) точки називатимемо круг $|z - z_0| < \delta$ з центром у точці z_0 і радіусом δ. Узагалі, під околом точки z_0 розуміють будь-яку область, всередині якої міститься точка z_0.

Ряди з комплексними членами. Вираз вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots ,$$

де $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — комплексні числа, називають *числовим рядом* (у комплексній області).

Степеневим рядом називають ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots , \qquad (2.1)$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — комплексні коефіцієнти степеневого ряду; $z = x + iy$ — комплексна змінна, z_0 — фіксоване комплексне число.

При $z_0 = 0$ степеневий ряд (2.1) набуває вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots .$$

Сукупність усіх значень z, за яких ряд (2.1) збігається, називають його областю збіжності.

Формули для визначення радіуса збіжності степеневого ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ або } R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Основні елементарні функції та їхні властивості:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots ;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots ;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... ;$$

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$ — формула Ейлера;

e^z — періодична функція з періодом $2\pi i$;

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \ \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right);$$

$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)$, $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$ — гіперболічні косинус та синус;

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \ \cos iz = \operatorname{ch} z, \ \operatorname{sh} iz = i \sin z, \ \operatorname{ch} iz = \cos z;$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\left(\arg z + 2\pi k\right), \ k \in Z;$$

$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$ — загальна показникова функція;

z^n, $n \in N$ — степенева функція;

$z^\alpha = e^{z \operatorname{Ln} \alpha}$ — загальна степенева функція;

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \ \operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz} (z \neq \pm i), \ \operatorname{Arcctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{iz - 1}{iz + 1} (z \neq \pm i).$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Запишіть функцію $w = f(z)$ у вигляді $w = u(x, y) + iv(x, y)$:

а) $w = 2z - i\bar{z}$; б) $w = z^3$; в) $w = e^{-z}$.

Розв'язання: а) $w = 2z - i\bar{z} = 2(x + iy) - i(x - iy) = \underbrace{2x - y}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2y - x)}_{v(x,y)}$;

б) $w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2 iy + 3xi^2 y^2 + i^3 y^3 =$

$$= x^3 + 3x^2 iy - 3xy^2 - iy^3 = \underbrace{x^3 - 3xy^2}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(3x^2 y - y^3\right)}_{v(x,y)};$$

в) $w = e^{-z} = e^{-x-iy} = e^{-x} e^{-iy} = e^{-x}\left(\cos y - i \sin y\right) =$

$$= \underbrace{e^{-x}\cos y}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(-e^{-x}\sin y\right)}_{v(x,y)}.$$

Приклад 2. Визначте лінії, які задаються рівняннями:

а) $|z+i| = 2$; б) $\arg z = \pi$; в) $z = \cos t + i \sin t,\ t \in [0;\pi]$;

г) $z = z_0 + Re^{it}, t \in [0;2\pi]$.

Розв'язання: а) маємо рівняння кола радіуса 2 з центром у точці $(0;-1)$ (рис. 2.1, *а*). Справді,

$$|z+i| = 2 \Leftrightarrow |x+iy+i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 4;$$

б) усі точки комплексної площини, у яких головне значення аргументу дорівнює π, утворюють від'ємну піввісь осі абсцис, окрім точки (0;.0) (рис. 2.1, *б*);

в) якщо $z = x + iy = \cos t + i \sin t, t \in [0;\pi]$, то $x = \cos t, y = \sin t,$ $y \geq 0$. Тоді $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (рис. 2.1, *в*);

г) $z = z_0 + Re^{it}, t \in [0;2\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = R\cos t, \\ y - y_0 = R\sin t, \end{cases} t \in [0;2\pi]$.

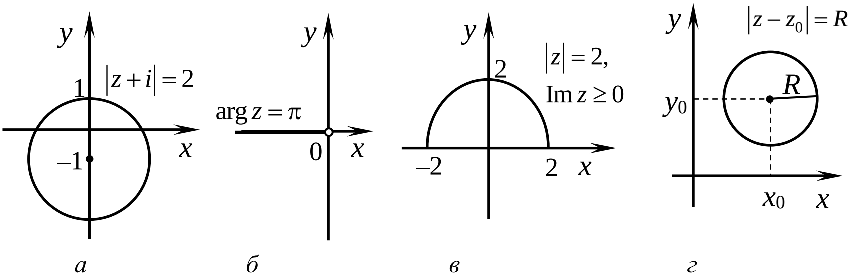

Рис. 2.1

Отримали параметричні рівняння кола $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ (рис. 2.1, *г*).

Приклад 3. Визначте множини точок на комплексній площині *z*, що визначаються нерівностями: а) $\operatorname{Im} z^2 \geq 0$; б) $1 \leq |z-i| < 2$.

Розв'язання: а) $z^2=\left(x+iy\right)^2=x^2-y^2+(2xy)i \Rightarrow \operatorname{Im} z^2 = 2xy$. Отже, $xy \geq 0$. Ця нерівність визначає множину всіх точок, розміщених у першій та третій координатних чвертях (рис. 2.2, *а*).

б) шукана множина точок — кільце, обмежене колами $|z-i|=1$ та $|z-i|=2$ (рис. 2.2, *б*).

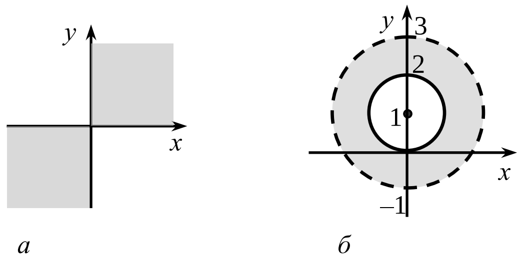

Рис. 2.2

Приклад 4. Дослідіть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ на збіжність.

Розв'язання. Запишемо ряд у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} .$$

Оскільки обидва ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ збіжні (за ознакою порівняння), то вихідний ряд також збіжний.

Приклад 5. Знайдіть область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^n}$.

Розв'язання. За ознакою Д'Аламбера дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{(z-i)^{n+1}}\cdot\frac{(z-i)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{|z-i|} = \frac{1}{|z-i|} < 1.$$

Звідси випливає, що для всіх z, що задовольняють нерівність $|z-i|>1$ (зовнішня частина кола радіуса 1 з центром у точці $(0;1)$), ряд є абсолютно збіжним. Для точок z кола $|z-i|=1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{in\varphi}} = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cos n\varphi - i\sum_{n=1}^{\infty} n\sin n\varphi$. Оскільки обидва ряди з дійсними членами розбіжні, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{in\varphi}}$ також розбіжний. Отже, область збіжності даного ряду задається нерівністю $|z-i|>1$.

