



**ЮРИЙ ВАСИЛЬОВИЧ КУЦ**

Народився у 1952 році. Закінчив факультет автоматики та електроприладобудування НТУУ “КПІ”. Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформаційно-вимірвальних систем Національного авіаційного університету.  
Фахівець з теорії інформаційно-вимірвальних систем, статистичної теорії фазових і кутових вимірювань.



**ЛЕОНІД МИКОЛАЙОВИЧ ЩЕРБАК**

Народився у 1938 році. Закінчив радіотехнічний факультет ХАІ. Доктор технічних наук, професор, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, професор кафедри інформаційно-вимірвальних систем Національного авіаційного університету, професор кафедри комп'ютерних наук Тернопільського державного технічного університету ім. І. Пулюя. Фахівець з статистичної теорії вимірювань.

## СТАТИСТИЧНА ФАЗОМЕТРІЯ

Ю. В. Куц  
Л. М. Щербак

**Ю. В. Куц  
Л. М. Щербак**

# СТАТИСТИЧНА ФАЗОМЕТРІЯ



**Рецензенти:**

**Ніженський А.Д.**, доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник відділу електричних і магнітних вимірювань Інституту електродинаміки НАН України;

**Скрипник Ю.О.**, доктор технічних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, професор кафедри автоматизації та комп'ютерних наук Київського національного університету технологій та дизайну;

**Туз Ю.М.**, доктор технічних наук, професор, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, завідувач кафедри експериментальних досліджень, директор НДІ експериментальних досліджень НТУУ "КПІ".

**Куц Ю.В., Щербак Л.М.**

Статистична фазометрія:

У науковій монографії "Статистична фазометрія" висвітлено: питання відомих і узагальнених теоретичних положень статистичних кутових і фазових вимірювань з використанням сучасних досягнень теорії випадкових процесів, математичної статистики, прикладної математики, математичного моделювання й обчислювальних методів; обґрунтування нових методів статистичних кутових і фазових вимірювань із використанням методів ЦОС; розроблення алгоритмів і відповідного програмного забезпечення для визначення результатів і характеристик точності процесів вимірювань статистичних оцінок параметрів і характеристик досліджуваних сигналів; розроблення практичних рекомендацій зі створення сучасних апаратно-програмних комплексів кутових і фазових вимірювань.

Монографія розрахована на студентів старших курсів технічних вузів, аспірантів, наукових працівників в області вимірювань, метрології і стандартизації.

## ЗМІСТ

<b>Передмова</b> .....	6
<b>Основні позначення та скорочення</b> .....	10
<b>Розділ 1. Роль кутометрії в теорії та практиці вимірювань.</b> .....	12
1.1. Предметна область та стислий історичний огляд розвитку кутових вимірювань.....	12
1.2. Основні терміни та визначення кутометрії.....	30
1.3. Одиниці виміру кутів.....	31
1.4. Варіанти визначення міри кута на площині та операції з кутами ....	33
1.5. Підсумки до розділу .....	39
<b>Розділ 2. Вибрані питання сучасної концепції статистичних вимірювань</b> .....	41
2.1. Загальна методологія процесу вимірювань .....	42
2.2. Аксиоматика теорії вимірювань .....	46
2.3. Детермінована і випадкова моделі кута на площині .....	55
2.4. Закони розподілу ймовірностей випадкових кутів.....	59
2.5. Двовимірна модель вектора випадкових кутів у тривимірному просторі .....	62
2.6. Характерні властивості статистичних кутових вимірювань .....	64
2.7. Підсумки до розділу .....	65
<b>Розділ 3. Загальні питання фазових вимірювань</b> .....	68
3.1. Огляд розвитку фазових вимірювань .....	68
3.2. Основні терміни та визначення детермінованої фазометрії .....	75
3.3. Фізичне обґрунтування фазового вимірювального перетворення .....	80
3.3.1. Механічні та електричні явища та ефекти .....	81
3.3.2. Електрооптичні явища та ефекти .....	86
3.3.3. Місце фазовимірювальних перетворювачів у структурі фазових інформаційно-вимірювальних систем.....	94
3.4. Сигнали фазометрії .....	95
3.5. Науково-технічні проблеми статистичної фазометрії .....	99
3.6. Статистична фазометрія і фазовий вимірювальний експеримент.....	103
3.7. Підсумки до розділу .....	105
<b>Розділ 4. Основні методи фазометрії</b> .....	107
4.1. Основні методи вимірювання та перетворення фазових зсувів гармонічних сигналів .....	107
4.2. Методи перетворення частоти та початкових фаз сигналів .....	117
4.3. Методи кумулятивної різночастотної фазометрії .....	123
4.4. Метод кумулятивної різночастотної фазометрії на основі числової системи залишкових класів .....	126
4.5. Підсумки до розділу .....	142
<b>Розділ 5. Технічні засоби регулювання, вимірювання та відтворення фазових зсувів гармонічних сигналів</b> .....	144
5.1. Засоби регулювання фазових зсувів гармонічних сигналів .....	144
5.2. Засоби вимірювання фазових зсувів сигналів .....	155

5.3. Метрологічне забезпечення фазометрії .....	177
5.4. Похибки вимірювання фазових зсувів сигналів .....	184
5.5. Підсумки до розділу .....	189
<b>Розділ 6. Перетворення Гільберта та його прикладне застосування у задачах фазометрії .....</b>	<b>191</b>
6.1. Перетворення Гільберта як оператор перетворення сигналів .....	191
6.1.1. Інтегральні зображення перетворення Гільберта та його властивості .....	191
6.1.2. Практична реалізація перетворення Гільберта .....	194
6.2. Характеристики сигналів на основі перетворення Гільберта .....	198
6.3. Перетворення Гільберта випадкових процесів .....	202
6.4. Амплітудна і фазова характеристики випадкового вузькосмугового стаціонарного процесу .....	204
6.5. Комп'ютерне моделювання задач визначення характеристик модульованих сигналів .....	207
6.6. Комп'ютерне моделювання задач віконної обробки сигналів в умовах обмеженого часу спостереження .....	211
6.7. Підсумки до розділу .....	215
<b>Розділ 7. Статистичні моделі випадкових кутів та їх основні характеристики .....</b>	<b>218</b>
7.1. Статистична модель випадкових кутів на площині .....	218
7.2. Закони розподілів випадкових кутів на колі .....	225
7.3. Характеристична функція випадкових кутів, її властивості та застосування .....	233
7.4. Числові характеристики випадкового кута .....	238
7.5. Випадковий вектор з незалежними гауссівськими компонентами в полярній системі координат .....	244
7.6. Статистична модель різниці фазових характеристик випадкових вузькосмугових сигналів .....	251
7.7. Кореляційний аналіз фазових характеристик циклічних випадкових процесів .....	262
7.8. Підсумки до розділу .....	268
<b>Розділ 8. Задачі моделювання та статистичної обробки даних фазових вимірювань .....</b>	<b>270</b>
8.1. Проблематика моделювання задач кутових і фазових вимірювань ...	270
8.2. Моделювання векторів випадкових кутів із заданими розподілами ймовірності .....	278
8.3. Вибіркові кругові характеристики розподілів різниці фазових характеристик сигналів.....	283
8.4. Статистичні точкові оцінки випадкових різниць ФХС.....	292
8.5. Статистичні інтервальні оцінки різниці ФХС з гауссівським намотаним розподілом ймовірності.....	295



8.6. Статистичні інтервальні оцінки різниці ФХС для довільних законів розподілу ймовірності.....	300
8.7. Використання концепції невизначеності для статистичної обробки даних і подання результатів фазових вимірювань .....	306
8.8. Підсумки до розділу .....	308
<b>Розділ 9. Приклади перспективних фазових статистичних інформаційно-вимірювальних систем .....</b>	<b>310</b>
9.1 Фазова ІВС з ортогональною обробкою сигналів .....	310
9.2. Фазова ІВС на основі ковзного дискретного перетворення Гільберта	321
9.3. Виявлення радіоімпульсного сигналу фазовою ІВС .....	326
9.4. Фазові ІВС у задачах ультразвукової дефектоскопії .....	330
9.5. Фазові системи передачі та захисту інформації на базі СЗК .....	333
9.6. Підсумки до розділу .....	345
<b>Підсумки .....</b>	<b>348</b>
<b>Додаток 1. Алгоритми обчислення числа <math>\pi</math> .....</b>	<b>360</b>
<b>Додаток 2. Програмна реалізація комп'ютерного фазового експерименту в середовищі MatLab .....</b>	<b>363</b>
<b>Список літератури .....</b>	<b>369</b>

*Ні однієї точної науки, ні однієї практичної науки, ні одного досліджу без вимірювань! Нові засоби вимірювання знаменують собою дійсний прогрес*  
Б.С. Якобі

## ПЕРЕДМОВА

Цю наукову роботу присвячено кутовим і фазовим вимірюванням. Саме природна циклічність значного кола явищ, процесів на Землі, циклічність глибинних процесів Всесвіту були первинним джерелом становлення і розвитку кутових вимірювань на початку розвитку земної цивілізації. Іншими словами, властивість повторюваності, циклічності в часі та просторі (або повторюваності їх окремих параметрів та характеристик) значної кількості природних процесів і явищ визначає необхідність їх коректного дослідження методами кутових вимірювань. Без усвідомлення поняття циклічності було б неможливо вимірювати і час – адже першою природною одиницею вимірювання часу, очевидно, була доба. Властивість повторюваності виникає в численних дослідженнях різних експериментальних даних у медицині і біології, географії і метеорології, економіці і психології, діагностиці і неруйнівному контролі технічних систем.

Дослідження циклічних процесів проводять у різних галузях науки і техніки. Про це свідчать науково-технічні публікації протягом останніх двох століть. Водночас спостерігається до певної міри дивний факт – якщо раніше число публікацій для детермінованої постановки задачі дослідження циклічних явищ на основі кутових вимірювань зростало, то за період другої половини двадцятого століття для статистичної постановки задачі кутових вимірювань число публікацій у порівнянні з минулим періодом зменшилось.

До наукових публікацій, у яких обґрунтовано теоретичні методи статистичної обробки даних кутових вимірювань, належить монографія К.Мардіа «Статистический анализ угловых наблюдений» (K.V. Mardia. Statistics of directional data, 1972). У цій роботі узагальнено результати багаторічної праці автора та інших закордонних вчених, у першу чергу Ріхарда Мізеса в області статистичного аналізу випадкових кутів.

Значну кількість науково-технічних публікацій присвячено прикладним питанням кутових вимірювань.

У двадцятому столітті почала розвиватись фазометрія як окрема самостійна галузь вимірювань в основному базуючись на використанні методів і результатів досліджень кутових вимірювань (кутометрії). Тому фазометрію можна вважати самостійним напрямом розвитку узагальненої галузі вимірювань – кутометрії.

Найбільшим обґрунтованим на сьогодні є статистичний метод аналізу кутових і фазових вимірювань. Це зумовлено тим фактом, що такі вимірювання у часі і просторі за своєю фізичною природою є випадковими у зв'язку з дією значної кількості випадкових факторів. Природно, що словосполучення «дія

випадкових факторів» потребує відповідного тлумачення. Тому будемо використовувати наступну класифікацію А.М. Колмогорова дії просторових і часових випадкових факторів під час проведення кутових і фазових вимірювань параметрів, характеристик досліджуваних природних явищ, процесів, систем різної фізичної природи (далі – емпірична система):

а) випадкові початкові умови, а далі розвиток емпіричної системи, є повністю прогнозованим, тобто має детермінований характер;

б) розвиток емпіричної системи характеризується комбінаціями дій детермінованої і випадкової компонент;

в) розвиток емпіричної системи є повністю випадковим.

Перед авторами роботи виникли природні запитання: чи потрібна нова публікація з кутових і фазових вимірювань; наскільки важлива і універсальна галузь вимірювань – статистична фазометрія для проведення досліджень, створення сучасних інформаційних технологій, розвитку нанотехнологій у різних областях діяльності людської спільноти?

З метою отримати позитивну відповідь у роботі розглянуто питання кутових і фазових вимірювань, а саме:

- узагальнення відомих теоретичних положень статистичних кутових і фазових вимірювань на основі використання сучасних досягнень теорії випадкових процесів, математичної статистики, прикладної математики, математичного моделювання й обчислювальних методів, у першу чергу, для створення математичних моделей досліджуваних емпіричних систем при проведенні вимірювальних експериментів;

- обґрунтування нових методів статистичних кутових і фазових вимірювань із використанням методів цифрової обробки сигналів (ЦОС);

- розроблення алгоритмів і відповідного програмного забезпечення для визначення результатів і характеристик точності вимірювань, статистичних оцінок параметрів і характеристик досліджуваних сигналів;

- широке застосування засобів обчислювальної техніки в задачах комп'ютерного вимірювального експерименту;

- розроблення практичних рекомендацій зі створення сучасних апаратно-програмних комплексів кутових і фазових вимірювань.

Висвітлення основних положень роботи базувалось на реалізації таких основних принципів:

а) досліджувати кутові та фазові вимірювання у методичному плані необхідно як єдину науково-технічну галузь вимірювань, питання належності тієї чи іншої конкретної задачі кутових чи фазових вимірювань зумовлено самою постановкою задачі;

б) розглядати, в основному, статистичні задачі кутових і фазових вимірювань, при цьому детермінована постановка задачі є частинним випадком статистичної;

в) зберігати відповідний взаємозв'язок узгодження результатів теоретичних, імітаційних і експериментальних досліджень кутових і фазових вимірювань.

Структура роботи має вступ, дев'ять розділів, підсумки, розширений перелік джерел посилань, поділених на розділи, а також три додатки.

Перший розділ присвячений обґрунтуванню ролі кутометрії у загальній теорії та пактиці вимірювань. У матеріалах розділу наведено стислий огляд історії розвитку, основні терміни та одиниці кутових вимірювань, а також їх характерні властивості. Розділ закінчується підсумками і це має місце для кожного розділу.

У другому розділі показано, що теорія кутових і фазових вимірювань базується на сучасній аксіоматичній теорії статистичних вимірювань. Наведено вибрані питання такої теорії стосовно кутових і фазових вимірювань. Детальніше розглянуто одновимірний випадковий кут і наведено модель двовимірного випадкового кута. Досліджені типові закони розподілу ймовірностей одновимірного випадкового кута.

Загальна характеристика фазометрії висвітлена у третьому розділі. У матеріалах розділу розглянуто розвиток фазометрії, використання механічних, електричних та електрооптичних явищ і ефектів при проведенні фазового вимірювального експеримента. Обґрунтовані основні науково-технічні проблеми статистичної фазометрії і фазового вимірювального експерименту.

В огляді основних методів фазометрії, що містяться в четвертому розділі, крім відомих типових методів вимірювання фазових зсувів сигналів запропоновано використання нового методу. Наведено обґрунтування для вимірювань фазового зсуву сигналу  $\Phi > 2\pi$  на основі застосування кумулятивного різночастотного методу.

У п'ятому розділі наведено матеріали аналізу функціонування відомих типових технічних засобів фазометрії. Враховуючи факт використання таких засобів і у прогнозованому майбутньому, розглянуто технічні засоби регулювання, вимірювання та відтворення фазових зсувів гармонічних сигналів для задач практичної фазометрії.

Слід звернути увагу на відомі і нові результати використання перетворення Гільберта у задачах детермінованої і статистичної фазометрії, які наведені у шостому розділі.

Детальніше у порівнянні з матеріалами другого розділу у сьомому розділі наведено матеріали про статистичні моделі випадкових кутів та їх статистичні характеристики. Разом із законами розподілу ймовірностей випадкових кутів розглянуто і їх числові характеристики.

Проблематика задач комп'ютерного моделювання і статистичної обробки даних фазових вимірювань розглянута у восьмому розділі. Наведено також результати розв'язання ряду задач статистичних фазових вимірювань.

Дев'ятий розділ завершує дану наукову роботу. В цьому розділі розглянуто, в основному, перспективні фазові ІВС, зокрема фазові ІВС з ортогональною обробкою сигналів на основі ковзного дискретного перетворення Гільберта для виявлення радіоімпульсних сигналів в умовах дії завад; інформаційну систему з передачею та захистом інформації на основі використання для кодування інформації числової системи залишкових класів (СЗК).

До основного тексту роботи додано два додатки:

- 1) алгоритми обчислення числа  $\pi$ ;
- 2) програмна реалізація комп'ютерного фазового експерименту в середовищі MatLab.

Заслуговує на увагу перелік джерел посилань – літературу, яка включає і наукові публікації за останні роки. Джерела посилань поділені на розділи, що, на думку авторів, дасть змогу ефективніше їх використовувати.

Сподіваємося, що дана робота дасть можливість шановним читачам, оволодіти новими знаннями і послугує творчим імпульсом у професійній діяльності для застосування методів статистичної фазометрії при вивченні та дослідженні різноманітних циклічних явищ, процесів і сигналів.

Автори з вдячністю згадують корисні поради, творчі дискусії і критичні зауваження проф. Марченка Б.Г., які завжди характеризувались конструктивністю і глибиною. Користуючись нагодою висловлюємо глибоку подяку професорам Маєвському С.М., Ніженському А.Д., Скрипнику Ю.О., Тузу Ю.М. за критику, зауваження та рекомендації, які значною мірою сприяли покращенню тексту монографії, а також професорсько-викладацьким колективам кафедр інформаційно-вимірювальних систем Національного авіаційного університету і комп'ютерних наук Тернопільського державного технічного університету ім. І. Пулюя за плідні дискусії, обговорення на конференціях і наукових семінарах, інженеру Козловій О.О. та студентам НАУ Пирог Т.М., Дергунову О.В. і Бабич К.С. за постійну допомогу під час підготовки рукопису книги.

Монографія розрахована як на досвідчених фахівців, так і на студентів вищих навчальних закладів, аспірантів, які займаються плануванням і проведенням кутовимірювальних експериментів, виконанням комп'ютерного моделювання і розв'язання задач статистичної обробки даних кутових і фазових вимірювань, розробкою і використанням методів та засобів статистичної фазометрії.

Автори будуть дуже вдячні всім читачам, які надішлють свої відгуки, зауваження та пропозиції стосовно матеріалів даної монографії на адресу: 03680, м. Київ, проспект Комарова, 1, НАУ, кафедра ІВС.



# ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

## 1. Числа, множини чисел.

$N$  – множина натуральних чисел

$R$  – множина раціональних чисел

$n_i$  –  $i$ -й модуль системи залишкових класів

$\alpha_i$  – залишок цілого числа  $A$  за модулем  $n_i$ ,  $\alpha_i = A(\text{mod } n_i)$

$\|U_m\|$  – норма елемента  $U_m$

$A_p$  – межа робочого діапазону системи залишкових класів

$A_{\Pi}$  – межа повного діапазону системи залишкових класів

## 2. Детерміновані сталі, функції, функціонали і оператори

$t$  – поточний час

$f$  – частота

$T$  – інтервал часу, період сигналу

$U$  – амплітуда гармонічного сигналу

$A(t)$  – амплітудна характеристика сигналу

$D$  – відстань

$\Phi(t)$  – фазова характеристика сигналу

$\Phi$  – кумулятивний фазовий зсув

$\hat{\Phi}$  – оцінка кумулятивного фазового зсуву  $\Phi$

$u(t)$  – загальне позначення детермінованого сигналу

$u[j]$  – дискретна послідовність значень сигналу  $u(t_j)$

$u_H(t)$  – перетворення Гільберта сигналу  $u(t)$

$\mathbf{A}_{\Delta t}$  – оператор зсуву на час  $\Delta t$

$[x]$  – оператор визначення цілої частини числа  $x \in R$

$\mathbf{M}$  – оператор математичного сподівання

$\mathbf{D}$  – оператор дисперсії

$\mathbf{H}[g(t)]$  – оператор перетворення Гільберта функції  $g(t)$

$\mathbf{H}_d[g(t)]$  – оператор дискретного перетворення Гільберта функції  $g(t)$

$\mathbf{F}[g(t)]$  – оператор перетворення Фур'є функції  $g(t)$

$\mathbf{F}_d[g(t)]$  – оператор дискретного перетворення Фур'є функції  $g(t)$

$\mathbf{L}[x, y]$  – оператор однозначного в інтервалі  $[0, 2\pi)$  визначення аргументу комплексного числа  $x + iy$

$\mathbf{K}[u(t), u_H(t)]$  – оператор, що усуває стрибки фазової характеристики сигналу  $u(t)$  в точках  $2\pi n$ ,  $n \in N$ .

## 3. Змінні, випадкові величини та процеси

$\omega$  – елементарна подія

$\Omega$  – простір елементарних подій

- $\xi(\omega)$  – загальне позначення випадкової величини  
 $\xi(\omega, t)$  – загальне позначення випадкового процесу  
 $\hat{\xi}(\omega, t)$  – процес спряжений з  $\xi(\omega, t)$  по Гільберту  
 $F(x)$  – функція розподілу ймовірності одновимірної випадкової величини  $\xi(\omega)$   
 $p(x)$  – щільність ймовірності випадкової величини  $\xi(\omega)$   
 $P(\xi < x)$  – імовірність випадкової події  $\xi(\omega) < x$   
 $\Psi(\omega)$  – загальне позначення випадкового кута  
 $\psi(\omega) = [\Psi(\omega)] \bmod 2\pi$  – загальне позначення випадкового кута в інтервалі  $[0, 2\pi)$   
 $\eta(\omega)$  – випадковий вектор  
 $F(\theta)$  – функція розподілу одновимірного випадкового кута  
 $R(\tau)$  – кореляційна функція стаціонарного процесу  
 $f(u) = \mathbf{M}e^{iu\xi}$  – характеристична функція випадкової величини  $\xi(\omega)$ ,  $u \in R$   
 $f(p) = \mathbf{M}e^{ip\psi}$  – характеристична функція випадкового кута  $\psi(\omega)$ ,  $p \in N$

#### 4. Перелік скорочень

- АЦП - аналогово-цифровий перетворювач  
АХС – амплітудна характеристика сигналу  
АЧХ – амплітудно-частотна характеристика  
ВКД – вибіркова кругова дисперсія  
ВКМ – вибіркова кругова медіана  
ВКС – вибіркоче кругове середнє  
ВОВП – волоконно-оптичний вимірювальний перетворювач  
ВСК – вихрострумний контроль  
ВСП – вихрострумний перетворювач  
ЕПТ – електронно-променева трубка  
ІВС – інформаційно-вимірювальна система  
КФЗ – кумулятивний фазовий зсув  
ПГ – перетворення Гільберта  
ПК – персональний комп'ютер  
СЗК – система залишкових класів  
ФЧХ – фазочастотна характеристика сигналу  
ЦОС – цифрова обробка сигналів  
УЛЗ – ультразвукова лінія затримки  
ЦАП – цифро-аналоговий перетворювач  
ФД – фазовий детектор  
ФАПЧ – фазове автопідстроювання частоти

*Отъици всему начало,  
и ты многое поймешь*  
Козьма Прутков

## Розділ 1

### РОЛЬ КУТОМЕТРІЇ В ТЕОРІЇ ТА ПРАКТИЦІ ВИМІРЮВАНЬ

У цьому розділі викладено історичну ретроспективу та галузь застосування кутових вимірювань, їх вплив на розвиток науки і техніки, розглянуто основні ідеї покладені в основу статистичної обробки випадкових кутів. Ці ідеї стали першоджерелом фазометрії і потужним поштовхом для подальшого розвитку статистичної фазометрії. Термін «кутометрія», який є загальною назвою галузі кутових вимірювань, ще не набув широкого використання у наукових публікаціях. Наведено також основні терміни, визначення та одиниці кутових вимірювань. Запропоновано варіанти визначення міри кутів на площині з використанням замкнених кривих другого порядку.

#### 1.1. Предметна галузь та стислий історичний огляд розвитку кутових вимірювань

**Галузь застосування.** Історичні факти свідчать про те, що поряд з часом, масою, лінійними розмірами кут можна вважати тією величиною, що має дуже давню історію вивчення і використання. З перших кроків розвитку цивілізації у повсякденному житті людини виникала потреба вимірювати кути. Землеробство і прогнозування сезонних природних явищ, архітектура і будівництво, судноплавство і астрономія та багато інших галузей практичної діяльності людини потребували визначення кількісних оцінок кутів. Осмислення часу й усвідомлення себе на Землі як частки Всесвіту здійснювали безпосередньо через кутові вимірювання. Ряд визначних відкриттів в історії людства було зроблено завдяки саме використанню кутових вимірювань. Це, наприклад, великі географічні відкриття цілих материків, архіпелагів, островів, проток стародавніми мореплавцями, які визначали своє місцеперебування за кутовим положенням зірок. Природним шляхом сформувалась окрема галузь вимірювань – *вимірювання кутів* – галузь знань, яка пов'язана з методами та приладами вимірювання кутів на площині та у просторі.

Нині немає такої галузі діяльності людини, яка б не використовувала вимірювання кутів. Геодезія і картографія, навігація і локація, астрономія і фізика, машинобудування і енергетика, геофізика, метеорологія, геологія, психологія, біологія, медицина – ось далеко неповний перелік галузей застосування вимірювань кутів і пов'язаних з ними уявлень та способів обробки експериментальних даних.

**Історичні факти.** Витоки кутометрії сягають у сиву давнину (III –II тисячоліття до н. е.), древні цивілізації Шумер, Вавілону та Єгипту [1.3; 1.4; 1.6], яким були відомі початкові знання в цій галузі. Саме в ті часи

сформувались основні фундаментальні поняття, які стали підґрунтям сучасних методів кутометрії. Відомості про кути разом з іншими геометричними твердженнями формулювались та нагромаджувались тоді у вигляді певних правил, підкріплених їх перевіркою на практиці. Особливо плідно цей процес розвивався у зв'язку з потребами в точному вимірюванні часу. Винахід сонячного годинника став по суті, першим перетворювачем фізичної величини – часу в кут. У III–II тисячоліттях до н.е. у Вавілоні було сконструйовано сонячний годинник – час визначався не за довжиною тіні, а за її напрямом у просторі. Це дозволило значно точніше і з постійною чутливістю перетворювати й визначати час.

Найпростіший сонячний годинник – *гномон* [1.6] являє собою вертикальний стрижень (він, власне, і називається гномоном), установлений в центрі горизонтальної площадки з круглою шкалою. Стрижень відкидає на шкалу тінь, за положенням якої визначається сонячний час. Унаслідок зміни взаємної орієнтації Землі та Сонця під час обертання тінь від стрижня в сонячному годиннику описує протягом дня більш складнішу за коло фігуру, яка циклічно змінюється зі зміною пори року. Для врахування цього явища циферблат таких годинників складався з декількох кривих з поділками (перших шкал), кожна з яких призначалась для певної пори року.

Важливо зазначити, що у давнину гномони використовували для визначення не тільки часу, але й широти місця його встановлення, нахилу екліптики до екватора, висоти Сонця над горизонтом тощо. Використовуючи вимірювання з гномоном в різних точках поверхні Землі і спираючись на гіпотезу про її форму у вигляді кулі видатний древньогрецький вчений Ератосфен (278 – 196 рр. до н.е.) уперше вирахував довжину дуги земного меридіана [1.16]. Схему його експерименту показано на рис. 1.1.

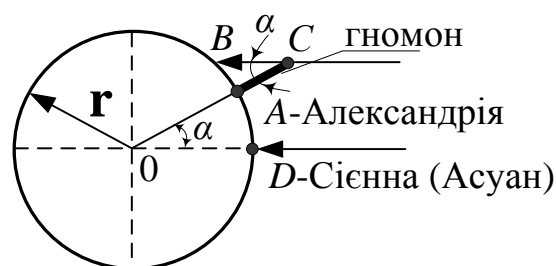


Рис.1.1. Експеримент Ератосфена по визначенню довжини дуги земного меридіану за результатами кутових вимірювань

В цьому експерименті з трикутника ABC отримано кут  $\alpha = 7^{\circ}12'$ , після чого визначено довжину кола Землі  $L = AD \frac{360^{\circ}}{7^{\circ}12'}$ . Отриманий Ератосфеном результат – 39375 км – лише на 2% відрізняється від визначеного в наш час значення  $L = 40075,7$  км. Ератосфен також визначив значення кута нахилу

екліптики (орбіти руху Сонця на небесній сфері) до екватора Землі, яке було уточнено за 22 століття лише на 6 кутових хвилин.

Із часом сонячні годинники удосконалювались та допрацьовувались. У трактаті «Десять книг про архітектуру» древньоримського архітектора Марка Вітрувія Полліона (друга половина I ст. до н.е.) нараховано й описано вже тридцять різних типів сонячних годинників, що використовувались у I ст. н.е. В цій праці наведено і тип годинника, циферблат якого був виготовлений у вигляді порожнини, вигнутої у формі чаші.

Згодом грецькі астрономи з'ясували, що для підвищення точності відліку часу за сонячним годинником необхідно спрямовувати його стрижень на полюс світу – точку небозводу, яка здається нерухомою під час обертання Землі. В цьому разі кінець тіні від стрижня описує коло, а швидкість руху є рівномірною. Отже, на такому годиннику в різні пори доби й року однаковим проміжкам часу відповідають однакові кути, на які зміщується тінь від стрижня. Отримання рівномірної шкали значно спрощувало користування годинником і ще більше підвищувало точність відліку часу. Певною незручністю такого годинника було те, що протягом однієї половини року тінь від стрижня падала на циферблат зверху, а протягом другої – знизу. Цю незручність усунуто в іншій модифікації сонячного годинника з горизонтально розташованим циферблатом та індикатором, що відкидає тінь у формі трикутника з гострим кутом, який дорівнює широті певної місцевості (рис. 1.2). Площина трикутника перпендикулярна до площини циферблата і збігається з напрямом північ – південь. Проте шкала такого годинника стала нерівномірною.

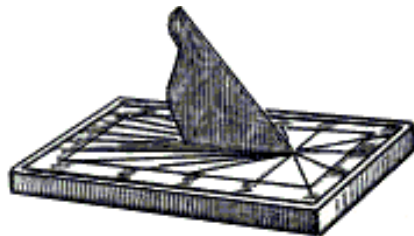


Рис.1.2. Сонячний годинник з індикатором у формі трикутника

У період VII – I ст. до н.е. відбувається активний розвиток геометрії у Древній Греції. Було нагромаджено багато відомостей про співвідношення між сторонами та кутами трикутників, вимірювання площ та об'ємів різних фігур, подібність фігур тощо. З'явилися перші строгі доведення геометричних тверджень. Знання з різних питань геометрії, включаючи знання, здобуті під час дослідження операцій з плоскими кутами, систематизовано в елементарній геометрії Евкліда – праці «Начала» (III ст. до н.е.).

Значний внесок в розвиток кутових вимірювань зробили видатні математики і астрономи середньовіччя на Близькому Сході. Так, наприклад, уродженець Хіви (Хорезму) Абу Абдалла Мухаммед Ібн Муса аль-Хорезмі (близько 780 – 850 рр.) увів у практику обчислень синус, почав широко



застосовувати тригонометричні функції кутів для розв'язання задач гномоніки – науки про сонячні годинники.

Інший відомий вчений Сходу Абу-Рейхан-Мухаммед Ібн Ахмед аль-Біруні (972-1048 р.р.) на початку XI ст. першим визначив усі шість тригонометричних функцій на колі, виконував надзвичайно точні кутові вимірювання [1.6]. Він виміряв кут нахилу екліптики орбіти руху Сонця на небесній сфері до екватора Землі і у 1020 році отримав таке його значення –  $23^{\circ}34'0''$  (за результатами сучасних вимірювань отримано значення  $23^{\circ}34'45''$ ), розробив оригінальний метод визначення радіуса Землі. За результатами його вимірювань у перерахунку на кілометри радіус становив близько 6490 км.

Сучасник аль-Біруні – єгипетський математик, астроном та фізик Ібн аль-Хайсам (965 – 1039 рр.) досліджував переломлення світла, розробив методи вимірювання кутів переломлення світла.

Розвиток астрономії і геодезії – наук, значний вміст яких становлять кутові вимірювання на небесній сфері та земній поверхні, привело до створення тригонометрії та стереометрії як розділів математики, у яких досліджуються операції з кутами на площині та в просторі.

Надалі геометрія як наука на певному обмеженому інтервалі розвивалася значно повільніше. І тільки в XVII ст. завдяки працям видатного французького математика Р. Декарта, геометрія як наука здобула нове дихання. Створений Р. Декартом метод координат дозволив поєднати методологію досліджень алгебри і геометрії.

Значну роль у кутових вимірюваннях в геометрії відігравало і відіграє число  $\pi$  – відношення довжини кола до його діаметра ( $\pi \approx 3,14\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238 \dots$ ). Уже всередині першого тисячоліття китайський математик Цзу Чун чжі (429 – 500 р.р.) подав наближене значення числа  $\pi$  у простих дробах, спочатку

як  $\frac{22}{7}$  ( $\sim 3,1429$ ), а пізніше як  $\frac{355}{113}$  ( $\sim 3,14159292$ ), тобто з похибкою лише в

шостому розряді після коми в його десятковому поданні [1.1]. Результат Цзу Чун чжі був перевершений у 1427 р. самаркандським математиком і астрономом Джіат Еддін Джемшид аль-Каші, який подав відношення довжини кола до його радіуса у вигляді десяткового дроби більш ніж з 15 знаками [1.42]. Лише порівняно недавно (XVIII – XIX ст.) остаточно з'ясовано арифметичну природу цього числа. І. Ламберт та А. Лежандр установили, що  $\pi$  – це ірраціональне число, а в 1882 р. Ф. Ліндеман довів, що воно є трансцендентним числом (тобто не може бути коренем алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами) [1.20]. Позначення числа грецькою літерою  $\pi$  (імовірно від грец.  $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$  - коло, периферія) було введено і набуло стандартного характеру у працях відомих математиків У. Джонса (1706, W. Jones) та Л. Ейлера (1736, L. Euler) [1.20]. Приклади алгоритмів деяких способів обчислення числа  $\pi$  наведено у додатку 1.

Додамо ще один відомий факт [1.18]: розроблена видатним німецьким математиком К. Гауссом теорія похибок призначалася насамперед для задоволення потреб кутових вимірювань в астрономії. Похибки цих вимірювань були настільки малими (частки відсотка), що допускали лінійну апроксимацію і дали змогу К. Гауссу і його послідовникам розробити й розвинути лінійну теорію похибок вимірювань, проте для загального випадку оцінювання випадкових кутів значно ефективніша теорія похибок на колі. Цей факт в історичному аспекті відчутно не позначився на популярності кутових вимірювань. Підтвердженням такої гіпотези є теорія і практика сучасних вимірювань кутів, для яких значно частіше застосовують лінійну теорію похибок.

*Історичні факти з розвитку кутомірних інструментів і приладів.* Постійно зростаючі потреби практичної діяльності людини привели до розроблення різноманітних кутомірних інструментів та приладів. Ґрунтовний історичний огляд розвитку приладів і інструментів для вимірювання кутів наведено в працях [1.6; 1.15], окремі історичні факти – в працях [1.3; 1.4; 1.8; 1.13 – 1.16; 1.24; 1.29; 1.32; 1.40 – 1.42].

Одним з найперших письмових свідчень, в якому описано найпростіші інструменти для вимірювання кутів, є твір видатного вченого та інженера, який працював в Олександрії, Герона Олександрійського «О діоптрах», який датується II ст. до н.е. Тоді ж олександрійський астроном Геппарх винайшов кутомірний інструмент – астролябію (від *astrolabion* – астро... і *labe* – схоплювання «беру зірку»).

Пріоритет у винаході секстанта належить багдадському астроному Худжанді (X ст.). Видатний хорезмський вчений аль-Біруні сконструював перший пристрій для ділення лімба – розділеного по колу на градуси металевого круга, за яким у кутомірних інструментах виконується відлік напрямлення сторін вимірюваного кута.

Учені Сходу опанували мистецтво виготовлення високоточних кутомірних інструментів. Так, аль-Баттані (близько 850 – 929 рр.) у своїй обсерваторії користувався астролябією, гномоном, армілярною сферою, настінними квадрантами тощо.

У XV ст. в обсерваторії видатного узбецького астронома і математика Улугбека був установлений універсальний прилад, який замінює астролябію і квадрат, інструмент що складається з трьох з'єднаних між собою лінійок для вимірювання кутів між напрямленнями на небесні світила. Дуга квадранта мала радіус 40,2 м. Повна довжина околу секстанта перевищувала 250 м, а відстань між поділками шкали у 12 мм відповідала кутовій минуті.

Пристрої для точного відліку по лімбах (верньєри або ноніуси) винайшов у 1620 р. голландець П. Верньє. Видатний російський вчений М.В. Ломоносов (1711 – 1765) запропонував і створив більше двох десятків різноманітних інструментів для мореплавної астрономії.

Французький академік Жак Пікар (1620 – 1682 ) уперше застосував геодезичний прилад із зоровими трубами та сіткою ниток, який став прообразом сучасних теодолітів. Перший теодоліт, близький за принципом дії до сучасного, створений у 1730 р. англійським механіком Д. Сиссоном.

Наприкінці XVIII – XIX ст. російський механік І.П. Кулібін (1735 – 1818) виготовив астролябію із зоровою трубою, що дозволило підвищити точність визначення кутів.

Важливе місце в загальному розвитку кутових вимірювань посідають градусні вимірювання, які проводились в Росії з 1816 по 1855 рік під керівництвом військового геодезиста і астронома К.І. Тендера (1783 – 1860 рр.) та першого директора Пулковської обсерваторії академіка В.Я. Струве (1793 – 1864 рр.). Результатами їх роботи було визначення дуги Струве завбільшки  $25^{\circ}20'$  по меридіану між берегами Північного Льодовитого океану і гирлом р. Дунай відстанню близько 3000 км.

Найвищу точність вимірювання кутів досягнуто геодезичними приладами та гіроскопами. Так, наприклад, у 1934 р. в Радянському Союзі Були розроблені і серійно випускались теодоліти типу Т, а також започатковано випуск п'ятисекундного універсального теодоліта У-5; у сучасному тахеометрі серії Trimbe 3600 DR Total station кутові вимірювання виконуються з точністю  $1,5''$  і роздільною здатністю  $0,1''$ .

Якісний стрибок у розвитку кутових вимірювань пов'язаний з використанням лазерної і оптоволоконної техніки, сучасними досягненнями мікросхемотехніки і мікроелектроніки. Так, наприклад, для волоконно-оптичних гіроскопів досягнута точність визначення кутів становить частки кутової секунди [1.24]. Похибка вимірювання кутів сучасними теодолітами сягає  $0,5'$ .

**Огляд інструментів і приладів для вимірювання кутів.** Розроблений для кутових вимірювань інструментарій налічує десятки найменувань і призначений для використання у різних галузях науки і техніки. Деякі з таких інструментів вийшли із практики використання і майже забуті, інші й дотепер використовуються у різних галузях промислово-господарського комплексу [1.3; 1.5; 1.8; 1.13 – 1.15; 1.24; 1.25; 1.29; 1.32; 1.39 – 1.41]. Робочу міру кута більшості з них виконано у вигляді лімба (круглої шкали) або кодового диска, а кут утворюється лініями візування на певні цілі чи об'єкти, які визначаються за положенням зорових труб, алідад тощо, наведених на ці об'єкти.

Нижче наведено призначення та зображення ряду кутомірних інструментів і приладів – від найпростіших, що використовувались з давніх часів, а деякі й тепер до надскладних, у яких поєднуються сучасні досягнення електроніки, оптики, радіотехніки та інформаційних технологій.

