УДК 629.787.1:531.32

АСИМТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ПОВЕДІНКИ РАКЕТИ: ВПЛИВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ДИНАМІКУ ТА ТРАЕКТОРІЮ В ПОЛЬОТІ

Максим Петруня
Національний авіаційній університет, Київ

Науковий керівник – Олег Олійник, ст. викладач

Ключові слова: диференціальні рівняння, асимтотична стійкість, математичне моделювання, динаміка польоту ракети, траєкторія польоту.

Диференціальні рівняння є потужним інструментом аналізу та прогнозування динамічних процесів у різних системах. Однією з ключових областей їх застосування є дослідження асимптотичної стійкості, яка відіграє важливу роль у різних галузях науки та техніки. Ми розглянемо вплив диференціальних рівнянь на прогнозування поведінки ракети під час польоту, зосередившись на аспектах асимптотичної стійкості.

У сучасному аерокосмічному інжинірингу диференціальні рівняння використовуються для моделювання та аналізу поведінки ракети на різних етапах польоту. Однією з ключових задач є забезпечення стабільності та стійкості ракети протягом усього польоту, від моменту старту до досягнення мети. Вони дозволяють прогнозувати динаміку руху ракети та визначати її стійкість у різних умовах. Для аналізу асимптотичної стійкості запуску ракети можна використовувати диференціальні рівняння, які моделюють динаміку руху. Один з вирішальних моментів у старті ракети - це момент віддалення від стартової платформи та перехід до вертикального руху. Для моделювання цього процесу можна використати рівняння закону руху. Припустимо, що $h(t)$ – висота ракети над землею, $v(t)$ – її швидкість у певний момент часу *t*. Тоді рівняння руху ракети можна записати у вигляді: $\frac{d^2h}{dt^2} = g - \frac{D}{m}v - \frac{T}{m}$, де g – прискорення вільного падіння, D – сила опору повітря, m – маса ракети, T – сила тяги двигунів ракети. Для дослідження стійкості розв’язку цього рівняння можуть бути застосовані різні методи, включаючи лінійний аналіз стійкості та аналіз асимптотичної поведінки розв’язків диференціальних рівнянь, одним із яких є аналіз власних значень матриці Якобі. Застосування цих методів дозволяє визначити чи буде політ ракети стійким і як він буде еволюціонувати з часом. Такий аналіз є досить важливим для розробки та оптимізації систем керування ракетами, оскільки від нього залежить успішність місії та безпека польоту.

Одним із методів аналізу асимптотичної стійкості є використання лінійного наближення навколо точки спокою, тобто навколо точки (0,0). Цей підхід полягає у лініаризації диференціального рівняння навколо цієї точки та дослідженні стійкості отриманої лінійної системи. Розглянемо приклад на системі диференціальних рівнянь, що моделює рух ракети у вертикальному напрямку після старту: $\frac{dh}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{D}{m}v - \frac{T}{m}.$ Припустимо, що у точці спокою (0,0) сила тяги двигунів $T = 0,$ тобто ракета не рухається. Тоді ми можемо лініаризувати рівняння навколо цієї точки і отримати лінійну систему: $\frac{dh}{dt} = v, \ \frac{dv}{dt} = g - \frac{D}{m}v,$ стійкість якої можна проаналізувати за власними значеннями її матриці Якобі: $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix},$ де $f_1(h, v) = v, \quad f_2(h, v) = g - \frac{D}{m}v.$ Тоді маємо $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{D}{m} \end{pmatrix}.$ Власні значення λ, які визначають характер стійкості лінійної системи, знайдемо як корені характеристичного рівняння $\det\left(J - \lambda I\right) = 0,$ де I - одинична матриця. Розв'язавши характеристичне рівняння $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\frac{D}{m} - \lambda \end{pmatrix} = \left(-\lambda\right) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{D}{m} - \lambda \end{pmatrix} = \left(-\lambda\right) \cdot \left(-\frac{D}{m} - \lambda\right) = 0,$ маємо $\lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = -\frac{D}{m}.$ Оскільки $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 < 0,$ то підтвердити асимтотичну стійкість системи не вдається. Лінійна апроксимація не надає однозначного висновку про стійкість системи, тому потрібний додатковий аналіз. Це може включати розгляд нелінійних ефектів або застосування більш складних методів аналізу, таких як чисельне моделювання та методи оптимального керування [1, с. 158-162].

Висновок

Застосування диференціальних рівнянь для аналізу та прогнозування динаміки та траєкторії польоту ракети є важливою складовою в сучасній ракетно-космічній технології. Це дозволяє досягти більшої стійкості та ефективності у керуванні польотом космічних апаратів. Представлений приклад ілюструє можливі ускладнення цього процесу та підкреслює необхідність проведення більш глибоких та системних досліджень. Важливо пам'ятати, що асимптотична стійкість є лише одним з аспектів стійкості системи, і для повноцінної оцінки стану стійкості може знадобитися додатковий аналіз інших методів та аспектів.

Список використаних джерел:

1. Хусаінов Д. Я., Шатирко А. В., Гагурін Є. Р. Оптимальна стабілізація в диференціальних рівняннях // Обчислювальна та прикладна математика. – 2022. – Вип. 2. – С. 158 – 164.