Приклад 6. Запишіть у алгебраїчній формі вирази:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2i\right)$; б) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right)$; в) i^i.

Розв'язання: а) $\mathrm{w} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+2i\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos 2i + \cos\frac{\pi}{3}\sin 2i =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 2 + \frac{1}{2}(\operatorname{sh} 2)i \Rightarrow \operatorname{Re} w = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 2, \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2;$$

б) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right) = \ln\left|\sqrt{3}-i\right| + i\left(\arg\left(\sqrt{3}-i\right)+2\pi k\right),\ k\in Z$,

$$\left|\sqrt{3}-i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2,\ \arg\left(\sqrt{3}-i\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Отже, $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right) = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in Z$;

в) $i^i = \left(e^{\mathrm{Ln}\, i}\right)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\, i}$. Оскільки $\mathrm{Ln}\, i = \ln|i| + i(\arg i + 2\pi k)$,

$\ln|i| = \ln 1 = 0,\ \arg i = \frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{Ln}\, i = i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $i^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$, $k\in Z$.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть означення функції комплексної змінної.
2. Яку область називають однозв'язною?
3. Що таке степеневий ряд?
4. Як знайти радіус збіжності степеневого ряду?
5. Наведіть означення функції $w = e^z$, $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \operatorname{sh} z$, $w = \operatorname{ch} z$, $w = \operatorname{Ln} z$, $w = \operatorname{Arccos} z$, $w = a^z$, $w = z^\alpha$.
6. Який зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Запишіть функцію $w = f(z)$ як $w = u(x, y) + iv(x, y)$:

а) $w = \overline{z}^2 + 2iz$; б) $w = \dfrac{1}{z}$; в) $w = ze^z$.

Завдання 2. Визначте лінії, які задаються рівняннями:

а) $|z - 1 - 2i| = 3$; б) $\arg z = -\dfrac{\pi}{4}$; в) $z = 2\cos t + 3i\sin t,\ t \in [0; 2\pi]$;

г) $z = Re^{it}$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Завдання 3. Визначте множини точок на комплексній площині z, що визначаються нерівностями: а) $\operatorname{Re} z < 0$; б) $\begin{cases} |z+1| < 2, \\ \arg z \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Завдання 4. Дослідіть ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2in}}{n}$ на збіжність.

Завдання 5. Визначте область збіжності ряду $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n^2+1}$.

Завдання 6. Запишіть у алгебраїчній формі вирази:

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 3i\right)$; б) $\operatorname{Ln}(-1)$; в) 1^i; г) $\operatorname{sh}(i - 2)$; д) $\operatorname{tg} 2i + \operatorname{th} 2i$.

Відповіді:1.а) $w = x^2 - y^2 - 2y + 2x(1-y)i$;б) $\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{yi}{x^2+y^2}$;
в) $w = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right) + ie^x\left(x\sin y + y\cos y\right)$. **2.** а) коло радіуса 3 з центром у точці (1; 2); б) промінь з виколотим початком (0; 0), що ділить четверту чверть навпіл; в) еліпс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; г) півколо з центром у точці (0; 0) радіуса 1, розміщене у I і IV чвертях. **3.** а) півплощина, що розміщена лівіше від осі ординат; б) частина круга радіуса 2 з центром у точці(–1; 0) (без межі), що розміщена у другій координатній чверті, включаючи відповідні точки осей координат. **4.** Розбігається. **5.** Круг (разом з межею) радіуса 1 з центром у точці (0; –2). **6.** а) $\frac{\operatorname{ch}3}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{sh}3}{\sqrt{2}}i$; б) $\pi(2k+1)i, k \in Z$;в) $e^{-2\pi k}$, $k \in Z$; г) $-\operatorname{sh}2\cos1 + (\operatorname{ch}2\sin1)i$; д) $(\operatorname{tg}2 + \operatorname{th}2)i$.

Тема 3. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

План

1. Означення похідної.
2. Умови Коші–Рімана.
3. Аналітичні функції.

Література: [1] — [5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 здобувач повинен ***знати:*** означення похідної, властивості похідних, умови Коші–Рімана, означення аналітичної та гармонічної функцій;
уміти: досліджувати функції на диференційовність, відтворювати аналітичну функцію за відомою її дійсною чи уявною частинами.

Основні теоретичні відомості

Означення похідної. Нехай однозначна функція $f(z)$ визначена в області D і $z \in D$.

Похідною функції $f(z)$ у точці z називають границю відношення приросту функції $f(z)$ у точці z до приросту аргументу Δz, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} .$$

Функцію $f(z)$, яка має в точці $z \in D$ скінченну похідну $f'(z)$, називають *диференційовною* в цій точці. Функцію, диференційовну в кожній точці області, називають диференційовною в цій області.

Умови Коші–Рімана. Функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ диференційовна в точці $z = x + iy$ тоді і тільки тоді, коли в точці (x, y) дійсні функції $u(x, y)$ та ($v(x, y)$ є диференційовними і справджуються умови *Коші–Рімана* (або *Ейлера–Д'Аламбера*):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} . \qquad (3.1)$$

Тоді справджуються формули

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} . \qquad (3.2)$$

Аналітичні функції. Однозначну функцію $f(z)$ називають *аналітичною* в точці z, якщо вона диференційовна в деякому околі цієї точки. Функцію $f(z)$ називають *аналітичною* в області D, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

Дійсну функцію $\varphi(x, y)$, яка має в області D неперервні частинні похідні до другого порядку включно і задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$, називають *гармонічною* функцією в цій області.

Формули для відновлення аналітичної функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за відомою гармонічною дійсною чи уявною частинами $u(x, y)$ та $v(x, y)$ відповідно:

$$v(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left(-\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} \right) dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy + c ;$$

$$u(x,\ y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v(x,y_0)}{\partial y}dx+\int_{y_0}^{y}\left(-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)dy+c\ , \qquad (3.3)$$

де c — довільна стала.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Чи будуть диференційовними функції:
а) $f(z)=i\overline{z}=y+xi$; б) $f(z)=z^2=x^2-y^2+2xyi$?

Розв'язання: а) $u=y,\ v=x,\ \frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0.$

Друга умова Коші–Рімана не виконується: $\frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$. Отже, ця функція недиференційовна в кожній точці комплексної площини;

б) $u=x^2-y^2,\ v=2xy,\ \frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial u}{\partial y}=-2y, \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x$

Умови Коші–Рімана (3.1) виконуються. Отже, функція є диференційовною в кожній точці комплексної площини. Похідну знаходимо за першою формулою (3.2):

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+i\cdot 2y=2z\ .$$

Приклад 2. Знайдіть аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, якщо

$$v=-2xy-3x,\quad f(0)=i.$$

Розв'язання. Функція $v(x,y)$ є гармонічною в усій комплексній площині. Справді, оскільки $\frac{\partial v}{\partial x}=-2y-3$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-2x$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0$ і $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$, то функція $v(x,y)$ задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$.