- **У мореплаванні:** *секстант* (рис. 1.3, а) – інструмент, який використовувався для вимірювання висот небесних світил (цей інструмент застосовують і тепер у випадках, коли приймання сигналів глобальних

радіонавігаційних систем з тих чи інших причин неможливе), *компас* (рис. 1.3, б) – прилад, що вказує напрям географічного чи магнітного полюсів Землі, *бусоль* (рис. 1.3, в) – прилад для вимірювання на місцевості азимутів чи румбів (румб – позасистемна одиниця виміру кутів, прийнята у морській навігації, яка дорівнює 1/32 частці кола), *гірокомпас* (рис. 1.3, г) – покажчик курсу судна на основі гіроскопа (рис. 1.3, д), *інклінатор* або *бусоль нахилень* (рис. 1.3, е) – прилад, що призначений для вимірювання магнітного нахилення, являє собою магнітну стрілку, яка закріплена на горизонтальній осі і оздоблена вертикальним колом з поділками для відліку кутів нахилення (під час вимірювання нахилень коло встановлюється в площині магнітного меридіана);

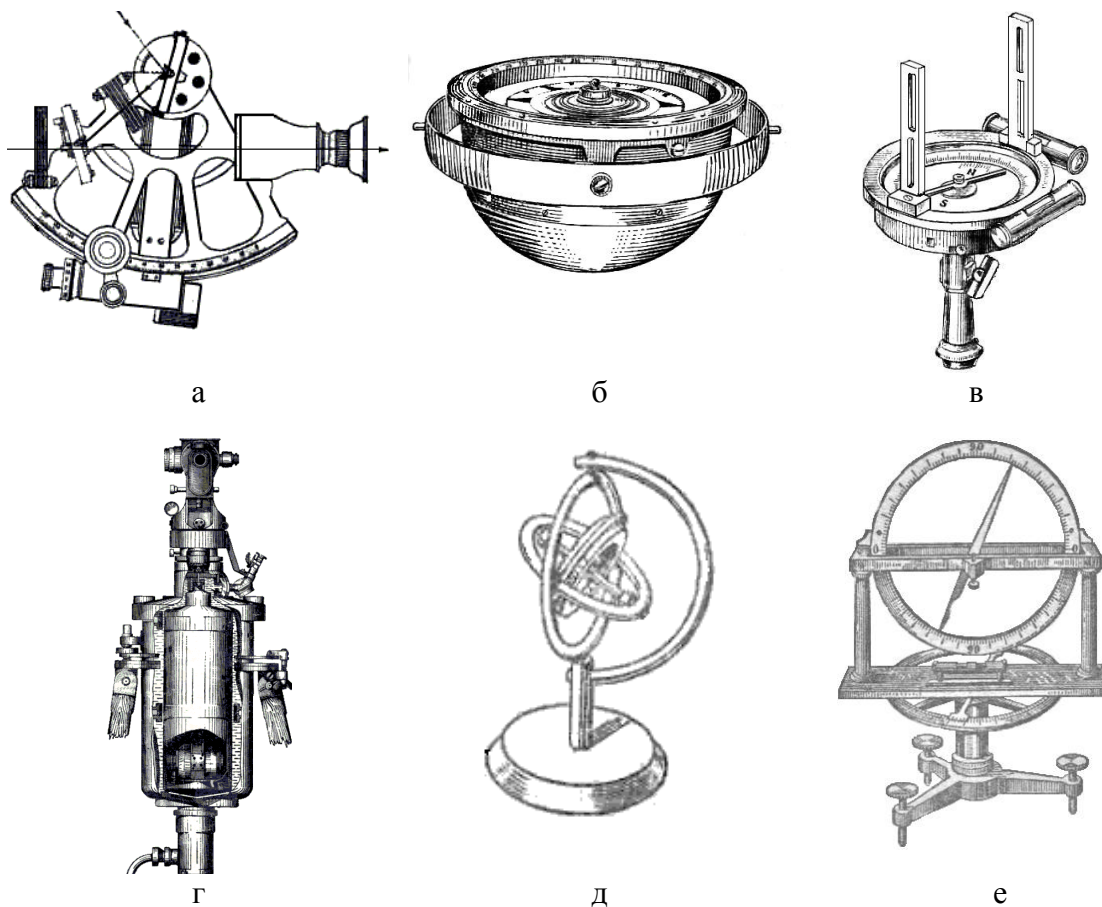


Рис.1.3. Кутівимірювальний інструмент, що використовувався у мореплаванні:  
а – секстант, б – компас, в – бусоль, г – гірокомпас, д – гіроскоп, е – інклінатор

- **В астрономії:** *армілярна сфера* (рис. 1.4, а) – стародавній астрономічний інструмент для вимірювання координат небесних світил, *астролябія* (рис. 1.4, б) – кутомірний інструмент, який до XVIII ст. слугував для визначення широти і довготи, *меридіанне коло* – астрономічний інструмент для точного визначення екваторіальних координат небесних світил, *квадрант* – старовинний кутомірний астрономічний інструмент для вимірювання висоти небесних світил над горизонтом та кутових відстаней між світилами (лімб квадранта становить

1/4 частини кола), *октант* – кутомірний інструмент, шкала якого становить 1/8 частини кола, застосовувався у мореплавній астрономії (тепер майже не використовують).

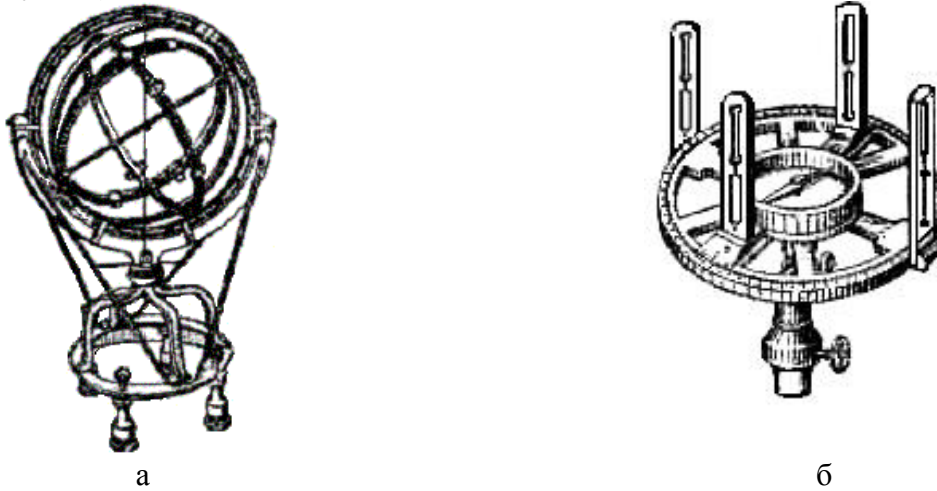


Рис.1.4. Астрономічний кутомірний інструмент  
а – армілярна сфера; б – астролябія

- У *креслярстві* (архітектурі): *транспортир* (рис. 1.5) – пристрій для побудови та вимірювання кутів на кресленнях, має вигляд півкола, що розділено на градуси, забезпечує точність вимірювання кутів близько  $10' - 15'$  (у геодезії під час тахеометричного знімання застосовують колові транспортири з алідадою – частиною геодезичного приладу, розміщеною співвідносно з лімбом, яка містить елементи відлікового пристрою).

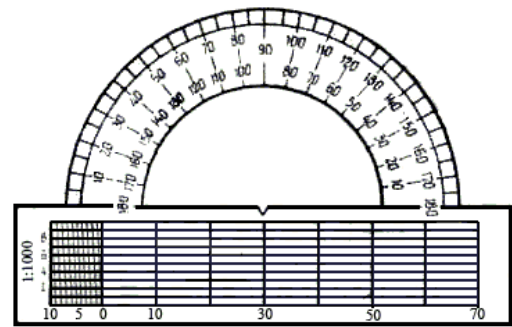


Рис.1.5. Транспортир

- У *геодезії*: *екліметр* – портативний геодезичний інструмент для вимірювання кутів у вертикальній площині на місцевості з невисокою точністю ( $\sim 0,2^\circ$ ), *бульбашковий рівень* (рис. 1.6, а) – прилад для орієнтації осей та площин інструментів відносно прямовисної лінії та вимірювання малих кутових відхилень від неї (принцип роботи ґрунтується на переміщенні повітряної бульбашки в герметичній скляній ампулі з рідиною та нанесеною на неї шкалою), *кіпрегель* (рис. 1.6, б) – інструмент для викреслювання напрямів та визначення відстаней і перевищення під час мензульного знімання, *теодоліт* (рис. 1.6, в) – геодезичний прилад для визначення кутів у кутомірному зніманні, триангуляції та полігонометрії, *тахеомерт* (рис. 1.6, г) – вид теодоліта з дальномірним пристроєм, який використовується в геодезії для визначення кутів і відстаней без розрахунків, *екер* (рис. 1.6, д) – геодезичний інструмент для побудови на місцевості кутів  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ , робота якого ґрунтується на законах геометричної оптики (відомі дзеркальні й призмненні екери);



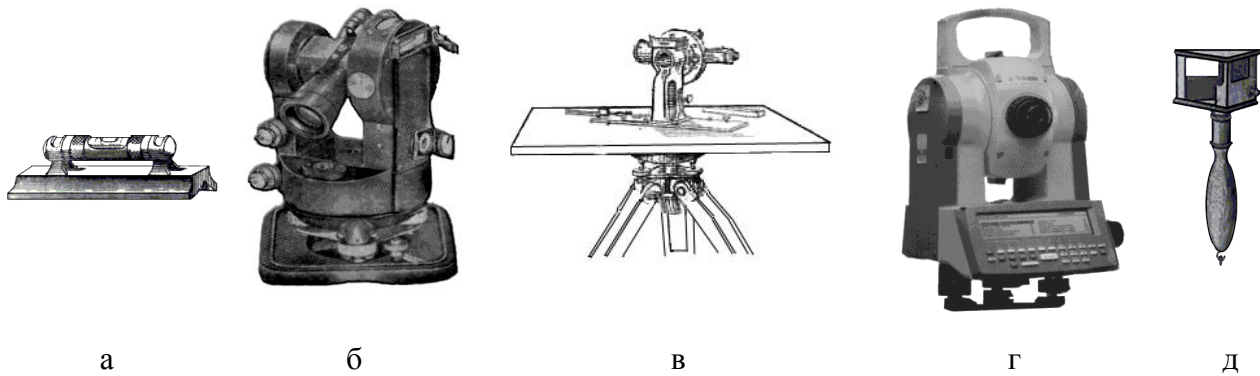


Рис.1.6. Геодезичний кутвимірювальний інструмент та прилади:  
а – бульбашковий рівень, б – кіпрегель, в – теодоліт, г – тахеометр, д – екер

- **У військовій справі:** артилерійська бусоль – прилад для вимірювання магнітних азимутів цілей, вертикальних і горизонтальних кутів під час керування вогнем артилерії, *стереотруба* (рис. 1.7, а) – артилерійський оптичний прилад для спостереження за полем бою з укриття і точного вимірювання вертикальних та горизонтальних кутів, *прицільний пристрій* (рис. 1.7, б) – пристрій для установлення горизонтальних та вертикальних кутів, які потрібно придати стволу зброї для наведення на ціль або задану точку під час стріляння, *кутомір* – складова частина деяких прицільних пристроїв у артилерії і стрілковій справі; призначений для вимірювання кутів під час наведення гармат чи кулеметів.



Рис.1.7. Кутомірні інструменти у військовій справі:  
а – стереотруба, б – прицільний пристрій

- **У геофізиці:** *інклінометр* – прилад для визначення кута нахилу і напрямлення викривлення бурової скважини, контролю положення її осі (принцип дії ґрунтується базується на використанні гравітаційного та магнітного полів Землі або гіроскопічного ефекту).

• **У метеорології:** *анеморумбограф* (рис. 1.8) – прилад для визначення та запису швидкості та напрямку вітру.

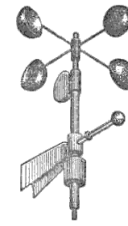
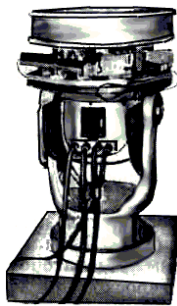


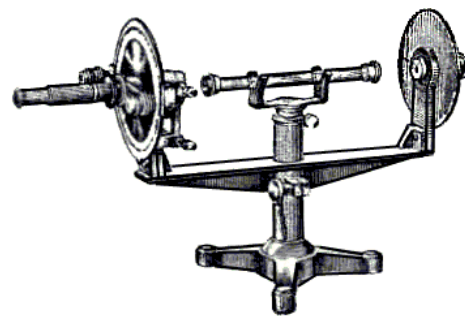
Рис.1.8. Анеморумбограф

• **В оптиці:** *гоніометр* – пристрій для високоточного вимірювання кутів між плоскими гранями твердих тіл у кристалографії,

*оптоволоконний гіроскоп* (рис. 1.9, а) – надчутливий прилад для прецизійного визначення кута повороту об'єкта на основі кільцевого лазера, *поляриметр* (рис. 1.9, б) – прилад для вимірювання кута повороту площини поляризації світла.



а



б

Рис.1.9. Кутовимірювальні прилади в оптиці: а – оптоволоконний гіроскоп, б – поляриметр

• **В авіації:** *авіагоризонт* – авіаційний прилад для вимірювання поздовжніх та поперечних кутів крену літака, *гіровертикаль* – прилад для визначення положення літака відносно лінії істинного горизонту і визначення кутів крену та тангажа, *показчики кутів атаки* літака (рис. 1.10).

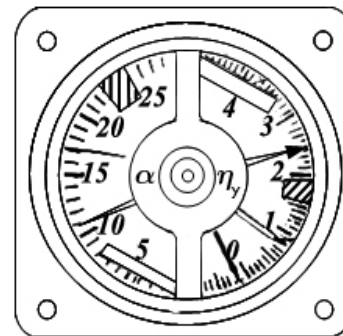


Рис.1.10. Показчики кутів атаки літака

• **У гірничій справі:** *півколо висяче* (рис. 1.11) – прилад для визначення кута нахилу підземних гірничих виробок, *гірничий компас* – прилад для визначення елементів залягання гірничих порід (напрямів їх простягання, падіння та

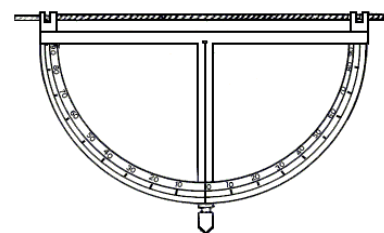


Рис.1.11. Напівколо висяче

кутів падіння), *гірничий гірокомпас* – прилад, призначений для орієнтування шахт та контролю підземного знімання на шахтах розробки копалин з магнітними властивостями (похибка вимірювання  $\sim \pm 45''$ ).

- **У машинобудуванні:** *кутомір* (рис. 1.12, а) – пристрій для вимірювання контактним методом кутів між двома площинами деталей та виробів, *кутомір* типу 2УРИ 2УРИ (рис. 1.12, б) – пристрій для вимірювання передніх і задніх кутів заточки багатолезового інструменту з рівномірним кроком зубців від 5 до 75 мм – фрез, зенкерів тощо забезпечує похибку вимірювання близько  $1^\circ$ , *кутомір маятниковий* типу 3УРИ (рис. 1.12, в) – пристрій для вимірювання кутів різального інструменту (принцип дії ґрунтується на кутовому переміщенні стрілки з тягарем-виском відносно круглої шкали, яка орієнтується певним чином відносно робочої площини інструменту, розміщеного на горизонтальній площині), *мікрометр* (рис. 1.12, г) – призначений для вимірювання зовнішніх розмірів деталей, його відліковий пристрій ґрунтується на застосуванні гвинтової пари для перетворення обертального руху мікрогвинта у поступальний рух рухомої вимірювальної п'ятки (ціна поділки становить 10 мкм, що відповідає повороту головки з 50 поділками на шкалі на кут  $7,2^\circ$ ), *індикатор* (рис. 1.12, д) – вимірювальний інструмент, стрілка якого показує на коловому циферблаті (з ціною поділки 10 мкм) переміщення у невеликому інтервалі (до 10 мм) мірного штифта, принцип дії також ґрунтується на використанні гвинтової пари, *косинець* – вимірювальний інструмент для контролю і розмітки прямих кутів на кресленнях, у слюсарній та слюсарній справах.

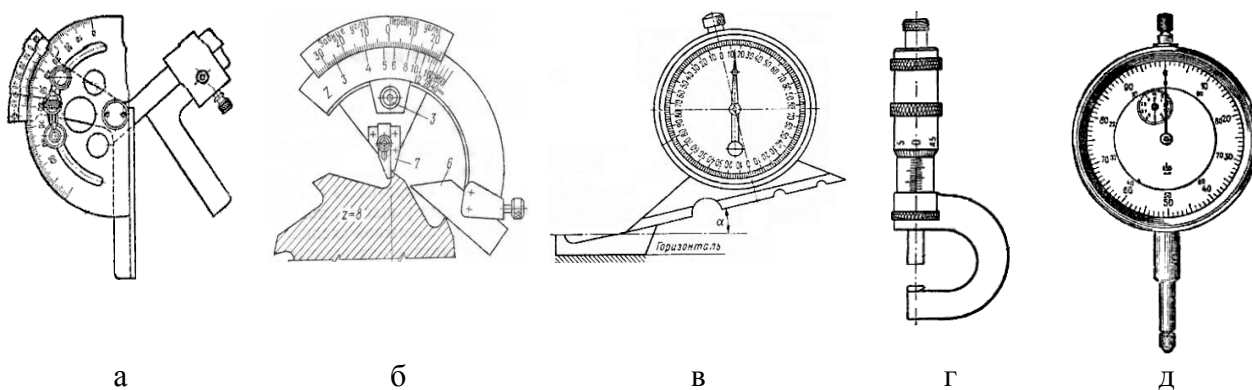


Рис.1.12. Кутівимірювальні інструменти для технічних вимірювань  
а – кутомір з ноніусом типу УМ1; б – кутомір типу 2УРИ; в – кутомір маятниковий типу 3УРИ; г – мікрометр; д – індикатор

Цей далеко неповний перелік кутомірних пристроїв підтверджує надзвичайно важливу роль кутометрії у житті та діяльності людини. На жаль авторство переважної більшості названих приладів та інструментів історично встановити неможливо.

**Кутові вимірювання у фізичному експерименті та вимірювальній техніці.** Багатий історичний досвід використання кутів, їх математична обґрунтованість, висока точність вимірювання, прості геометрична інтерпретація, тлумачення отриманих результатів та наочність спонукали дослідників шукати й застосовувати способи перетворення різних фізичних величин у кут для дослідження нових фізичних явищ та ефектів. Кутові вимірювання як метод дослідження та візуалізації невидимих, але об'єктивно існуючих природних явищ, часто приводили до значних відкриттів. Розглянемо найбільш характерні приклади використання кутових вимірювань у фізичному експерименті.

Видатні російські академіки М.В. Ломоносов (1711 – 1765) та Г.В. Ріхман (1711 – 1753) використали для дослідження атмосферних електричних зарядів у 1752 – 1754 рр. розроблений ними прилад «електричний показчик» або «електричний гномон». Цей прилад [1.36] схематично зображений на рис. 1.13.

Основними елементами електричного показчика є залізна лінійка, льняна нитка і дерев'яний квадрант з рівномірно нанесеними оцифрованими поділками. Місце прикріплення нитки є центром кола квадранта. Коли лінійка торкається наелектризованого тіла нитка відхиляється на певний кут. Цей кут визначають з рівноваги сил тяжіння та електростатичної взаємодії і відраховують за шкалою квадранта. Про розмір заряду можна робити висновки про отримане значення кута.

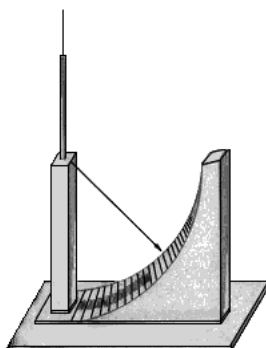


Рис. 1.13. Електричний показчик Ломоносова-Ріхмана

У цьому приладі вперше використано принцип зрівноважування механічних моментів різних сил, який згодом стали застосовувати в електровимірювальних приладах прямої дії – зрівноважування двох механічних моментів, що діють на рухому частину приладу – оберտального, що залежить від вимірюваної величини, і протидійного, що не залежить від вимірюваної величини.

Оригінальний спосіб використання кутових вимірювань реалізовано у приладі «крутильні ваги Кулона» (рис. 1.14), який у 1785 р. був винайдений і застосований видатним французьким фізиком Шарлем Кулоном (1736 – 1806) для визначення закону взаємодії точкових зарядів. В цьому приладі [1.38] роль показчика кута відіграла підвішана на срібній нитці стрілка, яка мала на

одному кінці бузинну кульку, а на другому – протизагу. Верхній кінець нитки закріплюється на обертальній голівці, кут повороту якої можна було точно відраховувати. В середині скляного циліндра розміщено ще одну кульку на ізолюваному стрижні, а на його нанесено ще одну шкалу для визначення відстані між кульками.

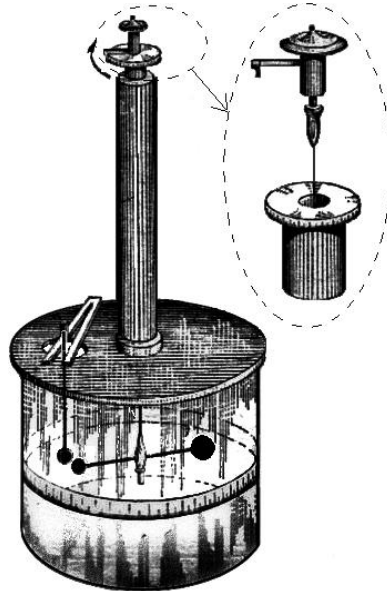


Рис. 1.14. Крутильні ваги Кулона

Принцип дії приладу ґрунтується на використанні двох обертальних моментів – моменту, потрібного для закручування нитки, та моменту, створеного дією сили електростатичної взаємодії заряджених кульок.

Відомий англійський хімік і фізик Генкі Кавендіш (1731 – 1810) застосував кутові вимірювання в експерименті (1798 р.) з визначення гравітаційної постійної. Схему експерименту показано на рис. 1.15 [1.30].

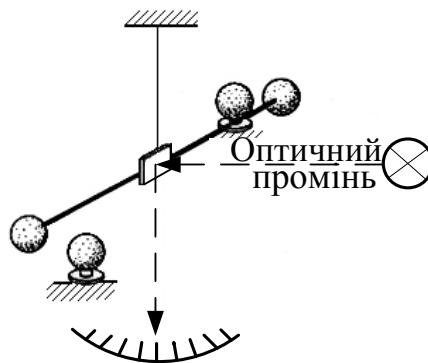


Рис. 1.15. Експериментальна установки Кавендіша для визначення гравітаційної постійної

В експерименті вимірювалось притягнення двох важких кульок розміром з людину, які були закріплені на кінцях підвішаного за середину стрижня. Наближення двох інших шарів приводило до повороту стрижня на певний кут, який визначали з умови рівноваги моменту сили гравітації та моменту закрученого підвісу. Для підвищення чутливості приладу кут повороту стрижня



визначали за допомогою «оптичного важіля», тобто за зміщенням світлового променя, відбитого люстерком, закріпленого на стрижні.

Отримане Кавендишем за допомогою кутових вимірювань значення гравітаційної постійної лише на 0,5% відрізнялось від сучасного значення гравітаційної постійної.

У 1819 р. датський фізик Ханс Крістіан Ерстед (1777 – 1851) зробив відкриття – електричний струм впливає на кутове положення магнітної стрілки! Дослідження цього явища привело до винаходу цілої низки фізичних законів та створення теорії електромагнетизму [1.33].

Термоелектричні явища також були відкриті із застосуванням магнітної стрілки. Їх дослідження пов'язано з іменем відомого німецького фізика Томаса Йогана Зеєбека (1770 – 1831), який у 1821 р. відкрив ефект назаний його прізвищем [1.33]. Ефект Зеєбека полягає у виникненні електрорушійної сили в електричному колі, складеному з послідовно з'єднаних різнорідних провідників, контакти яких мають різну температуру. Під дією електрорушійної сили в колі ланцюгу з цими провідниками виникав електричний струм і створювалось постійне магнітне поле, яке впливало на кутове положення магнітної стрілки [1.17]. У перших дослідах Т. Зеєбек використовував пару «вісмут – мідь».

У 1851 р. відомий французький фізик Жан Бернар Леон Фуко (1819 – 1868) виконав знаменитий експеримент з маятником, який мав значний період коливань (маятником Фуко) [1.37]. Як маятник Фуко використав вантаж, підвішений на достатньо довгому (67 м) тонкому дроті. Зміна в часі кутового положення площини коливання маятника в цьому експерименті підтвердила факт обертання Землі навколо своєї осі.

У 1899 р. відомий російський фізик Петро Миколайович Лебедев (1866 – 1912) уперше експериментально довів існування тиску світла і визначив його значення [1.33]. В його експерименті формувались однакові потоки світла, які спрямовувались на систему з двох легких металевих дисків (рис. 1.16) – чорного 1, який поглинав світло, і дзеркального 2, який відбивав світло. Диски розміщено у вакуумі. За кутом  $\theta$  закручування пружної нитки 3, на якій підвішено систему дзеркал, вимірювали момент сили, який зумовлював цей поворот.

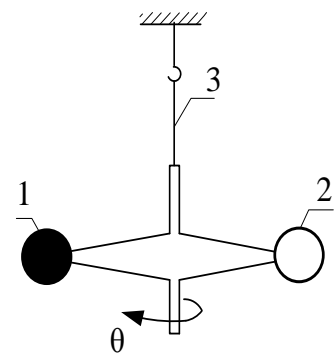


Рис. 1.16. Вимірювальна частина приладу Лебедева

У досліді використано той факт, що імпульс частки світла в разі поглинання і відбиття змінюється по-різному, що вдвічі збільшує тиск світла на дзеркальний диск, ніж на чорний.

У вимірювальній техніці кути використовують і для вимірювальних перетворень, і для подання результату вимірювання. Зручність використання

кутів для вимірювань різних фізичних величин учені помітили давно. Відомо, наприклад, що в період 1846 – 1848 рр. з'явилися «металеві» манометри М. Бурдона [1.3]. Чутливим елементом цього приладу була зігнута дугою металева трубка з перетином у формі еліпса. Під дією тиску трубка розпрямлювалася і через систему важелів змушувала рухатися стрілку приладу.

Відомими вимірювальними приладами, дія яких ґрунтується на перетворенні кутів, є такі: механічні *годинники*, в яких час перетворюється у кут повороту  $\alpha$  стрілки, *вагові терези* (рис. 1.17, а) з перетворенням «маса –  $\alpha$ », *динамометр* (рис. 1.17, б) з перетворенням «зусилля –  $\alpha$ », *анероїд* (рис. 1.17, в) або металевий барометр з перетворенням «тиск повітря –  $\alpha$ », *манометр* (рис. 1.17, г) з перетворенням «тиск рідини –  $\alpha$ », *тахометр* з перетворенням «швидкість обертання механічних деталей –  $\alpha$ », *реостатний перетворювач* (рис. 17, д) що здійснює перетворення « $\alpha$  – електричний опір», біметалеві термомери, що перетворюють температуру в кут скручування кінця біметалевого перетворювача [1.17], що зумовлено різницею температурних коефіцієнтів розширення двох міцно з'єднаних між собою різнорідних матеріалів, тощо.

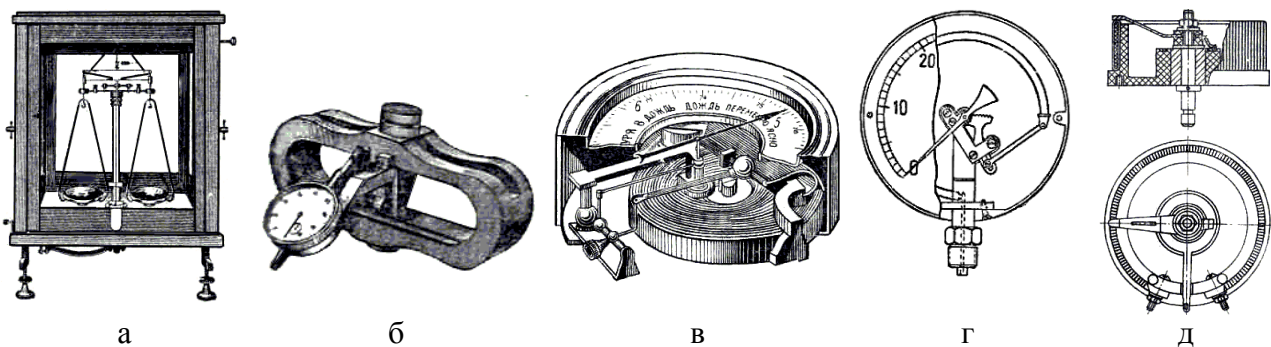


Рис. 1.17. Приклади вимірювальних приладів з використанням кутових перетворень: а – вагові терези, б – динамометр, в – анероїд, г – манометр, д – реостатний перетворювач

Перетворення електричних струму або напруги в кут  $\alpha$  використовують в електровимірювальних механізмах різних систем, дзеркальних гальванометрах, призначених для вимірювання надмалих струмів та кількості електрики і ін. Ці прилади характеризуються не тільки зручністю перетворення «фізична величина – кут  $\alpha$ », але й вирізняються високою економічністю, зручністю сприйняття оком людини великих обсягів вимірювальної інформації.

Струмові терези (ампер-ваги) [1.33] використовувались для відтворення одиниці виміру струму – ампера, і входили як основна частина до складу Державного еталона сили постійного електричного струму (ГОСТ 8.022–75).

Спеціальні пристрої на основі *магнесинів* та *сельсинів* дозволяють синхронно відтворювати значення кутів на відстані без механічного з'єднання, що використовується, наприклад, для передачі на відстань даних вимірювань різних механічних вимірювальних приладів.

**Розвиток робочих мір кутів.** Як міри прямих кутів (однозначні міри), контролю перпендикулярності виробів використовуються косинці повірні [1.5].

Тривалий час лімб (рис. 1.18, а) залишався єдиною робочою багатозначною мірою кута. Необхідність автоматизації кутових вимірювань та успіхи цифрової техніки привели до створення і використання кодового диска (рис. 1.18, б), який перетворює кут у двійковий код [1.27]. Цей пристрій являє собою скляний диск з кількістю доріжок, що відповідає кількості двійкових розрядів. Для безконтактного оптичного перетворення застосовують оптично прозорі диски з нанесеними на них непрозорими ділянками

Одинадцятирозрядний диск, який забезпечує роздільну здатність перетворення кута  $\frac{360^\circ}{2^{11}} \approx 10'$ , показано на рис. 1.18, б. Роздільна здатність 20-

розрядного диска дорівнює близько  $1,2''$ . Подальше удосконалення кодових дисків наштовхується на технологічні та конструкційні труднощі (діаметр кодової доріжки молодшого розряду не перевищує 400 мкм, а мінімальний розмір поділок не може бути меншим за декілька мікрометрів [1.8]). Тому пошук напрямів підвищення метрологічних характеристик мір кутів вели у напрямі використання нових фізичних принципів перетворення кута в код. Один з таких напрямів – використання лазерної техніки і створення кільцевих лазерів [1.25].

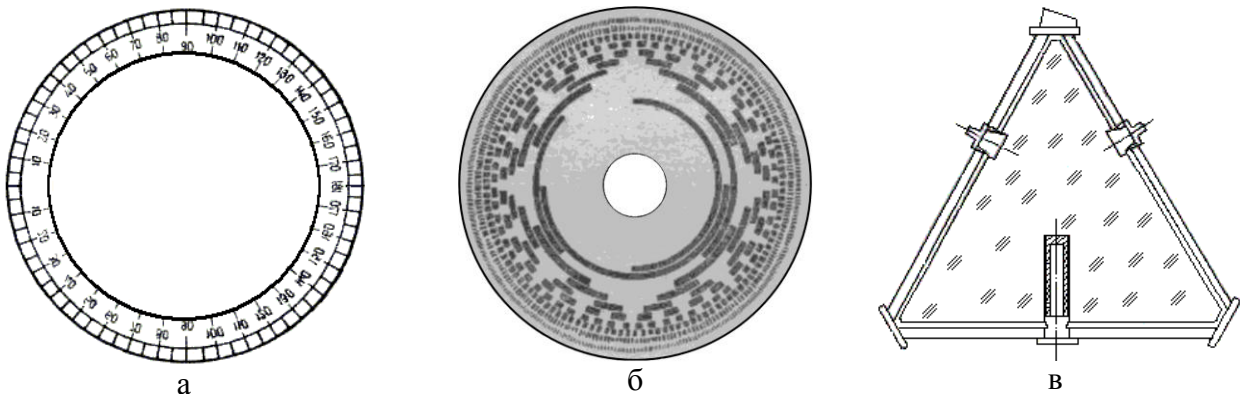


Рис. 1.18. Робочі міри кута: а – лімб; б – кодовий диск; в – кільцевий лазер

Перетин кільцевого лазера показано на рис. 1.18, в. Дія таких приладів ґрунтується на ефекті Саньяка (див. підрозділ 3.3), який передбачає виконання проміжного перетворення кута повороту цього приладу у фазовий зсув електричних сигналів радіочастотного діапазону. Похибка визначення кута за допомогою кільцевих лазерів становить частки кутових секунд.

Найбільш точними засобами вимірювання кутів є кутові призматичні міри [1.5], які призначено для передачі одиниці плоского кута від еталонів до виробів (рис. 1.19). Вони можуть бути однозначними і багатозначними. Робочі кути мір  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  утворюються суміжними вимірювальними поверхнями (у мірах типів I,

II, III), нормальними до робочих поверхонь (у мірах IV типу, для яких  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ , де  $n$  – кількість граней) і робочими гранями та основою (для мір V типу).

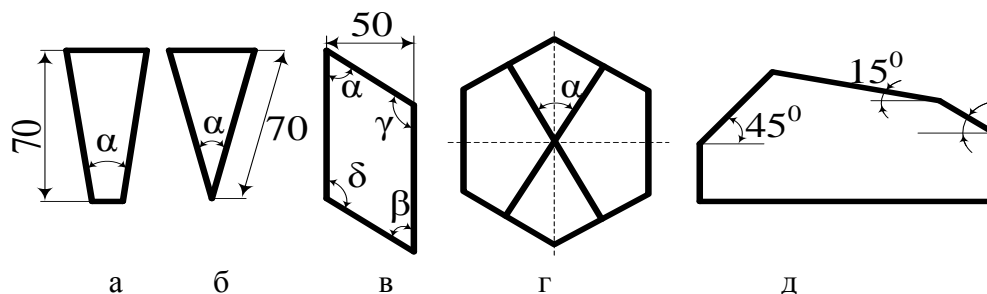


Рис. 1.19. Міри призматичні кутові: а – тип I, б – тип II, в – тип III, г – тип IV, д – тип V

Безконтактні вимірювання за допомогою кутових мір виконують із застосуванням автоколімаційних приладів. Для різних класів точності мір кутів граничні похибки кутів становлять  $\pm 3'' - 30''$ , а для зразкових кутових мір –  $\pm 0,3'' \dots 6''$ .

Найвищу у світі точність ( $0,003'' - 0,005''$ ) відтворення і передачі одиниці плоского кута забезпечує національний еталон плоского кута Німеччини [1.10; 1.11].

Підводячи підсумок розгляду різних кутомірних інструментів і приладів можна відзначити, що навіть цей далеко не повний перелік наведених приладів та мір кутів і галузей їх використання дає достатньо повне уявлення про винятково значущу роль, яку відіграла і продовжує відігравати кутометрія у розвитку суспільства, науки і техніки.

#### **Статистична кутометрія – новий етап розвитку кутових вимірювань.**

Розроблені у кутометрії геометричні зображення на колі і методи обробки кутових величин набули нового застосування і розвитку в дослідженні широкого класу циклічних процесів, до яких належить значна частина процесів і явищ навколишнього світу. Власне і слово «цикл» походить від грецького *kuklos* – коло, адже найбільш природною геометричною фігурою для відображення кутів є саме коло. Під *циклом* розуміють сукупність взаємопов'язаних явищ чи процесів, що утворюють кругообіг протягом певного проміжку часу – *періоду*. Однак розділені цим проміжком часу значення процесу можуть і не збігатися абсолютно точно – суттєвим лишається повторюваність найбільш характерних ознак останнього. Процеси, в яких можна виділити цикли, називаються *циклічними*.

Існують процеси, в яких можна виділити декілька циклів. Кількість циклів у певному процесі може бути скінченною. У виродженому випадку циклічний процес має один цикл. Циклічні процеси можуть бути загасальними і незагасальними. Прикладом незагасального циклічного процесу є зміна сезонів пори року. Для цього процесу, наприклад, неможливо назвати точну дату, коли середньодобова температура в певних широтах підвищиться на певну кількість

градусів, але можна бути абсолютно впевненим у тому, що середньодобова температура коливатиметься відповідно до зміни сезонів: зими весною, весни літом і так далі. Іншими прикладами циклічних процесів можуть бути коливання фізичного маятника, коливання електричних струмів у резонансному контурі, процеси зміни тиску крові у кровоносних судинах людини, обертання шарика та колеса під час гри в рулетку, коливання активності сонячних плям, коливання висоти морських припливів і відливів тощо.

Усвідомлюючи взаємозв'язок усіх процесів у Всесвіті і себе як частину Всесвіту, людина з давніх часів помітила зв'язок між циклічністю земних життєвих процесів та циклічністю руху небесних тіл і почала цікавитись та вивчати циклічні процеси як на мікро-, так і на макрорівнях. Циклічний процес, перебіг якого підпорядкований іншому циклічному процесу, визначається як *ритмічно-повторюваний*, або просто *ритмічний процес* [1.23]. Ритмічний означає розмірений, підпорядкований певному ритму – чередуванню будь-яких елементів, що перебігають в певній послідовності та з певною частотою. Ритмічні явища можуть бути обумовлені одним чи декількома циклами з різними періодами. Багато процесів в організмі людини є ритмічними процесами, викликаними роботою серця і диханням (наприклад, пульсові коливання, які оцінюються реолетизмограмою, процеси поширення хвилі тиску в артеріях, коливання тиску в кровоносних судинах тощо [1.27]). Обертання Землі навколо Сонця визначає річну циклічність природних явищ, яка виражається у зміні сезонів, а обертання земної кулі навколо своєї вісі викликає зміну дня і ночі і визначає добову циклічність. Ритмічну природу стосовно циклічних процесів обертання Землі навколо своєї вісі та навколо Сонця, обертання Місяця навколо Землі можна прослідкувати для різних процесів, що відбуваються в живій і неживій природі на Землі (наприклад, сонячно-добові та місячно-добові варіації геомагнітного поля, морські припливи і відливи тощо).

Багато прикладів використання кутових вимірювань, зокрема під час дослідження циклічних та ритмічних процесів, наведено в праці [1.18]. У геології – це, наприклад, вивчення орієнтації залягання різних пластів у просторі, в географії – визначення широти і довготи розподілу різних аномалій, природних катаклізмів, циклічності природних явищ, у метеорології – напрямку вітру, циклічності опадів, у медицині – ритмічні фізико-біологічні процеси в організмі людини, в економіці – циклічність виробництва, ділової активності, в енергетиці – циклічність енергоспоживання, витрати енергоносіїв, у зв'язку – особливості трафіку в різні пори року та години доби та ін.

Новий етап розвитку кутометрії пов'язаний з дослідженням випадкових кутів. Під *статистичною кутометрією* будемо розуміти розділ математичної статистики, який займається вивченням та дослідженням випадкових кутів та інших випадкових величин, які передбачають необхідність їх дослідження на колі. Історичний огляд розвитку питання аналізу випадкових кутів наведено в праці [1.18]. Перші дослідження в цьому напрямі стосувались рівномірно

розподілених випадкових кутів. У 1734 р. Д. Бенрнулі (D. Bernoulli) зробив спробу пояснити близькість орбітальних площин відомих тоді шести планет сонячної системи випадковістю. Для цього був використаний такий метод: кожній орбітальній площині ставилась у відповідність одинична нормаль, а як природна статистика критерію рівномірності була обчислена довжина результуючої нормалі.

