УДК 51

ПРО ОДНЕ ФУНКЦІОНАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

Станіслав Чистяков
Національний авіаційній університет, Київ

Науковий керівник – Олександр Глухов, канд.фіз.-мат.наук., доцент

Ключові слова: функціональне рівняння, дробово-лінійне перетворення, матриця, власні числа.

Функціональні рівняння - це розділ математики, який вивчає залежності між функціями та їх аргументами, які мають широке застосування в різних галузях науки, таких як фізика, інженерія та економіка. Метою цієї доповіді є поглибити розуміння одного з рівнянь та виявити його значимість для науки.

В цій роботі розглянуто функціональне рівняння наступного вигляду

$$f(x)+f(h(x))=g(x)$$

де $h(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ ad-bc\neq 0$,

$g(x)$ - задана функція, а $f(x)$ - невідома функція.

Буде показано, що для деяких дробово-лінійних перетворень $h(x)$ з раціональними, зокрема, з цілими параметрами a,b,c,d дане функціональне рівняння допускає простий розв’язок.

Зауважимо, що оскільки $ad-bc\neq 0$, то в подальшому можна вважати, що $ad-bc=1$.

Як відомо [1,2], кожному перетворенню $h(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ відповідає матриця $H=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, так що $x\to h(x)\Rightarrow H\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix}$. Звідси нескладно довести, що з рівності $H^3=E$ випливає, що $h^3(x)=x$.

З даного рівняння $f(x)+f(h(x))=g(x)$ випливає наступна рівність:

$$f(x)=g(x)-g(h(x))+g(h^2(x))-f(h^3(x)),$$

де $h^2(x)=h(h(x)),\ h^3(x)=h(h^2(x))$.

Розглянемо тепер додаткову умову $a+d=1$ і покажемо, що в цьому випадку можна знайти $f(x)$. Справді, якщо $a+d=1$, то матриця H має наступні власні числа [1]:

$\lambda_1=(1-i\sqrt{3})/2,\ \lambda_2=(1+i\sqrt{3})/2$ і оскільки $\lambda_1^3=\lambda_2^3=1$, то $H^3=E$, а отже $h^3(x)=x$.

Таким чином ми отримуємо рівність: $f(x) = g(x) - g(h(x)) + g(h^2(x)) - f(x)$, звідки остаточно знаходимо, що $f(x) = (g(x) - g(h(x)) + g(h^2(x)))/2$.

Далі ми побудуємо приклади дробово-лінійних перетворень $h(x)$ з цілими параметрами a,b,c,d. Розглянемо невироджену матрицю $H = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$, де a,b,c,d - цілі числа, які задовольняють умові $bc = a^2 + d^2 + ad$. Ця матриця задає таке саме дробово-лінійне перетворення, що і матриця $H_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}, \Delta = (a+d)^2, \det(H_1) = 1$. Легко перевірити, що $(H_1)^3 = E$, а отже вірно наступне твердження.

Теорема. Якщо $h(x) = \frac{ax-b}{cx+d}$, де $bc = a^2 + d^2 + ad, a + d \neq 0$, то функціональне рівняння

$$f(x) + f(h(x)) = g(x)$$

має наступний розв'язок: $f(x) = (g(x) - g(h(x)) + g(h^2(x)))/2$.

Нижче наведені деякі приклади підходящих дробово-лінійних перетворень:

$$h(x) = \frac{4x-19}{4x+6}, \quad h(x) = \frac{5x-7}{7x+3}, \quad h(x) = \frac{8x-13}{13x+7}, \quad h(x) = \frac{15x-61}{9x+12}$$

Висновок

В цій роботі було розглянуто та знайдено розв'язок одного з функціональних рівнянь. Отримані результати можуть бути використані для вирішення проблем моделювання динаміки фізичних систем, розробки алгоритмів та проектування систем управління.

Список використаних джерел:

1. Howard A. Elementary Linear Algebra. — John Wiley & Sons, 2010, p. 414. — ISBN 978-0-470-45821-1.

2. Lang S. SL_2(R). — New York: Springer-Verlag, 1985. — T. 105. — ISBN 0-387-96198-4.