За формулою (3.3), у якій $x_0 = 0,\ y_0 = 0$, дістанемо

$$u(x,y) = \int_0^x (-2x)dx + \int_0^y (2y+3)dy + c = -x^2 + y^2 + 3y + c .$$

Отже,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = -x^2 + y^2 + 3y + c + i\left(-2xy - 3x\right) =$$
$$= -x^2 + y^2 - 2xyi + 3y - 3xi + c =$$
$$= -(x+iy)^2 - 3i(x+iy) + c = -z^2 - 3iz + c .$$

З умови $f(0) = i$ визначаємо сталу $c = i$. Остаточно маємо: $f(z) = -z^2 - 3iz + i$.

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення похідної функції комплексної змінної.
2. Які умови диференційовності функції комплексної змінної?
3. Дайте означення аналітичної функції.
4. Дайте означення гармонічної функції.
5. Як відновити аналітичну функцію за відомою її дійсною чи уявною частинами?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Перевірте на диференційовність функцію $f(z) = x^2 + y^2 - 2xyi$.

Завдання2.Чи є диференційовною функція $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y$? Якщо так, то знайдіть її похідну.

Завдання 3. Знайдіть похідні $z'(t)$ функцій:

а) $z(t) = \cos^2 t + ie^{-t}$; б) $z(t) = \ln(t^2+1) + i\operatorname{arctg}\dfrac{1}{t}$.

Завдання 4. Перевірте виконання умов Коші-Рімана й у разі їх виконання знайдіть $f'(z)$:

а) $f(z) = e^{3z}$; б) $f(z) = \operatorname{sh} z$; в) $f(z) = \cos z$.

Завдання 5. Визначте аналітичну функцію $f(z) = u + iv$, якщо:

1) $u = x^2 - y^2 + 2x$, $f(i) = -1 + 2i$; 2) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$;

3) $v = \sin x \operatorname{sh} y$, $f(0) = 0$.

Відповідь: 1. Недиференційовна в усій комплексній площині, за винятком уявної осі. **2.** Так. $f'(z) = \cos z$. **3.** а) $z'(t) = -\sin 2t - i\,e^{-t}$; б) $z'(t) = \dfrac{2t}{t^2+1} - i\dfrac{1}{1+t^2}$. **4.** а) $3e^{3z}$; б) chz; в) $-\sin z$. **5.** а) $f(z) = z^2 + 2z$; б) $f(z) = \dfrac{1}{z}$; в) $f(z) = -\cos z + 1$.

Тема 4. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

План

1. Формули для обчислення інтеграла від функції комплексної змінної.
2. Інтегральна теорема Коші.
3. Формула Ньютона—Лейбніца.
4. Інтегральна формула Коші.

Література: [1] — [5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 здобувач повинен ***знати:*** означення інтеграла функції комплексної змінної, формулювання інтегральної теореми Коші, формулу Ньютона—Лейбніца;
уміти: проводити інтегрування аналітичних і неаналітичних функцій комплексної змінної.

Основні теоретичні відомості

Формули для обчислення інтеграла від функції комплексної змінної. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ неперервна на гладкій кривій L, то інтеграл $\int\limits_L f(z)dz$ існує і справджується формула

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - \upsilon dy + i\int_L \upsilon dx + udy. \qquad (4.1)$$

Якщо функції u і υ неперервні вздовж гладкої дуги, заданої параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t), t \in [\alpha;\beta]$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta (u + i\upsilon)(x' + iy')dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

Інтегральна теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області *D* і *L* — довільний кусково-гладкий замкнений контур, що цілком лежить в *D*, то

$$\oint_L f(z)dz = 0.$$

Формула Ньютона–Лейбніца. Якщо $f(z)$ — аналітична функція в однозв'язній області *D* і $\Phi(z)$ — будь-яка первісна для $f(z)$, то

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1).$$

Інтегральні формули Коші:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Наслідки з інтегральних формул Коші:

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0), \qquad (4.2)$$

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0). \qquad (4.3)$$

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчисліть інтеграл $\int_L (2 - i + 3\overline{z})dz$ вздовж ліній, що сполучають точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 - i$, у напрямку від z_1 до z_2:

а) вздовж відрізка;

б) вздовж дуги параболи $y = -x^2$;
в) ламаної $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = 1$.

Розв'язання. Перепишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$2 - i + 3\overline{z} = 2 - i + 3(x - iy) = \underbrace{2 + 3x}_{u(x,y)} - i\underbrace{(1 + 3y)}_{v(x,y)}.$$

За формулою (4.1) маємо

$$I = \int_L (2 - i + 3\overline{z})dz = \int_L (2 + 3x - i(1 + 3y))(dx + idy) =$$

$$= \int_L (2 + 3x)dx + (1 + 3y)dy + i\int_L (2 + 3x)dy - (1 + 3y)dx;$$

а) рівняння відрізка, що з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 - i$, має вигляд $y = -x$, $0 \le x \le 1$, а отже, $dy = -dx$. Тому

$$I = \int_0^1 \big((2 + 3x) + (1 + 3(-x))(-1)\big)dx + i\int_0^1 \big((2 + 3x)(-1) - (1 + 3(-x))\big)dx =$$

$$= \int_0^1 \big(1 + 6x\big)dx + i\int_0^1 \big(-3\big)dx = \left(x + 3x^2\right)\Big|_0^1 - 3ix\Big|_0^1 = 1 + 3 - 3i = 4 - 3i;$$

б) для параболи $y = x^2$ маємо $dy = 2xdx$ $(0 \le x \le 1)$, отже,

$$I = \int_0^1 \Big((2 + 3x) + (1 + 3(-x^2))(-2x)\Big)dx +$$

$$+ i\int_0^1 \Big((2 + 3x)(-2x) - (1 + 3(-x^2))\Big)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2 + 3x - 2x + 6x^3\right)dx + i\int_0^1 \left(-4x - 6x^2 - 1 + 3x^2\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2 + x + 6x^3\right)dx + i\int_0^1 \left(-4x - 3x^2 - 1\right)dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{6x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 +$$

$$+ i\left(-2x^2 - x^3 - x\right)\Big|_0^1 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + i\left(-2 - 1 - 1\right) = 4 - 4i;$$