Відмінні від рівномірного розподіли на колі почали досліджувати лише з ХХ ст. Р. Мізес (Von Mises R.) дослідив розподіл, названий його ім'ям (1918), намотаний гауссівський розподіл вивчав Ф. Перрен (Perrin F.) (1928). У ХХ ст. значний внесок в розвиток ідей статистичного аналізу випадкових кутів зробили такі вчені як Р.А. Фішер (Fisher R.A.), Е.Дж. Гамбел (Gumbel E.J.), Д. Дуранд (Durand D.), Дж. А. Грінвуд (Greenwood J.A.), Г. С. Ватсон (Watson G.S.), Е. Дж. Вільямс (Williams E.J.), С.Р. Рао (Rao C.R.), Д.Р. Рао (Rao J.S.), Е.С. Пірсон (Pearson E.S.), К. В. Мардіа (K.V. Mardia) та ін.

## 1.2. Основні терміни та визначення кутометрії

Базові терміни кутометрії сформовано ще в евклідовій геометрії і добре відомі. Це передусім поняття *плоский кут* – геометрична фігура, утворена двома різними променями, що виходять з однієї точки, яку називають вершиною кута [1.22], а також пов'язані з ним поняття: центральні й суміжні кути, розгорнуті та прямі кути, суміжні, протилежні та прилеглі кути, тілесні та багатогранні кути тощо.

Кути можна порівнювати. Для них установлені такі відношення порядків. Два плоскі кути  $\alpha$  та  $\beta$  називаються однаковими (або конгруентними), якщо вони суміщені таким чином, що збігатимуться їх відповідні сторони і вершини. В системі аксіом Гільберта [1.19], розробленій ним для евклідової геометрії, відношення конгруентності позначається таким чином:  $\alpha \equiv \beta$ . Будемо надалі дотримуватись цього позначення.

На площині від довільного променя в певному напрямі можна відкласти єдиний кут, що дорівнює заданому куту. Отже, кут можна розглядати як міру повороту променя від його початкового положення до заданого. Залежно від напрямку повороту можна вести мову про додатні й від'ємні кути. Домовимось надалі вважати додатними кути, що утворюються рухом променя в напрямі проти руху стрілки годинника.

Кут як міра повороту променя використовують у тригонометрії, яка визначає тригонометричні функції для довільних кутів.

Щоб з'ясувати, який з двох кутів  $\alpha$  та  $\beta$  є більший необхідно сумістити в одній площині вершини і одну пару їх сторін. Якщо другу сторону одного кута, наприклад кута  $\beta$ , буде розміщено всередині кута  $\alpha$ , то кут  $\alpha$  буде більшим за кут  $\beta$ , тобто  $\alpha > \beta$  (рис. 1.20).

У геометричній системі, в основу якої покладено точково-векторну аксіоматику кут, кут визначають по-іншому [1.22]. В цій аксіоматиці під кутом розуміють певну метричну величину, яка пов'язана з двома векторами через операцію їх скалярного добутку.

Відомо, що кожна пара векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  визначає деякий кут  $\varphi$  – число, пов'язане з векторами такою формулою:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|},$$

де  $(\vec{a}, \vec{b})$  – скалярний добуток векторів.

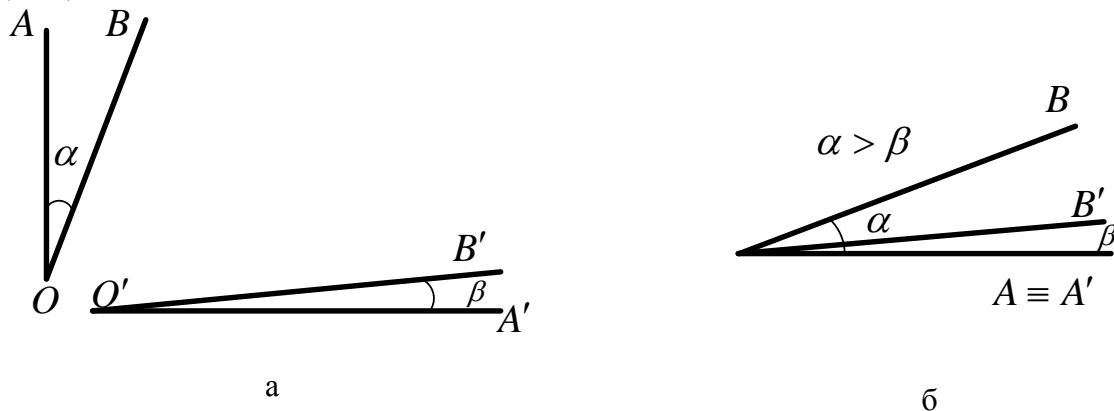


Рис. 1.20. Порівнювання кутів: а – до суміщення, б – після суміщення

Поняття кута як плоскої фігури і як певної метрики застосовують в різних геометричних задачах, де кут визначають окремо спеціальним способом. Наприклад, під кутом між кривими, що перетинаються, розуміють кут між дотичними до цих кривих у точках перетину; кут між прямою і площиною визначають як кут між цією прямою та її прямокутною проекцією на цю площину; кут між схрещуваними прямими – це кут між напрямками цих прямих, тобто між прямими, що паралельні вихідним прямим і проведені через одну точку. *Тілесним кутом* називають частину простору, обмежену просторовою поверхнею конуса.

### 1.3. Одиниці виміру кутів

Окремо розглянемо питання одиниць виміру кутів. Багатостолітня практика кутових вимірювань і традиції в цій галузі не дозволили метричній десятковій системі одиниць увійти в царину кутових вимірювань. Для кутів не витримується десятковий принцип формування кратних і часткових одиниць їх виміру.

**Історичні факти.** Досліджуючи питання походження одиниць виміру кутів деякі автори [1.3] припускають, що ще жреці древнього Вавілона, усвідомлюючи процес зміни природних циклів на Землі приблизно за 360 діб, розділили коло на відповідну кількість рівних частин, яким кут один градус –  $1^\circ$

(одна дев'яноста частка прямого кута). За іншим джерелом [1.6] поділ кола на  $360^\circ$ , кожного градуса – на  $60'$  і кожної мінути – на  $60''$  походить від шумерів (приблизно 2100 р. до н.е.), які вмели вимірювати кути з точністю до декількох кутових мінут.

Надалі, завдяки очевидно сонячному годиннику, в якому часові інтервали вимірюються через кути, цю кратність одиниць виміру кута числу 60 стали застосувати (незважаючи на факт широкого використання десяткової системи) і для вимірювання часу: в одній годині 60 хвилин, в хвилині – 60 секунд (а не 100). Таку аргументацію можна сприймати на рівні гіпотез, які по суті ніколи не будуть підтвержені.

Суттєвий внесок в розроблення одиниць виміру кутів зробили древньогрецькі математики і астрономи. Їх досягнення ґрунтовно висвітлено в праці [1.42].

Згідно цієї праці відомий древньогрецький астроном Клавдій Птоломей (II ст. н. е.) ділив коло на 360 частин, для позначення яких він застосовував слово « $\tau\mu\prime\mu\alpha\tau\alpha$ », тобто «відрізки», перекладено латинським словом «segmentes». Птоломей скорочено позначав їх через  $\mu^o$ . Згодом почали писати лише один верхній символ – кружечок, який зберігся до цього часу для позначення градуса (найбільш ймовірно, що саме слово градус має арабське походження).

Кожну з рівних частин (градусів) Птоломей поділяв на 60 частин, які він назвав « $\lambda\epsilon\pi\tau\alpha$ », що дослівно означає «дріб'язок», або «першими шестидесятими». Наступні два шестидесяткові поділи він назвав «другими шестидесятими» і «третьими шестидесятими». У перекладі на латину ці поділи отримали назви відповідно «minuta prima», «minuta secunda», «minuta tertia» (тобто перша мінута, друга мінута і третя мінута). Слово «minuta» означає «зменшена», «дрібна». Для позначення поділів Птоломей користувався скороченими позначеннями шестидесяткових розрядів, які збігаються із сучасними позначеннями кутових мінут і секунд.

**Одиниці виміру кутів.** Природною одиницею плоского кута є повний плоский кут величиною  $2\pi$ . Це кут, на який необхідно повернути тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі, щоб усі його точки зайняли початкове положення [1.28], або кут, на який має бути повернутий промінь навколо точки, з якої він виходить до суміщення з його початковим положенням. На практиці застосовують часткову одиницю – частину кута повного оберту. Відомо, що плоский кут  $\theta$  визначається як відношення довжини дуги  $l$ , що відповідає центральному куту  $\theta$  на колі радіуса  $r$ , до величини цього радіуса:

$$\theta = \frac{l}{r}.$$

Виходячи із загальних міркувань когерентна одиниця виміру кута в системі СІ мала бути безрозмірною:  $[\theta] = \frac{[l]}{[r]} = \frac{\text{і}}{\text{і}} = 1$ . Проте це не завжди зручно. Тому в



системі СІ визначено одиницею виміру плоского кута в один радіан – центральний кут, який утворено двома радіусами кола, що відсікають на колі дугу, довжина якої дорівнює величині  $r$ . Таким чином, радіан ділить коло одиничного радіуса на  $2\pi$  частин. Розгорнутий кут дорівнює  $\pi$  радіанів.

У системі одиниць СІ радіан віднесено до додаткових одиниць. ДСТУ 3651.0 – 97 [1.12] визначає радіан як безрозмірну похідну одиницю, назва якої може (там, де це зручно), але не обов'язково, бути використана у поданні інших похідних одиниць.

Радіан як додаткова одиниця системи одиниць має одну виняткову особливість – незалежність від вибору основних одиниць довільної системи одиниць.

Державний стандарт [1.12] дозволяє застосовувати поряд з радіаном і інші позасистемні одиниці виміру плоского кута – градуси, мінути, секунди та гради.

*Град* – це  $1/100$  прямого кута (позначається через  $1^g$ ). Цю одиницю запропоновано під час уведення метричної системи мір. Утворення частки одиниць для града здійснюється через коефіцієнт  $1/100$ , наприклад, один сантиград дорівнює одній сотій града:  $1^c = 0,01^g$ . Град широко застосовують за кордоном, хоча в Україні ця одиниця має обмежене використання.

*Градус* уведено як  $1/90$  частину прямого кута (один градус містить 60 кутових мінут, або 3600 кутових секунд:  $1^\circ = 60' = 3600''$ ). Куту  $2\pi$  радіанів в градусній мірі відповідає  $360^\circ$ . Некогерентній одиниці плоского кута – один оберт відповідає один повний цикл ( $2\pi$  радіанів).

Розглядаючи періодичні процеси, що розгортаються в часі з періодом  $T$  (або у просторі з просторовим періодом  $\lambda$ ), можна поставити їм у відповідність величину  $2\pi$ . Тоді кожному інтервалу часу  $t$  (або відстані  $D$ ) можна поставити у відповідність кут  $\varphi \equiv 2\pi \left( \frac{t}{T} \right) \bmod 1$  (або  $\varphi \equiv 2\pi \left( \frac{D}{\lambda} \right) \bmod 1$ ), де  $x \bmod y$  – операція визначення залишку числа  $x$  за модулем  $y$ . Таким чином дробова частина  $t$  (або дробова частина  $D$ ) ідентифікується з кутом  $\varphi$  після цього її можна досліджувати методами кутометрії. Для неї також можна застосовувати одиниці виміру кутів.

#### 1.4. Варіанти визначення міри кута на площині та операції з кутами

Продовжимо розкриття суті кутових вимірювань спочатку для детермінованого підходу, який є окремим випадком статистичного (стохастичного).

Розглянемо варіанти визначення міри кута на площині ґрунтуючись на тому факті, що можна запропонувати ряд варіантів такого визначення.

Коло належить до класу замкнених плоских кривих і в загальному вигляді описується в прямокутній декартовій системі координат рівнянням [1.2]

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

де  $x_0, y_0$  – координати центра,  $r$  – радіус кола. На рис. 1.21, а маємо  $x_0 = y_0 = 0$ , а  $r = 1$ . Для цих умов рівняння кола в тригонометричній формі має простий вигляд:  $(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$ . Використовуючи значення  $\varphi$ , можна визначити координати кінцевої точки вектора  $\bar{\rho}$  у декартовій системі координат парою чисел  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ .

Для кола характерні такі основні співвідношення: довжина кола  $C = 2\pi r$ , довжина дуги, що відповідає центральному куту  $\varphi$ ,  $e = r\varphi$ , довжина хорди, яка відповідає центральному куту  $\varphi$ ,  $a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$ , де  $h$  – висота сегмента, площа кола  $S = \pi r^2$ , площа сектора  $S_1 = 0,5lr = 0,5r^2\varphi$ , площа сегмента  $S_2 = 0,5lr \pm S_{\Delta}$ , де  $S_{\Delta}$  – площа трикутника з вершиною в центрі кола і в кінцях радіуса, що обмежує відповідний сектор, знак «+» береться, якщо  $\varphi > \pi$ , знак «-», якщо  $\varphi < \pi$ .

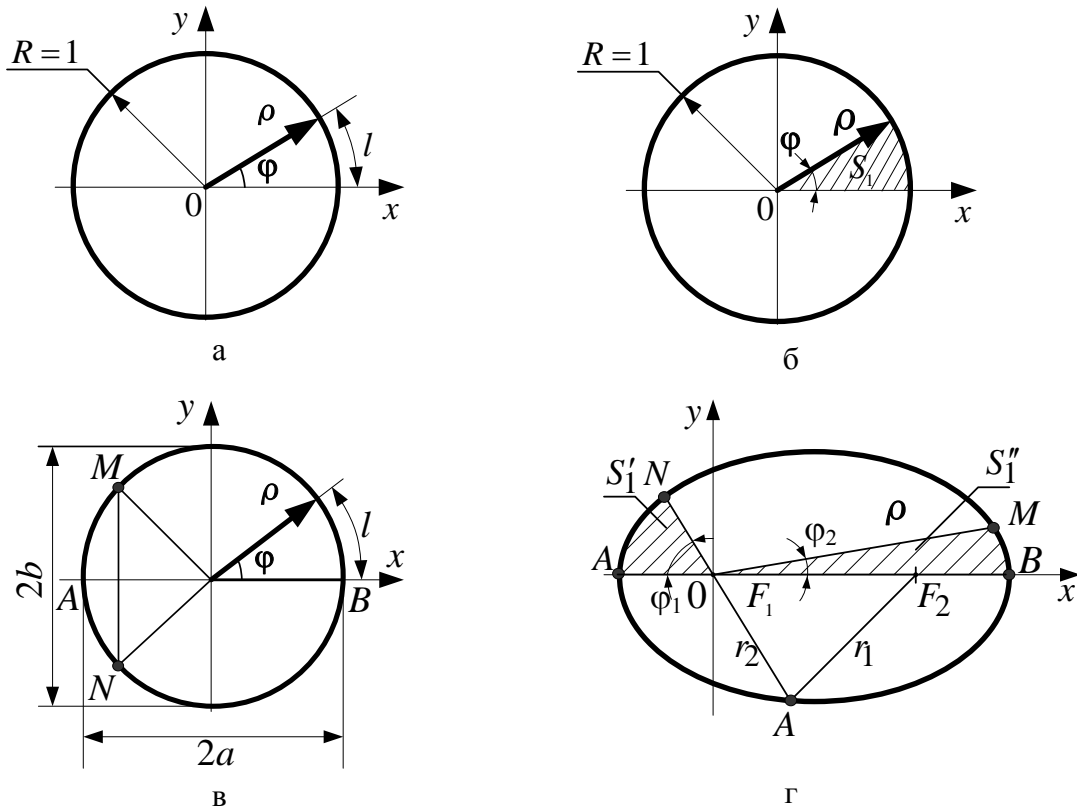


Рис. 1.21. Варіанти задання кута: а – довжиною дуги кола, б – площею сектора кола, в – довжиною дуги еліпса, г – площею сектора еліпса

Кожному вектору  $\rho$  (рис. 1.21) можна поставити у взаємно однозначну відповідність дійсне число  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , яке може формуватись як значення

довжини дуги  $l = \varphi$  (рис. 1.21, а), яка висікається на одиничному колі віссю  $Ox$  та вектором  $\rho$ , або як значення площі сектора  $S_1 = 0,5\varphi$  (рис. 1.21, б), обмеженого частиною осі  $Ox$ , вектором  $\rho$  та відповідною дугою одиничного кола.

Розглянуте вище задання кута на колі з рівномірним розбиттям не є єдиним. Можна розглядати як породжувальні інші міри випадкових кутів та інші замкнені плоскі криві, наприклад, еліпс (рис. 1.21, в). Таке формування випадкового кута може набути застосування, наприклад, у геодезії під час проведення кутових спостережень на земній поверхні. Відомо [1.16], що математично форма Землі близька до поверхні еліпсоїда, утвореного обертанням еліпса навколо однієї з його осей. В геодезичних та картографічних роботах користуються еліпсоїдом Красовського (за прізвищем відомого радянського вченого Ф.М. Красовського (1878 - 1948), який у 1946 р. керував дослідженнями з точного визначення розмірів земного еліпсоїда), для якого більша піввісь становить  $a = 6378245$  м і відповідним співвідношенням стискання 1:298,3.

Еліпс [1.22], віднесений до осей симетрії, має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.1)$$

Сума квадратів складових  $\frac{x}{a}$  та  $\frac{y}{b}$  у рівнянні (1.1) дорівнює одиниці, що дозволяє брати їх за синус і косинус деякого кута  $\varphi$ . Така заміна дозволяє застосовувати інше параметричне подання еліпса:

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Довжину дуги еліпса  $l$  обчислюють таким чином. Відомо [1.35], що

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}, \quad (1.2)$$

де  $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  – числовий ексцентриситет еліпса. Довжину дуги, що відповідає куту  $\varphi$ , визначають інтегруванням (1.2)

$$l = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = aE(\varepsilon, \varphi),$$

де  $E(\varepsilon, \varphi)$  – позначення еліптичного інтегралу другого роду.

Характерною властивістю еліпса є те, що сума відстаней  $r_1$  та  $r_2$  від довільної точки еліпса до точок  $F_1, F_2$  – фокусів еліпса, дорівнює постійній величині –  $2a$ , тобто його більшій півосі:  $r_1 + r_2 = (a - ex) + (a + ex) = 2a$ .

Площа еліпса (рис. 1.21, в) дорівнює  $S = \pi ab$ , площа сектора  $AOM$   $S_1 = \frac{ab}{2} \arccos \frac{x_M}{a}$ , площа сегмента  $MAN$   $S_2 = ab \arccos \frac{x_M}{a} - x_M y_M$ , де  $x_M, y_M$  - координати точки  $M$  [1.2].

Під час виконання орбітальних кутових спостережень космічних об'єктів є доцільним розташування центра системи координат в одному з фокусів еліпса (рис. 1.21, г) та формування значень кута пропорційно площі відповідних секторів (або сегментів) еліпса. Згідно другого закону Кеплера руху планет [1.33] під час незбуреного їх руху площа секторів, що описується радіусом-вектором рухомої матеріальної точки, змінюється пропорційно часу. Еліптичну орбіту планети, у фокусі  $F_1$  якої розміщено Сонце, зображено на рис. 1.21, г. Відрізки траєкторії  $BM$  та  $NA$  планета проходить за однакові проміжки часу, тому площі секторів  $AON$  та  $BOM$  однакові. Це приводить до нерівномірної за відрізками дуг міри випадкового кута в результаті взаємного впливу планет Сонячної системи. При цьому траєкторії планет описуються складними просторовими кривими, які можна апроксимувати певним еліпсом лише за час одного – двох циклів.

Коло й еліпс не вичерпують всіх можливих варіантів опису кута. Для цього можна використовувати й інші замкнені плоскі криві другого порядку.

**Задання кутів більших за  $2\pi$ .** В загальному випадку значення кутів можуть виходити за межі інтервалу  $[0, 2\pi)$ , тобто діапазоном значень кута  $\Phi$  є множина всіх дійсних чисел  $R$ . У цьому разі інтерпретувати значення таких кутів можна за допомогою гвинтової лінії [1.34]. Графічну інтерпретацію кутів для цього випадку зображено на рис. 1.22. Діапазоном значень кута є множина  $X$  точок вісі  $0\Phi$ . На рис. 1.22 цій множині відповідає вісь  $0\Phi$ . Кут – число відображається через гвинтову лінію, яка задається такими рівняннями:

$$x = \cos \Phi, \quad y = \sin \Phi, \quad \Phi = 2\pi n + \varphi, \quad n \in Z.$$

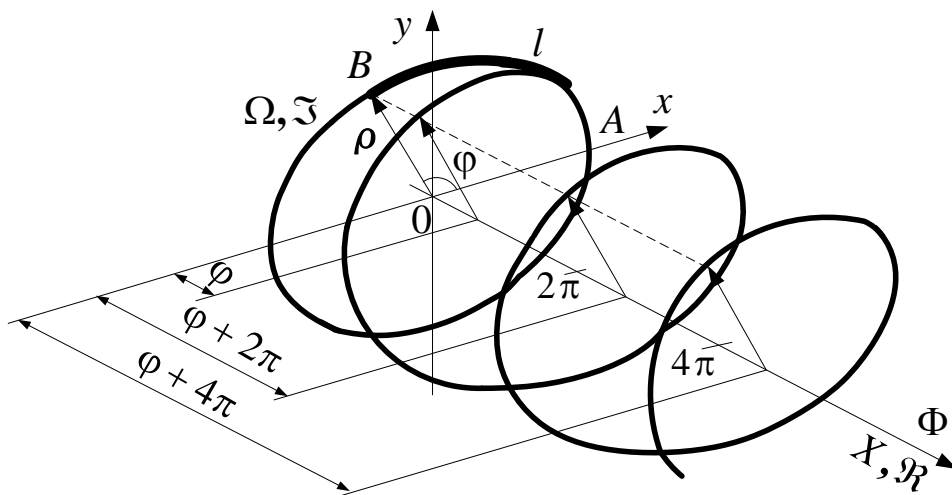


Рис.1.22. Задання кутів на гвинтовій лінії та колі

Напрямок вектора  $\rho$  у площині  $xOy$  на рис. 1.22 відповідає дуга  $AB$  довжиною  $l$ . Цій дузі через гвинтову лінію ставиться у відповідність одне з чисел осі  $O\Phi$  вигляду  $\varphi + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ . Числове значення  $n$  задають початковими умовами або в інший спосіб, який визначається умовами фізичної реалізації експерименту кутових вимірювань.

Конструктивна форма подання кута  $\Phi > 2\pi$  у виді

$$\Phi = \left[ \frac{\Phi}{2\pi} \right] \cdot 2\pi + \varphi, \quad (1.3)$$

де  $[\Phi] \in Z$  – ціла (кількість повних обертів), а  $\{\Phi\} = \varphi \in [0, 2\pi)$  – дробова частини кута  $\Phi$ , є основною формулою визначення довільного кута для кутових вимірювань. На практиці під час кутових вимірювань основну увагу приділяють дробовій частині кута  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , але саме конструктивна форма (1.3) дає змогу досліджувати довільні кути.

З виразу (1.3) випливає, що

$$\varphi \equiv \Phi \pmod{2\pi}, \quad (1.4)$$

тобто дробову частину кута  $\Phi > 2\pi$  визначають операціями порівняння за модулем  $2\pi$ .

Відзначимо, що існує цілий напрям досліджень з теорії чисел [1.7] – напрям порівнянь чисел, основним математичним об'єктом якого є ціле число. Порівняння двох чисел вводять відповідно до такого означення.

**Означення 1.1.** Порівнянням називається співвідношення між цілими числами  $a$  і  $b$  вигляду  $a = b + ck$ , де  $k$  – ціле число, що означає таке: їх різниця  $a - b$  ділиться без залишку на додатне число  $c$ , яке називають модулем порівняння. Число  $a = \overline{0, (c-1)}$  називається залишком цілого числа  $b$  за модулем  $c$ . Факт порівнюваності чисел  $a$  і  $b$  за модулем  $c$  математично виражають таким чином:  $a \equiv b \pmod{c}$ . Цей запис означає, що  $a$  і  $b$  мають однакові залишки при діленні на  $c$ .

Якщо для двох цілих чисел виконуються порівняння  $a \equiv b \pmod{c}$  та  $d \equiv b \pmod{c}$ , то числа  $a$  і  $d$  називаються порівнюваними за модулем  $c$ .

Якщо різниця  $a - b$  не ділиться на  $c$  без залишку, числа  $a$  і  $b$  називають непорівнюваними за модулем  $c$ .

Якщо число  $a$  змінюється в інтервалі  $(0, \infty)$ , його залишки за довільним цілим модулем  $c$  періодично змінюються в діапазоні  $a = \overline{0, (c-1)}$ . Цей факт дозволяє використовувати положення теорії порівнянь не тільки в дослідженні арифметичних операцій з числами, але й для дослідження різних циклічних фізичних процесів, зокрема кутів. Обґрунтуємо таку можливість. Для цього поширимо поняття порівняння на діапазон дійсних чисел. Матимемо таке означення.

**Означення 1.2.** Порівнянням дійсних чисел  $a, b \in R$  називається співвідношення між ними вигляду  $a = b + ck$ , де  $k$  – ціле число, що означає таке:

їх різниця  $a - b$  ділиться без залишку на задане дійсне додатне число  $c \in \mathbb{R}$ , яке називають модулем порівняння дійсних чисел. Число  $a \in [0, c)$  називається залишком дійсного числа  $b$  за модулем  $c$ . Факт порівнюваності чисел  $\varphi$  і  $\Phi$  за модулем  $2\pi$  математично виражено формулою (1.4).

Тепер звернемо увагу на особливості застосування порівнянь дійсних чисел у фізичному експерименті. Для цього обґрунтовано таку теорему.

**Теорема 1.** Якщо дійсне число  $a$  і модуль  $c$  мають спільний цілий множник  $k$ , то

$$a(\bmod c) = \left\{ \frac{a}{k} \left( \bmod \frac{c}{k} \right) \right\} k.$$

*Доведення.* Нехай  $a = kq$ , а  $c = kg$ , а ціла частина числа  $\frac{a}{c}$  дорівнює  $n$ .

Тоді з визначення залишків числа маємо

$$a - nc = kq - kgn = (q - gn)k = \left\{ q(\bmod g) \right\} k = \left\{ \frac{a}{k} \left( \bmod \frac{c}{k} \right) \right\} k,$$

що й доводить твердження.

**Наслідок 1.1.** Множник  $k$  може бути одиницею виміру фізичної величини, яка позначається через  $[k]$ . Тоді маємо

$$a - nc = \left\{ \frac{a}{[k]} \left( \bmod \frac{c}{[k]} \right) \right\} [k].$$

Розглянуте твердження дозволяє у разі використання іменованих чисел абстрагуватись від їх розмірності, виконувати модульні операції з числами, а по завершенні обчислень присвоїти результату розмірність відповідної фізичної величини.

Інша особливість модульних операцій з кутами полягає в тому, що й значення кутів, і значення модуля  $2\pi$ , не є цілими числами. З огляду на апаратну реалізацію для кутових вимірювань зручніше визначати залишки кутів за значенням модулів. Таку можливість обґрунтовує такий наслідок.

**Наслідок 1.2.** Обчислення залишків дійсного числа  $a$  за дійсним модулем  $c$  можна виконати через обчислення залишків за іншим довільним (навіть цілим) модулем  $d$  відповідно до виразу

$$a(\bmod c) = a \frac{b}{d} \frac{d}{b} \left( \bmod \left( \frac{c}{d} d \right) \right) = \left( \frac{ad}{c} (\bmod d) \right) \frac{c}{d}.$$

Застосовуючи наслідок 1.2, дробову частину кута у формулі (1.4) можна подати так:

$$\Phi(\bmod 2\pi) = \left\{ \frac{\Phi}{2\pi} (\bmod 1) \right\} 2\pi.$$

Для кутових вимірювань доцільно вибирати  $d = 360$ , або  $d = 2^m$ , де  $m$  – натуральне число. Тоді результат виконання модульної операції буде

виражений відповідно в градусах, або в кратних степені 2 частках повного кола.

Тоді, наприклад, для рівняння (1.8) відповідно маємо

$$\Phi = \left[ \frac{\Phi}{360} \right] \cdot 360 + \varphi, \quad \varphi \in [0, 360).$$

**Операції з кутами.** Зупинимось на висвітленні операцій з кутами, які мають такі характерні властивості.

1. Звичайні операції додавання і віднімання довільних кутів  $\Phi_{1,2} \in (-\infty, \infty)$  та їх лінійне масштабне перетворення з подання їх результату на  $R$  виконують як

$$\begin{aligned}\Phi_{1+2} &= \Phi_1 \pm \Phi_2, \\ \Phi_i &= k\Phi_1,\end{aligned}$$

де  $k \in r$  – масштабний коефіцієнт.

Операції множення і ділення кутів, зазвичай, на практиці не використовують, оскільки вони не мають фізичного обґрунтування.

2. Операції з кутами за модулем  $2\pi$ . При розгляді результатів додавання і віднімання довільних кутів  $\Phi_{1,2} \in (-\infty, \infty)$  та їх лінійного масштабного перетворення з поданням результату на колі одиничного радіуса маємо

$$\varphi_{1,2} \equiv [\Phi_1 \pm \Phi_2] \pmod{2\pi}, \quad (1.5)$$

$$\varphi_i = -[k\Phi] \pmod{2\pi}, \quad k \in R. \quad (1.6)$$

Операції вигляду (1.5) застосовують, наприклад, під час гетеродинного перетворення частоти, а вигляду (1.6) – під час множення фазових зсувів гармонічних сигналів [1.9].

### 1.5. Підсумки до розділу

Перший розділ роботи починається зі стислого огляду історії розвитку кутових вимірювань. Відзначено, що кутові вимірювання виконують здебільшого на колі зі скінченим радіусом; вони мають характерні відмінності від вимірювань на числовій прямій  $R$ . Ця центральна ідея буде висвітлюватись у кожному наступному розділі роботи з метою знайти більше аргументів та обґрунтування для поширення прикладного використання кутових вимірювань.

Становлення і розвиток земної цивілізації тісно пов'язані з використанням даних кутових вимірювань у землеробстві, спорудженні архітектурних будівель, іригаційних споруд, військовій справі, мореплавстві та інших галузях. Результати кутових вимірювань стали ефективною складовою пізнання людиною навколишнього світу, зокрема осмислення перебігу часу, усвідомлення життя на Землі як складової частини Всесвіту, успіхів астрономії, низки великих географічних відкриттів.

Значний інтерес становить собою розвиток інструментарію кутових вимірювань – спочатку сонячні годинники (гномони) і різні варіанти їх подальшого удосконалення: робочі міри кутів при будівництві різних споруд;

секстанти у мореплавстві; бусолі у військовій справі; екліметри в геодезії; гоніометри в оптиці; нарешті, різного виду гіроскопи в авіації, космонавтиці та ін.

Ряд характерних прикладів застосування кутових вимірювань у фізичному експерименті, привело до революційних наукових відкриттів, у ряді випадків світового значення. Використання методу перетворення різних фізичних явищ, величин у кутові величини дало змогу: провести перші дослідження атмосферних електричних зарядів М.В. Ломоносовим і Г.В. Ріхманом; відкрити закони взаємодії точкових електричних зарядів Ш. Кулоном; визначити значення гравітаційної постійної Землі Г. Г. Кевендишем з такою точністю, яка для багатьох завдань задовольняє і чинні вимоги; підтвердити експериментально обертання Землі навколо своєї осі з допомогою маятника Ж. Фуко.

Автори не ставили за мету навести вичерпну інформацію про їх історію розвитку і досягнення кутових вимірювань. Проте як висновок з історії їх розвитку можна навести такий об'єктивний факт. Геодезія і картографія, навігація і локація, астрономія і фізика, геофізика, метеорологія, геологія, біологія, медицина, і нарешті, всі галузі промисловості, зокрема машинобудування, енергетика, транспорт, авіація і космічна галузь – далеко не повний перелік застосування кутових вимірювань.

У розділі також наведено основні терміни, визначення та одиниці кутових вимірювань, які добре відомі для фахівців кутових вимірювань і широко використовуються на практиці.

Відповідний інтерес можуть становити матеріали розділу про нові варіанти визначення міри кутів на площині, які можна певною мірою вважати дискусійними.

Характерними властивостями детермінованих кутових вимірювань слід вважати наступні:

- усі дані кутових вимірювань відображаються:
  - а) у просторі – на кулі зі скінченим радіусом;
  - б) на площині – на замкненій кривій другого порядку у загальному випадку, для більшості випадків на колі зі скінченим радіусом;
- виконання арифметичних операцій з даними кутових вимірювань за модулем  $2\pi$ .

Таким чином, із матеріалів розділу можна зробити висновок про те, що кутові вимірювання мають багатотисячолітню історію використання, їх вагомий внесок у розвиток сучасних інформаційних технологій, підтверджений значними науковими і технічними досягненнями; подальший розвиток і розширення прикладних застосувань кутових вимірювань є перспективним і ефективним напрямом досліджень для різних галузей науки і техніки.

Деякі результати досліджень з проблематики кутових вимірювань, які розглянуто у першому розділі, наведено у публікаціях [1.1 – 1.41].



*Замечательно, что науке, начавшейся с  
рассмотрения азартных игр, суждено  
было стать важнейшим объектом  
человеческого знания*

П'єр-Сімон Лаплас

## Розділ 2

### **ВИБРАНІ ПИТАННЯ СУЧАСНОЇ КОНЦЕПЦІЇ СТАТИСТИЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ**

Характерні властивості та специфіка як детермінованих, так і статистичних кутових вимірювань обумовили створення самостійного розділу загальної теорії вимірювань, а також сприяли широкому використанню таких вимірювань у всіх галузях господарства країни. При створенні сучасних інформаційно-вимірювальних та діагностичних систем на основі кутових вимірювань необхідно врахувати, що потенційні можливості засобів обчислювальної техніки можуть бути реалізовані тільки при логічно обґрунтованій взаємодії всіх ланок таких систем: аналогових і дискретних технічних пристроїв; моделей сигналів; алгоритмів і програмного забезпечення статистичної обробки даних вимірювань. Високі характеристики точності кутових вимірювань відповідають сучасному рівню розвитку науки і техніки. У свою чергу, така взаємодія є базою створення єдиної методології проведення теоретичних, імітаційних (моделювальних) і експериментальних досліджень з використанням кутових вимірювань.

У цьому розділі висвітлено основні положення єдиної методології статистичних вимірювань, відповідно до яких детерміновані вимірювання розглядаються як їх окремий випадок, а також основні положення сучасної теорії вимірювань на основі запропонованої системи аксіом. Саме аксіоматична побудова загальної теорії вимірювань дала змогу відмовитись від базового припущення існування гіпотези «дійсного (істинного) значення вимірюваної величини» і побудувати основи логічно несуперечливої теорії похибок.

У розділі розглянуто в основному загальні питання статистичних кутових вимірювань, зокрема наведено детерміновану і випадкову моделі кута на площині, основні статистичні характеристики одновимірного випадкового кута. Запропонована двовимірною моделю вектора випадкових кутів з незалежними компонентами у тривимірному просторі (не сфері) є одним із можливих варіантів такої моделі. Відзначимо, що кутові вимірювання на сфері заслуговують на окремий, більш складний науково-технічний напрям досліджень порівняно з кутовими вимірюваннями на площині (на колі). Результати такого напряму досліджень у цій роботі не наведено.

Більш ґрунтовно методологія кутових вимірювань буде розглянута у розділі 7 після наведення необхідних додаткових матеріалів у наступних розділах.

## 2.1. Загальна методологія процесу вимірювань

Проведення наукових досліджень об'єктів різної фізичної природи, в тому числі технічних систем, пов'язано з розв'язанням численних завдань теоретичних та імітаційних досліджень, натурального вимірювального експерименту. Для розкриття суті загальної методології процесу досліджень статистичних вимірювань наведемо її структуру (рис. 2.1).

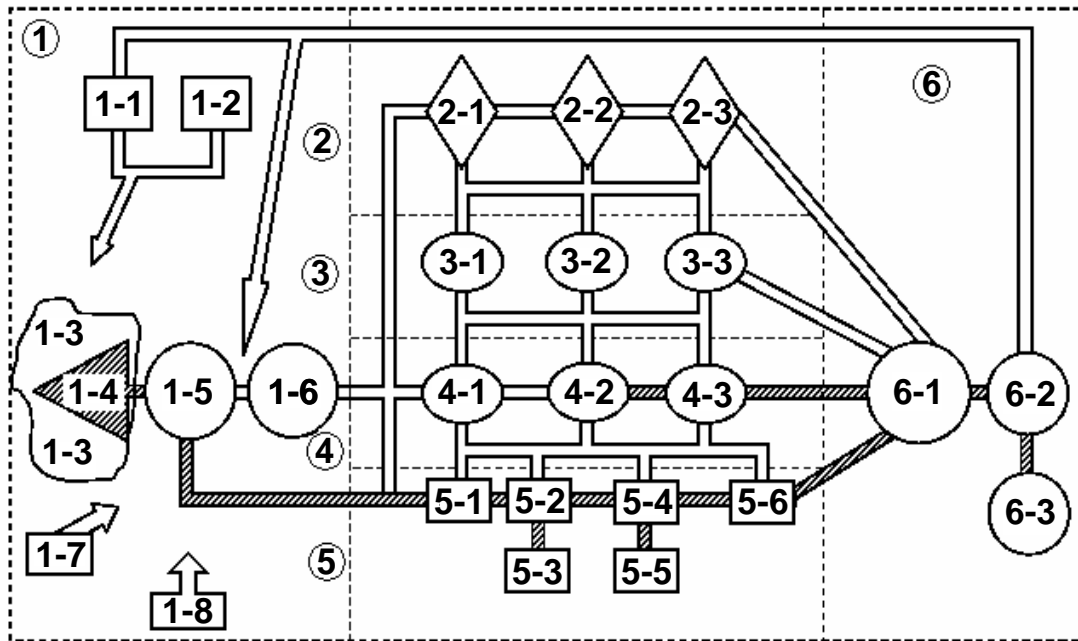


Рис.2.1. Загальна структура процесу досліджень емпіричної системи:

□ – зв'язки та взаємозв'язки на логічному рівні (наприклад, на рівні математичних моделей);

▨ – зв'язки та взаємозв'язки на фізичному рівні (наприклад, на рівні електричних сигналів);

Ⓜ – умовний порядковий номер напрямку досліджень ;  $\circ_{n-m}$   $\diamond_{n-m}$   $\square_{n-m}$  – умовно виділений  $m$ -ий модуль  $n$ -го напрямку досліджень

На рис.2.1 показано основні напрями та етапи процесу досліджень заданого об'єкта. Часто об'єктом досліджень є так звана *емпірична система* [2.4]. Під *емпіричною системою* розуміють різні об'єкти – природні, фізичні, технічні, біологічні та інші.

Зупинимось на описі наведених на рис. 2.1 позначень для розкриття суті операцій, дій, використання модулів, підсистем процесу досліджень.

### 1. ОСНОВНІ ОБ'ЄКТИ ПРОЦЕСУ ДОСЛІДЖЕНЬ

- 1-1 Мета і задачі досліджень.
- 1-2 Комплекс умов досліджень.
- 1-3 Об'єкт досліджень (емпірична система).
- 1-4 Інформація для досліджень.
- 1-5 Фізична інформаційна модель.
- 1-6 Математична інформаційна модель.
- 1-7 Колектив дослідників.