в) $I = I_1 + I_2$, де I_1 – інтеграл від заданої функції уздовж відрізка, що сполучає точки (0; 0) і (1; 0) (назвемо його як відрізок z_1z_3), відповідно I_2 – інтеграл від заданої функції уздовж відрізка z_3z_2. На відрізку z_1z_3: $y = 0$, $dy = 0$, $0 \le x \le 1$, тоді

$$I_1 = \int_0^1 (2+3x)dx + i\int_0^1 (-(1+3\cdot 0))dx =$$

$$= \int_0^1 (2+3x)dx - i\int_0^1 dx = \left(2x + \frac{3x^2}{2} - ix \right)\Bigg|_0^1 = 3,5 - i.$$

На відрізку z_3z_2: $x = 1, dx = 0, y \in [0;-1]$. Тоді

$$I_2 = \int_0^{-1} (1+3y)dy + i\int_0^{-1} (2+3\cdot 1)dy =$$

$$= \left(y + \frac{3y^2}{2} + 5iy \right)\Bigg|_0^{-1} = -1 + \frac{3}{2} - 5i = 0,5 - 5i.$$

Отже,

$$I = I_1 + I_2 = 3,5 - i + 0,5 - 5i = 4 - 6i.$$

На цьому прикладі переконуємося, що значення інтеграла від неперервної, але не аналітичної функції, залежить від форми шляху інтегрування.

Приклад 2. Обчисліть інтеграл $\int\limits_L (z^2 + \overline{z}^2 + 4z\overline{z})dz$, якщо L — дуга кола $|z| = 2$ $(0 \le \arg z \le \pi)$.

Розв'язання: Покладемо $z = 2e^{i\varphi}$, $dz = 2ie^{i\varphi}d\varphi$, тоді

$$\int\limits_L (z^2 + \overline{z}^2 + 4z\overline{z})dz = \int_0^{\pi} \left(4e^{2i\varphi} + 4e^{-2i\varphi} + 4\cdot 2e^{i\varphi}\cdot 2e^{-i\varphi}\right)\cdot 2ie^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= 8i\int_0^{\pi} \left(e^{3i\varphi} + e^{-i\varphi} + 4e^{i\varphi}\right)d\varphi = 8i\left(\frac{e^{3i\varphi}}{3i} + \frac{e^{-i\varphi}}{-i} + \frac{4e^{i\varphi}}{i} \right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= 8\left(\frac{e^{3i\varphi}}{3} - e^{-i\varphi} + 4e^{i\varphi} \right)\Bigg|_0^{\pi} = 8\left(\frac{e^{3i\pi}}{3} - e^{-i\pi} + 4e^{i\pi} \right) - 8\left(\frac{1}{3} - 1 + 4 \right) =$$

$$=8\left(\frac{-1}{3}+1-4\right)-8\left(\frac{1}{3}+3\right)=-8\left(\frac{2}{3}+6\right)=\frac{160}{3}=-53\frac{1}{3}.$$

Приклад 3. Обчисліть інтеграл

$$\int_L\left(4z^3+\sin 2z\right)dz;\quad L:\{|z|=1,\ \operatorname{Re} z\geq 0\}.$$

Розв'язання: Підінтегральна функція є аналітичною, тому інтеграл не залежить від кривої інтегрування, а залежить лише від початкової та кінцевої точок інтегрування. Крива інтегрування – півколо радіуса 1 з центром у точці (0; 0), розміщене праворуч від осі ординат. Інтегрування проводимо в додатному напрямі, тоді змінна z змінюється від початкового значення $z_1=-i$ до кінцевого значення $z_2=i$. Маємо

$$\int_L\left(4z^3+\cos 2z\right)dz=\int_{-i}^{i}\left(4z^3+\cos 2z\right)dz=\left(z^4+\frac{1}{2}\sin 2z\right)\Bigg|_{-i}^{i}=$$

$$=\left(i^4+\frac{1}{2}\sin 2i\right)-\left((-i)^4+\frac{1}{2}\sin(-2i)\right)=1+\frac{i}{2}\operatorname{sh}2-1+\frac{i}{2}\operatorname{sh}2=i\operatorname{sh}2.$$

Приклад 4. Обчисліть інтеграл $\int_0^{2i}\left(z+2\right)e^{-z}dz$.

Розв'язання: Підінтегральна функція є аналітичною в будь-якій однозв'язній області, що містить точки $z_1=0$ і $z_2=2i$, тому можна скористатися формулою Ньютона–Лейбніца. Використовуючи метод інтегрування частинами, маємо

$$\int_0^{2i}\left(z+2\right)e^{-z}dz=\begin{vmatrix}u=z+2 & du=dz\\ dv=e^{-z}dz & v=-e^{-z}\end{vmatrix}=\left(z+2\right)\left(-e^{-z}\right)\Big|_0^{2i}-$$

$$-\int_0^{2i}\left(-e^{-z}\right)dz=\left(2i+2\right)\left(-e^{-2i}\right)-2\left(-e^{0}\right)-e^{-z}\Big|_0^{2i}=-\left(2i+2\right)e^{-2i}+$$

$$+2-e^{-2i}+1=-\left(2i+3\right)e^{-2i}+3=-\left(2i+3\right)\left(\cos 2i-i\sin 2i\right)+3=$$

$$=-\left(2i+3\right)\left(\operatorname{ch}2+\operatorname{sh}2\right)+3=-3\left(\operatorname{ch}2+\operatorname{sh}2-1\right)-2\left(\operatorname{ch}2+\operatorname{sh}2\right).$$

Приклад 5. Обчисліть інтеграли:

а) $\oint\limits_{|z+3i|=2} \frac{e^z dz}{z(z-2i)}$; б) $\oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{e^z dz}{z(z-2i)}$; в) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z^2(z-2i)}$.

Розв'язання: Маємо інтеграли вздовж замкнутих контурів. Тому використовуємо інтегральну формулу (або теорему) Коші.