1-8 Замовник досліджень.

## **2. СТРАТЕГІЯ ДОСЛІДЖЕНЬ**

2-1 Обґрунтування комплексу засобів, фінансових витрат, планування часових термінів, кваліфікації і кількості дослідників.

2-2 Розроблення програми та методики досліджень.

2-3 Прогноз очікуваних результатів досліджень.

## **3. ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ**

3-1 Постановка задач теоретичних досліджень.

3-2 Обґрунтування, вибір методів розв'язання задач, проведення досліджень.

3-3 Аналіз результатів теоретичних досліджень.

## **4. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

4-1 Постановка завдань моделювання.

4-2 Обґрунтування методу моделювання, проведення досліджень.

4-3 Аналіз результатів імітаційного моделювання.

## **5. ВИМІРЮВАЛЬНИЙ (НАТУРНИЙ) ЕКСПЕРИМЕНТ НА БАЗІ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ**

5-1 Сенсорна підсистема (первинні перетворювачі, підсилювачі, фільтри, узгоджувальні пристрої ІВС).

5-2 Підсистема порівнянь досліджуваних сигналів з одиницями системи вимірювань (компаратор ІВС).

5-3 Джерело формування фізичних одиниць і шкали одиниць системи вимірювань.

5-4 Підсистема формування і передавання по фізичному каналу даних вимірювань.

5-5 Еквівалентне (сумарне) джерело завад.

5-6 Підсистема обробки даних вимірювань.

## **6. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ**

6-1 Формування, узгодження та аналіз результатів досліджень, в тому числі за характеристиками точності отриманих результатів.

6-2 Обґрунтування рішень щодо досягнення мети досліджень.

6-3 Оформлення звітних матеріалів за результатами досліджень, формування пропозицій та рекомендацій для подальших етапів проведення досліджень.

Не зупиняючись на більш детальному описі всієї структури процесу досліджень, виокремимо важливий етап створення (розроблення, обґрунтування) фізичної і математичної моделей об'єкта досліджень (емпіричної системи). Незважаючи на той факт, що такі моделі є вторинними, до деякої міри копіями-відображеннями, потрібно об'єктивно відзначити, що саме ці моделі відіграють основну роль у методології процесу досліджень.

Під час створення фізичної моделі враховують основні фізичні властивості, характеристики об'єкта досліджень, його складові частини, модулі, їх дії та

взаємозв'язки з урахуванням фізичних законів. При цьому їх взаємодію виражають математичними формулами з узгодженням розмірностей фізичних величин, які входять у фізичну модель. Природно, що в ході формування системи знань про досліджуваний об'єкт фізична модель може доповнюватись та змінюватись.

Більш детально розглянемо математичну модель об'єкта дослідження і наведемо таке означення.

**Означення 2.1.** *Математична модель досліджуваного об'єкта – це сукупність знань, припущень, гіпотез, умов, побудованих у вигляді цілісної, логічно витриманої і несуперечливої структури, яка гомоморфно відображає основні властивості та характеристики об'єкта дослідження, взаємозв'язок, взаємодію і відношення між його складовими компонентами та модулями, записана з використанням математичних об'єктів, символів, термінів, і призначена для розв'язання певного класу задач.*

Відомо, що математична модель об'єкта порівняно з фізичною моделлю більшою мірою може змінюватись залежно від постановки завдання та обсягу нагромаджених знань, експериментальних даних результатів досліджень і т. ін.

Зупинимось на етапах створення математичної моделі.

**Перший етап** – запис у математичних термінах, символах та об'єктах основних законів функціонування об'єкта дослідження, взаємозв'язків між елементами, модулями системи, основних властивостей і характеристик системи на підставі глибокого і всебічного вивчення апріорних даних про емпіричну систему з урахуванням класу розв'язуваних задач.

Таким чином, на першому етапі математичного моделювання формується математична модель емпіричної системи, при цьому основним є гомоморфне відображення характеристик і властивостей емпіричної системи.

**Другий етап** – проведення теоретичних досліджень з використанням математичної моделі. На цьому етапі дуже важливо не тільки розв'язати окремі математичні задачі, але й виділити шляхом узагальнення більш широкий клас типових задач, які можна розв'язати на основі запропонованої математичної моделі. Це дає змогу розглядати клас типових задач як самостійний об'єкт, абстрагуючись від фізичного змісту досліджуваних систем, процесів та явищ. У теорії сигналів і систем це, наприклад, клас прямих і обернених задач, задач ідентифікації та оптимізації характеристик систем.

**Третій етап** – використання моделі для розв'язання прикладних задач, в першу чергу, задач імітаційного моделювання та проведення вимірального експерименту з використанням засобів обчислювальної техніки.

Серед методів імітаційного моделювання найефективнішим видається метод моделювального обчислювального експерименту, зокрема комп'ютерного вимірального експерименту, який полягає у такому. Формулюється відповідна задача математичного моделювання, проводиться обґрунтування методу моделювання, створення відповідного математичного

забезпечення, адаптованого до задачі і характеристик, можливостей технічної обчислювальної системи. Така постановка задач моделювання дозволяє отримати результати для значної кількості варіантів технічної системи. Це дає змогу виконати порівняльний аналіз досліджуваних варіантів системи і, застосувавши відповідний критерій (зокрема, критерій оптимальності), отримати об'єктивне обґрунтування вибору «кращого» варіанта. Створення сучасних інформаційних технологій здебільшого ґрунтується на результатах імітаційного моделювання.

На цьому етапі моделюють нові технічні системи, комплекси, машини, механізми, новітні інформаційні технології. Дані моделювання – одні з основних результатів третього етапу.

Проведення натурних вимірювальних експериментів з використанням моделі є найбільш трудомістким та фінансово витратним процесом досліджень, але саме такий шлях здебільшого дозволяє розв'язувати потрібні (інколи знаходити оптимальний варіант розв'язання) науково-технічних проблем різного рівня складності.

**Четвертий етап** – це узгодження результатів теоретичних, імітаційних досліджень та натурального вимірювального експерименту на базі запропонованої моделі. Зазвичай необхідно отримати відповіді на запитання: чи задовольняє запропонована модель усі вимоги, в тому числі за характеристиками точності, під час проведення вимірювальних експериментів, чи пояснює нові властивості, нові факти, особливості поведінки емпіричної системи, які виявлено у процесі досліджень.

Аналіз отриманих результатів на базі цієї моделі дає змогу прийняти рішення щодо математичної моделі, вибравши один з таких варіантів:

- а) подальше використання запропонованої моделі;
- б) удосконалення запропонованої моделі;
- в) розроблення нової моделі для подальших досліджень.

Отже математична модель є відображенням об'єкта досліджень.

**Твердження 2.1.** *Для виконання аналізу об'єкт досліджень (емпіричну систему) і його математичну модель можна використовувати як незалежні об'єкти.*

Тобто об'єкт дослідження і його модель (копія, і таких копій зазвичай буває кілька) можуть бути самостійними об'єктами (це потрібно навести для уникнення подальших непорозумінь).

Для ілюстрації використання різних математичних моделей залежно від постановки задач наведемо такий приклад.

**Приклад 2.1.** Необхідно обґрунтувати математичну модель аналогового генератора гармонічних коливань.

1. Для аналогового генератора сигналів в ідеалізованому випадку на виході формується сигнал вигляду гармонічного коливання

$$u(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0), \quad t \in T, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi), \quad U_0 > 0,$$

де  $U_0, \varphi_0, f_0$  – відповідно фіксовані іменовані числа: амплітуда, початкова фаза та частота коливань,  $T$  – інтервал часу визначення сигналу.

По суті, це розв'язок задачі опису вихідних сигналів такого генератора, тобто його математична модель.

2. Для більш коректного обґрунтування з точки зору гомоморфного відображення фізичної природи функціонування нелінійного аналогового генератора математичну модель сигналу на його виході описують як випадковий вузькосмуговий процес – відгук відповідної резонансної системи на дію флуктуаційних електричних шумів [2.1; 2.9].

Одним з важливих етапів реалізації методології процесу дослідження є проведення вимірювального експерименту. Цей етап – один із завершальних етапів досліджень.

Сформулюємо наступне означення.

**Означення 2.2.** *Вимірювальний експеримент є втіленням поєднання теорії, методології і практики проведення процесу вимірювань, який у своїй реалізації ґрунтується на використанні:*

- фізичної і математичної моделей об'єкта досліджень;
- методу вимірювань;
- методик вимірювань на основі діючих стандартів та нормативних документів;
- інформаційно-вимірювальної системи (приладу чи комплексу) з відповідним математичним та програмним забезпеченням обробки даних вимірювань;
- результатів теоретичних, імітаційних та експериментальних досліджень.

На завершальному етапі вимірювального експерименту обґрунтовується результат вимірювань, його характеристики точності, які узгоджуються з результатами теоретичних, імітаційних та експериментальних досліджень.

Для підсилення розуміння суті терміна «вимірювальний експеримент» іноді вживають термін «натурний вимірювальний експеримент», вирізняючи той факт, що взаємодія емпіричної системи та ІВС відбувається на фізичному рівні.

Перейдемо до більш детального розгляду питання про місце статистичних вимірювань у загальній теорії вимірювань.

## 2.2. Аксиоматика теорії вимірювань

Теорія кутових вимірювань є розділом загальної теорії вимірювань. Тому спочатку зупинимось на сучасній концепції загальної теорії вимірювань, яку побудовано з використанням аксіоматичного підходу [2.1; 2.3–2.6].

Для опису вимірювальних експериментів зручно користуватись термінами «наслідок вимірювального експерименту» і «результат вимірювань».

Під *наслідком вимірювального експерименту* розуміють те, що отримують у процесі реалізації певного комплексу природних, технічних та інших умов під час проведення вимірювального експерименту.

Можна припустити, що наслідок вимірювального експерименту є *випадковою подією*, при цьому наявність експериментатора не є обов'язковою. Це припущення (статистична гіпотеза) є природним обґрунтуванням майже для всіх вимірювальних експериментів.

На підставі обробки сукупності наслідків вимірювальних експериментів роблять деякий висновок, який називають *результатом вимірювань*.

Для отримання результату вимірювань є деяке правило або алгоритм, за яким його визначають.

Вибір конкретного правила значною мірою залежить від постановки завдання вимірювань, і, в першу чергу, від об'єкта досліджень і експериментатора. Такий дещо довільний вибір правила обробки наслідків характерний для будь-якого виду вимірювань. Через це одному вимірювальному експерименту може відповідати декілька результатів, і вибір того чи іншого результату потребує додаткового обґрунтування.

**Основне завдання вимірювань** – це отримання результату вимірювань, який обов'язково має супроводжуватись характеристиками його точності. Раніше відзначалось, що об'єкт дослідження з фізичного погляду являє собою емпіричну систему. Такий підхід обумовлює наявність двох основних проблем теорії вимірювань [2.1; 2.9; 2.10]:

1. *Проблема відображення*, що полягає в обґрунтуванні гомоморфного відображення властивостей емпіричної системи у фізичній і математичній моделях системи, при цьому формальні властивості операцій і співвідношень з об'єктами емпіричної системи гомоморфні відповідним операціям і співвідношенням з наслідками вимірювального експерименту.

2. *Проблема кількісного розв'язання задачі вимірювань*, що полягає в установленні *кількісної міри* та визначенні умов, за яких різні шкальні значення можуть подавати один і той же кількісний результат вимірюваної величини.

Довільні вимірювання без характеристик точності результату вимірювань втрачають практичну цінність, оскільки без них як результат вимірювань може бути взято довільне число. Тому в теорії вимірювань значну увагу приділяють визначенню характеристик точності.

Відомо, що *теорія похибок* є одним з основних розділів загальної теорії вимірювань. Згідно з існуючими положеннями похибка вимірювань є функцією точного (істинного або дійсного) значення вимірюваної величини, яке, як правило, постулюється. Але така гіпотеза не завжди може бути обґрунтованою: інколи точне значення неможливо знайти, або воно суперечить фізичній

природі вимірюваної величини. Тоді теорія похибок стає беззмістовною, з чим не можна погодитись через практичну потребу виконувати безліч вимірювань.

Далі зупинимось на означеннях деяких математичних об'єктів, які широко використовують у загальній теорії вимірювань.

Відомо, що теорія вимірювань ґрунтується на методах теорії міри, включаючи теорію ймовірностей, методах математичної статистики і теорії інформаційно-вимірювальних систем.

Однією з математичних моделей для формалізації проведення вимірювального експерименту яка відіграє важливу роль в теорії вимірювань, є топологічний простір.

**Перший крок** до побудови топологічного простору – задання довільної множини  $X$  елементів  $x \in R$ . У разі формалізації прикладом такої множини може бути множина наслідків вимірювального експерименту, а наслідками, залежно від постановки завдання вимірювань – числові значення, вектори, функції.

**Другий крок** – створення деякої системи (класу)  $I$  відкритих множин  $X$ , яку називають *топологічною структурою або просто топологією*.

*Топологію  $I$  також називають системою околів*, при цьому окіл  $U$  для  $x \in R$  позначають як

$$U(x) \in I, \text{ якщо } x \in U.$$

Саме топологія  $I$  - система околів, дає змогу у процесі формалізації вимірювального експерименту враховувати всі можливі варіанти похибок, які виникають під час вимірювального експерименту.

По суті, обґрунтування системи околів і визначає характеристики точності результату вимірювань. Це одна з центральних проблем теорії вимірювань. Саме цю проблему, а її визначено наприкінці ХХ – початку ХХІ ст. як найбільш актуальну і важливу проблему концепції «невизначеності вимірювань», необхідно розв'язувати в загальній теорії вимірювань.

*Пару  $(X, I)$  називають топологічним простором*. Таке визначення топологічного простору є великою мірою загальним і це характерно для визначень деяких математичних об'єктів – визначають лише основний, властивий тільки певному об'єкту модуль структури чи характерну властивість його використання. Яскравим прикладом такого підходу є використання множини, як фундаментальної «цеглинки» для побудови багатьох інших, складнішої структури, математичних об'єктів. Тому для ефективного використання топологічних просторів, за аналогією з множинами, виділяють певні підмножини із загального класу топологічних просторів, шляхом введення додаткових умов, певних обмежень, обумовлених характерними властивостями галузей їх застосування. Природно для теорії вимірювань використовувати топологічні простори Хаусдорфа, основна властивість яких, по суті, відображає характерну властивість вимірювань, а саме: два різні за



значенням наслідки вимірювального експерименту визначають як два різні околиці топологічного простору Хаусдорфа.

Аксіому відокремлення Хаусдорфа [2.11] покладено в основу побудови хаусдорфових топологічних просторів як підмножини класу загально визначених топологічних просторів. Згідно з цією аксіомою дві різні точки простору стають розділені в топології  $I$  за допомогою околів, тобто кожна пара точок хаусдорфового простору  $(X, I)$  має околиці, що не перетинаються. Використання хаусдорфових топологічних просторів у процесі формалізації дає змогу враховувати роздільну здатність інформаційно-вимірювальних приладів та систем.

**Третій крок** вимірювального експерименту – визначення міри. Міра як математичний об'єкт є моделлю таких фізичних величин, як маса, довжина, площа, об'єм та ін. Відомо, що міра як функція множин набуває тільки невід'ємних числових значень. Однак у вимірюваннях трапляються величини, які набувають і від'ємних значень, наприклад, величина від'ємного електричного заряду.

Простим і природним узагальненням міри є заряд  $q$  [2.1; 2.7; 2.11]. Термін «заряд» запозичений з фізики. Заряд у фізиці відрізняється від маси тим, що маса завжди невід'ємна, а заряд може бути довільного знака. Така сама відмінність спостерігається між мірою та зарядом як математичними об'єктами.

Сукупність  $(X, I, q)$  називають *вимірним топологічним простором із зарядом* або *топологічним простором із зарядом*.

Розглянемо математичну задачу вимірювань, у постановці якої можна виділити два послідовні етапи:

- 1) вивчення об'єкта вимірювань та створення (вибір) відповідних математичних моделей для його опису;
- 2) формулювання математичної задачі вимірювань (формалізованої задачі вимірювань) у процесі формалізації і конкретизації мети вимірювального експерименту.

Математична задача вимірювань повинна мати дві складові частини:

- 1) постановку задачі, у якій відображаються або використовуються відомий взаємозв'язок усіх математичних моделей об'єктів процесу вимірювань, початкові та граничні умови, їх визначення та значення;
- 2) запитання, на яке потрібно відповісти через розв'язання поставленої задачі.

Зазначимо, що в більшості задач вимірювань відповідь на поставлене запитання міститься в неявній формі вже в постановці задачі.

Математичну задачу вимірювань часто розбивають на дві пов'язані між собою задачі:

- 1) до проведення вимірювального експерименту – *ап'іорна постановка задачі*, коли розв'язанням задачі на основі аналітичного методу є множина всіх

можливих результатів вимірювань, їх аналіз може бути прогнозом очікуваного реального результату вимірювань і відповідного значення похибки;

2) після проведення вимірювального експерименту – *апостеріорна постановка задачі*, коли отриманий результат вимірювань і характеристики точності на базі опрацьованих наслідків, зазвичай статистичної обробки, дають змогу прийняти рішення щодо досягнення мети експерименту.

*Результат вимірювань* може бути виражений іменованим числом, функцією чи вектором.

Суттєву роль у вимірювальному експерименті відіграє вибір *методу вимірювань*, характерною властивістю якого є послідовність правил, прийомів і алгоритму опрацювання наслідків вимірювальних експериментів.

Зупинимось на аксіоматичному підході до побудови теорії вимірювань.

**Аксіоматика загальної теорії вимірювань.** Сформулюємо такі аксіоми теорії вимірювань.

**Аксіома 2.1.** Кожному наслідку вимірювального експерименту ставиться у відповідність елемент  $x$  деякої множини  $X$ .

**Аксіома 2.2.** Серії наслідків вимірювальних експериментів, які стосуються одного і того ж об'єкта вимірювань і виконані за однакових умов, ставиться у відповідність топологія  $\mathcal{I}$  підмножин множини  $X$ .

**Аксіома 2.3.** У просторі наслідків вимірювальних експериментів задається узагальнена міра – заряд  $q$ , яку визначено на алгебрі ( $\sigma$ -алгебрі)  $\mathcal{I}$  підмножин  $X$  як дійсну функцію.

Така система аксіом є несуперечливою, незалежною і неповною:

□ несуперечливою тому, що існують реальні об'єкти вимірювань, які задовольняють ці аксіоми;

□ незалежною тому, що ніяка з аксіом не є наслідком іншої;

□ неповною тому, що в межах сформульованих аксіом можна розглядати однакові множини наслідків, але з різними топологіями  $\mathcal{I}$ .

На практиці здебільшого виконують типові вимірювальні експерименти, характерною особливістю яких є можливість за умовою задачі вимірювань приписати наслідку кожного експерименту заряд (міру).

**Наслідок 2.1.** Будь-якому вимірювальному експерименту ставиться у відповідність математична модель  $(X, \mathcal{I}, q)$  — вимірний топологічний простір із зарядом, де множини  $X$  як породжувальний простір уведено в аксіомі 1,  $\sigma$ -алгебру підмножин  $\mathcal{I}$ , як один з варіантів топології  $\mathcal{I}$  відкритих підмножин  $X$  – в аксіомі 2, а заряд  $q$  уведено як дійсну функцію в просторі  $X$  на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{I}$ .

Під час проведення  $n$  ( $n > 1$ ) вимірювальних експериментів за однакових умов отримуємо дискретну послідовність значень заряду

$$q_1, q_2, \dots, q_n, \quad (2.1)$$

яка дає змогу визначити результат і похибку вимірювань.

**Означення 2.3.** Результатом вимірювань є однозначно визначена функція послідовності значень заряду (2.1)

$$Q_n = f(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (2.2)$$

яка задовольняє умови задачі вимірювань.

Вибір виду функції (2.2) по суті є вибором алгоритму опрацювання наслідків вимірювальних експериментів для розв'язання задачі вимірювань.

В аналізі результатів вимірювань похибка вимірювань є мірою розкиду наслідків вимірювальних експериментів і одночасно характеристикою точності результату вимірювань. Для її визначення в топологічному просторі із зарядом  $(X, I, q)$  можна ввести метрику – відстань  $\rho(q_i, q_j)$  між елементами множини зарядів  $\{q_j, j=1,2,\dots\}$ , яка в загальному випадку залежить від функції (2.2) і задовольняє відомі умови.

Зупинимось на цьому більш детально. Визначаючи характеристики точності результату вимірювального експерименту, розглядають вимірний топологічний простір із зарядом  $(X, I, q)$ , у який вводиться відповідна метрика.

**Означення 2.4.** Однозначна, невід'ємна дійсна функція  $\rho(q_i, q_j)$  для будь-яких  $q_i, q_j \in I$ , яка задовольняє такі аксіоми:

- а)  $\rho(q_i, q_j) = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $i = j$ ;
- б) аксіомі симетрії:  $\rho(q_i, q_j) = \rho(q_j, q_i)$ ;
- в) аксіомі трикутника:  $\rho(q_i, q_m) \leq \rho(q_i, q_j) + \rho(q_j, q_m)$

називається відстанню або метрикою між елементами послідовності (2.1).

Таке означення метрики є більшою мірою загальним і саме це дає змогу створювати різні види таких просторів, які іменуються метричними просторами.

Сформулюємо наступне означення похибки вимірювань.

**Означення 2.5.** Похибкою вимірювань у топологічному просторі із зарядом  $(X, \mathcal{T}, q)$  є діаметр множини значень заряду  $\{q\}$ , тобто точна верхня грань для відстані між довільними парами елементів множини  $\{q\}$ :

$$\sup_{ij} \{\rho(q_i, q_j), i, j = 1, 2, \dots; q_i, q_j \in \{q\}\}.$$

Із цього означення випливає, що для знаходження похибки вимірювань не постулюється точне значення вимірюваної величини.

В окремих випадках, коли розглядається послідовність серій, точне значення величини може бути тоді, якщо існує границя послідовності діаметрів множини значень заряду  $\{q\}$  і вона прямує до нуля, за умови зростання кількості наслідків вимірювального експерименту  $n$  до нескінченості, тобто якщо  $n \rightarrow \infty$ . Але це не означає, що таке точне значення величини узгоджено з фізичною природою об'єкта вимірювань. І коли такого узгодження немає, то необхідно визнати, що точного значення величини не існує.

Таке означення породжує нове правило визначення похибки вимірювань лише за результатами наслідків вимірювальних експериментів. Якщо використовувати відому термінологію теорії вимірювань, то така похибка буде максимальною. Подальше розбиття отриманої похибки на компоненти (такі, як систематична, випадкова, інструментальна, методична) у кожному конкретному випадку вимірювань потребує додаткових досліджень. Запропоноване правило дає змогу визначати поточну похибку вимірювань для довільної послідовності, або серії послідовностей наслідків вимірювальних експериментів, тобто відслідковувати динаміку процесу вимірювань і в разі потреби відповідно корегувати його проведення.

Використаємо основні положення сучасної концепції статистичних вимірювань для статистичних кутових вимірювань. (Деякі положення такого напрямку вимірювань розглянуто далі в цьому розділі, а основні результати наведено в сьомому розділі). Спочатку розглянемо деякі характерні властивості таких вимірювань.

**Статистичні кутові вимірювання.** Дослідження фізичної суті багатьох явищ та процесів, виконання вимірювань на квантовому рівні у зв'язку зі стрімким розвитком нанотехнологій потребують більш широкого й обґрунтованого використання ймовірно-статистичних методів вимірювання і обробки вимірювальної інформації. Отримання коректних оцінок випадкових кутів неможливе без використання методів теорії ймовірностей та математичної статистики.

Водночас на практиці експериментатори часто використовують єдиний підхід для статистичної обробки результатів як лінійних, так і кутових спостережень. Наприклад, і для лінійних, і для кутових вимірювань застосовують як найбільш імовірне значення середнє арифметичне, а розсіювання результатів вимірювання характеризують середньо квадратичним відхиленням. У ряді випадків такий підхід може призвести до грубих помилок (наприклад, середнє значення для двох кутів  $\varphi_1 = 0^\circ$  та  $\varphi_2 = 350^\circ$  становить  $175^\circ$  замість очікуваного значення  $355^\circ$ ).

Результати аналізу даних кутових вимірювань показують, що такі вимірювання мають характерні властивості, відмінні від властивостей лінійних вимірювань, тобто вимірювань, аргументом яких є числа  $R \in (-\infty, \infty)$ . Ці відмінності обумовлені перед усім тим фактом, що геометрична інтерпретація суті кутових вимірювань проводиться на колі в межах зміни кута  $\alpha \in [0, 2\pi)$  (у загальному випадку на замкненій кривій другого порядку [2.1]).

Процес вимірювання кутів здебільшого має випадковий характер, а результат вимірювання містить стохастичні похибки. Це обумовлено тим, що, по-перше, значення досліджуваних кутів можуть формуватись під впливом ряду випадкових факторів, по-друге, на результати вимірювання навіть незмінного за час вимірювання досліджуваного кута діють випадкові похибки методичного чи інструментального походження.

Розглянемо на прикладі обмеження щодо застосування у кутометрії статистичних методів аналізу розподілених на прямій випадкових величин. Наведений нижче приклад демонструє можливість отримання некоректних оцінок при статистичній обробці результатів кутових вимірювань.

**Приклад 2.2.** Нехай в серії  $M=100$  вимірювань отримано значення:  $\varphi_j = 1^\circ$  для  $j = \overline{1,50}$  і  $\varphi_j = 359^\circ$  для  $j = \overline{51,100}$ . Цілком природно, що середнє значення кута дорівнює  $0$ , а розкид значень  $-1^\circ$ . Водночас формальне застосування відомих для розподілу на прямій оцінок середнього і середньоквадратичного відхилення [1.20; 1.25], дає інші результати:

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \varphi_j = \frac{50}{100} (1^\circ + 359^\circ) = 180^\circ;$$

$$\tilde{\sigma}_\varphi = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\varphi_j - \tilde{\varphi})^2} = \sqrt{\frac{50}{99} 2 \cdot (179^\circ)^2} \approx 180^\circ.$$

Відзначимо, що такі помилки зменшуються, а в ряді випадків і зникають, з віддаленням середнього значення кута від межі інтервалу вимірювання:  $\varphi = 0^\circ$  чи  $\varphi = 360^\circ$ .

Таким чином, під час статистичної обробки результатів кутових вимірювань необхідно обґрунтувати (спочатку теоретично) використання інших статистичних характеристик. Це питання детально розглянуто в сьомому розділі.

Розглянемо відомий метод графічного відображення результатів кутових спостережень на основі відтворення вимірних напрямів (кутів) точками на одиничному колі (рис. 2.2, а), або радіусами, які закінчуються в цих точках, а починаються в центрі кола (рис. 2.2, б).

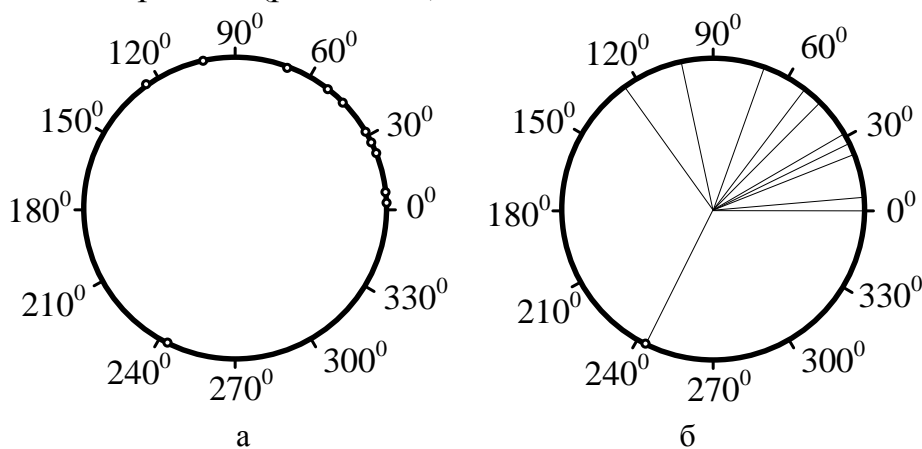


Рис. 2.2. Графічне зображення результату спостереження кутових величин точками на колі (а) та векторами (б)

Розбиття кола на клас-інтервали та групування даних за цими клас-інтервалами дозволяє застосувати кругові гістограми для відображення експериментальних даних кутових вимірювань значного обсягу  $M$  (рис. 2.3, а). Кругова гістограма являє собою коло, поділене на  $m$  клас-секторів (найчастіше однакової величини). Для цих секторів підраховують кількість спостережуваних кутів  $M_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , значення яких належать  $j$ -му інтервалу. У випадку однакових клас-інтервалів на графіках у визначених секторах маємо прямокутники, висота яких дорівнює значенням  $M_j$ , або відносним частотам  $M_j/M$ . Графік кругової гістограми спостережень кутів на колі для випадків  $m=12$  та  $n=1000$  показано на рис. 2.3, а.

Іншим зручним способом графічного зображення гістограми кутових спостережень є графік лінійної гістограми (рис. 2.3, б), що являє собою «розгорнуту» на інтервал  $[0, 2\pi)$  кругову гістограму.

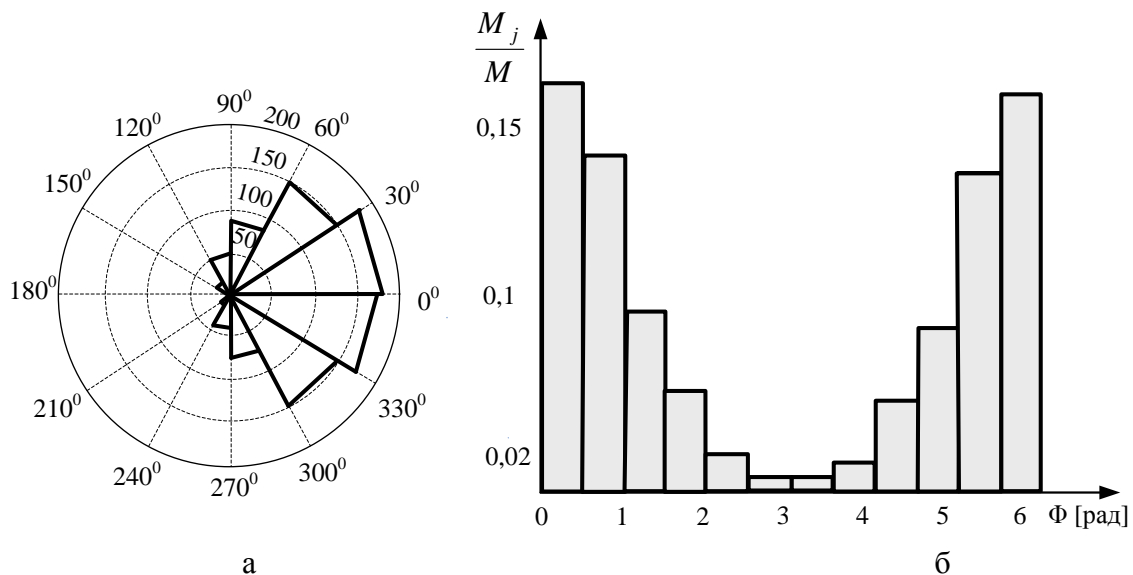


Рис. 2.3. Кругова (а) та лінійна (розгорнута кругова) (б) гістограми кутових спостережень

Статистичним кутовим вимірюванням присвячено чимало публікацій, але потрібно об'єктивно відзначити, що це праці здебільшого зарубіжних авторів, більшість яких опубліковано в журналах «Biometrika», «Annals Mathematics Statistics», «Journal of the Royal Statistical Society».

Серед публікацій потрібно виділити працю К. Мардіа (K.V. Mardia), переклад якої російською мовою виконано під редакцією відомого в галузі теорії ймовірностей і математичної статистики радянського вченого Л.М. Большева [2.2]. Перекладачі цієї роботи відзначають, що книжка, мабуть, єдиний монографічний виклад зазначених статистичних методів. Водночас, під час перекладу виправлено деякі неточності англійського оригіналу. Так, наприклад, виправлений підрозділ 3.1 присвячено функції розподілу ймовірностей моделі випадкового кута, підрозділ 5.1 – нерівності типу

Крамера-Рао «...при редактировании написан заново...», а підрозділ 3.3.4 про кругову медіану і кругове середнє відхилення «...написан заново с целью устранения принципиальных ошибок английского оригинала». Крім того «...последние две главы оригинала, посвященные фрагментам сферического случая, опущены...». Таким чином, можна стверджувати, що колектив перекладачів зробив свій відповідний творчий внесок у працю [2.2]. У цілому отримані в цій роботі результати статистичного аналізу кутових вимірювань є важливими, обґрунтованими, розглянуті для багатьох статистичних задач і можуть бути використані у сучасній теорії статистичних кутових та фазових вимірювань, яка перебуває у стадії розвитку.

У цілому, в теорії статистичних кутових вимірювань в основу визначення значень випадкового кута  $\Psi(\omega)$  покладено окремий випадок вимірного топологічного простору з зарядом  $(X, \mathcal{I}, q)$ . Як основну математичну модель використовують модель випадкового кута  $\Psi(\omega)$ , областю визначення якого є ймовірнісний простір  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вимірний ймовірнісний простір з мірою, де  $\Omega$  – простір елементарних подій  $\omega \in \Omega$ ,  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра підмножини  $\Omega$ , а  $P$  – ймовірнісна міра, задана на підмножинах  $\mathcal{F}$ . Відомо, що ймовірнісний простір  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  породжує ймовірнісний простір значень випадкового кута  $\Psi(\omega)$  –  $(X, \mathcal{B}, P_\Psi)$ , де  $X \subseteq R$  є множиною числової осі  $R$ ,  $\mathcal{B}$  – алгебра ( $\sigma$ -алгебра) підмножини  $X$ , а  $P_\Psi$  – ймовірність (ймовірнісна міра) випадкових подій  $\Psi(\omega) \in \mathcal{B}$ . Вживається також термін «фазовий простір значень  $\Psi(\omega)$ » – множина  $X$ . Тому випадковий кут  $\Psi(\omega)$  визначають як вимірну випадкову функцію аргументу  $\omega \in \Omega$  у просторі  $X$ .

У загальному випадку використовуються і інші більш складні ймовірнісні моделі, наприклад, двовимірний вектор випадкових кутів, процес випадкових кутів з дискретним часом тощо. У свою чергу, застосування таких моделей дає змогу використовувати в теорії статистичних кутових вимірювань математичний апарат теорії ймовірностей та математичної статистики. Більш детально характерні властивості статистичних кутових вимірювань розглянуто у підрозділі 2.6.

Далі зупинимося на обраних питаннях теорії статистичних кутових вимірювань.

### 2.3. Детермінована і випадкова моделі кута на площині

Кутові вимірювання – один з основних об'єктів досліджень у цій роботі. Відповідно і обґрунтування моделей кута є однією з її основних тем. У цьому розділі наведено загальну методологію побудови таких моделей. Більш детально і ґрунтовно випадкову модель кута розглянуто в сьомому розділі, який повністю присвячено аналізу такої моделі кута.

Розглядаючи одновимірну імовірнісну модель кута на площині, спочатку розглянемо відомий детермінований випадок.

**Детермінований випадок.** Визначимо положення точки на площині (рис. 2.4) на основі використання [2.12]:

- кола радіусом  $r$ ;
- декартової двовимірної прямокутної системи координат  $Oxy$ ;
- полярної системи координат  $O\rho\varphi$ .

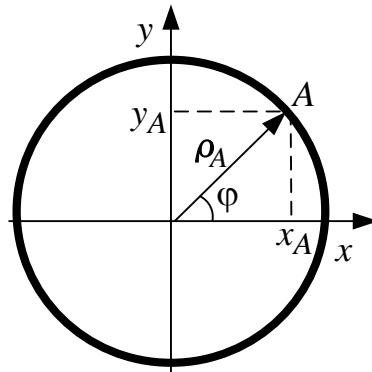


Рис.2.4. Визначення кутового положення точки  $A$  на площині

Маємо такі відомі співвідношення:

- радіус-вектор  $\rho_A$  у полярній системі, модуль (довжина) якого

$$|\rho_A| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = r,$$

де відповідно  $x_A$  – абсциса і  $y_A$  – ордината точки  $A$  в декартовій системі;  $r$  – радіус кола, на якому розміщено точку  $A$ ;

- полярний кут

$$\varphi = \text{Arctg} \frac{y_A}{x_A},$$

де

$$\text{Arctg} \frac{y_A}{x_A} = \begin{cases} \arctg \frac{y_A}{x_A}, x_A > 0, y_A > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y_A}{x_A}, x_A < 0, y_A > 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y_A}{x_A}, x_A < 0, y_A < 0, \\ \frac{\pi}{2}, x_A = 0, y_A > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, x_A = 0, y_A < 0. \end{cases}$$

Далі наведемо таке означення.



**Означення 2.6.** Напрямом у полярній системі координат будемо називати напрям радіуса-вектора  $\rho$  ненульової (для нормованого випадку – одиничної) довжини за відповідного значення полярного кута  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

Таким чином напрям є функцією тільки однієї змінної – полярного кута  $\varphi$ , кута між радіусом-вектором і полярною віссю, який і є основним об'єктом кутових вимірювань на площині.

У загальному випадку під «напрямом», точніше «множиною напрямів», яка може бути скінченною, зліченною, неперервною з потужністю континуума на півінтервалі  $[0, 2\pi)$ , розуміють:

- відображення  $\text{Arctg } x$ ,  $x \in R$ , яке ставить множині дійсних чисел  $R$  у відповідність множину напрямів полярного кута  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ ;
- або вектор  $\mathbf{z}$  одиничної довжини на комплексній площині, який визначається комплексним числом

$$\mathbf{z} = \exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad i = \sqrt{-1}.$$

На основі цієї формули ставиться однозначна відповідність між можливими напрямками вектора  $\mathbf{z}$  на комплексній площині та кутом  $\varphi$ .

Під час побудови узагальненої моделі кута  $\varphi$  виходять з більш загальних припущень, які враховують циклічну природу зміни полярного кута у часі чи просторі. Таким чином, у загальному випадку, ґрунтуючись на циклічній зміні кута  $\Phi$ , допускають припущення, що

$$\Phi \in R.$$

Це так званий «кумулятивний кут», який використовують у практичних задачах кутових вимірювань. У цьому випадку вся числова вісь  $R$  розбивається на зліченну множину півінтервалів  $\{[2\pi k, 2\pi(k+1)), k \in Z\}$ , і таке розбиття дає змогу використати конструктивне подання довільного кута  $\Phi$  у вигляді (1.3), тобто

$$\Phi = \left[ \frac{\Phi}{2\pi} \right] \cdot 2\pi + \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

де  $\left[ \frac{\Phi}{2\pi} \right]$  – ціла частина  $\frac{\Phi}{2\pi}$ ,  $\left[ \frac{\Phi}{2\pi} \right] = k$ ,  $k \in Z$ , тобто множина всіх цілих дійсних чисел;  $\varphi$  – дробова частина кута  $\Phi$ .

У більшості практичних задач вимірювань полярного кута саме дробова частина  $\varphi$  є невідомою величиною. Це пов'язано з тим фактом, що ціла частина  $\left[ \frac{\Phi}{2\pi} \right]$  кута  $\Phi$  у ряді випадків є відомою, при цьому під час вимірювань ціла частина кута вважається «грубою оцінкою кута». Тому набули широкого використання такі формули [2.2]

$$1) \text{ для кола радіусом } r = 1 \text{ (нормованого кола)} \\ \varphi \equiv \Phi \pmod{2\pi}, \quad (2.6)$$

2) для кола радіусом  $r \neq 1$

$$\varphi \equiv \Phi \pmod{2\pi r}. \quad (2.7)$$

Надалі будемо використовувати переважно формулу (2.6), оскільки саме цей випадок містить основні характерні відмінності статистичних характеристик випадкових кутів і випадкових величин. У разі потреби від формули (2.6) до (2.7) можна перейти, ґрунтуючись на відомих співвідношеннях.