а) крива інтегрування, задана рівнянням $|z+3i|=2$, — коло радіуса 2 з центром у точці (0; –3). Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{e^z}{z\left(z-2i\right)}$ всередині цього кола є аналітичною. Тому за інтегральною теоремою Коші $\oint\limits_{|z+3i|=2} \frac{e^z dz}{z(z-2i)}=0$;

б) з поміж особливих точок $z_1=0$ і $z_2=2i$ функції $f(z)=\dfrac{e^z}{z\left(z-2i\right)}$ всередину кола $|z-3i|=2$ (центр — точка (0; 3), радіус — 2) потрапляє лише точка $z_2=2i$. За формулою (4.2) маємо

$$\oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{e^z dz}{z\left(z-2i\right)}=\oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{\frac{e^z}{z}dz}{z-2i}=2\pi i\cdot\underbrace{\left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=2i}}_{f(z_0)}=$$

$$=2\pi i\cdot\frac{e^{2i}}{2i}=\pi e^{2i}=\pi\left(\cos 2+i\sin 2\right);$$

в) з поміж особливих точок $z_1=0$ і $z_2=2i$ функції $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2\left(z-2i\right)}$ всередину кола $|z|=1$ потрапляє лише точка $z_1=0$, кратність якої — 2. За формулою (4.3) маємо

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z dz}{z^2\left(z-2i\right)}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\overbrace{\left(\dfrac{\cos z}{z-2i}\right)}^{f(z)}}{(z-0)^{1+1}}dz=\frac{2\pi i}{1!}\cdot\underbrace{\left(\frac{\cos z}{z-2i}\right)'\Bigg|_{z=0}}_{f'(0)}=$$

$$=2\pi i\left(\frac{-\sin z(z-2i)-\cos z}{(z-2i)^2}\right)\Bigg|_{z=0}=\frac{\pi i}{2}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення інтеграла від функції комплексної змінної.
2. Як інтегрують аналітичні функції?
3. Сформулюйте інтегральну теорему Коші.
4. Запишіть інтегральну формулу Коші.
5. Як можна використати інтегральну формулу Коші для обчислення інтегралів уздовж замкненого контуру?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть інтеграл $\int\limits_L(1+2iz-4\overline{z})dz$ вздовж ліній, що сполучають точки $z_1=0$ і $z_2=1+i$, у напрямку від z_1 до z_2:

а) відрізка;

б) ламаної $z_1z_3z_2$, де $z_3=i$.

Завдання 2. Обчисліть інтеграл

$\int\limits_L\left(|z|+2\overline{z}\right)dz;\quad L:\{|z|=3,\ \dfrac{\pi}{2}\le\arg z\le\pi\}$.

Завдання 3. Обчисліть інтеграли:

а) $\int\limits_{1+i}^{-1-i}(2z+1)dz$ б) $\int\limits_{1+i}^{2i}ze^{z^2/2}dz;$; в) $\int\limits_{0}^{i}z\sin z\,dz$.

Завдання 4. Обчисліть інтеграли:

а) $\oint\limits_{|z|=0,5}\dfrac{dz}{z(z^2+1)}$; б) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z+1}{(z-1)^2}dz$; в) $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{\text{sh}(i\pi z)}{\left(z+2\right)^4}dz$.

Відповіді: **1.** а) $-5+i$; б) $-5+5i$. **2.** $-9+9i(\pi-1)$. **3.** а) $-2(1+i)$;

б) $e^{-2}-\cos 1-i\sin 1$; в) $1+i(\mathrm{sh}1-\mathrm{ch}1)$. **4.** а) $2\pi i$; б) $2\pi i$; в) $\dfrac{\pi^4}{3}$.

Тема 5. РЯДИ ТЕЙЛОРА І ЛОРАНА. ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ

План

1. Ряди Тейлора і Лорана.
2. Ізольовані особливі точки, їх класифікація.

Література: [1] — [5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 5 здобувач повинен ***знати:*** означення рядів Тейлора і Лорана, відмінність між ними, види ізольованих особливих точок;
уміти: розкладати функції в ряд Тейлора і Лорана, знаходити ізольовані особливі точки та встановлювати їх вид.

Основні теоретичні відомості

Ряди Тейлора і Лорана. Степеневий ряд вигляду

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

називають *рядом Тейлора* функції $f(z)$ в околі точки z_0.

Справджуються розвинення елементарних функцій:

1) $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots \qquad (|z|<1);$ (5.1)

2) $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots \qquad (|z|<1);$ (5.2)

3) $e^z=1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots+\dfrac{z^n}{n!}+\ldots \qquad (z\in C);$

4) $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (z \in C);$ (5.3)

5) $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (z \in C).$ (5.4)

Аналітичну в кільці $r < |z - z_0| < R$ функцію $f(z)$ можна розвинути в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\textit{правильна частина}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\textit{головна частина}} .$$

Ізольовані особливі точки, їх класифікація. Точку z_0, в якій порушується аналітичність функції $f(z)$, називають особливою. Цю точку називають *ізольованою,* якщо в певному околі точки z_0 немає жодної другої особливої точки.

Класифікація ізольованих особливих точок:

1) z_0 — усувна особлива точка ($\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$, ряд Лорана не містить від'ємних степенів $z - z_0$);

2) z_0 — полюс ($\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, ряд Лорана містить скінченну кількість від'ємних степенів $z - z_0$);

3) z_0 — істотно-особлива точка ($\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не існує, ряд Лорана містить нескінченну кількість від'ємних степенів $z - z_0$).

Точку z_0 називають *нулем функції* $f(z)$ *порядку* (або *кратності*) m, якщо виконуються умови

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \ f^{(m)}(z_0) \neq 0 .$$

Якщо $m = 1$, то точку z_0 називають *простим* нулем.

Якщо z_0 — полюс m – го порядку функції $f(z)$, то z_0 — нуль порядку m функції $\dfrac{1}{f(z)}$ і навпаки, якщо z_0 — нуль порядку m функції $f(z)$, тоді z_0 — полюс m – го порядку функції $\dfrac{1}{f(z)}$.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Розкладіть функцію $f(z)=\dfrac{1}{3-2z}$ за степенями $z-z_0$: а) в ряд Тейлора, якщо $z_0=0$; б) в ряд Тейлора, якщо $z_0=4$; в) в ряд Лорана, якщо $z_0=0$.

Розв'язання: а) функція $f(z)$ має одну особливу точку $z=\dfrac{3}{2}$. Отже, в крузі $|z|<\dfrac{3}{2}$ (рис.5.1, *а*) ця функція є аналітичною і розкладається в цьому крузі в ряд Тейлора: $\dfrac{1}{3-2z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$.