Суттєвим щодо використання формули (1.3) є такий факт: а) у теорії кутових вимірювань розглядається вся зліченна множина  $\left[ \frac{\Phi}{2\pi} \right] = k, k \in Z$ , що дає змогу використовувати теорію періодичних функцій, рядів Фур'є (Фур'є-Стілт'єса) для аналізу результатів кутових вимірювань [2.11], при цьому поява кожного  $k$  має однакову ймовірність і не має переваги перед іншими  $k$ ; б) всі практичні результати кутових вимірювань для конкретного  $k$  або для скінченної множини  $\{k_1, \dots, k_n\}$  розглядаються як частинні випадки а).

**Ймовірнісна модель кута на площині.** Конструктивне подання кута на площині у вигляді (1.3) покладено в основу побудови моделі випадкового кута [2.2].

Випадковий кут  $\Psi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , у загальному випадку може набувати усіх числових значень на дійсній осі  $R = (-\infty, \infty)$ . Враховуючи дію випадкових факторів, такий кут визначають як функцію з відповідною областю визначення – це ймовірнісний простір  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Область значень  $\Psi(\omega)$  – це ймовірнісний простір  $(X, \mathcal{B}, P_\Psi)$ , який є відповідним відображенням  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  на числову вісь  $R$ , при цьому  $X \subseteq R$ .

Відомо, що вказані ймовірнісні простори є вимірними просторами з мірою – ймовірнісною нормованою мірою. Тому випадковий кут як об'єкт випадковій природі є вимірною функцією.

Як було зазначено, статистичні кутові вимірювання мають свою характерну специфіку порівняно з традиційними розділами теорії ймовірностей і математичної статистики.

*Випадковим кутом* будемо вважати дійсну одновимірну функцію  $\Psi(\omega)$ , якщо її дробова частина  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$  є випадковою величиною

$$\Psi(\omega) = \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] \cdot 2\pi + \psi(\omega), \omega \in \Omega \quad (2.8)$$

Збіжність у виразі (2.8) розуміють у сенсі збіжності функцій розподілу.

Дробову частину  $\psi(\omega)$  [2.2] позначають як

$$\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}, \quad (2.9)$$

якщо кут розглядається на колі з одиничним радіусом, тобто  $r = 1$ . Для випадку, коли розглядається випадковий кут на колі радіуса  $r \neq 1$ , маємо

$$\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi r},$$

при цьому  $0 \leq \Psi(\omega) \pmod{2\pi r} < 2\pi r$ .

#### 2.4. Закони розподілу ймовірностей випадкових кутів

Довільний випадковий кут  $\Psi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , у загальному випадку утворюється і визначається сумою цілої і дробової частин у вигляді (2.8).

**Функція розподілу ймовірностей випадкового кута на  $[0, 2\pi)$ .** Спочатку розглянемо функцію розподілу дробової частини  $\psi(\omega)$ , яку згідно з працею [2.2] визначають таким чином

$$G(x') = P\{\omega \in \Omega : 0 < \psi(\omega) \leq x'\}, \quad x' = x \pmod{2\pi}.$$

Слід зауважити, що в праці [2.2]  $G(x')$  називається функцією розподілу дробової частини випадкового кута  $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$  або  $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi r}$ . Порівняно з традиційно вживаною в теорії ймовірностей функцією розподілу  $G(x')$  має ті ж властивості, але на скінченному інтервалі  $[0, 2\pi)$ , а не на всій числовій осі  $R$ . Тому для уникнення суперечностей і непорозумінь далі називатимемо  $G(x')$  *функцією розподілу випадкового кута на  $[0, 2\pi)$* .

**Інтегральна функція розподілів ймовірностей послідовності випадкових кутів на  $R$ .** У праці [2.2] наведено функцію розподілу довільного випадкового кута  $\Psi(\omega) \in R$ ,  $\omega \in \Omega$ , у вигляді

$$F(x) = G(x') + \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor + C, \quad x \in R, \quad x' = x \pmod{2\pi}. \quad (2.12)$$

Функція  $G(x')$  – функція розподілу випадкового кута на  $[0, 2\pi)$  входить до складу виразу (2.12) як складова компонента.

Зупинимось більш детально на аналізі структури функції  $F(x)$ , яка безпосередньо пов'язана із законом розподілу випадкового кута  $\Psi(\omega)$  вигляду (2.8).

На перший погляд, функція  $F(x) \in (-\infty, \infty)$  не може мати властивостей традиційної функції розподілу ймовірностей. Але більш глибокий аналіз показує, що функція  $F(x)$  є інтегральною функцією приростів розподілів ймовірностей зліченної послідовності випадкових кутів на  $R$ , тобто на кожному зі скінченних інтервалів  $\{[2\pi k, 2\pi(k+1)), k \in Z\}$  числової осі  $R$  маємо одну функцію  $G(x') = G_k(x')$  – функцію розподілів ймовірностей випадкового кута на  $[0, 2\pi)$ .

Обґрунтуємо цей висновок. Функція  $F(x)$  має вигляд (2.12) за умови, що для складових довільного випадкового кута  $\Psi(\omega)$  – дробової і цілої частин, які є випадковими величинами, справедливі такі твердження:

$$P\left\{\omega \in \Omega : \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] = k, k \in Z\right\} = 1 \quad (2.13)$$

і

$$P\{\omega \in \Omega : \psi(\omega) \in [0, 2\pi)\} = 1. \quad (2.14)$$

Значення цілої частини  $\left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right]$  залежить від вибору початку системи

координат (відліку), впливу інших випадкових і не випадкових факторів і по суті є «грубою» оцінкою значення випадкового кута  $\Psi(\omega)$ .

Таким чином, монотонно неспадна функція  $F(x)$  на довільно розміщеному на  $R$  інтервалі довжиною  $2\pi$  має однакові прирости  $F(x + 2\pi(k + 1)) - F(x + 2\pi k) = 1$  для всіх  $k \in Z$  і всіх  $x \in R$ , що не суперечить властивостям нормованої імовірнісної міри.

На кожному скінченному відрізку  $(x, x + 2\pi)$ ,  $x \in R$  довільний випадковий кут  $\Psi(\omega)$  вигляду (2.8) має функцію розподілу ймовірностей  $G(x')$  випадкового кута на  $[0, 2\pi)$ . Це також підтверджує один з основних висновків праці [2.2]: імовірнісний аналіз довільних випадкових кутів зводиться до ймовірнісного аналізу його дробової частини  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ .

Надалі для уникнення суперечностей і непорозумінь будемо називати функцію  $F(x)$  *інтегральною функцією розподілів ймовірностей послідовності випадкових кутів на  $R$* .

Для розкриття суті практичного використання функцій  $F(x)$  і  $G(x')$  відзначимо таке.

У загальному випадку функцію  $G(x')$  (відповідно і функцію  $F(x)$ ) однозначно подають у вигляді трьох компонент, а саме:

$$G(x') = c_1 G_1(x') + c_2 G_2(x') + c_3 G_3(x'), \quad (2.15)$$

де  $\{c_j, j = \overline{1,3}, c_1 + c_2 + c_3 = 1\}$  – дійсні невід'ємні числа;  $G_1(x')$  – абсолютно неперервна функція;  $G_2(x')$  – кусково-постійна (ступінчаста) функція зі скінченною або зліченною кількістю стрибків;  $G_3(x') = G_{\tilde{N}}(x')$  – сингулярна компонента, яка є неперервною, має майже всюди похідну, що дорівнює нулю.

Останню компоненту  $G_C(x')$ , зазвичай у прикладних задачах, не використовують у зв'язку з відсутністю фізичної інтерпретації і відповідного обґрунтування для практичного застосування. Але така аргументація не може виключити розгляд сингулярної компоненти взагалі. Тому надалі можливі більш широкі використання сингулярної компоненти. Так, наприклад, існує теоретична (ідеалізована) канторова випадкова величина з діапазоном значень на канторовій множині відрізка числової осі  $[0,1]$ , яка має сингулярний закон розподілу.

У більшості практичних випадків замість (2.15) використовують таке подання :

$$G(x') = c_1 G_1(x') + c_2 G_2(x'),$$

де  $c_1 + c_2 = 1$ , тобто якщо  $c_1 = 1, c_2 = 0$  маємо неперервний закон розподілу  $G_1(x')$ , а при  $\tilde{n}_1 = 0, c_2 = 1$  - дискретний  $G_2(x')$ , а якщо  $\tilde{n}_1, c_2 \neq 0$ , - змішаний.

Для абсолютно неперервних функцій  $G(x')$  і  $F(x)$  випадкових кутів

$$G(x'_2) - G(x'_1) = F(x'_2 + 2\pi k) - F(x'_1 + 2\pi k) = \int_{x'_1}^{x'_2} p(y) dy, \quad (2.17)$$

$$x'_2 \geq x'_1, x'_1, x'_2 \in [0, 2\pi), k \in Z$$

Функцію  $p(x')$  називають щільністю розподілу ймовірностей випадкового кута  $\psi(\omega)$  на  $[0, 2\pi)$ .

На числовій осі  $R$  функція  $p(x') = p(x' + 2\pi k)$  є періодичною функцією. Таким чином, маємо наступне:

- функції розподілу випадкового кута  $\psi[\omega]$  на  $[0, 2\pi)$  відповідає розподіл ймовірності  $G(x')$  випадкового кута на  $[0, 2\pi)$ ;
- функції розподілу випадкового кута  $\Psi[\omega]$  на  $R$  відповідає розподіл ймовірності  $F(x)$  випадкового кута на  $R$ .

**Характеристична функція  $f_n$  випадкового кута на  $[0, 2\pi)$ .**

Характеристична функція закону розподілу ймовірностей є періодичною з періодом  $2\pi$  і визначається для цілих значень  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , тобто для  $n \in Z$ .

Для функції  $f_n$  маємо [2.2]

$$f_n = \mathbf{M}\{\exp(in\Psi(\omega))\} = \int_0^{2\pi} e^{inx} dG(x) = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{inx} dF(x), k \in Z. \quad (2.18)$$

Характеристичну функцію  $f_n$  випадкового кута  $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$  можна подати у вигляді [2.2]

$$f_n = a_n + ib_n, \quad (2.19)$$

де послідовність дійсних чисел  $\{a_n, b_n\}$  обчислено відносно початкового нульового напрямку  $\alpha_0 = 0$

$$a_n = \mathbf{M}\{\cos n\Psi(\omega)\} = \int_0^{2\pi} \cos nx dG(x), \quad (2.20)$$

$$b_n = \mathbf{M}\{\sin n\Psi(\omega)\} = \int_0^{2\pi} \sin nx dG(x), \quad (2.21)$$

при цьому  $a_n = a_{-n}, b_n = -b_{-n}$ .

Якщо маємо фіксоване дійсне число  $\alpha \in R$ , то сума  $\Psi(\omega) + \alpha$  є випадковим кутом, оскільки  $(\Psi(\omega) + \alpha) \pmod{2\pi} = \{\Psi(\omega) \pmod{2\pi} + \alpha \pmod{2\pi}\} \pmod{2\pi}$  -

випадкова величина в півінтервалі  $[0, 2\pi)$ . Відповідну характеристичну функцію визначають як

$$\mathbf{M}\{\exp[in(\Psi(\omega) + \alpha)]\} = e^{in\alpha} f_n. \quad (2.22)$$

Кожна з функцій – розподіл ймовірностей випадкового кута на  $[0, 2\pi)$  -  $G(x')$ , щільність розподілу ймовірностей випадкового кута на  $[0, 2\pi)$  -  $p(x')$ , характеристична функція випадкового кута на  $[0, 2\pi)$  -  $f_n$  повністю задає випадковий кут  $\psi(\omega)$  на  $[0, 2\pi)$ .

## 2.5. Двовимірна модель вектора випадкових кутів у тривимірному просторі

**Детермінований випадок.** Визначимо положення точки  $A$  у тривимірному просторі (рис. 2.5) з використанням:

- сфери радіуса  $r$ ;
- сферичної системи координат  $O\varphi\theta z$ ;
- тривимірної декартової прямокутної системи координат  $Oxyz$ .

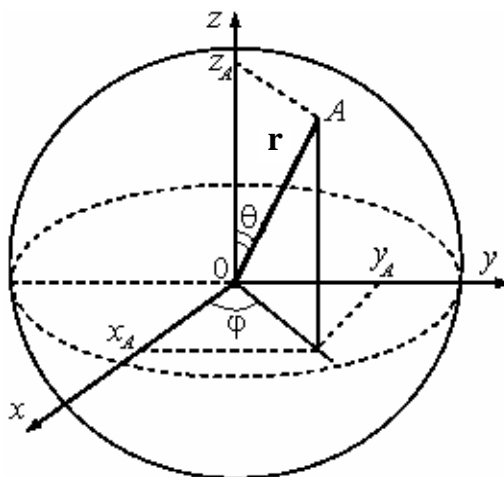


Рис.2.5. Визначення кутового напрямку точки  $A$  у тривимірному просторі

Маємо такі відомі співвідношення переходу від сферичної системи координат до тривимірної декартової прямокутної і навпаки:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \\ |\mathbf{r}| = r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \varphi &\in (-\pi, \pi), \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, & \theta &\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для верхньої частини півінтервалу маємо  $\theta > 0$ , для нижньої -  $\theta < 0$ . Визначимо поняття напрямку у просторі.

**Означення 2.7.** Напрямом у сферичній системі координат будемо називати напрям радіуса-вектора одиничної довжини  $\rho$  при виконанні умови

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1.$$

Таким чином, напрямок у просторі визначається сукупністю двох кутів –  $(\varphi, \theta)$ . Кут  $\varphi \in [0, 2\pi)$  будемо називати довготою, а  $\theta \in [0, 2\pi)$  – широтою в сферичній системі координат.

Деякі системи координат у просторі ґрунтуються на використанні відповідних кутів. Так, наприклад, *геодезичні* координати точки у просторі використовують:

- кут між площинами меридіана заданої точки і початкова меридіана;
- кут, утворений нормаллю еліпсоїда, що проходить через задану точку, з площиною його екватора;
- відстань заданої точки від еліпсоїда по нормалі до нього.

*Астрономічні, географічні, тороїдальні* системи координат також використовують дві кутові й одну лінійну (відстань) величини.

*Циліндричні* координати точки ґрунтуються на використанні однієї кутової і двох лінійних (відстані) величин.

**Означення 2.8.** Дійсний двовимірний вектор

$$\Psi_{\varphi, \theta}(\omega) = (\varphi(\omega_{\varphi}), \theta(\omega_{\theta})), \quad \omega = (\omega_{\varphi}, \omega_{\theta}), \quad \omega_{\varphi} \in \Omega_{\varphi}, \quad \omega_{\theta} \in \Omega_{\theta} \quad (2.24)$$

називається двовимірним вектором випадкових кутів  $\varphi(\omega_{\varphi})$  і  $\theta(\omega_{\theta})$  у сферичній системі координат у тривимірному просторі, якщо його функція розподілу визначається як

$$F_{\Psi}(x, y) = F_{\varphi}(x)F_{\theta}(y), \quad x, y \in R, \quad (2.25)$$

де відповідні маргінальні функції розподілу мають вигляд

$$F_{\varphi}(x) = F_1(x') + \left[ \frac{x}{2\pi} \right] + C_1, \quad x' \in [0, 2\pi), \quad x \in R \quad (2.26)$$

і

$$F_{\theta}(y) = F_2(y') + \left[ \frac{y}{\pi} \right] + C_2, \quad y' \in [0, \pi), \quad y \in R. \quad (2.27)$$

Більш детально одновимірні маргінальні функції розподілу  $F_{\varphi}(x)$  і  $F_{\theta}(y)$  розглянуто у підрозділі 2.4.

Згідно з означенням 2.8 одновимірні випадкові кути широти  $\psi_{\varphi}(\omega_{\varphi})$  і довготи  $\psi_{\theta}(\omega_{\theta})$  є незалежними випадковими величинами. Ця статистична гіпотеза підтверджується практичними вимірюваннями, що значно спрощує методологію вимірювального експерименту, особливо в разі статистичної обробки даних вимірювань та інтерпретації обчислених результатів і похибок вимірювань.

Загальна гіпотеза статистичної залежності випадкових кутів  $\psi_\varphi(\omega_\varphi)$  і  $\psi_\theta(\omega_\theta)$  може мати практичне підтвердження, але в кожному конкретному випадку потребує додаткових досліджень.

## 2.6. Характерні властивості статистичних кутових вимірювань

На основі матеріалів перших двох розділів цієї наукової праці наведемо характерні властивості статистичних кутових вимірювань. Оскільки детерміновані кути є окремим випадком статистичних кутових вимірювань, відповідні властивості характерні і для них.

1. Результатом однотипних кутових вимірювань є випадковий кут  $\Psi(\omega)$ , конструктивна математична модель якого задається у вигляді виразу (2.8), тобто

$$\Psi(\omega) = \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] \cdot 2\pi + \psi(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

де  $\left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] \in Z$ , а  $\Psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ .

Випадковий кут  $\Psi(\omega)$  задають як вимірну функцію з областю визначення  $\Omega$  і фазовою областю значень  $X \subseteq R$ .

Для детермінованого випадку маємо модель кута  $\Psi \in R$  у вигляді (1.8), тобто

$$\Psi = \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] \cdot 2\pi + \psi(\omega), \quad \psi \in [0, 2\pi).$$

2. Основним об'єктом кутових вимірювань є дробова частина  $\psi(\omega)$  кута  $\Psi(\omega) \in R$ , яка має скінченну область значень  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi), \omega \in \Omega$  і є відповідною випадковою величиною.

3. У загальному випадку для випадкового довільного кута  $\Psi(\omega) \in R$  закони розподілу ймовірностей є такі:

– інтегральна функція розподілів послідовності випадкових кутів на  $R$  у вигляді (2.12), тобто

$$F(x) = G(x') + \left[ \frac{x}{2\pi} \right] + C, \quad x \in R, \quad x' = x(\text{mod } 2\pi),$$

де  $G(x') \in [0, 1]$  – функція розподілу випадкового кута  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$  – дробової частини  $\Psi(\omega)$ ;  $C$  – довільна константа, яка визначається у кожному конкретному випадку; здебільшого  $C = 0$ , а  $F(x) \in (-\infty, \infty)$ ;

– щільність розподілу ймовірностей випадкового кута  $\Psi(\omega)$

$$p(x') = p(x + 2\pi k), \quad x' = x(\text{mod } 2\pi), \quad k \in Z$$

є періодичною функцією на  $R$ ;



– характеристична функція випадкового кута  $\Psi(\omega)$  визначається виразом (2.18), тобто

$$f_n = \mathbf{M}\{\exp(in\Psi(\omega))\} = \int_0^{2\pi} e^{inx} dG(x) = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{inx} dF(x), \quad k \in \mathbf{Z}$$

є періодичною функцією на  $R$  з періодом  $2\pi$  і визначається для цілих значень  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , тобто  $n \in \mathbf{Z}$ .

4. Випадковий кут  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$  задається такими функціями:

- розподілом ймовірностей випадкового кута на  $[0, 2\pi) – G(x')$ ;
- щільністю розподілу ймовірностей випадкового кута на  $[0, 2\pi) – p(x')$ ;
- характеристичною функцією випадкового кута на  $[0, 2\pi) – f_n$ .

5. У статистичній теорії кутових вимірювань для випадкових кутів проводять дослідження:

– намотаних законів розподілу ймовірностей на  $R$  традиційно, а також у півінтервалі  $[0, 2\pi)$  як відповідні операції за модулем  $2\pi$ ;

– числових характеристик: а) тригонометричних моментів; б) кругових характеристик: середнього напрямку, дисперсії, середнього відхилення, моди, асиметрії, ексцесу.

Результати таких досліджень будуть наведено у сьомому розділі.

6. Для досліджень статистичних кутових вимірювань як математичні моделі можна використовувати і більш складні випадкові функції, наприклад, випадковий вектор, випадковий процес з дискретним часом, ефективність для задач кутових вимірювань використання таких моделей потребує додаткового обґрунтування.

7. Арифметичні операції додавання і віднімання над кутами виконуються традиційно на  $R$ , а також у півінтервалі  $[0, 2\pi)$  як відповідні операції за модулем  $2\pi$ .

8. Для кутових вимірювань основною системою координат на площині є полярна система, а в просторі – сферична система.

## 2.7. Підсумки до розділу

У другому розділі наведено основні положення сучасної концепції вимірювань, яка ґрунтується на аксіоматиці загальної теорії вимірювань. Розглянуто методологію статистичних вимірювань, що ґрунтується на узгодженості теоретичних, імітаційних (моделювальних) і експериментальних (натурних) досліджень, наведено означення і етапи вимірювального експерименту. Вимірювальний експеримент визначають як реалізацію поєднання теорії, методології і практики проведення процесу вимірювань досліджуваного об'єкта (емпіричної системи).

Визначається, що в теорії вимірювань розв'язуються дві основні проблеми:

1. *Проблема відображення* полягає у необхідності гомоморфно відобразити властивості емпіричної системи у фізичну та математичну моделі системи, при цьому формальні властивості операцій і співвідношень з об'єктами емпіричної системи гомоморфні відповідним операціям і співвідношенням над наслідками вимірювального експерименту.

2. *Проблема однозначного розв'язання* задачі вимірювань полягає в установленні *кількісної міри*, у визначенні умов, за яких різними шкальними значеннями можна поставити у відповідність одне значення вимірюваної величини.

Запропоновано аксіоматичну концепцію статистичних вимірювань, яка ґрунтується на системі аксіом, використанні для загального випадку топологічного простору даних вимірювань і яка дозволяє визначити похибку вимірювального експерименту без використання гіпотези про істинне (точне) значення вимірюваної величини. Це дає змогу усунути суперечність в теорії похибок за умови фізичного підтвердження відсутності істинного значення в процесі вимірювань, включаючи і кутові.

Одним з основних об'єктів проведення процесу вимірювань є математична модель емпіричної системи. Подано означення такої моделі, розглянуто основні етапи формування моделі.

Показано, що у загальному випадку випадковий кут, областю значень якого є числова вісь  $R$ , не є типовою випадковою величиною. По суті, у більшості випадків, досліджується лише дробова частина випадкового кута, областю значень якої є півінтервал  $[0, 2\pi)$ , тобто дробову частину загального випадкового кута задано на колі з відповідним скінченним радіусом.

Досліджено закони розподілу ймовірностей випадкових кутів, а саме:

а) для загального випадкового кута з областю значень  $R$ :

- інтегральну функцію розподілів ймовірностей послідовності випадкових кутів на  $R$  –  $F(x) \in (-\infty, \infty)$ ;  $x \in R$ ;

- щільність розподілу ймовірностей послідовності випадкових кутів на  $R$  – періодична функція  $p(x)$ ,  $x \in R$  з періодом  $2\pi$ ;

- характеристичну функцію послідовностей випадкових кутів на  $R$  – періодичну функцію  $f(u)$ ,  $u \in R$  з періодом  $2\pi$ ;

б) для дробової частини випадкового кута з областю значень на півінтервалі  $[0, 2\pi)$ : функція розподілу ймовірностей  $G(x')$ , щільність розподілу ймовірностей  $p(x')$ , характеристична функція  $f(u')$  на півінтервалі  $x'$ ,  $u' \in [0, 2\pi)$  мають властивості типових законів розподілу випадкової величини.

Як узагальнення одновимірного випадкового кута на площині (колі) розглянуто двовимірну модель випадкового вектора кутів у трьохвимірному просторі (сферичній системі координат). При цьому компоненти вектора: випадковий кут  $\varphi(\omega_\varphi)$  визначає довготу: випадковий кут  $\theta(\omega_\theta)$  визначає

широту у сферичній системі координат і вони вважаються статистично незалежними. Це припущення суттєво спрощує використання такого двовимірного випадкового вектора для практичних задач кутових вимірювань у сферичній системі координат. Деякі результати дослідження обраних питань сучасної концепції статистичних вимірювань наведено у працях [2.1 – 2.12].

*Кожна річ відома у тому ступені,  
в якому її можна виміряти*  
У. Томпсон (лорд Кельвін)

### Розділ 3

## ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ФАЗОВИХ ВИМІРЮВАНЬ

У цьому розділі розглянуто розвиток фазометрії, галузі її застосування, основні ідеї, покладені в основу статистичної фазометрії, спільні і відмінні особливості кутових та фазових вимірювань, обґрунтовано більш широке застосування в статистичній фазометрії результатів, отриманих під час статистичного аналізу кутових вимірювань. Наведено означення статистичної фазометрії і фазового вимірювального експерименту як процесу реалізації методів вимірювань фазових характеристик сигналів. Матеріали розділу подають загальну науково-технічну проблематику фазових вимірювань.

### 3.1. Огляд розвитку фазових вимірювань

Становлення фазометрії відбувалось у міру розширення кола завдань вимірювань фазових характеристик сигналів. Так було сформовано основні положення фазометрії, які здебільше функціонально відображали відомі методи кутових вимірювань. Тому розроблені в кутових вимірюваннях методи обробки даних знаходять своє відповідне місце і в такій важливій галузі вимірювань, як *фазометрія* [3.8; 3.13] – галузі, яка вивчає та досліджує сукупність методів і засобів вимірювання, перетворення, регулювання та формування характеристик фазових циклічних сигналів різної природи – електричних, оптичних, акустичних тощо.

Фазові методи та системи вимірювання, перетворення та передавання інформації відіграють в загальній теорії і практиці вимірювань дедалі вагомішу роль, а сфера їх застосування у різних галузях науки і техніки постійно розширюється. Це пояснюється тим, що більшість явищ і процесів мають циклічну природу і тому їх треба досліджувати методами фазових і кутових вимірювань; є можливість перетворення різнорідних фізичних величин у фазові характеристики сигналів; фазові характеристики періодичних сигналів – один з найбільш інформативних параметрів, які використовують для передавання, перетворення та подання інформації; фазовий метод вимірювання забезпечує високу точність вимірювання різних фізичних величин.

**Галузі застосування.** Фазовий метод вимірювання широко застосовують в радіолокації та радіонавігації, авіаційній та космічній техніці, геодезії, машинобудуванні, зв'язку, неруйнівному контролю тощо [3.2; 3.7; 3.11; 3.15; 3.24; 3.29; 3.50; 3.52; 3.61; 3.63]. Фазовимірювальне перетворення різних фізичних процесів та величин у фазовий зсув гармонічних сигналів забезпечує досягнення високих метрологічних характеристик, тому фазометрія як метод перетворення та вимірювання вже давно вийшла за межі традиційного

застосування у радіотехніці, навігації та зв'язку і з успіхом використовується в експериментальній фізиці, радіофізиці, неруйнівному контролі, експериментальній медицині, найновіших галузях науки й техніки під час проведення найточніших досліджень. Фазовий метод вимірювання і створені на його основі ІВС дозволили розв'язати низку значущих науково-технічних завдань, пов'язаних з прецизійним вимірюванням відстаней, часових інтервалів, кутів та аналізом характеристик сигнальних полів різної фізичної природи (електромагнітних, оптичних, акустичних).

Під час розв'язання різних практичних завдань виникає потреба у вимірюванні фазових зсувів у частотному діапазоні від інфранизьких до надвисоких частот в умовах дії шумів та завад у широкому динамічному діапазоні досліджуваних сигналів. За характером фазові вимірювання належать до відносних вимірювань і мають чимало специфічних похибок, які потребують певних досліджень, додаткових пояснень і тлумачень.

Теоретичну основу фазовимірювального перетворення становить сукупність фізичних законів, явищ, ефектів, які можна використовувати для побудови фазовимірювальних перетворювачів і фазових ІВС. Вони полягають у впливі вимірюваних фізичних величин на фазові характеристики сигналів. (Уявлення про можливості перетворення різних фізичних величин у фазові характеристики сигналів більш детально розглянуто в підрозділі 3.3).

Фазовий метод вимірювання застосовують для дослідження як циклічних, так і перетворених у фазовий зсув нециклічних параметрів та характеристик різних фізичних явищ, процесів, величин. Фазове вимірювальне перетворення виконують із застосуванням сигналів і полів різної фізичної природи, які мають властивість періодичності у часі і (або) просторі. Цій галузі вимірювальної техніки присвячено багато наукових праць і практичних робіт, водночас основні положення і принципи створення фазових методів вимірювання перебувають в стані розвитку. Галузь використання фазових і кутових вимірювань як надзвичайно чутливого та інформаційно-ємного методу дослідження явищ та об'єктів постійно розширюється. Про це свідчать результати останніх публікацій. Так, наприклад, у праці [3.62] наведено приклади використання фази і кута поляризації світлової хвилі для вимірювання швидкості обертання, прискорення, гідроакустичного тиску, сили електричного струму та напруженості магнітного поля, у [3.20; 3.21] аналізується точність визначення фази світлової хвилі в інтерферометрах, у [3.17] розглянуто ультразвуковий фазовий вимірювач відстані з квадратурно-фазовою обробкою сигналів, у праці [3.56] запропоновано використання кутових вимірювань у магнітному методі контролю матеріалів. Праці [3.6; 3.26; 3.30; 3.31] присвячено застосуванню фазового методу відповідно для дослідження динаміки машин і механізмів, кутової швидкості обертання об'єктів у гіроскопах, вимірювання густини плазми та температуропровідності текстильних матеріалів, у праці [3.5] запропоновано спосіб підвищення

достовірності безпомилкового розв'язання багатозначності у разі застосування кумулятивного різночастотного методу вимірювання значних фазових зсувів  $\varphi > 2\pi$ , у [3.32] розглянуто застосування принципів обробки кутових величин у завданнях захисту інформації та ін.

**Стислий порівняльний аналіз фазових і кутових вимірювань.** Фазовий зсув сигналів і кут мають багато спільних властивостей і одночасно розрізняються рядом характерних особливостей, які мають бути враховані під час проведення процесу вимірювання.

**Спорідненість.** Спорідненість природи фазових і кутових вимірювань можна підтвердити таким чином: 1) обидві ці величини циклічні і однозначно (без додаткових заходів) визначаються в межах півінтервалу  $[0, 2\pi)$ ; 2) ці величини відносні, тобто для їх однозначного визначення навіть у межах півінтервалу  $[0, 2\pi)$  необхідно штучно визначати початковий напрям у просторі (для плоских кутів), або опорне коливання з фіксованою початковою фазою (для фазових зсувів сигналів); 3) їх вимірюють однаковими одиницями – радіанами або частками повного циклу. Зрештою, міра фазового зсуву сигналів і плоского кута – величина  $2\pi$  (чи не єдиний випадок у метрології, коли міра задається ірраціональним трансцендентним числом), природно відтворюється перша – по завершенні одного повного циклу періодичного гармонічного процесу, а друга – як центральний кут повного кола. Ці особливості вказують на єдину математичну природу фазових і кутових вимірювань, які широко застосовують для дослідження різних процесів та величин, що мають циклічний характер.

Спорідненість фазових і кутових вимірювань дозволяє обґрунтувати використання основних положень теорії статистичного аналізу результатів кутових спостережень у статистичній фазометрії.

**Відмінність.** Фазові характеристики сигналів мають і певні особливості, і відмінності порівняно з кутами на площині. Передусім це залежність фазових характеристик сигналів від частоти. Ця залежність дозволяє виконувати кумулятивні різночастотні (багатовимірні) фазові вимірювання з метою розширення діапазону вимірювання за межі традиційного інтервалу вимірювань  $[0, 2\pi)$ , перетворення розподілених на прямій величин у фазові характеристики сигналів. Крім того, кутові вимірювання за характером належать до прямих вимірювань, а фазові – до непрямих, оскільки оцінюють фазову характеристику на підставі вимірювань значень електричних сигналів (напруг чи струмів), які супроводжуються впливом певних додаткових похибок вимірювання. Ці особливості і досліджує та використовує фазометрія як галузь вимірювальної техніки.

**Похибки вимірювання.** Фазові вимірювання за характером належать до відносних вимірювань, характеризуються замкненою шкалою і обтяжені рядом специфічних похибок, які потребують спеціального розгляду та пояснень. Тому застосування для потреб фазометрії лінійної (а не більш природної кутової)

теорії похибок не завжди адекватно відображає характеристики точності результатів вимірювань.

Застосування цифрової обробки сигналів (ЦОС) [3.4, 3.53, 3.57] значно розширює сферу використання фазових вимірювань, збільшує частотний і динамічний діапазони вимірювань фазових характеристик сигналів і ще більше зближує фазові й кутові вимірювання за методами обробки даних. Тому натеper пріоритетним напрямом розвитку є дискретна фазометрія. Нині розвиток комп'ютерної техніки досяг такого рівня, за якого можна реалізовувати навіть дуже складні алгоритми обробки з використанням доступних обсягів і вартості апаратури. Цифрова обробка сигналів має істотні переваги порівняно з традиційною аналоговою обробкою сигналів, зокрема такі:

- стабільність параметрів і характеристик обробки;
- можливість автоматичної адаптації до умов вимірювання;
- можливість застосування складних алгоритмів нелінійної обробки сигналів;

- створення апаратно-програмних приладів та систем, структура яких визначається різними варіантами програмного забезпечення за незмінної апаратної частини.

Зосередження уваги під час розроблення фазовимірювальної апаратури на ЦОС дозволяє усунути певною мірою такі недоліки аналогових способів вимірювання, як невисока стабільність і лінійність, неідентичність характеристик каналів обробки сигналів, невиконання умов ортогональності сигналів в ортогональному методі вимірювання, труднощі аналогової фільтрації сигналів та їх спектральної обробки.

Використання сучасної елементної бази (мікроконтролерів, малощумних операційних підсилювачів, цифрових сигнальних процесорів і програмованих логічних інтегральних схем) для реалізації алгоритмів ЦОС дозволяє зменшити масу, габарити і вартість фазових ІВС, енергоспоживання, істотно підвищити їх надійність функціонування, характеристики точності.

**Вибрані історичні факти.** Деякі джерела і публікації засвідчують, що фазометрія почала активно розвиватися понад 100 років тому, водночас більш давні джерела підтверджують той факт, що ідея і суть фазових вимірювань мають більш глибокі історичні корені. Ще під час розвитку кутометрії були закладені фундаментальні теоретичні положення, які дають розуміння базових ідей і принципів фазометрії.

Основу розуміння природи фазових вимірювань становлять геометричні об'єкти – плоский та просторовий кути. Активне вивчення і застосування фазового методу для фізичних і технічних вимірювань почалося наприкінці ХІХ – початку ХХ ст. [3.13]. У цей період, за відсутності спеціальної фазовимірювальної апаратури, розробляються електромеханічні фазометри. Створення перших у світі стрілкових електродинамічних та феродинамічних

фазометрів (1894 – 1906 рр.) пов'язано з іменем видатного російського інженера М.О. Доливо-Добровольського. Розроблені ним прилади призначались для потреб енергетики – вимірювання коефіцієнту потужності  $\cos \varphi$  на промисловій частоті 50 Гц. Роботи з удосконалення електромеханічних фазометрів проводили німецькі учені Тум (Tum J.) та Брюгер (Brueger H.).

На початку ХХ ст. продовжують удосконалюватись електромеханічні фазометри, розробляються осцилографічні методи вимірювання та методи, що ґрунтуються на геометричних уявленнях, наприклад, сумарно-різницевий метод [3.11; 3.12]. Дослідження в галузі радіотехніки привели до відкриття російським ученим Л.І. Мандельштамом у 1900 р. властивості збереження фазових співвідношень між сигналами у разі перетворення їх частоти. Це відкриття мало винятково важливе значення для фазометрії і дозволило згодом розширити частотний діапазон фазових вимірювань шляхом перетворення частоти.

Новий поштовх для розвитку фазометрія отримала у зв'язку з потребою розв'язувати актуальні завдання електротехніки, радіотехніки, і, не в останню чергу, – визначати комплексні опори як функції частоти для електричних та радіотехнічних кіл. На цьому етапі активно розвиваються осцилографічні способи вимірювання фазових зсувів сигналів, прикладом яких є спосіб фігур Ліссажу. Значний внесок у розроблення цього способу зробив німецький дослідник Зеннек (Zenneck G.).

Продуктивною також видалась ідея використання у фазометрії векторних співвідношень типу сума – різниця. Оснований на цій ідеї спосіб вимірювання фазових зсувів сигналів запропонував у 1922 р. С. Міхалке (Mikhalke G). Цього ж року з'явилося повідомлення про розроблення одного з перших електронних фазометрів на тріоді – фазометра Ф. Траутвайна (Trautwein F.).

Стрімкий розвиток радіотехнічних та радіонавігаційних систем стимулював подальший розвиток фазометрії. Потреба у підвищенні точності вимірювання до  $1^\circ - 3^\circ$  в широкому діапазоні частот спонукала до розроблення у 30-х роках минулого сторіччя компенсаційного методу вимірювання фазових зсувів сигналів. Перші компенсаційні фазометри запропоновано й розглянуто в працях відомих радянських та зарубіжних учених – Л.І. Мандельштама, М.Д. Папалексі, К.П. Широкова, Д. Моррісона (Morrison J.F.), В.О. Арутюнова та ін.

Значний внесок у галузь прикладного використання фазових співвідношень у навігації, радіозв'язку та радіотелеграфії, радіодалекометрії тощо в довоєнні роки зробили відомі радянські вчені М. О. Бонч-Бруєвич, Л. І. Мандельштам, М. Д. Папалексі, О. О. Пістолькорс, А. І. Берг, Ю. Б. Кобзарьов, В. І. Сіфоров та ін.

У повоєнні роки прискоренню розвитку фазометрії сприяли успіхи електроніки та радіотехніки, розроблення та удосконалення радіонавігаційних систем тощо. За цих умов особливо актуальним стає питання метрологічного забезпечення фазовимірювальних приладів. Принципи побудови калібраторів



фазових зсувів сигналів одним з перших розглянув У. Казнер (Kasner E.J., 1949).

З огляду на порівняно високий рівень складності фазові вимірювання тривалий час вважались унікальними. Серійно випускати фазометри почали тільки у 50-ті роки ХХ ст. Випуск одного з перших серійних фазометрів – фазометра типу М-901 американської фірми “Максон інструментс” – було розпочато у 1956 р. Прилад забезпечував вимірювання фазових зсувів гармонічних сигналів з основною похибкою близько  $0,1^\circ$  у діапазоні частот (20-20000) Гц. В основу цієї розробки покладено результати досліджень Д. Крітца.

Розвиток фазометрії у 60-90-ті роки характеризується переходом від аналогових до цифрових методів вимірювання [3.14; 3.28; 3.42; 3.47], значним розширенням динамічного і частотного діапазонів досліджуваних сигналів, підвищенням точності та чутливості пристроїв вимірювання і відтворення фазових характеристик сигналів. Застосована в цей час ідеологія створення фазовимірювальної апаратури ґрунтувались на використанні моделі гармонічних сигналів. На початку 60-х років ХХ ст. американський дослідник Г. Піл (Pihl G.E.) розробив спосіб вимірювання на основі перетворення фазового зсуву сигналів у часовий інтервал з його наступним числовим кодуванням. Такий підхід виявився досить продуктивним і на тривалий час визначив напрям досліджень у фазометрії щодо вимірювання фазових зсувів гармонічних сигналів. Загалом розвиток фазометрії у 60 – 90-ті роки характеризується переходом від аналогових до цифрових методів вимірювання, розробленням методів і засобів вимірювання фазових характеристик сигналів за наявності завад.

Поширення цифрових методів та засобів обробки інформації [3.18; 3.53; 3.57] сприяло тому, що сучасні методи ЦОС стали домінуючими у вимірювальній техніці. Ці методи дозволили не тільки розширити частотний та динамічний діапазони сигналів у фазометрії, але й суттєво підвищити точність та зменшити час вимірювання фазових характеристик сигналів за наявності завад, розширити діапазон однозначного вимірювання фазових зсувів сигналів за межі інтервалу  $[0, 2\pi)$ .

Другим напрямом розвитку фазометрії у 60 – 70-ті роки був пошук методів та засобів вимірювання фазових характеристик гармонічних сигналів за наявності завад. Значний внесок у розроблення теорії та практики таких вимірювань зробили відомі радянські вчені Б. Р. Левін, В.Б. Пестряков, В.І. Тихонов та ін.

У 50 – 70-роки значний внесок у розвиток відчизняної фазометрії в Радянському Союзі було зроблено колективами Всесоюзного науково-дослідного інституту фізико-технічних і радіотехнічних вимірювань та Всесоюзного науково-дослідного інституту метрології, і в Україні – колективами кафедр інформаційно-вимірювальних систем і теоретичних основ радіотехніки Київського політехнічного інституту, теоретичних основ

радіотехніки Вінницького політехнічного інституту, лабораторії фазометрії Київського заводу «Точелектроприлад» та ін. Як результат проведених досліджень було створено зразкову апаратуру відтворення кутів фазових зсувів між сигналами в широкому діапазоні частот від інфранизьких до надвисоких, що було необхідно для забезпечення фазових вимірювань та ряд прецизійних фазометрів.

Натепер досягнуто значних успіхів у напрямку розвитку фундаментальних і прикладних досліджень цього виду вимірювань. Суттєвий вплив на розвиток фазових вимірювань та їх практичне застосування мали роботи, виконані у 60 – 90-ті роки минулого століття під керівництвом відомих радянських учених М.П. Бражнікова, Ю.М. Вешкурцева, І. М. Вішенчука, В.М. Волкова, О.П. Галахової, М.С. Жиліна, Ш.Ю. Ісмаїлова, А.Ф. Котюка, Є.Д. Колтіка, С.О. Кравченка, С.М. Маєвського, В.Д. Молодова, Л.Я. Мизюка, А.Д. Ніженського, П.П. Орнатського, В.Б. Пестрякова, С.І. П'ятіна, О.П. Похілюка, Ю.О. Скрипника, П.М. Сопрунюка, В.М. Сапельнікова, П.Т. Смирнова, М.К. Чмиха та ін. Значний внесок у розв'язання практичних завдань фазометрії та в її прикладне застосування зробили Є.К. Батуревич, В.Г. Баженов, В.І. Гупалова, Р.Л. Драбкін, В.Я. Суп'ян, І.В. Троцишин, В.А. Хомяк, О.Б. Шарпан та ін.

Проте в більшості праць з цифрової фазометрії [3.14; 3.27; 3.58; 3.59; 3.67] надавалась перевага вузькотехнічному підходу, що зумовлено обмеженими можливостями елементної бази і не дозволяло реалізувати переваги фазового методу у повному обсязі. Такий підхід потребує додаткових перетворень (наприклад, фазовий зсув – часовий інтервал, або фазовий зсув – електрична напруга) і застосування до отриманих величин елементарних цифрових методів обробки та подання результатів вимірювання. Часовий інтервал і напруга належать до лінійних величин, що начебто “виправдовує” застосування методів, які широко використовуються в статистичному аналізі випадкових величин. У зв'язку з цим у фазометрію ввели і закріпили розподіли ймовірності та статистичні характеристики (математичне сподівання, середньоквадратичне відхилення, характеристичні функції тощо) із статистичного аналізу випадкових величин, які не враховують циклічної природи випадкових кутових величин [3.65]. Часто це призводить до недостовірних результатів і обмежує можливість побудови загальної теорії статистичної фазометрії.

Слід згадати й іншу важливу проблему. Останнім часом значно розширився клас сигналів – носіїв фазової інформації, які досліджуються методами фазометрії. До них належать і аналогові негармонічні сигнали, і дискретні сигнали. Брак чітких визначень фазових характеристик таких сигналів зумовлює певні методологічні труднощі щодо їх визначення та інтерпретації.

З огляду на вищенаведене автори вважали за необхідне, в першу чергу, запропонувати єдиний методологічний підхід до розв'язання питань як аналогової, так і дискретної фазометрії. Його теоретичне підґрунтя становить

перетворення Гільберта та дискретне перетворення Гільберта сигналів, яке існує для класу сигналів, значно ширшого за гармонічні, разом зі статистичними методами обробки результатів кутових вимірювань. Саме дискретне перетворення Гільберта, орієнтоване на цифрову обробку сигналів, дозволяє прослідкувати розвиток фази сигналів, отримати множину дискретних значень фазових характеристик, в тому числі фазових зсувів сигналів як вихідну інформацію, до якої можна застосувати статистичні методи кутових вимірювань.

Поєднання дискретного перетворення Гільберта та статистичних методів обробки кутових даних забезпечує нову якість і нові можливості щодо розв'язання нагальних питань фазометрії. Такі можливості розкрито на прикладах фазової ІВС на основі ковзного дискретного перетворення Гільберта, фазового виявлення радіоімпульсних сигналів, фазового вимірювання при ультразвуковій дефектоскопії, розвитку кумулятивного різночастотного фазового методу вимірювання відстані, фазових методів обробки сигналів на основі числової системи залишкових класів (див. четвертий розділ).

Запропонована методологія дозволила обґрунтувати використання у дискретній фазометрії ряду вибіркової статистичних характеристик відомих у теорії статистичних кутових вимірювань, зокрема вибіркової кругової середньої та дисперсії, тригонометричних моментів, специфічних законів розподілу ймовірності випадкових кутів тощо і на цій основі розвинути теорію похибок фазових вимірювань.

### 3.2. Основні терміни та визначення детермінованої фазометрії

У широкому розумінні *фаза системи* – це певний стан системи в певний момент часу. Поняття фази у вимірювальній техніці визначається класом сигналів, для яких характерною властивістю є циклічність. Детермінована фазометрія займається дослідженням фазових співвідношень для гармонічних сигналів. Гармонічні коливання досліджував ще Піфагор у VI ст. до н.е. Тоді він установив зв'язок між періодичністю синусоїдного коливання, яке відповідає певному тону музичного звуку, і довжиною та силою натягування струни музичного інструмента. Він вважав, що сутність гармонії може бути виражена числами. Аналогічний підхід Піфагор застосував і до опису гармонічного руху небесних тіл, назвавши його “музикою сфер”.

**Гармонічні сигнали.** Гармонічні коливання спостерігаються в багатьох фізичних явищах таких, наприклад, як коливання маятника, коливання підвішеної на пружині гирі, коливання електричного струму в  $LC$ -контурі тощо. Природно, що і вивчення багатьох явищ та процесів спиралось на дослідження їх математичної моделі у вигляді гармонічних коливань.

Видатний французький математик і фізик Ж. Фур'є обґрунтував розклад періодичних функцій у ряд за ортогональним базисом тригонометричних

функцій і у своїй праці “Аналітична теорія тепла” (1882 р.) по суті, заклав підвалини теорії тригонометричних рядів і сучасної спектрометрії.

Нині гармонічний аналіз широко застосовують у різних галузях науки та техніки – фізиці, теорії зв’язку та передачі сигналів, теорії інформації, автоматичі, радіотехніці, а одним з найбільш інформативних параметрів гармонічних сигналів є їх фаза. Саме цей параметр відображає особливості циклічної природи досліджуваних явищ та предметів, акумулює в собі ознаки і минулого, і поточного і майбутнього розвитку, передає інформацію про розвиток процесів у часі та просторі.

У фазометрії використовують такі властивості гармонічного коливання:

- 1) *інваріантність* виду функції під час лінійних перетворень;
- 2) *періодичність* зміни за часовими чи просторовими аргументами;
- 3) *мультиплікативність* – у разі перемноження коливань їх аргументи додаються (віднімаються).

Ці властивості роблять гармонічне коливання однією з основних моделей щодо її застосування у дослідженні різних циклічних явищ.

Математичний запис гармонічного сигналу, що змінюється в часі, має вигляд

$$u_0(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t \pm \varphi_0), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (3.1)$$

де  $t$  – поточний час;  $U_0 > 0$  – амплітуда коливання;  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$  – початкова фаза;  $f_0 > 0$  – циклічна частота,  $f = T^{-1}$ ;  $T$  – період коливання.

Двовимірний гармонічний сигнал, що змінюється в часі і поширюється у просторі вздовж координати  $x$ , задається виразом

$$u_1(t, x) = U_1 \cos(2\pi f t - kx \pm \varphi_1), \quad x, t \in (-\infty, \infty), \quad (3.2)$$

де  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове число, що визначає просторовий період коливання;  $\lambda = \frac{V}{f}$  – довжина хвилі;  $V$  – фазова швидкість хвилі в середовищі поширення вздовж координати  $x$ .

**Основні терміни та визначення.** Для гармонічних сигналів у вимірювальній техніці використовують такі поняття: *фаза*; *початкова фаза*; *фазовий зсув сигналів*; *час запізнення*. Далі (див. п’ятий розділ) вводиться і обґрунтовується поняття «*фазова характеристика*» для інших класів сигналів.

Відомо [3.11, 3.13], що під фазою гармонічного сигналу розуміють аргумент гармонічної функції, тобто лінійну функцію часу  $\Phi_0(t) = 2\pi f_0 t \pm \varphi_0$  для сигналу (3.1), або  $\Phi_1(t) = (2\pi f t - kx \pm \varphi_1)$  – для сигналу (3.2). В останньому випадку фаза коливання залежить і від часу спостереження, і від положення точки спостереження у просторі. У певному розумінні поняття «фаза» в цьому

випадку об'єднує час і простір. Початковою фазою сигналу (3.2) є значення фази за умови  $t = 0$ ,  $x = 0$ .

До цього часу щодо застосування фазового методу вимірювань на практиці значний інтерес становив *фазовий зсув сигналів*. ГОСТ 16465–70 «Сигналы радиотехнические измерительные. Термины и определения» [3.19], який регламентує терміни та визначення в галузі вимірювальних радіотехнічних сигналів, що отримують за допомогою вимірювальних генераторів струму та напруги, дає таке визначення цієї величини: *фазовий зсув – це модуль різниці початкових фаз двох гармонічних сигналів однієї частоти*. Для пари сигналів (3.1), (3.2) і  $x = 0$  фазовий зсув визначають як

$$\varphi = |\varphi_1 - \varphi_0|.$$

Найчастіше  $\varphi_0 = 0$ , тоді  $\varphi = |\varphi_1|$ . Зазначимо, що різниця фаз двох коливань однакової частоти не залежить від вибору початку відліку часу, але без упровадження спеціальних заходів фазовий зсув сигналів однозначно визначається лише в інтервалі  $[0, 2\pi)$ .

Із фазовим зсувом пов'язаний інший параметр – *час запізнювання*. ГОСТ 16465–70 подає таке його визначення: *час запізнення – це параметр, що дорівнює значенню зсуву в часі одного із сигналів, за якого досягається його тотожна рівність другому сигналу з точністю до постійного множника та постійних доданків*. Відповідно до цього означення для сигналів (3.1), (3.2) час запізнювання  $\tau$  визначають рівністю

$$u_0(t) = a_1 u_1(t - \tau) + a_2, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

де  $a_1$ ,  $a_2$  – числові коефіцієнти. Для гармонічних сигналів параметри  $\varphi \in [0, 2\pi)$  і  $\tau \in [0, T)$  пов'язані співвідношенням

$$\varphi = 2\pi \frac{\tau}{T}. \quad (3.3)$$

Формула (3.3) показує відносний характер фазового зсуву: значення  $\varphi$  не залежить від масштабу часу за умови, що  $\tau$  і  $T$  мають одну й ту саму одиницю виміру.

Якщо  $\varphi = 0$ , то коливання (3.1) і (3.2) називають синфазними, у випадку  $\varphi = \pi$  – протифазними, а якщо  $\varphi = 0,5\pi$  або  $\varphi = 1,5\pi$ , – квадратурними.

З виразу (3.3) випливає, що одиницею виміру фазових зсувів, як і плоских кутів, також може бути взято радіан. Куту  $2\pi$  радіанів у градусній мірі відповідає  $360^\circ$ . Тому для переходу від радіанів до градусів у рівнянні (3.3) достатньо замість множника  $2\pi$  взяти множник  $360$ .

Зміст поняття «фаза гармонічного сигналу» можна розкрити таким чином. Подамо гармонічний сигнал, наприклад (3.1), двома квадратурними складовими

$$u_0(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) = U_c \cos(2\pi f_0 t) + U_s \sin(2\pi f_0 t), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (3.4)$$

де  $U_c = U_0 \cos(\varphi_0)$ ,  $U_s = U_0 \sin(\varphi_0)$  – амплітуди квадратурних компонент сигналу;  $U_0 = \sqrt{U_c^2 + U_s^2}$  – амплітуда сигналу. Оскільки сигнал (3.4) подається двома складовими, отриманими за допомогою зміни амплітуд косинусної і синусної компонент, часто основою графічного зображення такого сигналу обирають дві ортогональні осі, які символізують два згадані гармонічні коливання (наприклад, вісь  $x$  – синусне коливання, а вісь  $y$  – косинусне). По осі  $x$  відкладають  $U_s$ , а по осі  $y$  –  $U_c$ . Відзначимо, що таке графічне зображення не дає наочного уявлення про зміни сигналу (фази сигналу) у часі.

Під час дослідження фази сигналу, що змінюється в часі, більш природно зображати сигнал вектором у тривимірному просторі, одна з координат якого показує час (або фазу). Для цього будують комплексний сигнал виду

$$\dot{i}(t) = U_0 e^{i(2\pi f_0 t - \varphi_0)} = U_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) + j U_0 \sin(2\pi f_0 t - \varphi_0) = U_y(t) + i U_x(t), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Використаємо аналогію графічного зображення кута більшого за  $2\pi$  (див. підрозділ 1.4, рис. 1.22) для аналізу досліджуемого сигналу.

Вектор, який відповідає сигналу  $\dot{i}(t)$ , описує у тривимірному просторі  $x, y, t$  гвинтову лінію з координатами:  $x(t) = U_x(t)$ ,  $y(t) = U_y(t)$ ,  $t$ . Приклад такої кривої зображено на рис. 3.1.

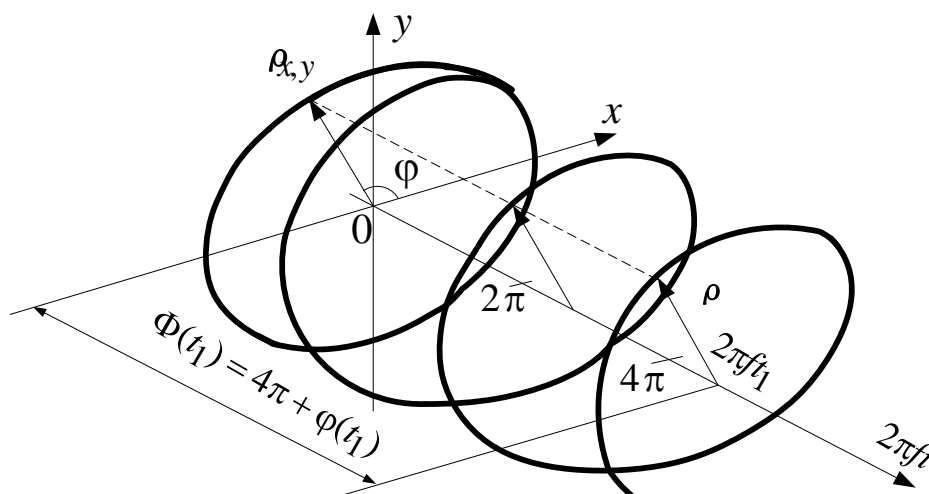


Рис. 3.1. Графічне зображення процесу накопичення фази гармонічного сигналу

На цьому рисунку фазу сигналу відраховано від осі  $Oy$  у напрямі проти годинникової стрілки, а  $\varphi_0 = 0$ ; на рис. 3.1 гвинтову лінію використано для подання геометричної інтерпретації кутів, більших за  $2\pi$ . Застосування геометричних графічних образів досліджуваних сигналів дозволяє у певній мірі поглибити розуміння природи фазових вимірювань.

Розвиток двовимірною гармонічного сигналу у просторі й часі умовно подається складним поступально-обертальним рухом  $\dot{i}(t)$ . Для моменту  $t = t_1$

на рис. 3.1 показано відповідне значення фази  $\Phi(t_1)$ . Це значення складається з цілої частини –  $4\pi$ , тобто частини фази, яка відповідає цілій кількості фазових циклів, нагромадженій за час  $[0, t_1]$ , і дробової –  $\varphi(t_1)$ , яка відповідає поточній фазі сигналу в межах інтервалу  $[0, 2\pi)$ .

Якщо гармонічні коливання мають близькі за значенням частоти, наприклад

$$\begin{aligned} u_0(t) &= U_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0), \quad t \in (-\infty, \infty); \\ u_1(t) &= U_1 \cos(2\pi(f_0 + \Delta f(t))t - \varphi_1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

де  $|\Delta f(t)| \ll f_0$ , то фазовий зсув між сигналами (3.5), по-перше, залежить від початку відліку, по-друге, зі зміною часу нагромаджується, змінюється і може значно перевищувати значення  $2\pi$ . Нагромаджені за певний час від моменту початку спостереження  $t_{\pi}$  до поточного моменту часу  $t > 0$  фазові зсуви між близькими за частотою гармонічними сигналами називають *кумулятивними фазовими зсувами* (КФЗ). Для сигналів (3.5) КФЗ визначають так:

$$\Phi(t) = 2\pi \int_{t_{\pi}}^{t_{\pi}+t} \Delta f(\tau) d\tau - \varphi_1 + \varphi_0, \quad (3.6)$$

де  $t_{\pi} + t$  – поточний час спостереження. У випадку  $\Delta f(\tau) = const$  маємо  $\Phi(t) = 2\pi \Delta f t - \varphi_1 + \varphi_0$ .

Графічно процес утворення і зміни КФЗ сигналів у часі показано на рис. 3.2, на якому  $\Phi_0, \Phi_1$  – відповідно фази коливань  $u_0(t), u_1(t)$ .

За умови забезпечення визначення неперервної зміни фаз  $\Phi_1(t)$  та  $\Phi_0(t)$  можна отримати поточне значення їх різниці –  $\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_0(t)$ . Процес утворення КФЗ  $\Phi(t_1) > 2\pi$  для нагромадження фази на інтервалі часу  $[0, t_1]$ , показано на рис. 3.2.

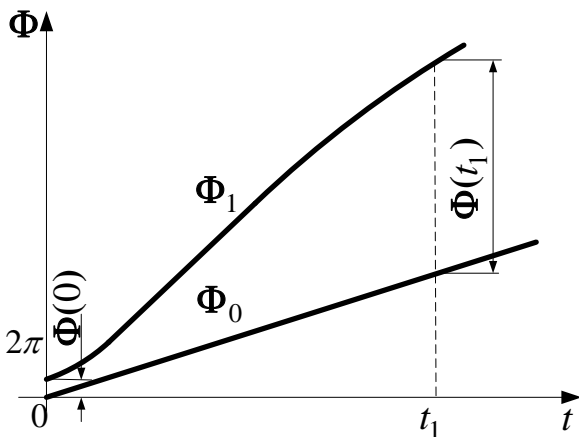


Рис. 3.2. Графік зміни фаз сигналів у часі та утворення КФЗ

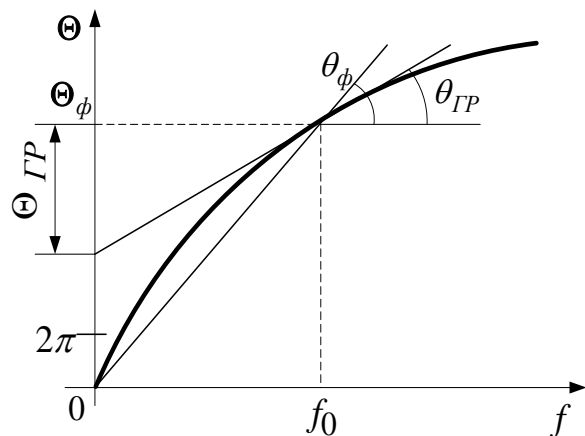


Рис. 3.3. Фазочастотна характеристика чотириполосника

Отже, якщо фази сигналів відомі на певному інтервалі часу  $[t_{\Pi}, t_{\Pi} + t]$ , на цьому інтервалі можна визначити поточне значення фазового зсуву між гармонічними сигналами, частоту, миттєву частоту гармонічних сигналів після їх кутової модуляції, параметри кутової модуляції сигналу тощо.

**Фазові характеристики чотириполіусників.** У багатьох випадках досліджувані об'єкти контролю можна зобразити чотириполіусниками. Для оцінювання затримки сигналів у чотириполіусниках з постійними в часі параметрами в певному діапазоні частот використовують більш складні характеристики – *фазовий та груповий час запізнювання* сигналів [3.11]. Лінійну систему з постійними в часі параметрами можна розглядати як чотириполіусник з комплексним коефіцієнтом передачі

$$\dot{K}(f) = |\dot{K}(f)| \exp(i\Theta(f)),$$

де  $|\dot{K}(f)|$ ,  $\Theta(f)$  – відповідно амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) та фазо-частотна характеристика (ФЧХ) досліджуваного об'єкта контролю, зображеного у вигляді чотириполіусника. Функцію  $\Theta(f)$  зображено на рис. 3.3.

Груповий час запізнювання визначають за нахилом дотичної до ФЧХ на певній фіксованій частоті

$$\tau_{\text{гд}}(f_0) = \left. \frac{d\Theta(f)}{df} \right|_{f=f_0}.$$

На частоті  $f_0$  (рис. 3.3) маємо:  $\tau_{\text{гд}}(f_0) = \text{tg } \theta_{\delta} = \frac{\Theta_{\delta}(f_0)}{f_0}$ , де  $\theta_{\text{гр}}$  – кут нахилу дотичної до ФЧХ до осі абсцис у точці  $f = f_0$ . Фазовий час запізнювання визначається через фазовий зсув  $\Theta_{\delta}(f_0)$ , нагромаджений під час поширення сигналу в нелінійному чотириполіуснику під час зміни частоти від  $f = 0$  до  $f = f_0$ :

$$\tau_{\delta}(f_0) = \frac{\Theta_{\delta}(f_0)}{f_0}.$$

На частоті  $f_0$  (рис. 3.3) маємо:  $\tau_{\delta}(f_0) = \text{tg } \theta_{\phi} = \frac{\Theta_{\phi}}{f_0}$ , де  $\theta_{\phi}$  – кут, який визначається повним фазовим зсувом  $\Theta_{\phi}$ . Для середовищ, які можна зобразити лінійними чотириполіусниками, фазова характеристика є лінійною функцією. В цьому випадку  $\Theta_{\text{гд}}(f) = \Theta_{\delta}(f)$ .

### 3.3. Фізичне обґрунтування фазового вимірювального перетворення

Основною метою цього підрозділу є ілюстрація на ряді прикладів широких можливостей фазового методу у фізичному експерименті, дослідженні різних



фізичних величин. У разі виконання фазовимірювального перетворення фізичної величини  $v$  (наприклад, довжини, відстані, координат, затримки, фізичних параметрів матеріалів і виробів тощо) у фазовий зсув  $\varphi(v)$  між двома когерентними гармонічними сигналами – опорним (3.1) (для опорного сигналу  $\varphi_0 = 0$ ) та двовимірним вимірювальним

$$u_1(t, v) = U_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1(v)) = U_c(v) \cos(2\pi f_0 t) - U_s(v) \sin(2\pi f_0 t), \quad t \in [0, T_c], \quad (3.7)$$

містить інформацію про  $v$ . У рівнянні (3.7)  $U_c(v) = U_1 \cos(\varphi_1(v))$ ,  $U_s(v) = U_1 \sin(\varphi_1(v))$  – квадратурні компоненти сигналу;  $U_1 = \sqrt{U_c^2(v) + U_s^2(v)}$  – амплітуда сигналу.

В основу реалізації фазовимірювального перетворення покладено використання сукупності різних фізичних законів, явищ та ефектів. Розглянемо деякі з них.

### 3.3.1. Механічні та електричні явища та ефекти

**Фазовий зсув або затримка.** Затримка в часі під час передавання гармонічного коливання частотою  $f$  на відстань  $D < \lambda$  приводить до фазового зсуву сигналів на величину

$$\varphi(D) = \left( \frac{D}{V} 2\pi f \right) (\text{mod } 2\pi) = \left( \frac{D}{\lambda} 2\pi \right) (\text{mod } 2\pi), \quad (3.8)$$

де  $V$  – швидкість зміни фази коливання під час його передавання через середовище. Цю властивість широко використовують, наприклад, для вимірювання відстаней, мікро- і макро переміщень та координат об'єктів [3.11; 3.29; 3.36; 3.40; 3.43; 3.50] із застосуванням електромагнітних та оптичних випромінювань, товщини виробів [3.66] із використанням акустичних хвиль, прецизійного вимірювання швидкості ультразвукових хвиль [3.68], температури [3.51] із застосуванням акустичних хвиль.

Одна з проблем, пов'язаних з підвищенням роздільної здатності і точності фазових вимірювань, – однозначність результату вимірювань. Дійсно, виходячи з рівняння (3.8), для підвищення роздільної здатності вимірювання відстані необхідно зменшувати  $\lambda$ , тобто збільшувати частоту коливань  $f$ . Це, в свою чергу, потребує збільшення діапазону однозначного вимірювання фазових зсувів сигналів за межі півінтервалу  $[0, 2\pi)$ , тобто вимірювання фазових зсувів вигляду  $\Phi = 2\pi n + \varphi$ , де  $n$  – ціле число,  $n \in \mathbb{N}$ . Одним з відомих методів усунення неоднозначності, тобто визначення  $n$ , є кумулятивний різночастотний метод [3.29; 3.35; 3.52], який передбачає: вимірювання фазових зсувів гармонічних сигналів на  $m$  частотах  $f_1, \dots, f_m$ ; формування множини вимірних значень фазових зсувів сигналів  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_m\}$ ,  $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ ;

обчислення за цими даними значення  $n$ . Визначення  $n$  можливе за умови формування однозначного результату хоча б на одній з робочих частот, наприклад, на низькій частоті  $f_1$ , для якої виконується умова  $D_{\max} < \lambda_1$ , де  $\lambda_1$  – довжина хвилі на цій частоті (сигнал з цією частотою може реалізуватись фізично, або утворюватись штучно як сигнал різницевої частоти, наприклад,  $f_j - f_{j-1}$ ). Таким способом можна отримати високу точність, яка властива фазовим вимірюванням з малою довжиною хвилі, і широкий діапазон вимірювання, що забезпечується вимірюванням з великою довжиною хвилі. Суть кумулятивного різночастотного методу полягає у визначенні кількості повних фазових циклів величиною  $2\pi$  у КФЗ  $\Phi(t)$  за рахунок проведення додаткових фазових вимірювань  $\varphi_1$  на допоміжній (одній чи декількох) низькій частоті  $f_1$ . Кількість повних фазових циклів, що міститься у КФЗ сигналів високої частоти  $f_m > f_1$  визначають за формулою

$$n = \left[ \frac{f_m \varphi_1}{f_1 2\pi} - \frac{\varphi_m}{2\pi} + 0,5 \right]. \quad (3.9)$$

Процес розв'язання задачі однозначності вимірювання фазових зсувів можна проілюструвати графічно на рис. 3.4.

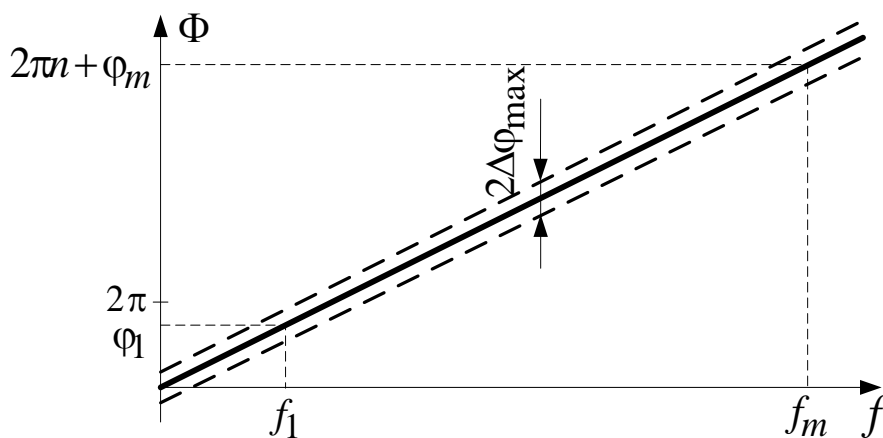


Рис. 3.4. Графічне пояснення розв'язання задачі однозначності фазових вимірювань

З урахуванням дії завад і шумів результати фазових вимірювань містять похибки вимірювання  $\pm \Delta\varphi$  (на рис. 3.4  $\Delta\varphi_{\max}$  – максимальне значення похибки), які мають випадковий характер. Тому під час визначення  $n$  завжди існує ймовірність отримання неправильного результату вимірювань або задача усунення неоднозначності результату вимірювань. Для обґрунтування правильного результату вимірювань фазового зсуву виникає задача однозначного розв'язання. Умову, за якої задачу однозначності результату вимірювань розв'язують без помилок, можна подати виразом

$$\left[ \frac{\Delta\varphi_1 f_m}{2\pi f_1} - \frac{\Delta\varphi_m}{2\pi} + 0,5 \right] = 0, \quad (3.10)$$

де  $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_m$  – похибки вимірювання фазових зсувів сигналів відповідно на низькій і високій частотах.

З виразу (3.10) видно, що збільшення різниці між значеннями частот збільшує ризик порушення цієї умови, отже, збільшує ризик отримання результату  $n$  з грубими помилками. Тому для визначення великих значень  $\Phi$  потрібно вимірювати фазові зсуви на проміжних частотах  $f_j$ ,  $f_1 < f_j < f_m$  і виконувати послідовно перерахунок результатів вимірювань однієї частоти на іншу (від меншої частоти до більшої і навпаки [3.52]).

**Ефект Доплера** [3.64] полягає у зсуві частоти прийнятого сигналу в разі взаємного переміщення випромінювача і приймача (або в разі відбиття від об'єкта, що рухається відносно випромінювача). Якщо, наприклад, приймач і джерело пружної хвилі переміщуються відносно нерухомого середовища зі швидкостями  $V_{\Pi}(t)$  та  $V_{\text{д}}(t)$  відповідно під кутами  $\varphi_{\Pi}(t)$  та  $\varphi_{\text{д}}(t)$  до лінії поширення хвилі, то приймач фіксує сигнал з частотою

$$f_{\Pi}(t) = f(t) \frac{1 - \frac{V_{\Pi}(t)}{V} \cos \varphi_{\Pi}(t)}{1 - \frac{V_{\text{д}}(t)}{V} \cos \varphi_{\text{д}}(t)} \quad (3.11)$$

де  $f, V$  – відповідно частота і швидкість хвилі в нерухомому середовищі.

Доплерівський зсув частоти можна перераховувати на певному інтервалі часу у відповідне значення КФЗ сигналів:

$$\Phi(t) = \int_0^t (f_{\Pi}(\tau) - f(\tau)) d\tau. \quad (3.12)$$

Використовуючи ефект Доплера розробляють ультразвукові витратоміри, вимірювачі швидкості кровообігу [3.66] і вимірювальні прилади та системи іншого призначення.

**Явище резонансу** в  $LC$  - контурах може бути використано для реалізації фазового методу вимірювання мікропереміщень, деформацій. Схему перетворення деформації у фазовий зсув гармонічних сигналів показано на рис. 3.5.

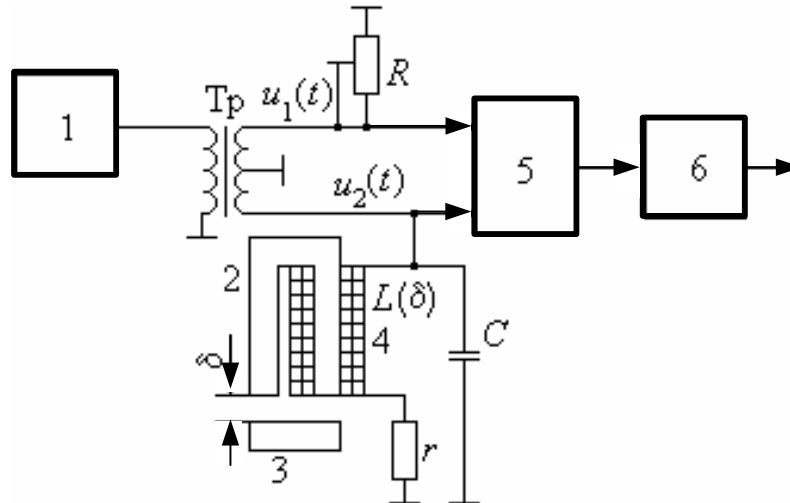


Рис. 3.5. Схема перетворювача мікропереміщень  $\delta$  у фазовий зсув сигналів за допомогою резонансного контура

Напруга синусоїдного генератора 1 через трансформатор  $T_p$  симетрично подається до резистора  $R$  і паралельного  $LC$ -контура ( $r$  - внутрішній опір котушки індуктивності). Первинним вимірювальним перетворювачем є котушка індуктивності 4, яка має нерухому 2 і рухому 3 частини магнітопроводу. Індуктивність  $L(\delta)$  котушки нелінійно залежить від вимірюваної величини  $\delta$ , яка визначає відстань між частинами 2 і 3 магнітопроводу:

$$L(\delta) = \frac{\mu_0 \mu S W^2}{(1 - 2\delta) + 2\delta \mu},$$

де  $\mu_0$ ,  $\mu$  - відповідно магнітна постійна і магнітна проникність магнітопроводу котушки;  $S$ ,  $l$  - відповідно площа перетину і довжина магнітопроводу;  $W$  - кількість витків котушки індуктивності.

Параметри контура підбирають таким чином, щоби для  $\delta = 0$ , частота резонансу контура збігалася з частотою генератора 1. У цьому початковому режимі роботи вихідні напруги  $u_1(t)$  та  $u_2(t)$  - синфазні. Регулюванням змінного резистора  $R$  вибираються рівні значення амплітуд цих напруг.

Зі збільшенням зазору індуктивність  $L(\delta)$  зменшується, отже збільшується і резонансна частота контура. Фазочастотна характеристика резонансного контура має найбільший кутовий нахил у межах смуги прозорості. Отже, в цьому випадку частота напруги генератора 1 не збігається з новою резонансною частотою контура, що приводить до появи додаткового фазового зсуву між сигналами  $u_1(t)$  та  $u_2(t)$ :

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg} \left\{ 2\pi f \frac{\left(1 - 4\pi^2 f^2 L(\delta) C\right) L(\delta) - Cr^2}{r} \right\}. \quad (3.14)$$

Фазовий зсув  $\Delta\varphi$  (3.14) перетворюється фазовим детектором 5 у напругу, яка фільтрується фільтром низьких частот 6.

Такий фазовий спосіб вимірювання малих переміщень забезпечує високу чутливість, яка залежить від добротності резонансного контура.

**Явище вихрових струмів (струмів Фуко)** [3.41; 3.45; 3.60; 3.64] широко використовують у неруйнівному контролі для дослідження електромагнітних властивостей та геометричних розмірів виробів та матеріалів. Це явище пов'язано з виникненням вихрових струмів у провідниках, розміщених у змінному магнітному полі. Взаємодія провідного об'єкта контролю, наприклад прутка 3 (рис. 3.6), зі створеним за допомогою соленоїда 2 змінним магнітним полем урахується внесеною напругою  $\dot{U}_{\text{аі}}$ , яка наводиться вихровими струмами у вимірювальній котушці 1.

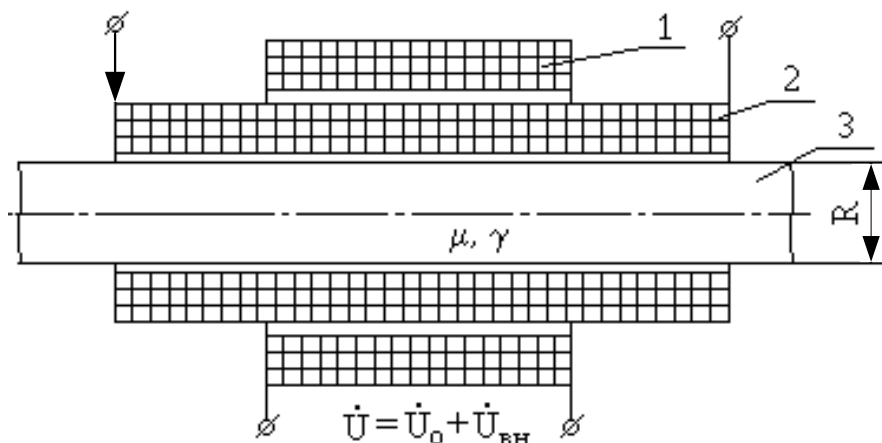


Рис. 3.6. Система «вихорострумівий перетворювач – об'єкт контролю»

Фазовий зсув напруги  $\dot{U}_{\text{ВН}}$  відносно напруги холостого ходу  $\dot{U}_0$  (напруги, що генерується у котушці 1 за відсутності об'єкта контролю) пов'язаний нелінійною функціональною залежністю з різними параметрами – питомою електропровідністю  $\gamma$  та магнітною проникністю  $\mu$  матеріалу прутка, радіусом прутка  $R$ , частотою  $f$  струму збудження, тобто

$$\arg \dot{U}_{\text{аі}} = F(R, \gamma, \mu, f),$$

а також з наявністю тріщин, їх деякими параметрами та орієнтацію у просторі.

Застосовуючи спеціальні методи обробки сигналів [3.45], можна реалізувати селективний контроль і виділити з  $\arg \dot{U}_{\text{аі}}$  інформацію про один з параметрів об'єкта контролю.

### 3.3.2. Електрооптичні явища та ефекти

В оптиці відомо значну кількість ефектів та явищ, які впливають на фазу оптичного сигналу, або на кут поляризації оптичного сигналу. Розглянемо найбільш характерні з них.

**Ефект оптичної активності.** Цей ефект широко застосовують у поляриметрії. Він полягає у здатності багатьох оптично-прозорих речовин повертати площину поляризації плоскополяризованого світла [3.9; 3.51]. Кут повороту площини поляризації для твердих речовин і розчинів становить відповідно:

$$\varphi(d, \lambda) = \varphi_1(\lambda)d,$$

$$\varphi(C, d, \lambda) = \varphi_1(\lambda) \frac{Cd}{100},$$

де  $d$  – товщина шару речовини;  $C$  – концентрація активної сполуки;  $\lambda$  – довжина хвилі оптичного випромінювання;  $\varphi_1$  – питома обертання речовиною площини поляризації світла. Наприклад, для кристалічного кварцу маємо  $\varphi_1 = 201,9 \frac{\text{град}}{\text{мм}}$ , якщо  $\lambda = 0,2265$  мкм, а для кіноварі –  $\varphi_1 = 560 \frac{\text{град}}{\text{мм}}$  при  $\lambda = 0,5893$  мкм. Ця властивість дозволяє перетворювати на кут повороту площини поляризації оптичного сигналу товщину чи концентрацію активної сполуки.