Маємо

$$f(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2z}{3}}=\frac{1}{3}\underbrace{\left(1+\frac{2z}{3}+\left(\frac{2z}{3}\right)^2+\ldots\right)}_{\text{за формулою (5.2)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}z^n\ ;$$

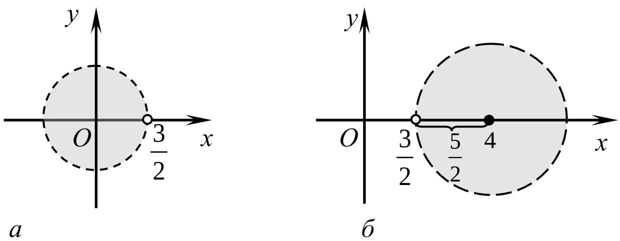

Рис. 5.1

б) виконаємо перетворення

$$f(z)=\frac{1}{3-2z}=\frac{1}{-2(z-4)-5}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{2(z-4)}{5}}=$$

$$=-\frac{1}{5}\underbrace{\left(1-\frac{2(z-4)}{5}+\frac{2^2(z-4)^2}{5^2}-\frac{2^3(z-4)^3}{5^3}+\ldots\right)}_{\text{за формулою (5.1)}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^n(z-4)^n}{5^{n+1}},$$

область збіжності степеневого ряду — круг $|z-4|<\frac{5}{2}$ (рис. 5.1, *б*);

в) коло $|z|=\frac{3}{2}$, що проходить через особливу точку $z=\frac{3}{2}$ ділить площину на дві частини. В області $|z|<\frac{3}{2}$ (усередині кола) функцію $f(z)$ можна розвинути в ряд Тейлора (див. пункт а), а в області $|z|>\frac{3}{2}$ (зовнішня частина кола, тобто окіл нескінченно віддаленої точки $z=\infty$) функцію $f(z)$ можна розвинути в ряд Лорана за від'ємними степенями z. Маємо

$$f(z)=\frac{1}{3-2z}=\frac{1}{-2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2z}}=\frac{1}{-2z}\underbrace{\left(1+\frac{3}{2z}+\left(\frac{3}{2z}\right)^2+\ldots\right)}_{\text{за формулою (5.2)}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}z^{n+1}}.$$

Приклад 2. В околі точки $z_0=0$ розвиньте у ряд Лорана функцію

$$f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}.$$

Розв'язання: Підставивши у формулу (5.3) замість змінної z значення $\frac{1}{z}$, і домноживши результат на z^2, дістанемо шукане розвинення

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\cdot z^3}+\frac{1}{5!\cdot z^5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!\cdot z^{2n+1}}+\ldots\right)=$$

$$=z-\frac{1}{3!\cdot z}+\frac{1}{5!\cdot z^3}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!\cdot z^{2n-1}}+\ldots.$$

Область збіжності отриманого ряду – всі значення z, крім 0.

Приклад 3. Знайдіть нулі функції $f(z)=1-\cos 2z$ та визначте їх порядок.

Розв'язання: Нулі даної функції — це корені рівняння $1-\cos 2z=0$:

$$z_n = \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Визначаємо їх порядок так:

$$f'(z) = 2\sin 2z,\ f'(\pi n) = 2\sin 2\pi n = 0,$$

$$f''(z) = 4\cos 2z,\ f''(\pi n) = 4\cos 2\pi n = 1 \neq 0\ .$$

Отже, усі точки $z_n = \pi n$, $n \in Z$ є нулями другого порядку заданої функції.

Приклад 4. Знайдіть особливі точки функції $f(z)$ та визначте їх характер:

а) $f(z) = \dfrac{e^{2z} - e^z}{z}$; б) $f(z) = \dfrac{e^{3z} + 2}{z^3}$; в) $f(z) = \dfrac{1 - \cos 2z}{z^3}$;

г) $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{z}$; д) $f(z) = \operatorname{ctg} z$; е) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2 - z - 2)(z + 1)}$.

Розв'язання: У кожному з випадків а) – г) особливою є точка $z_0 = 0$.

а) обчислимо границю

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^{2z} - e^z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{e^z(e^z - 1)}{z} = \lim_{z \to 0} e^z \cdot \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = e^0 \cdot 1 = 1.$$

Отже, $z_0 = 0$ — усувна особлива точка;

б) оскільки $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^{3z} + 2}{z^3} = \infty$, то точка $z_0 = 0$ є полюсом цієї функції. Для функції $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{z^3}{e^{3z} + 2}$ точка $z_0 = 0$ є нулем третього порядку, отже, $z_0 = 0$ — полюс третього порядку функції $f(z)$;

в) перший спосіб. Знайдемо границю

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos 2z}{z^3} = \lim_{z \to 0} \frac{2\sin^2 z}{z^3} = \left|\sin z \sim z\right| = \lim_{z \to 0} \frac{2z^2}{z^3} = \lim_{z \to 0} \frac{2}{z} = \infty\ .\ .$$

Отже, $z_0 = 0$ є полюсом (як і в попередньому прикладі), проте вже не третього порядку, а першого, тобто $z_0 = 0$ є простим полюсом.

Другий спосіб.

$$f(z)=\frac{1-\cos 2z}{z^3}=\frac{1-\underbrace{\left(1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\frac{(2z)^6}{6!}+\ldots\right)}_{\text{за формулою (5.4)}}}{z^3}=$$

$$=\frac{4}{2!\cdot z}-\frac{16z}{4!}+\frac{64z^3}{6!}-\ldots .$$

Наявність доданка $\frac{2}{z^1}=2z^{-1}$ (причому він є єдиним з від'ємним степенем z) вказує на те, що $z_0=0$ — простий полюс;

г) розвинемо функцію $f(z)$ в околі точки $z_0=0$ в ряд Лорана:

$$f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\cdot z^3}+\frac{1}{5!\cdot z^5}-\ldots\right)=z-\frac{1}{3!\cdot z}+\frac{1}{5!\cdot z^3}-\ldots .$$

Це розвинення містить нескінченну кількість від'ємних степенів z. Тому точка $z_0=0$ є істотно особливою точкою;

д) $f(z)=\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}$. Особливі точки цієї функції — корені рівняння $\sin z=0$, тобто нескінченний набір значень $z_n=\pi n$, $n\in Z$. Усі ці точки є полюсами першого порядку. Справді, оскільки $\cos z_n=(-1)^n\neq 0$, то достатньо визначити порядок нуля z_n функції $\varphi(z)=\sin z$:

$$\varphi'(z)=\cos z,\ \ \varphi'(z_n)=\cos(\pi n)\neq 0 .$$

Отже, всі точки $z_n=\pi n$, $n\in Z$ є нулями першого порядку функції $\varphi(z)$ та відповідно полюсами першого порядку заданої функції $f(z)$;

е) $f(z)=\frac{z^2}{(z^2-z-2)(z+1)}=\frac{z^2}{(z-2)(z+1)^2}$. Особливі точки — $z=2$ та $z=-1$, причому $z=2$ — простий полюс, а $z=-1$ — полюс другого порядку.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають рядом Тейлора функції $f(z)$?

2. Що називають рядом Лорана функції $f(z)$?

3. З яких частин складається ряд Лорана?

4. Які формули використовують для розвинення функцій в ряд Тейлора чи Лорана?

5. Що таке ізольована особлива точка?

6. Як класифікують ізольовані особливі точки?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Розкладіть функцію $f(z)=\dfrac{1}{2+5z}$ за степенями $z-z_0$: а) у ряд Тейлора, якщо $z_0=0$; б) у ряд Тейлора, якщо $z_0=-1$; в) у ряд Лорана, якщо $z_0=0$.