Помітна оптична активність деяких речовин може наводитися за допомогою магнітного поля. Ефект магнітної оптичної активності, або ефект Фарадея [3.48; 3.64] у діамагнітних і парамагнітних речовинах кількісно оцінюється формулою

$$\varphi(H, d, \lambda, t^0) = V(\lambda, t^0) d H \cos \alpha, \quad (3.18)$$

де  $V$  – постійна Верде (питоме магнітне обертання площини поляризації), характеризує магнітне обертання площини поляризації світла;  $H$  – напруженість магнітного поля в активній речовині;  $t^0$  – температура речовини  $^{\circ}\text{C}$ ;  $\alpha$  – кут між напрямом поширення світла і магнітним полем. Із формули (3.18) випливає, що магнітна оптична активність набуває максимального значення, якщо світло поширюється паралельно прикладеному магнітному полю. Площина поляризації повертається праворуч у разі збігу напрямів поширення світла і магнітного поля, і ліворуч у протилежному випадку (спостерігач дивиться в напрямі магнітних силових ліній поля). Цей ефект можна використати для вимірювання напруженості магнітного поля.

Ефекти, пов'язані з явищем подвійного променезаломлення [3.64], полягають у роздвоєнні світлових променів під час проходження через анізотропне середовище, яке зумовлено залежністю показника заломлення від напрямлення електричного вектора світлової хвилі. Коли промінь світла попадає в анізотропне середовище, у ньому виникають дві хвилі із взаємно

перпендикулярними площинами поляризації – звичайна і незвичайна. Швидкість поширення і показник заломлення  $n_0$  звичайної хвилі не залежать від напрямку поширення, в той час, як швидкість поширення і показник заломлення  $n_e$  незвичайної хвилі – залежать. Це явище спостерігається не тільки у природних анізотропних середовищах, але й викликається штучно змінюванням оптичних властивостей кристалів в електричних і магнітних полях.

**Ефект Коттона–Мутона.** Цей ефект пов'язаний з виникненням штучної оптичної анізотропії в ізотропних речовинах під впливом сильного однорідного зовнішнього магнітного поля [3.44; 3.48; 3.64]. Якщо в напрямі, перпендикулярному до вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ , у речовині поширюється промінь світла з довжиною хвилі  $\lambda$ , то виникає подвійне променезаломлення, причому

$$n_0 - n_e = C(t^\circ, \lambda) \lambda H^2,$$

де  $n_0$ ,  $n_e$  – показники заломлення звичайного і незвичайного променів;  $C$  – постійна Коттона–Мутона. Різницю фаз звичайного і незвичайного променів у разі проходження світлом в речовині шляху  $l$  визначають співвідношенням

$$\Delta\varphi(t^\circ, \lambda, H, l) = 2\pi C(t^\circ, \lambda) l H^2. \quad (3.20)$$

Отже, плоскополяризоване світло, внаслідок ефекта Коттона–Мутона в загальному випадку перетворюється в еліптично поляризоване. Як впливає з рівняння (3.20) цей ефект доцільно застосовувати для перетворення у фазовий зсув таких фізичних величин, як напруженість магнітного поля і температура.

**Ефект Керра** [3.44; 3.64]. Цей ефект полягає у виникненні подвійного променезаломлення в оптично-ізотропних речовинах під впливом однорідного електричного поля, яке діє перпендикулярно до напрямку поширення світла. Величину ефекту оцінюють величиною подвійного променезаломлення:

$$n_0 - n_e = nk(t^\circ) E^2, \quad (3.23)$$

де  $n$  – показник заломлення речовини за відсутності зовнішнього електричного поля;  $k$  – постійна Керра;  $E$  – напруженість електричного поля. Різниця фаз звичайного і незвичайного променів під час проходження світлом шляху в речовині  $l$  визначають за аналогією з рівнянням (3.20).

**Ефект Поккельса.** На відміну від квадратичного ефекту Керра ефект Поккельса є лінійним [3.44]. Він полягає у зміні показника заломлення світла у кристалах, розміщених у зовнішньому електричному полі, пропорційно напруженості поля. Цей ефект спостерігається у п'єзоелектричних кристалах. Ефект Поккельса застосовують в оптичних частотних модуляторах,

призначених для зсуву оптичної частоти променів. Розглянемо цей ефект на прикладі оптично частотного модулятора, у якому реалізовано подвійний поперечний ефект Поккельса. Структуру оптично частотного модулятора зображено на рис. 3.7.

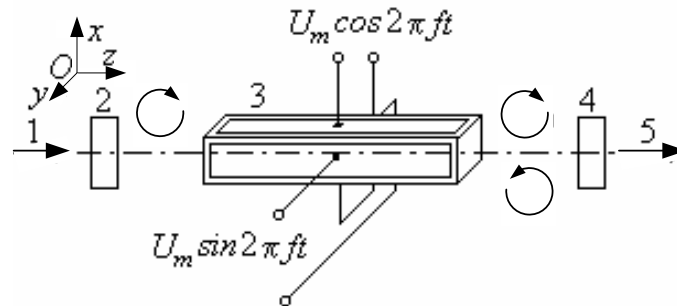


Рис. 3.7. Оптичний частотний модулятор на подвійному поперечному ефекті Поккельса

Оптичний частотний модулятор складається з двох товщиною  $\lambda/4$  пластин 2 і 4 та електрооптичного кристала 3, який в перетині має форму квадрата. Цей кристал можна виготовляти, наприклад, з ніобату літію  $\text{LiNbO}_3$ . Подвійний поперечний ефект Поккельса дає змогу модулювати світло двома незалежними сигналами  $u_x(t) = U_m \cos 2\pi ft$  і  $u_y(t) = U_m \sin 2\pi ft$  в ортогональних напрямках. Ці сигнали прикладено до ортогональних граней кристала в площині, що є перпендикулярною до напрямку  $Oz$  поширення монохроматичного плоскополяризованого випромінювання 1 з довжиною хвилі  $\lambda$ ; пластина 2 товщиною  $\lambda/4$  перетворює плоскополяризоване випромінювання на циркулярно поляризоване, електричні компоненти якого в декартовій системі координат мають вигляд

$$E_x(t) = E \cos 2\pi Ft, \quad E_y(t) = E \sin 2\pi Ft,$$

де  $E$  – амплітудне значення електричної компоненти оптичного коливання;  $F$  – частота оптичного коливання.

Фазовий зсув електричних компонент світла визначається сигналами  $U_x(t)$  і  $U_y(t)$  модуляції і залежить від геометричних і оптичних параметрів кристала:

$$\Delta\varphi(U) = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 \sqrt{\frac{2}{3}} r \frac{l}{d} U, \quad (3.24)$$

де  $l, d$  – відповідно довжина і товщина кристала;  $K_T$  – коефіцієнт тензора деформації оптичної індикатриси;  $n_o$  – показник заломлення кристала для звичайної хвилі.

З аналізу формул (3.23) та (3.24) випливає, що при  $\varphi(U) = 0,5\pi$  світловий промінь на виході кристала 3 має дві однакові за амплітудою компоненти – з частотою  $F$  вихідного оптичного коливання та лівою коловою поляризацією і



різницевою частотою  $F - f$  та правою коловою поляризацією. Якщо  $\varphi(U) = \pi$ , то у вихідному коливанні наявна тільки компонента частотою  $F - f$ .

Чвертьхвильова пластинка 4 перетворює світло з коловою поляризацією на плоскополяризоване, причому коливання з лівою і правою коловими поляризаціями перетворюються на плоскополяризовані в ортогональних площинах коливання.

**Ефект Саньяка.** Використовують цей ефект у надчутливих перетворювачах кута повороту або частоти обертання об'єктів [3.9; 3.16]. Його сутність полягає в тому, що час проходження електромагнітної хвилі нерухомого контура і час проходження електромагнітної хвилі обертового замкненого контура розрізняються. Для ілюстрації ефекту розглянемо спрощену схему кільцевого оптоволоконного інтерферометра, показану на рис. 3.8.

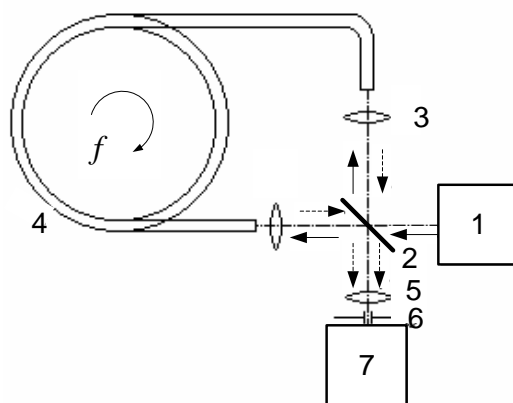


Рис. 3.8. Структура кільцевого оптоволоконного інтерферометра на ефекті Саньяка

Випромінювання лазера 1 вводиться в обидва кінці світловода 4 напівпрозорим дзеркалом 2 та лінзи 3. Світловод 4 намотано у формі котушки, яка обертається з частотою  $f$  навколо своєї осі. Якщо котушка нерухома, два протилежні світлові промені проходять однакові шляхи.

При обертанні котушки внаслідок ефекту Саньяка довжина шляху променя у напрямі обертання збільшується, а другого променя – зменшується. Пучки світла інтерферують на дзеркалі 2 (пунктирні стрілки) і лінзою 5 та діафрагмою 6 спрямовуються на пристрій реєстрації 7. При обертанні тільки котушки 4 між променями світла утворюється фазовий зсув

$$\Delta\varphi(f) = 2\pi \frac{4fSW}{\lambda c} n^2 \alpha_f, \quad (3.25)$$

де  $S$  – площа витка котушки 4;  $W$  – кількість витків котушки;  $\lambda$  – довжина хвилі світла у вільному просторі;  $n$  – показник заломлення речовини світловода;  $c$  – швидкість світла у вільному просторі;  $\alpha_f$  – френелів коефіцієнт захоплення. На базі ефекту Саньяка реалізовано кільцеві лазери з чутливістю до кута повороту в частки кутових секунд [3.9].

**Ефект фотопружності.** Цей ефект [3.64] дає оптичну анізотропію в ізотропних твердих речовинах при механічних напруженнях. Для малих одновісних розтягнень (стискань) справедливе співвідношення Брюстера

$$n_0 - n_e = kP, \quad (3.26)$$

де  $k$  – пружнооптична постійна, або постійна Брюстера;  $P$  – механічне напруження. Різниця фаз звичайного і незвичайного променів під час проходження світлом у речовині шляху  $l$  визначається співвідношенням

$$\Delta\varphi(P, l) = 2\pi \frac{kP}{\lambda} l. \quad (3.27)$$

Цей ефект відображено, наприклад, в поляризаційно-оптичному методі, який зафіксує механічні напруження при дослідженні моделей навантажуваних деталей з оптичнопрозорих матеріалів, в яких відбувається фотоэффект.

**Ефект оптичного гетеродинування.** В оптичних фазових вимірювальних системах застосовують *ефект оптичного гетеродинування* [3.25; 3.54]. Для перенесення фазових співвідношень між сигналами з діапазону частот оптичних сигналів у радіодіапазон. При інтерференції двох хвиль  $E_1 \exp(i(2\pi F_1 t + \varphi_1))$  та  $E_2 \exp(i(2\pi F_2 t + \varphi_2))$ , де  $E_1, E_2$  – напруженості електричних компонент світлових хвиль з частотами відповідно  $F_1$  та  $F_2$ , інтенсивність світла, яка перетворюється пристроєм реєстрації у електричний сигнал, дорівнює

$$I = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(2\pi(F_1 - F_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (3.28)$$

Отже, різницю фазових зсувів оптичних сигналів  $\varphi_1 - \varphi_2$  перенесено на радіосигнал проміжної частоти  $F_1 - F_2 \ll F_1$ . Переваги такого методу полягають в тому, що вимірювання здійснюється на гармонічному сигналі частотою  $F_1 - F_2$  (у гомодинних інтерферометрах – на постійному струмі), що зменшує вплив на результат вимірювання дрейфу нуля оптоелектронних схем, зменшувати вплив повільних флуктуацій фази світлової хвилі, поліпшує лінійність перетворення, визначати без додаткових заходів напрям зміни переміщення, виконує статистичну обробку результатів вимірювання, підвищує роздільну здатність до часток довжини хвилі оптичного випромінювання (для гелієво-неонового лазера з довжиною хвилі  $\lambda = 0,6328$  мкм вимірюванню фазових зсувів оптичних хвиль з роздільною здатністю  $2\pi/100$  рад відповідає роздільна здатність за відстанню 6,328 нм).

Структуру гетеродинного інтерферометра з оптичним частотним модулятором на подвійному поперечному ефекті Поккельса [3.37] показано на рис.3.9.

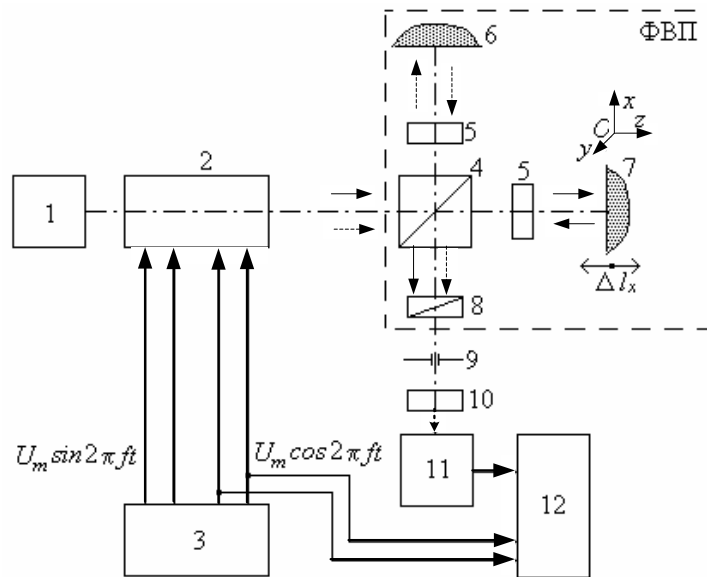


Рис. 3.9. Структура гетеродинного інтерферометра з оптичним частотним модулятором на подвійному поперечному ефекті Поккельса: ФВП – фазовимірювальний перетворювач

В інтерферометрі випромінювання HeNe лазера 1 частотою  $F$  надходить на оптичний частотний модулятор 2, подвійного поперечного ефекта Поккельса і живиться від генератора квадратурних сигналів модуляції 3. Напруга сигналів модуляції вибирається з умови  $\varphi(U) = 0.5\pi$  (див. рівняння (3.24)). Частота сигналів модуляції  $f$  визначає проміжну частоту, за якою вимірюють фазові характеристики оптичних сигналів. Модулятор 2 формує дві ортогональні компоненти плоскополяризованого світла з різними частотами –  $F$  та  $F - f$ , які надходять на ФВП, в якому реалізовано ідею інтерферометра Майкельсона, і який утворено оптичними елементами: поляризаційним світлороздільним кубиком 4,  $\lambda/4$  пластинами 5, опорним 6 і вимірювальним 7 дзеркалами та аналізатором 8. Вимірюваною величиною є переміщення  $\pm \Delta l_x$  дзеркала 7, яке жорстко кріпиться на контрольованому об'єкті. Зміна  $\pm \Delta l_x$  трансформується у зміну фази оптичного сигналу. Поляризаційний кубік розділяє промені світла за поляризацією так, що один промінь частотою  $F$  спрямовується в опорне плече інтерферометра, а другий – частотою  $F - f$  – у вимірювальне. Відбиті від дзеркал 6, 7 промені, внаслідок повороту в просторі їх площин поляризації на кут  $90^\circ$ , а також двократного проходження  $\lambda/4$  пластинами 5 суміщуються у просторі за допомогою кубика 4 і спрямовуються до аналізатора 8. Ці промені лінійно поляризовані і площини їх поляризації лишаються ортогональними, але промені ще не здатні інтерферувати. Їх площини поляризації у просторі суміщуються аналізатором 8, оптична вісь якого напрямлена у просторі під кутом  $45^\circ$  до площин поляризації променів на його вході. Отримана таким

чином інтерферограма через діафрагму 9 і світлофільтр 10 надходить на фотоприймач 11, який перетворює оптичний в електричний сигнал частотою  $f$ .

Зміщення дзеркала 7 уздовж осі  $Oz$  приводить до модуляції оптичної довжини вимірювального плеча інтерферометра, а отже, і до фазової модуляції вихідного сигналу. Сигнал на виході фотоприймача 11 становить

$$u(t, \Delta l_x) = K_0 E \cos\left(2\pi f t \pm \Delta l_x \frac{4\pi}{\lambda} + \varphi_0\right), \quad (3.29)$$

де  $K_0$  – коефіцієнт перетворення сигналу в оптичній частині фазовимірювального перетворювача та в фотоприймачі;  $\varphi_0$  – початкова фаза сигналу, якщо  $\Delta l_x \neq 0$ , то шляхом калібрування інтерферометра через мікропереміщення опорного дзеркала 6 зводиться до нуля.

З виходу фотоприймача 11 електричний сигнал (3.28) надходить на один із входів кумулятивного фазометра 12, на другий вхід якого надходить опорний сигнал з блока 3. Схема перетворює переміщення дзеркала 7 у зміну фази оптичного сигналу, переносить фазові співвідношення з оптичної на радіочастоту і вимірює кумулятивний фазовий зсув сигналів, отже, і визначає переміщення.

Відомі інші ефекти для перенесення фазових співвідношень для сигналів з оптичного в діапазон радіочастот. Це, наприклад, акустооптичні ефекти при взаємодії електромагнітних хвиль зі звуком у твердих тілах та рідинах [3.64], при цьому явища дифракції світла на ультразвукових хвилях приводить до модуляції амплітуди, поляризації спектра та напряду поширення світлової хвилі.

**Фазова модуляція оптичних сигналів у волоконно-оптичних вимірювальних перетворювачах.** Широкого застосування набувають волоконно-оптичні вимірювальні перетворювачі (ВОВП), шляхом використання модуляційних особливостей волоконних світловодів [3.16; 3.22; 3.46]. Фізичні ефекти модуляції у ВОВП під впливом фізико-механічних, електричних, магнітних, теплових величин у широкій смузі частот (до  $10^9$  Гц) за малої потужності споживання модулюють фазу і поляризують світлову хвилю. Під впливом температури, тиску, деформації, звукового тиску, електричного струму, напруженості магнітного поля фазові ВОВП змінюють довжину і показник заломлення світловода, отже, і фазу світлової хвилі.

Оптичне волокно може виконувати роль елемента Фарадея, так волокно з кварцу має постійну Верде  $V \approx 0,015 \text{ ''/A}$  [3.46]. Для підвищення чутливості ВОВП до електричних і магнітних полів оптичне волокно покривають відповідно електрострикційними чи магнітострикційними матеріалами, які спричиняють деформацію волокна в цих полях і збільшують чутливість ВОВП.

Розглянуті фізичні явища та ефекти систематизовано в табл. 3.1 за видом фізичних полів. Дані про перетворення різних фізичних величин у фазові характеристики сигналів наведено у табл. 3.2.

Таблиця 3.1 Фізичні ефекти, явища та властивості, на яких ґрунтується дія фазовимірювального перетворювача

Вид фізичних явищ	Механічні	Кінематичні	Теплові	Електричні	Магнітні
Механічні	Фотопружність, деформація	-	-	Електрострикція з ВОВП	Магнітострикція з ВОВП
Кінематичні	-	Доплера, Саньяка, затримка	-	-	-
Теплові	-	-	Теплове розширення	Теплова дія струму на ВОВП	-
Електричні	Електрострикція з ВОВП	-	Теплова дія струму на ВОВП	Керра, Поккельса, струмів Фуко, резонансні явища	-
Магнітні	Магнітострикція з ВОВП	-	-	-	Фарадея, Коттона – Мутона

Таблиця 3.2 Перетворення фізичних величин та параметрів у фазові зсуви сигналів та кути поляризації оптичних сигналів

Фізичний ефект, властивість	Вимірювана величина	Вихідна величина фазовимірювального перетворювача
Затримка поширення	Відстань, переміщення	Фазовий зсув, КФЗ
Взаємодія струмів Фуко з провідними матеріалами	Електро і магнітна провідність проникливості, геометричні розміри, параметри руху	Фазовий зсув
Явище резонансу в електричних контурах	Мікропереміщення, ємність, індуктивність елементів, рівень рідин	Фазовий зсув
Ефект Доплера	Витрати рідини чи газу, пульс, швидкість кровотоку, переміщення	КФЗ, частота
Ефект Саньяка	Кут повороту, швидкість обертання	КФЗ, частота
Ефект Керра	Напруженість електричного поля	Фазовий зсув
Ефект Поккельса	Напруженість електричного поля, електрична напруга	Кут поляризації
Ефект Фарадея	Напруженість магнітного поля, електричний струм	Кут поляризації, фазовий зсув
Ефект Коттона-Мутона	Напруженість магнітного поля, електричний струм	Фазовий зсув
Фотопружність	Механічне напруження, маса, сила, гідроакустичний тиск	Фазовий зсув
Магнітострикція у ВОВП	Напруженість магнітного поля, електричний струм	Фазовий зсув
Електрострикція у ВОВП	Напруженість електричного поля	Фазовий зсув
Теплове розширення у ВОВП	Температура	Фазовий зсув

### 3.3.3. Місце фазовимірювальних перетворювачів у структурі фазових інформаційно-вимірювальних систем

Розглянемо узагальнені структури цифрових фазових ІВС (рис. 3.10). Фазовимірювальний перетворювач виконує функцію первинного вимірювального перетворювача. Схеми на рис. 3.10, а, б вирізняються способом формування опорних сигналів, що має принципіальне значення для розроблення алгоритмів обробки сигналів, у схемі рис. 3.10, а опорний сигнал формується окремим зовнішнім (керованим ПК) генератором, а в схемі рис. 3.10, б сигнал  $u_0(t)$  синтезується цифровим способом за допомогою ЦАП.

У схемі рис. 3.10, а опорний  $u_0(t)$  і вимірювальний  $u_1(t)$  сигнали проходять КП1, КП2. У каналах передавання діють адитивні завади  $\xi_0(t)$  та  $\xi_1(t)$ . Отримані суміші  $u_0(t) + \xi_0(t)$  та  $u_1(t) + \xi_1(t)$  надходять на АЦП1, АЦП2, де вони дискретизуються та квантуються і у вигляді цифрових сигналів надходять через інтерфейс І на ПК. Останній за програмою ПЗ обробляє сигнали, подає та зберігає результати.

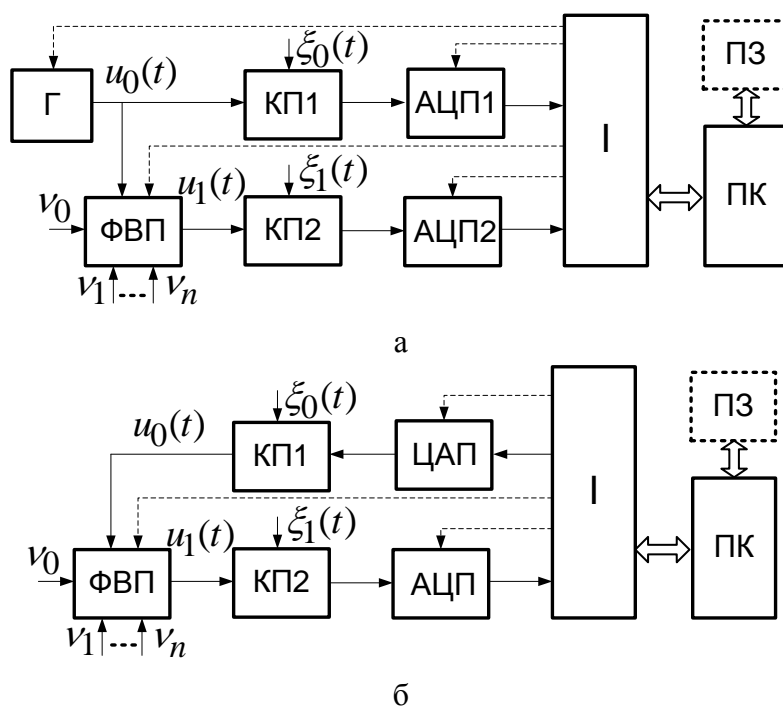


Рис. 3.10. Узагальнені структури фазових ІВС з зовнішнім (а) і внутрішнім (б) формуванням опорного сигналу: ФВП – фазовимірювальний перетворювач; АЦП – аналого-цифровий перетворювач; ЦАП – цифро-аналоговий перетворювач; І – інтерфейс; ПК – персональний комп’ютер; ПЗ – програмне забезпечення; КП – канал передавання

У загальному випадку на фазовимірювальний перетворювач діють інформативний параметр  $v_0$ , який впливає на початкову фазу опорного сигналу  $u_0(t)$  (3.1) і множина неінформативних параметрів  $\{v_j, j = \overline{1, n}\}$ , кожен з яких може діяти і на амплітуду, і на фазу вимірювального сигналу:

$$u_1(t, v_0, v_1, \dots, v_n) = U(1 + \Delta U(v_1, \dots, v_n)) \cos(2\pi ft - \varphi(v_0, v_1, \dots, v_n)), \quad U \gg \Delta U. \quad (3.30)$$

Фазовимірювальні перетворювачі уявляють собою лінійні пристрої, тому частота опорного сигналу лишається незмінною.

Таким чином, фазовий метод можна використовувати для вимірювання багатьох різних фізичних величин та параметрів матеріалів і виробів: лінійних і кутових розмірів та координат об'єктів, швидкості поширення коливань (наприклад, ультразвукових хвиль різних типів – поверхневих, поздовжніх, поперечних тощо), параметрів електричного і магнітного полів, деформації, вібротехнічних напружень, електропровідності тощо.

### 3.4. Сигнали фазометрії

Основні терміни та визначення фазометрії, розглянуті у підрозділі 3.2, уведено для гармонічних сигналів. При розв'язанні практичних задач виникає потреба в оцінюванні фазових співвідношень для більш широкого класу сигналів, які мають властивості циклічності. Але при цьому виникають методологічні труднощі, які стають дедалі більш очевидними при подальшому розвитку досліджень у фазометрії. Наведемо приклади тільки деяких з них:

1) як визначати фазу для сигналів типу «меандр» при перетвореннях у фазометрах гармонічних сигналів у послідовність прямокутних імпульсів?

2) як визначати фазовий зсув гармонічних сигналів у їх адитивній суміші з шумовим процесом за різних співвідношень сигнал/шум або сигнал/завада?

3) як визначати фазовий зсув для неперервного полігармонічних сигналів, адже всі генеровані сигнали (навіть генеровані найдосконалішими вимірювальними генераторами) є полігармонічними?

4) як визначити початкову фазу радіоімпульсних сигналів, які застосовуються у радіолокації, неруйнівному контролі, медичній та технічній діагностиці тощо?

5) яка фізична інтерпретація фазової характеристики вузькосмугових як детермінованого, так і випадкового сигналів?

6) як визначати фазову характеристику сигналів цифрового генератора, представлену у виді цифрової послідовності з дискретизованими в часі та квантованими за рівнями значеннями сигналу?

Незважаючи на вказані вище методологічні труднощі, зумовлені передусім відсутністю визначених стандартами понять «фаза» та «фазовий зсув» для циклічних сигналів, вони набули ефективного практичного застосування у фазометрії. Наведемо класифікацію таких сигналів, ґрунтуючись на фізичній природі їх формування і використання відповідних математичних моделей їх опису.

**За фізичною природою** сигнали фазометрії можна класифікувати як:

- породжені фізичними процесами та явищами;
- генеровані технічними засобами;
- детерміновані;

- випадкові;
- одновимірні;
- багатовимірні.

Перші два види сигналів суттєво відрізняються фізичними джерелами їх формування. В реальній системі вимірювань ці сигнали можна використовувати спільно, наприклад, генерований технічними засобами сигнал модулюється сигналом з інформацією про природне явище. Зміст і фізична інтерпретація фазових характеристик цих двох сигналів принципово різні.

При виділенні випадкових і детермінованих сигналів фазометрії враховують дії різних факторів їх формування. Так, наприклад, детерміновані сигнали, які повністю прогнозовані, використовуються як тестові (еталонні) під час час метрологічних випробуваннях фазових систем. Це гармонічні сигнали із заданими амплітудою, частотою і початковою фазою, як вихідні сигнали відповідних генераторів. Але формування реальних сигналів фазометрії супроводжується дією різних випадкових факторів, тому на практиці такі сигнали за фізичною природою є випадковими. Згідно класифікації А.М. Колмогорова, сигнали фазометрії є комбінаціями детермінованих, які формуються технічними системами і випадкових сигналів (завад), обумовлених дією значної кількості випадкових факторів. При значних співвідношеннях сигнал/завада, наприклад, більше десяти, дією завад можна знехтувати і використовувати для досліджень сигналів методи детермінованої фазометрії. У випадку, коли співвідношення сигнал/завада приймає значення в околі одиниці – використовуються методи статистичної фазометрії.

Розподіл сигналів фазометрії на одновимірні та багатовимірні є принциповим для фазових вимірювань і обумовлений різницею рівнів складності методів та алгоритмів визначення фазових характеристик таких сигналів. Одновимірні сигнали залежать від одного аргумента, наприклад, від часу або частоти чи від однієї просторової змінної. До багатовимірних сигналів фазометрії відносять:

- векторні сигнали як упорядковану послідовність одновимірних сигналів, які досліджуються багатоканальними фазовими системами, в цьому випадку розмірність вектора визначається числом каналів ( $n$ ) фазовою системою;

- сигнальні поля, аргументами яких є час і просторові координати, тобто сигнальне поле є функцією двох і більше аргументів.

Природно, що одновимірні і багатовимірні сигнали фазометрії можуть бути детермінованими або випадковими.

**Математичні моделі** сигналів фазометрії відображать їх циклічність, відповідно у часі і (або) просторі на основі використання різних класів періодичних детермінованих і випадкових функцій, наприклад, майже періодичних, модульованих з гармонійною несучою, вузькосмугових.



Класифікацію сигналів фазометрії, яка наведена вище і враховує їх властивості як фізичних об'єктів та відповідне відображення їх математичними моделями, показано на рис. 3.11.

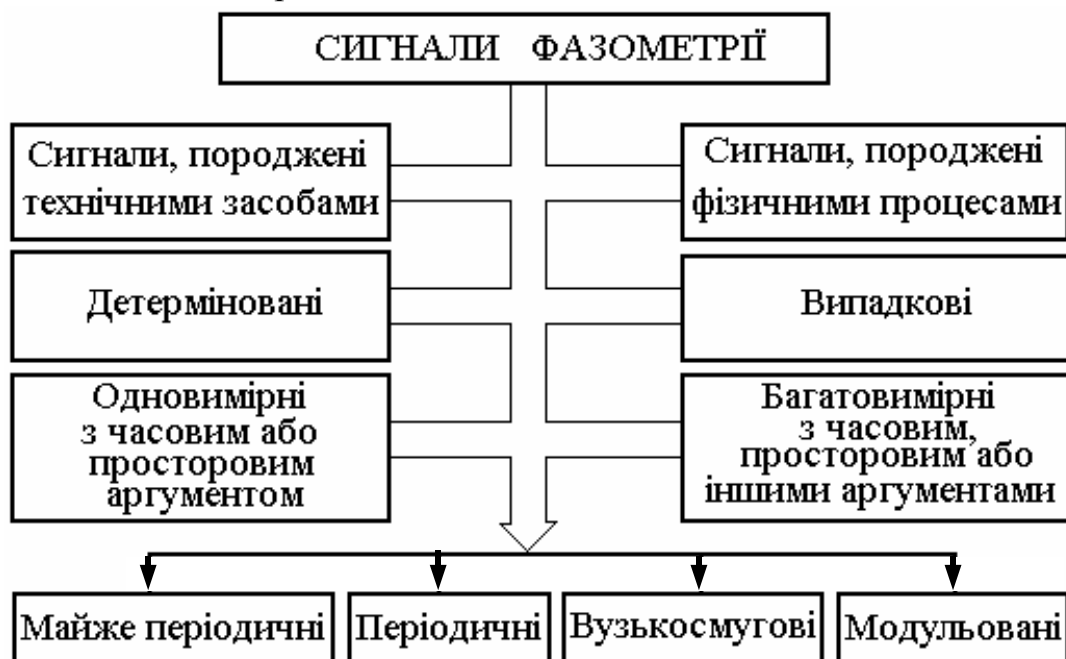


Рис. 3.11. Класифікація сигналів фазометрії

У класі математичних моделей, які описують циклічні сигнали фазометрії найбільш обґрунтованою фізично і адекватною математичною моделлю є майже періодична функція. Відомо [3.38], що майже періодична функція використовує поняття майже періода. Для майже періодичної функції  $f(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , число  $T_\varepsilon > 0$  називається  $\varepsilon$ -майже періодом функції  $f(x)$ , якщо для всіх  $x$  виконується рівність

$$|f(t + T_\varepsilon) - f(t)| < \varepsilon, \varepsilon > 0. \quad (3.31)$$

Але на сьогодні потенційні можливості майже періодичних функцій не знайшли практичного використання у різних галузях науки і техніки, в тому числі і в статистичній фазометрії.

Водночас періодичні функції, які є частинним випадком майже періодичних, широко застосовують як математичні моделі досліджуваних у фазометрії сигналів. Так, для періодичного сигналу виконується умова  $u(t) = u(t + T)$ ,  $T > 0$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ . Областю визначення таких сигналів є вся числова вісь  $R$ , але повна інформація про область значень сигналу  $u(t)$  задається на одному періоді  $T_0$ . До цього класу належать гармонічні сигнали (3.1).

Періодичні сигнали можуть утворюватись сумою гармонік з кратним співвідношенням частот (полігармонічні сигнали)

$$u(t) = \sum_{j=1}^M U_j \cos(2\pi f_j t - \varphi_j), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad \frac{f_{j+k}}{f_j} \in N, ,$$

де  $N$  – множина натуральних чисел.

Застосування в фазометрії полігармонічних сигналів (або виконання послідовно в часі фазових вимірювань для гармонічних сигналів різних частот) дозволяє визначати ФЧХ різних пристроїв та систем [3.1], вимірювати фазовий і груповий час запізнювання [3.11; 3.52]. Визначення фазового та групового часу запізнювання використовують для розв'язання завдань контролю якості ліній зв'язку, проведення фізичного експерименту і визначення різних фізичних властивостей речовин, які опосередковано пов'язані з груповою та фазовою швидкостями поширення ультразвукових хвиль – концентрацією, густиною, температурою, тиском, витратами, рівнем тощо.

У фазових радіотехнічних, радіонавігаційних системах, системах зв'язку та інших виконується модуляція (маніпуляція) фази сигналу інформаційним аналоговим чи дискретним сигналом  $s(t)$ . У загальному випадку модель гармонічного сигналу з фазовою модуляцією можна подати у вигляді

$$u_{\text{ф}}(t) = U_o \sin(2\pi f_o t + \varphi_o + \Delta\varphi s(t)), \quad t \in T_c.$$

Близькою до фазової модуляції є частотна модуляція. Відмінність між ними полягає лише в тому, що за фазової модуляції в аргумент функції входить модульовальна функція  $s(t)$ , а за частотної – її інтеграл. У цифрових системах передавання даних часто застосовують кусково-періодичні сигнали, які, утворюються за допомогою фазової маніпуляції.

У більшості випадків вхідні сигнали фазових ІВС являють собою випадкові вузькосмугові процеси, тобто процеси, для яких енергетичний спектр концентрується в невеликій смузі частот  $\Delta f$  в околі певної центральної частоти  $f_0 \gg \Delta f$  [3.32]

$$\xi(\omega, t) = A(\omega, t) \cos \Phi(\omega, t), \quad t \in T_{\tilde{n}}, \quad \omega \in \Omega, \quad (3.32)$$

де  $A(\omega, t)$  і  $\Phi(\omega, t)$  – відповідно обвідна і фаза сигналу. У фазометрії, як правило, значення  $f_0$  відоме або може бути визначено як частота опорного сигналу (3.1) – одного з двох вимірюваних сигналів.

Випадковий процес  $\xi(\omega, t)$  належить до класу процесів зі скінченною потужністю, тобто  $\mathbf{M}\xi^2(\omega, t) < \infty, \quad \forall t \in T_c$  ( $\mathbf{M}$  – оператор математичного сподівання). Одним з методів аналізу випадкових процесів типу (3.32), який дозволяє однозначно оцінити їх характеристики, є перетворення Гільберта, особливості застосування якого у фазометрії розглянуто в шостому розділі.

### 3.5. Науково-технічні проблеми статистичної фазометрії

Огляд сучасних завдань фазометрії та застосування цифрових фазових ІВС. Для з'ясування і усвідомлення проблем фазометрії розглянемо основні задачі цієї галузі вимірювань. Перелік основних задач фазометрії подано на рис. 3.12 з використанням класифікації сигналів, яка наведена на рис. 3.11.

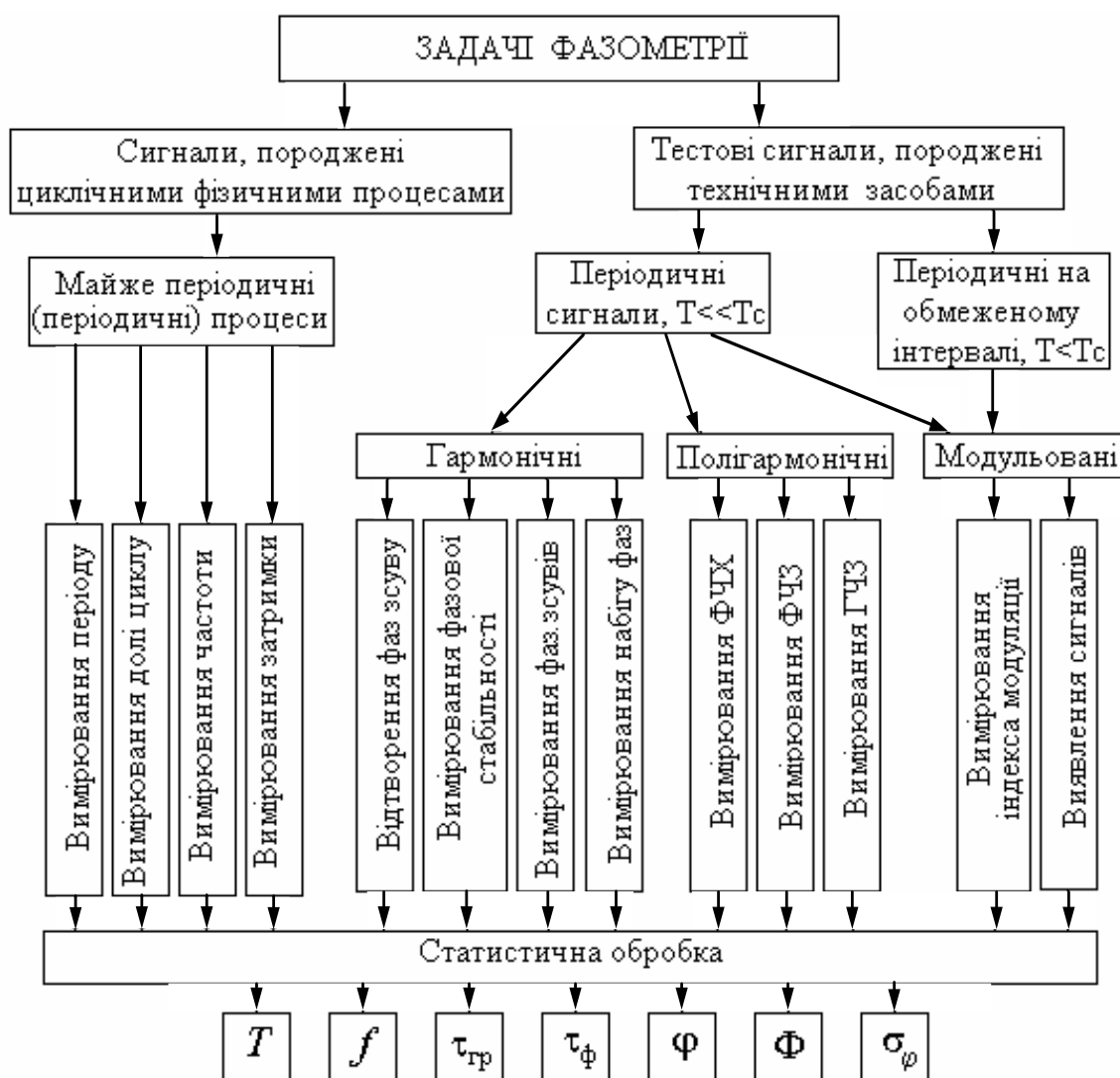


Рис. 3.12. Систематизація задач фазометрії: ФЧХ – фазовий час запізнювання сигналів; ГЧХ – груповий час запізнювання сигналів

За місцем генерування сигналів фазометрії раніше було виділено дві групи – сигнали, що породжені циклічними фізичними процесами, і сигнали, генеровані технічними засобами.