Завдання 2. Розкладіть у ряд Лорана за степенями z функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ у кільцях: а) $2<|z|<3$; б) $|z|>3$.

Завдання 3. Знайдіть особливі точки функції та визначте їх характер:

а) $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z}$; б) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^4}$; в) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{z^4}$;

г) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$; д) $f(z)=\mathrm{tg}^2\, z$; е) $f(z)=\dfrac{\sin^2 \pi z}{(z^2-4)(z+2)^2}$.

Відповіді: 1. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 5^n}{2^{n+1}}z^n$, $|z|<\dfrac{2}{5}$; б) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{5^n(z+1)^n}{3^{n+1}}$, $|z+1|<\dfrac{3}{5}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2^n}{5^{n+1}z^{n+1}}$, $|z|>\dfrac{2}{5}$. **2.** а) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{z^n}-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$.
3. а) $z_0=0$ — усувна особлива точка; б) $z_0=0$ — полюс четвертого порядку; в) $z_0=0$ — полюс третього порядку; г) $z_0=0$ — істотно

особлива точка; д) $z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюси другого порядку; е) $z = 2$ — усувна особлива точка, $z = -2$ — простий полюс.

Тема 6. ЛИШКИ. ЗАСТОСУВАННЯ ЛИШКІВ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

План

1. Лишок функції.
2. Застосування лишків до обчислення інтегралів.

Література: [1] — [5].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 6 здобувач повинен ***знати:*** означення лишку, формули для знаходження лишку для різних видів особливих точок;
уміти: знаходити лишки за допомогою відповідних границь та ряду Лорана, застосовувати лишки до обчислення інтегралів.

Основні теоретичні відомості

Лишок функції. Нехай z_0 — ізольована особлива точка однозначної функції $f(z)$, L — замкнений контур, орієнтований проти ходу годинникової стрілки і такий, що точка z_0 міститься всередині L, при цьому всередині L немає інших особливих точок.

Лишком функції $f(z)$ в точці $z = z_0$ (позначають символом $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$) називають інтеграл

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz.$$

Якщо z_0 — правильна або скінченна усувна особлива точка функції $f(z)$, то $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

Лишок функції $f(z)$ у точці z_0 дорівнює коефіцієнту a_{-1} при $\frac{1}{z-z_0}$ в розвиненні функції $f(z)$ у ряд Лорана в околі точки z_0:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$$

Якщо z_0 — простий полюс функції $f(z)$, тоді

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0).$$

Якщо $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, тобто z_0 — простий полюс функції $f(z)$, тоді

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (6.1)$$

Якщо z_0 — полюс порядку m, тоді

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}((z-z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}}.$$

(6.2)

Застосування лишків до обчислення інтегралів.

1. *Основна теорема про лишки*. Нехай функція $f(z)$ аналітична в замкненій області D з межею L, за винятком скінченної кількості особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_N$, розміщених усередині області D.

Тоді

$$\oint_{L^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \qquad (6.3)$$

2. Інтеграл вигляду

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt,$$

де $R(u, \upsilon)$ — раціональна функція двох змінних u і υ, причому $R(\cos t, \sin t)$ — неперервна на відрізку [0; 2π], можна обчислити, використовуючи основну теорему про лишки.

Введемо нову комплексну змінну $z = e^{it}$, тоді

$$dt=\frac{dz}{iz},\cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Унаслідок такої заміни відрізок $t\in[0;2\pi]$ відображається в коло $|z|=1$. Отже,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t,\ \sin t)dt=\oint_{|z|=1}\tilde{R}(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\tilde{R}(z) \qquad (6.4)$$

де $\tilde{R}(z)$ — дробово-раціональна функція змінної z, коло $|z|=1$ обігається в додатному напрямі.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайдіть лишки функцій у скінченних особливих точках:

а) $f(z)=\dfrac{e^{2z}-e^{z}}{z}$; б) $f(z)=\dfrac{e^{3z}+2}{z^3}$; в) $f(z)=\dfrac{1-\cos 2z}{z^3}$;

г) $f(z)=z\sin\dfrac{1}{z}$; д) $f(z)=\operatorname{ctg} z$; е) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)(z+1)^2}$.

Розв'язання: У прикладі 4 (див. Тема 5, стор.32) для заданих функцій визначено особливі точки і встановлено їх характер. Маємо:

а) $z_0=0$ — усувна особлива точка, тоді $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{e^{2z}-e^{z}}{z}=0$;

б) $z_0=0$ — полюс третього порядку функції $f(z)=\dfrac{e^{2z}+2}{z^3}$, тоді за формулою (6.2), в якій $m=3$, маємо

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2(z^3 f(z))}{dz^2}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(z^3\cdot\frac{e^{3z}+2}{z^3}\right)''=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(e^{3z}+2\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(9e^{3z}\right)=4{,}5;$$

в) $z_0 = 0$ — простий полюс, тоді $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}(zf(z)) =$

$$= \lim_{z\to 0}\left(z \cdot \frac{1-\cos 2z}{z^3} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos 2z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin^2 z}{z^2} = 2\,;$$

г) $z_0 = 0$ — істотно особлива точка. Оскільки

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120z^3} - \ldots = z + \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right)}_{a_{-1}}\frac{1}{z} + \frac{1}{120z^3} - \ldots,$$

то $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = -\dfrac{1}{6}$;

д) $z_n = \pi n$, $n \in Z$ — прості полюси. Тоді

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi n} f(z) = \lim_{z\to\pi n}((z-\pi n)\cdot \operatorname{ctg} z) = \left| \begin{matrix} z-\pi n = t \\ t \to 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}(t\cdot \operatorname{ctg}(\pi n + t)) = \lim_{t\to 0}(t\cdot \operatorname{ctg} t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\cdot \cos t \right) = 1\,;$$

е) $z_1 = 2$ — простий полюс, а $z_2 = -1$ — полюс другого порядку функції $f(z)$. Тоді за формулою (6.2) отримаємо

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z\to 2}\left((z-2)\cdot \frac{z^2}{(z-2)(z+1)^2} \right) = \lim_{z\to 2} \frac{z^2}{(z+1)^2} = \frac{4}{9}.$$

Такий же результат отримаємо, якщо скористаємось формулою (6.1):

$$\varphi(z) = z^2,\ \psi(z) = (z-2)(z+1)^2, \varphi(2) = 4 \neq 0, \psi(2) = 0,$$

$$\psi'(z) = (z+1)^2 + 2(z-2)(z+1), \psi'(2) = 9 + 0 = 9 \neq 0.$$

Отже,

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{\varphi(2)}{\psi'(2)} = \frac{4}{9}\,;$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) \overset{(6.2), m=2}{=} \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -1}\left((z+1)^2 \cdot \frac{z^2}{(z-2)(z+1)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z\to -1}\left(\frac{z^2}{z-2}\right)' = \lim_{z\to -1}\left(\frac{2z(z-2)-z^2\cdot 1}{(z-2)^2}\right) = \frac{6-1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Приклад 2. Обчисліть інтеграли:

а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{2z}-e^z}{z}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{3z}+2}{z^3}dz$; в) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\cos 2z}{z^3}dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=3} z\sin\frac{1}{z}dz$; д) $\oint\limits_{|z|=3} \operatorname{ctg} z dz$; е) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-2)(z+1)^2}dz$.

Розв'язання. В усіх випадках контур інтегрування — коло радіуса 3 з центром у точці (0; 0), обхід якого здійснюється у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки). Маємо:

а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{2z}-e^z}{z}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{2z}-e^z}{z} = 2\pi i\cdot 0 = 0$;

б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{3z}+2}{z^3}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{3z}+2}{z^3} = 2\pi i\cdot 4{,}5 = 9\pi i$;

в) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\cos 2z}{z^3}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1-\cos 2z}{z^3} = 2\pi i\cdot 2 = 4\pi i$;

г) $\oint\limits_{|z|=3} z\sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} z\sin\frac{1}{z} = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}$;

д) усередину кола $|z|=3$ потрапляє лише одна особлива точка $z=0$, тому $\oint\limits_{|z|=3} \operatorname{ctg} z dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\operatorname{ctg} z = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$;

е) усередину кола $|z|=3$ потрапляють обидві особливі точки $z_1=2$ і $z_2=-1$. Тому за формулою (6.3) отримуємо

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-2)(z+1)^2}dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{z^2}{(z-2)(z+1)^2} + \right.$$

$$\left. + \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{z^2}{(z-2)(z+1)^2}\right) = 2\pi i\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\right) = 2\pi i.$$

Приклад 3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\cos t - 3}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $z = e^{it}$, тоді $dt = \frac{dz}{iz}, \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ і

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\cos t - 3} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 \cdot \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 3} = \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(z + \frac{1}{z} - 3\right)} = \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}.$$

Функція $\tilde{R}(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 1}$ має два прості полюси $z_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ та $z_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, з яких тільки z_1 міститься всередині кола $|z| = 1$. Отже,

$$\operatorname*{Res}_{z = \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{z^2 - 3z + 1} = \left| \begin{array}{l} \text{Застосуємо формулу (6.1),} \\ \varphi(z) = 1, \\ \psi(z) = z^2 - 3z + 1 \end{array} \right| =$$

$$= \left. \frac{1}{(z^2 - 3z + 1)'} \right|_{z = \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \left. \frac{1}{2z - 3} \right|_{z = \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{3 - \sqrt{5} - 3} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Тоді за формулою (6.4) остаточно маємо

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\cos t - 3} = \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що таке лишок функції комплексної змінної в ізольованій особливій точці?
2. Як визначити лишок функції за її рядом Лорана?
3. Чому дорівнює лишок функції в усувній особливій точці?
4. За якими формулами визначають лишок функції в точці, яка є: а) простим полюсом; б) полюсом кратності *m*?
5. Що називають нулем функції?
6. Сформулюйте основну теорему про лишки.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть лишки функцій у скінченних особливих точках:

а) $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z}$; б) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^4}$; в) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{z^4}$;

г) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$; д) $f(z)=\mathrm{tg}^2\, z$; е) $f(z)=\dfrac{\sin^2 \pi z}{(z^2-4)(z+2)^2}$;

є) $f(z)=\dfrac{2}{z}+\dfrac{3}{z^3}-z$.

Завдання 2. Обчисліть інтеграли:

а) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{1-e^{2z}}{z}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z^2+1}{z^4}dz$; в) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\sin 2z}{z^4}dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=2} e^{\frac{1}{z}}dz$; д) $\oint\limits_{|z|=2}\mathrm{tg}^2\, z dz$; е) $\oint\limits_{|z+1|=2}\dfrac{\sin^2 \pi z}{(z^2-4)(z+2)^2}dz$;

є) $\oint\limits_{|z|=2}\left(\dfrac{2}{z}+\dfrac{3}{z^3}-z\right)dz$; ж) $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{\sin z}{(z-2i)^3}dz$.

Завдання 3. Обчисліть інтеграл: а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{4\sin t+5}$; б) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{2\cos t+7}$.

Відповіді: 1. а) 0; б) 0; в) $-\dfrac{4}{3}$; г) 1; д) 1 в усіх точках $z_n=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$;

е) $\operatorname*{Res}\limits_{z=2} f(z)=0$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=-1} f(z)=-\dfrac{\pi^2}{4}$; є) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=2$. **2.** а) 0; б) 0; в) $-\dfrac{8\pi i}{3}$;

г) $2\pi i$; д) $4\pi i$; е) $-\dfrac{\pi^3 i}{2}$; є) $\dfrac{\pi i}{2}$; ж) $-\dfrac{i}{2}\mathrm{sh}\,2$. 3. а) $\dfrac{2\pi}{3}$; б) $\dfrac{2\sqrt{5}\pi}{15}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гаєва К. А., Супрун О. М.* Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення: збірник задач. — К.: НАУ, 2003. 192 с.

2. *Денисюк В. П., Репета В. К., Гаєва К.А., Клешня Н.О.* Вища математика. Модульна технологія навчання: навч. посібник: У 4 ч. — Ч. 3. — К.: — Книжкове вид-во НАУ, 2005. 444 с.

3. *Мартиненко М.А., Юрик І. І..* Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення — К.: Видавничий дім «Слово», 2008. 296 с.

4. *Репета В.К.* Вища математика: підручник: у 2 ч. – Ч. 2. – 2-е вид. виправ. – К.: НАУ, 2017. 504 с.

5. *George F. Carrier, Max Krook, Carl E. Pearson.* Functions of a Complex Variable. Theory and Technique. – University of Washington, – 2005. 184 p.

ЗМІСТ

.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОНПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів вищої освіти ОС “Бакалавр” технічних та економічних спеціальностей

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ЛЯШЕНКО Яна Григорівна
РЕПЕТА Віктор Кузьмич

В авторській редакції

Технічний редактор А.І. Лавринович
Комп’ютерна верстка

Підп. до друку ______. Формат 60x84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 2,25. Обл.-вид. арк. 2,65.
Тираж 25 прим. Замовлення № ____.

Видавець і виготовлювач
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Любомира Гузара, 1.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від