Другу групу сигналів утворюють сигнали, які є опорними або тестовими сигналами в фазових вимірюваннях, а їх фазові характеристики зумовлені дією властивостей досліджуваного фізичного явища, процесу чи величини у фазовимірювальному перетворювачі. Чи не найбільша кількість з усіх відомих задач фазометрії пов'язана з періодичними гармонічними сигналами; це

відтворення фазових зсувів сигналів [3.28], вимірювання фазової стабільності (фазових шумів) високостабільних джерел гармонічних сигналів [3.10], вимірювання фазових зсувів сигналів  $\varphi \in [0, 2\pi)$  [3.8; 3.11; 3.13; 3.14; 3.49; 3.59; 3.63; 3.67], вимірювання набігу фаз, яке дедалі більше застосовують у далекометрії, інтерферометрії, електронній геодезії, навігації, радіовимірюваннях тощо [3.35; 3.52; 3.61].

Таким чином, за результатами фазових вимірювань можна отримати такі параметри та характеристики сигналів: період  $T$ , частоту  $f$ , груповий  $\tau_{гр}$  та фазовий  $\tau_{\phi}$  час запізнювання сигналів, фазовий зсув  $\varphi$ , кумулятивний фазовий зсув (КФЗ)  $\Phi$ , дисперсію фазового зсуву (потужність фазових шумів)  $\sigma_{\phi}^2$ . Для підвищення характеристик точності визначення цих величин застосовують статистичні методи їх оцінювання. Незважаючи на відмінність характеру цих величин (одна їх частина належить до лінійних, а друга - до кутових) при їх вимірюваннях застосовують статистичні методи обробки, які розроблені і добре відомі в статистичному аналізі лінійних величин.

Розглянуті задачі фазометрії характеризуються значною кількістю різних способів і прийомів отримання інформації про фазові характеристики сигналу. Проте є можливість єдиного підходу до розв'язання таких і подібних задач фазометрії. Така можливість реалізується у випадку, якщо визначити фазо-часову (або просто фазову) характеристику сигналу (ФХС) (для сигналів вигляду (3.31) – це функція  $\Phi(\omega, t)$ ). Маючи ФХС, можна визначити фазовий зсув між гармонічними сигналами, КФЗ, фазовий час сигналу, частоту, миттєву частоту, параметри фазової модуляції сигналу.

Задачами фазометрії є також задачі досліджень шумоподібних сигналів, які отримують, наприклад, за допомогою фазової маніпуляції сигналу випадковими числами. Такі сигнали застосовують у радіонавігації, зв'язку, системах кодування інформації і досліджують за допомогою кореляційного чи гістограмного аналізу.

**Актуальні завдання статистичної фазометрії.** Реалізовані в сучасній фазовимірювальній апаратурі методи визначення ФХС можна охарактеризувати таким чином.

1. В основу визначення фазових зсувів сигналів покладено модель гармонічного сигналу, який заданий без зміни своїх параметрів на нескінченному інтервалі  $(-\infty, \infty)$ . Така модель є ідеалізованою теоретичною, а на практиці використовується тільки з фінітним часовим вікном при дослідженнях, тобто на скінченному часовому інтервалі.

2. У процесі статистичної обробки даних фазових вимірювань їх розглядають як реалізації розподілених на прямій випадкових величин. Отже, і для розрахунку статистик використовують розподіли випадкових величин на прямій, що дає задовільні результати у випадку, коли функції розподілу майже

повністю задаються на інтервалах  $[-\pi, \pi)$  або  $[0, 2\pi)$ , тобто коли «хвостами» розподілів за межами цих інтервалів можна знехтувати. Це дає змогу користуватись для фазових вимірювань прийнятими для випадкових величин на прямій статистичними оцінками положення і розсіювання – математичним сподіванням і дисперсією для незначного розкиду даних вимірювань випадкових кутів.

3. Використання у складі фазових ІВС потужних засобів комп'ютерної техніки, включаючи ПК, дозволяє застосовувати обчислювальні алгоритми довільного ступеня складності. Водночас слід відзначити, що спрощені лінійні алгоритми статистичної обробки результатів фазових вимірювань, які ґрунтувались на використанні законів розподілу на прямій, в ряді випадків недоцільно використовувати у фазовимірювальній апаратурі потужних сучасних обчислювальних підсистем.

Постійно зростаючі вимоги до підвищення точності та роздільної здатності вимірювань; розвиток нанотехнологій, які характеризуються релятивістською природою; зниження потужності тестових сигналів для зменшення їх впливу на досліджувані об'єкти та явища спонукають більш повно враховувати випадкову природу фазових вимірювань. Більше того, ігнорування випадковою природою під час розв'язання багатьох завдань практичної фазометрії, призводить не тільки до невідновлених втрат вимірювальної інформації, але й до суттєвого спотворення фізичної суті при трактуванні результатів фазових вимірювань.

У разі зниження амплітуди вимірювального сигналу, вплив завад, спричинених каналом передавання і шумів, зумовлених вимірювальними перетворювачами та іншими колами і блоками ІВС, стає дедалі відчутнішим, тому вимірювальний сигнал має більш виражену випадкову природу. Найбільший вплив на результати вимірювання справляють тепловий, дробовий шуми та флікер-шум, а також шум, зумовлений флуктуаційним теплообміном між невеликими тілами (перетворювачами, елементами схеми) та навколишнім середовищем. Крім того, процес формування і вимірювання фазових зсувів сигналів може супроводжуватись дією інших специфічних шумів і завад. Так, наприклад, у схемі гетеродинного інтерферометра (див. рис.3.9) - це паразитні механічні вібрації елементів оптичної схеми, засвічування фотоприймача *11* від білого некогерентного світла внаслідок кінцевої смуги пропускання світлофільтра *10*, неточність механічного юстування елементів оптичної схеми, флуктуації амплітуди і фази сигналів генератора квадратурних сигналів модуляції тощо.

Застосування фазового методу вимірювання характеризується такими основними ознаками:

- більш вираженою випадковою природою фазових характеристик сигналів;
- зменшенням співвідношення сигнал/завада;
- розширенням діапазону вимірювання фазових характеристик сигналів;

- підвищенням вимог до точності та достовірності результатів вимірювань;
- використанням цифрових вимірювальних сигналів і статистичних способів їх обробки.

Ці особливості зумовлюють потребу в розвитку і застосуванні в практиці фазових вимірювань статистичних методів.

Аналіз сучасних завдань фазометрії, пов'язаних з розширенням діапазону вимірюваних фазових зсувів сигналів, зменшенням співвідношення сигнал/завада, використанням в повному обсязі нових інформаційних технологій на базі цифрових методів обробки сигналів, свідчить про необхідність поширення понять фазометрії на більш широкий клас сигналів – як аналогових, так і цифрових.

Подальший розвиток фазометрії потребує не тільки використання нової елементної бази та досягнень схемотехніки, але й вирішення ряду методологічних завдань, пов'язаних з розробленням ймовірнісних моделей фазових характеристик сигналів, уточненням змісту понять фазометрії для широкого класу сигналів, розвитком статистичних методів обробки результатів фазових спостережень на колі, використанням у дискретній фазометрії досягнень теорії чисел та цифрової обробки сигналів. Уведення в фазометрію нових моделей вимірювальних сигналів потребує розширення й уточнення понять «фаза» та «фазовий зсув», оскільки використання існуючих визначень у ряді випадків викликає методологічні труднощі щодо розв'язання практичних завдань і ускладнює однозначне трактування результатів вимірювальних експериментів.

На ранньому етапі розвитку фазометрії для ймовірнісного опису результатів вимірювань найчастіше застосовувались гауссівський або зрізаний гауссівський закони розподілу ймовірності. Однак такий підхід має суттєві обмеження, які пояснюються передусім неузгодженістю необмеженої області існування гауссівського розподілу  $(-\infty, \infty)$  і обмеженого інтервалом  $[0, 2\pi)$  діапазону вимірювання дробової частини фазових характеристик сигналів. Вимірювані фазові зсуви належить розглядати як реалізації розподіленого на колі випадкового кута. Як відомо, на колі використовуються операції додавання за модулем  $2\pi$ . Це суттєво відрізняє розподілені на колі випадкові величини від розподілених на прямій і потребує використання інших статистичних характеристик. Оскільки фазові характеристики належать до розподілених на колі випадкових величин, потрібно виконувати статистичну обробку результатів фазових вимірювань і застосовувати відповідні закони розподілу ймовірності, які узгоджені з періодичністю, що природно виникає під час кутових вимірювань.

Таким чином, актуальними задачами статистичної фазометрії можна вважати такі:

- визначення понять фазометрії для цифрових сигналів,

- розробка ймовірнісних моделей фазових характеристик сигналів,
- розробка статистичних оцінок випадкових фазових характеристик сигналів,
- введення в практику статистичної фазометрії розподілів ймовірності випадкових кутів,
- визначення кругових характеристик для фазових характеристик сигналів,
- підвищення достовірності вимірювань в широкому діапазоні значень фазових характеристик сигналів на основі методів теорії чисел,
- визначення способів представлення результатів фазових вимірювань з показниками точності та достовірності,
- застосування у фазометрії нових інформаційних технологій, які ґрунтуються на можливостях ЦОС.

### 3.6. Статистична фазометрія і фазовий вимірювальний експеримент

Матеріали цієї роботи, результати наукових публікацій, успіхи сучасної фазометрії дають змогу навести загальну характеристику фазометрії. Етапи становлення, розвитку і перспективи подальшого використання фазометрії свідчать про створення потужного і ефективного напрямку досліджень у галузі вимірювань. На обґрунтуванні справедливості такої характеристики фазометрії зупинимось більш детально.

Спочатку більш виважено розглянемо термінологію фазометрії. Термін «*статистична фазометрія*» відповідає, по суті, сучасному стану фазометрії. Детермінована фазометрія як термін є до деякої міри умовним, але в ідейному розумінні він не суперечить попередньому: детермінована фазометрія є складовою компонентою статистичної, тобто її частинним випадком. Об'єктами досліджень фазометрії є численні природні явища, процеси, системи різної фізичної природи, зокрема технічні, біологічні системи, для яких у загальному випадку буде використовуватись термін «*емпірична система*».

Під час фазових досліджень використовують інформаційні сигнали, які описуються як детермінованими, так і випадковими функціями. Для фазових інформаційних сигналів властива циклічність у часі та (або) просторі, тому моделями таких сигналів можуть бути випадкові періодичні процеси, періодичні функції, модульовані сигнали з гармонічною несучою та ін. Для такого широкого діапазону сигналів будемо у загальному випадку використовувати термін «*циклічні інформаційні сигнали*», який має змістовне навантаження більш фізичне, ніж математичне.

Фазометрію застосовують майже у всіх галузях науки і техніки; потенційні можливості фазометрії, передусім високі характеристики точності результату вимірювань, мають практичну перспективу їх реалізації при створенні новітніх інформаційних технологій, нанотехнологій у різних галузях науково-промислового комплексу країни.

Загалом наведена вище інформація дає змогу сформулювати такі означення.

**Означення 3.4.** *Статистична фазометрія – це галузь вимірювань фазових характеристик циклічних інформаційних сигналів, основними науково-технічними напрямками досліджень якої є:*

а) *створення методології перетворення властивостей, параметрів, характеристик емпіричних систем у фазові характеристики циклічних інформаційних сигналів;*

б) *обґрунтування і реалізація методів вимірювань фазових характеристик циклічних інформаційних сигналів з подальшою інтерпретацією для емпіричної системи результату вимірювань і його характеристик точності на основі розроблення теоретичних засад, методів вимірювань, моделювання і статистичної обробки даних експериментальних вимірювань.*

Розв'язання різних науково-технічних конкретних завдань статистичної фазометрії, як правило, реалізується на базі проведення фазового вимірювального експерименту.

**Означення 3.5.** *Фазовий вимірювальний експеримент – це процес реалізації методів статистичної фазометрії для вимірювань фазових характеристик циклічних інформаційних сигналів, основними етапами якого є:*

- *обґрунтування постановки задачі фазових вимірювань;*
- *вибір конкретного методу, а в ряді випадків і послідовності методів, розв'язання задач із множини методів теоретичних, імітаційних (моделювальних), експериментальних досліджень статистичної фазометрії;*
- *проведення фазового вимірювального експерименту з використанням технічних фазових систем, засобів обчислювальної техніки (ЕОМ, мікропроцесорів, мікроконтролерів);*
- *аналіз отриманих результатів експерименту з подальшою інтерпретацією для досліджуваної емпіричної системи результату вимірювань і його характеристик точності.*

Таким чином, *статистична фазометрія* характеризується метою, об'єктом, предметом, методами та завданнями досліджень.

– **Мета досліджень** – дослідження динаміки змін у часі та (або) просторі параметрів, характеристик досліджуваних емпіричних систем на основі використання методів статистичної фазометрії.

– **Об'єкт досліджень** – емпіричні системи різної фізичної природи.

– **Предмет досліджень** – статистичні фазові характеристики циклічних інформаційних сигналів.

– **Методи досліджень** – методи теорії випадкових полів і процесів, математичної статистики, теорії фазових вимірювань, математичного моделювання, обчислювальної математики, цифрової обробки сигналів, статистичної теорії сигналів і систем.



– **Задачі досліджень** – актуальні задачі статистичної фазометрії, результати розв’язання яких використовують як інформацію для подальших досліджень, наприклад, функціонування автоматизованих систем управління різних об’єктів, технологічних процесів, систем моніторингу та адаптивних систем, що свідчать про необхідність взаємодії з іншими технічними комплексами і системами.

Загальна характеристика статистичної фазометрії підтверджує актуальність розвитку цієї галузі вимірювань для розв’язання перспективних і важливих науково-технічних проблем у різних галузях діяльності суспільства.

### 3.7. Підсумки до розділу

Третій розділ починається з огляду розвитку фазових вимірювань і закінчується пропозиціями подальшого розвитку статистичної фазометрії.

Фазометрія як відповідна галузь вимірювань вивчає та досліджує сукупність методів і засобів вимірювання, перетворення, регулювання та формування фазових характеристик циклічних сигналів різної фізичної природи: електричних, оптичних, акустичних тощо. Фазові методи та системи вимірювання, перетворення та передавання інформації відіграють в загальній теорії і практиці вимірювань дедалі вагомішу роль, а сфера їх застосування у різних галузях науки і техніки постійно зростає.

У матеріалі розділу розглянуто галузі застосування, спорідненість і відмінність фазових вимірювань при їх порівняльному аналізі з кутовими вимірюваннями. Спорідненість кута і фази як об’єктів виміру обумовлена:

- 1) циклічним характером їх зміни;
- 2) однаковим діапазоном вимірювань у півінтервалі  $[0, 2\pi)$ ;
- 3) існуванням міри  $2\pi$ , яка визначається ірраціональним числом.

Відмінність між фазою і кутом полягає у такому: кутові вимірювання за характером належать до прямих вимірювань, фазові – до непрямих; фазові характеристики сигналів залежать від частоти.

Наведено основні терміни та визначення детермінованої фазометрії. Широкі можливості використання фазового методу у фізичному експерименті показано на прикладах: ефекту Доплера, резонансу в LC-контурі, вихрових струмів (струмів Фуко), оптичної активності, ефектів Коттона-Мутона, Керра, Погкельса, Саньяка та фотопружності.

Відзначається, що фазові вимірювання охоплюють також вимірювання КФС сигналів, значення яких перевищує  $2\pi$ . В цьому випадку виникає потреба в усуненні неоднозначності вимірювань. Обґрунтовано умову, виконання якої гарантує однозначний результат вимірювань фазових зсувів сигналів.

Значну увагу приділено класифікації сигналів детермінованої та статистичної фазометрії з метою розширення класу сигналів, які мають ті чи

інші ознаки фізичної циклічності. Це дає змогу використовувати їх фазові характеристики під час дослідження різних фізичних явищ, процесів і величин.

У наведеній науково-технічній проблемі статистичної фазометрії розглянуто результати огляду завдань фазометрії та застосування цифрових фазових ІВС.

Відзначається, що в основу визначення фазових зсувів сигналів в сучасній фазовимірювальній апаратурі покладено модель гармонічного сигналу, параметри якого не змінюються на нескінченному інтервалі  $(-\infty, \infty)$ . Така модель є ідеалізованою теоретично, а на практиці використовується тільки з фінітним часовим вікном під час досліджень, тобто на скінченному часовому інтервалі.

Наведено означення статистичної фазометрії, фазового вимірювального експерименту. Сформульовано мету досліджень, об'єкт, предмет і методи досліджень статистичної фазометрії.

До актуальних задач статистичної фазометрії можна віднести такі:

- визначення понять фазометрії для цифрових сигналів;
- розроблення ймовірнісних моделей фазових характеристик сигналів;
- розроблення статистичних оцінок випадкових фазових характеристик сигналів;
- уведення в практику статистичної фазометрії розподілів ймовірності випадкових кутів;
- визначення кругових статистичних характеристик для фазових характеристик сигналів;
- підвищення достовірності вимірювань у широкому діапазоні значень фазових характеристик сигналів на основі методів теорії чисел;
- визначення способів подання результатів фазових вимірювань з характеристиками точності та достовірності;
- застосування у фазометрії нових інформаційних технологій, які ґрунтуються на можливостях ЦОС.

Деякі результати з питань фазових вимірювань, які розглянуто у третьому розділі, наведено у публікаціях [3.1 – 3.68].

*Мистецтво вимірювання – це могутня зброя,  
яку створив людський розум для  
проникнення в закони природи ...*  
Б.С. Якобі

## Розділ 4

### ОСНОВНІ МЕТОДИ ФАЗОМЕТРІЇ

У цьому розділі викладено основні відомі методи вимірювання і перетворення фази та фазових зсувів гармонічних сигналів, схемотехнічні питання їх реалізації, методи кумулятивної різночастотної фазометрії, обґрунтовано застосування у фазометрії числової системи залишкових класів та показано широкі можливості використання такої системи для розв'язання актуальних завдань сучасної фазометрії.

#### 4.1. Основні методи вимірювання та перетворення фазових зсувів гармонічних сигналів

Грунтовна класифікація методів вимірювання фазових зсувів гармонічних сигналів наведена в праці [4.8].

За принципом проведення фазових вимірювань методи фазометрії поділяють на компенсаційний та методи перетворення фазових зсувів в інші величини – напругу, часовий інтервал, геометричні параметри осцилографічних зображень досліджуваних сигналів та кут повороту рухомої частини електромеханічних приладів. Розглянуті методи та способи відрізняються один від одного за технічною реалізацією, складністю та точністю. Деякі з них на сьогодні втратили актуальність і становлять інтерес лише для більш повного аналізу розвитку фазометрії. Розглянемо основні методи вимірювання фазових зсувів гармонічних сигналів.

**Компенсаційний метод вимірювання.** Цей метод ґрунтується на зрівноважуванні (компенсації) фазового зсуву  $\varphi \in [0, 2\pi)$  між вимірювальними гармонічними сигналами, тобто зведенні до нуля фазового зсуву сигналів за рахунок регулювання фази одного із сигналів (чи обох) за допомогою керованого вимірювального фазообертача (чи міри фазового зсуву) [4.6; 4.13; 4.32]. Узагальнену схему компенсаційного фазометра на основі керованого прецизійного фазообертача показано на рис. 4.1.

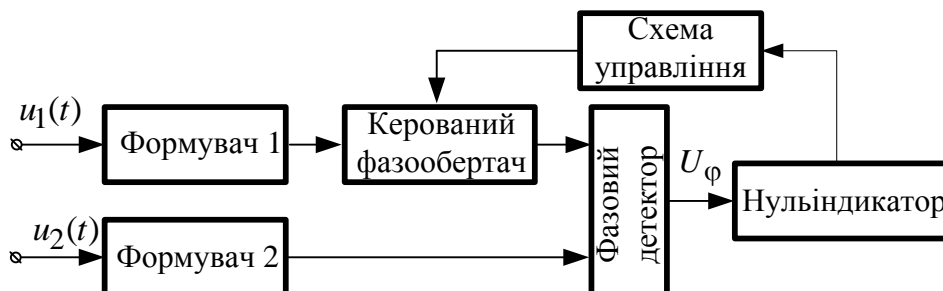


Рис.4.1. Структура компенсаційного фазометра

У цій схемі компенсаційного фазометра формувачі 1 та 2 узгоджують досліджувані сигнали з електронним блоком фазометра з вимірювальними колами за опорами та напругами. Керований фазообертач додає до фази сигналу  $u_1(t)$  каліброване значення початкової фази  $-\varphi_k$ . Фазовий детектор перетворює фазові зсуви між сигналами на його вході у постійну напругу  $U_\varphi$ , яка використовується через схему керування для підстроювання значення  $\varphi_k$  у керованому фазообертачі.

Момент досягнення компенсації фазового зсуву, тобто рівності  $\varphi = \varphi_k$ , фіксується нуль-індикатором. Результатом вимірювання є показання фазообертача.

Розглянута схема лише ілюструє принцип вимірювання. У практичних схемах компенсаційних фазометрів калібрований фазовий зсув задається за допомогою мір фазових зсувів і додається до фази сигналу на фіксованій проміжній частоті.

Компенсаційний метод забезпечує досягнення високої точності вимірювання, близької до точності вимірювальних фазообертачів.

**Методи вимірювання на основі перетворення фазового зсуву сигналів в інші величини.** Цей метод дозволяє визначити фазовий зсув сигналів після його попереднього перетворення в іншу зручну для вимірювання проміжну величину – напругу, струм, зміщення електронного променя осцилографа, часовий інтервал тощо. Розглянемо основні відомі способи реалізації цього методу.

**Спосіб перетворення фазового зсуву сигналів у кут повороту** стрілки електровимірювальних приладів ґрунтується на властивості фазочутливості електродинамічних, феродинамічних, електромагнітних та індукційних вимірювальних механізмів [4.7; 4.9]. Схематичне зображення вимірювальної частини феродинамічного механізму показано на рис. 4.2.

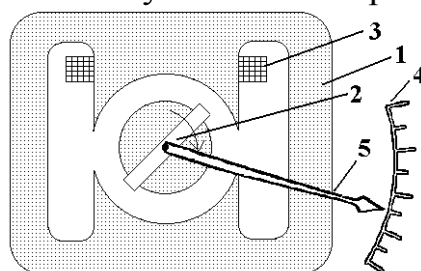


Рис. 4.2. Розміщення елементів електродинамічного механізму:

1 – магніто провід; 2, 3 – відповідно рухомий і нерухомий каркаси з намотаним проводом (котушки) зі струмами  $i_2$  та  $i_1$ ; 4 – шкала; 5 – стрілка

Як відомо, принцип дії механізмів цього типу ґрунтується на взаємодії магнітних полів двох котушок зі струмами. Ця взаємодія зумовлює до обертання рухомої котушки 2 в нерухомій котушці 1. Струм  $i_2$  в рухому котушку подається через розтяжки, які разом з цим створюють протидійний

момент. З рухомою котушкою жорстко з'єднана стрілка 5, яка разом зі шкалою 4 являє собою пристрій відліку.

Рівняння перетворення такого механізму можна отримати з аналізу електродинамічної енергії взаємодії двох котушок механізму

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{1,2}(\alpha) i_1 i_2,$$

де  $L_1, L_2$  – індуктивності котушок 1, 2;  $L_{1,2}(\alpha)$  – взаємна індуктивність цих котушок;  $\alpha$  – кут повороту рухомої котушки.

Оскільки на кут повороту  $\alpha$  рухомої частини впливає лише значення  $L_{1,2}$ , то її обертальний момент

$$\dot{M}_{\text{об}}(\alpha) = \frac{dW(\alpha)}{d\alpha} = i_1 i_2 \frac{dL_{1,2}(\alpha)}{d\alpha}.$$

Момент  $\dot{M}_{\text{об}}(\alpha)$  у приладі зрівноважується моментом протидійної пружини  $M_{\text{пр}} = k\alpha$  ( $k$  – питомий протидіючий момент пружини), тому

$$\alpha = \frac{i_1 i_2}{k} \frac{dL_{1,2}(\alpha)}{d\alpha}.$$

Якщо по котушках протікають змінні струми  $i_1(t) = I_1 \sin(2\pi ft + \varphi_1)$  та  $i_2(t) = I_2 \sin(2\pi ft + \varphi_2)$  однієї частоти  $f$ , то з урахуванням інерційності рухомої частини приладу середнє за період сигналу значення кута визначають за формулою

$$\alpha = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{k} \frac{dL_{1,2}(\alpha)}{d\alpha} i_1(t) i_2(t) dt = \frac{1}{k} \frac{dL_{1,2}(\alpha)}{d\alpha} I_1 I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Таким чином,  $\alpha$  залежить не лише від амплітуди струмів  $I_1$  та  $I_2$ , але й від різниці фазових зсувів змінних струмів, що вказує на можливість використання таких вимірювальних механізмів для вимірювання фазових зсувів сигналів. Для запобігання впливу сили струмів на результат вимірювання необхідно або стабілізувати значення  $I_1$  та  $I_2$ , або застосовувати механізми логотричного типу [4.7; 4.9]. Фазометри на основі електромеханічних приладів застосовують здебільшого для вимірювання  $\cos \varphi$  чи фазових зсувів сигналів у колах змінного струму промислової частоти 50 Гц або в діапазоні низьких частот 40 – 10000 Гц і мають низькі класи точності в інтервалі 0,5 - 2,5.

Із класу електромеханічних фазометрів найбільшого поширення набули електродинамічні фазометри, які найчастіше використовують як лабораторні прилади і мають більш високі класи точності [4.7]. Їх застосовують для вимірювань в однофазних та трифазних колах на промисловій та вищих частотах сигналів. Феродинамічні фазометри застосовують як стаціонарні прилади невисокого класу точності, що мають відносно невисоку потужність

споживання. Трифазні фазометри найчастіше реалізують на основі електромагнітних логометрів, які дозволяють виконувати вимірювання в межах шкали до  $360^\circ$ .

**Адитивний спосіб обробки напруг сигналів (спосіб додавання напруг)** [4.6] ґрунтується на векторному складанні сигналів. У разі додавання гармонічних сигналів вигляду(3.1) сумарне коливання

$$u_{\Sigma}(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_{\Sigma} \cos(2\pi ft + \varphi_{\Sigma}),$$

де

$$U_{\Sigma} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi}, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{\Sigma} = \frac{U_1 \sin \varphi_1 + U_2 \sin \varphi_2}{U_1 \cos \varphi_1 + U_2 \cos \varphi_2}.$$

Отже, інформація про різницю фазових зсувів вхідних сигналів пов'язана з амплітудами  $U_1, U_2, U_{\Sigma}$  (4.1). У загальному випадку маємо

$$\varphi = \arccos \frac{U_{\Sigma}^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2}, \quad \varphi \in [0, \pi).$$

Оскільки значення  $\varphi$  отримується за результатами вимірювання трьох амплітуд гармонічних сигналів, цей спосіб інколи називають “способом трьох вольтметрів”.

Якщо  $U_1 = U_2 = U$  маємо

$$U_{\Sigma} = 2U \cos \frac{\varphi}{2},$$

звідси

$$\varphi = 2 \arccos \frac{U_{\Sigma}}{2U}, \quad \varphi \in [0, \pi).$$

Головне значення функції  $\arccos(\frac{U_{\Sigma}}{2U})$  визначено лише на інтервалі  $[0, \pi)$ .

Структуру фазометра з додаванням напруг досліджуваних сигналів зображено на рис. 4.3.

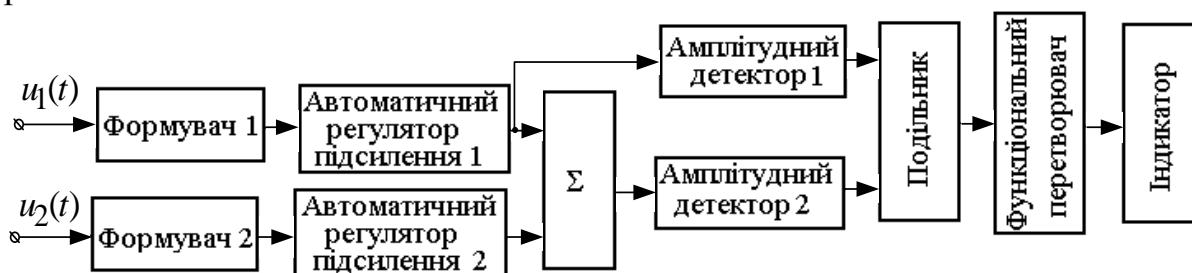


Рис. 4.3. Структура фазометра з додаванням напруг досліджуваних сигналів

У цій схемі блоки автоматичного регулювання підсилення 1, 2 підтримують постійними амплітуди досліджуваних сигналів. Суматор  $\Sigma$  підсумовує миттєві значення сигналів, а амплітудні детектори 1, 2 формують

постійні напруги, які дорівнюють амплітудним значенням сигналів на їх входах. Подільник напруги виконує операцію  $\frac{U_{\Sigma}}{2U}$ , а функціональний перетворювач – операцію  $2\arccos\left(\frac{U_{\Sigma}}{2U}\right)$ .

Наведена схема придатна для вимірювання  $\varphi \in [0, \pi)$  у широкому діапазоні частот (до сотень мегагерців) сигналів, але точність вимірювання низька і залежить від  $\varphi$  (найвища в околі значення  $\varphi = 0,5\pi$ ).

**Мультиплікативний спосіб обробки сигналів (спосіб перемножування напруг)** [4.6] ґрунтується на тому, що результат множення двох гармонічних сигналів вигляду (3.1), один з яких вважається безрозмірним керувальним сигналом, дорівнює

$$u_1(t)u_2(t) = \frac{U_1U_2}{2}(\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(2\pi ft - \varphi_1 - \varphi_2))$$

і містить сталу складову  $U_c = \frac{U_1U_2}{2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ , яка виділяється за допомогою фільтра низьких частот і використовується для визначення фазового зсуву сигналів

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \arccos\frac{2U_c}{U_1U_2}.$$

Структурну схему фазометра з перемноженням напруг сигналів показано на рис. 4.4. У цій схемі автоматичні регулятори підсилення 1, 2 стабілізують амплітуди сигналів, а функціональний перетворювач реалізує операцію  $\arccos\left(\frac{2U_c}{U_1U_2}\right)$ .

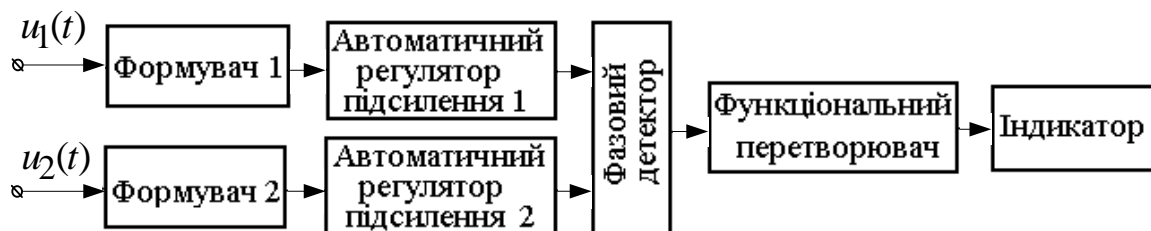


Рис. 4.4. Структура фазометра з перемножуванням напруг

Один зі способів отримання пропорційного значенню  $\varphi$  значення напруги  $U_c$  полягає у використанні фазового детектора. Фазовий детектор – це пристрій, який перетворює фазовий зсув гармонічних сигналів у постійну напругу. Таке перетворення найпростіше здійснюється шляхом нелінійної взаємодії досліджуваних гармонічних сигналів. Ідея фазового детектування така. На вхід нелінійного безінерційного двополюсника з вольт-амперною

характеристикою вигляду  $i(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2$ , де  $a_0, a_1, a_2$  - коефіцієнти, подаємо суму досліджуваних гармонічних сигналів, наприклад,

$$u_1(t) + u_2(t) = U_1 \cos(2\pi ft + \varphi) + U_2 \cos(2\pi ft),$$

фазовий зсув між якими необхідно перетворити в значення постійної напруги. Найчастіше у фазових детекторах як нелінійний елемент використовують діоди, вольт-амперна характеристика близька до квадратичної. Принцип фазового детектування ілюструє рис. 4.5.

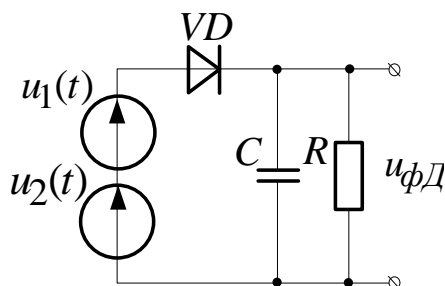


Рис. 4.5. Перетворення фазового зсуву сигналів у напругу напівпровідниковим діодом

Оскільки вольт-амперна характеристика містить квадратичну складову двополюсника, у його струмі з'являється складова, яка характеризує нелінійну взаємодію вхідних напруг:

$$i_{вз}(t) = 2a_2U_1U_2 \cos(2\pi ft + \varphi)\cos(2\pi ft) = a_2U_1U_2 \cos \varphi + a_2U_1U_2 \cos(4\pi ft + \varphi). \quad (4.2)$$

Друга складова формули (4.2) відповідає високочастотному сигналу подвоєної частоти  $2f$ , яка легко відфільтровується  $RC$  фільтром низьких частот. Пеша складова (4.2) однозначно пов'язана з вимірюваним фазовим зсувом в інтервалі значень  $[0, \pi)$ . Отже вихідне значення напруги детектора  $u_{фД}$  пов'язано з фазовим зсувом  $\varphi$  функцією арккосинуса. Практичні схеми фазових детекторів будуть подані у підрозділі 4.2.

**Осцилографічний спосіб** вимірювання фазових зсувів сигналів [4.7; 4.9; 4.13] реалізується на основі лінійної, колової чи спіральної розгортки та методу еліпса (метод фігур Лісажу) і ґрунтується на геометричних вимірюваннях певних елементів графіків на екрані електронно-променевої трубки (ЕПТ) осцилографа. Цей спосіб сьогодні не має великого практичного значення, оскільки не забезпечує високої точності вимірювання і важко піддається автоматизації.

Найпростіше вимірювати фазові зсуви між сигналами по їх графічних осцилограмах на екрані двопробеневого осцилографа (рис. 4.6) за способом лінійної розгортки.



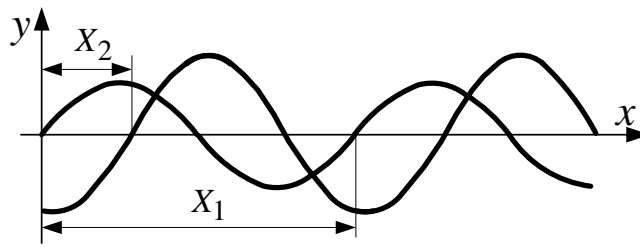


Рис.4.6. Визначення фазового зсуву сигналів по осцилограмі двопроменевого осцилографа

По осцилограмі визначають у міліметрах відрізок довжиною  $X_1$ , пропорційний періоду  $T$  сигналу, та відрізок  $X_2$ , пропорційний затримці  $\tau = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot T$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Вимірне значення фазового зсуву сигналів у радіанах дорівнює  $\varphi = 2\pi \frac{\tilde{O}_2}{\tilde{O}_1}$ .

У випадку використання двопроменевого осцилографа перед вимірюванням фазових зсувів сигналів слід виконати його калібрування, яке полягає у визначенні  $\tilde{O}'_2$  для значення  $\varphi = 0$  і дозволяє компенсувати систематичну складову похибки вимірювання, викликану неідентичністю фазових характеристик вимірювальних каналів осцилографа.

Інший спосіб вимірювання фазових зсувів сигналів ґрунтується на аналізі фігур Лісажу. Цей спосіб придатний лише для аналізу гармонічних сигналів і передбачає підключення досліджуваних напруг на вертикальні та горизонтальні пластини ЕПТ, як показано на рис. 4.7, а. На екрані осцилографа під час дії досліджуваних сигналів з'являється замкнена крива – коло чи еліпс, як зображено на рис. 4.7, б.

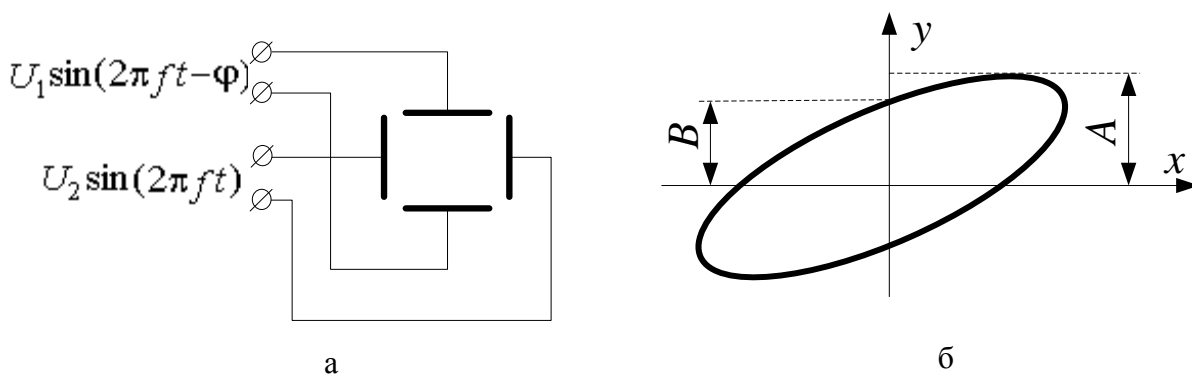


Рис. 4.7. Схема підключення сигналів до обкладинок ЕПТ (а) та графічне зображення фігури Лісажу (б)

Геометричні параметри цієї фігури дають змогу визначити фазовий зсув між сигналами. Слід електронного променя на екрані ЕПТ дає графічне зображення з координатами

$$y(t) = U_1 \sin(2\pi ft - \varphi), \quad x(t) = U_2 \sin 2\pi ft. \quad (4.3)$$

Знайдемо рівняння фігур Лісажу. Для цього визначимо з другого рівняння (4.3) час  $t = \frac{1}{2\pi f} \arcsin \frac{x(t)}{U_2}$  і підставимо його в перше рівняння:

$$y(t) = \frac{U_1}{U_2} \left( x(t) \cos \varphi - \sqrt{U_2^2 - x^2(t)} \sin \varphi \right) \quad (4.4)$$

Для  $\varphi = 0$  крива вироджується у пряму, нахилену до осей координат під кутом  $45^\circ$ .

Один з відомих способів оцінювання  $\varphi$  ґрунтується на визначенні лінійних розмірів еліпса. З виразів (4.3), (4.4) випливає, що

$$y_{\max} = A = U_1 \sin(\pi k - \varphi), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

$$y|_{x=0} = B = \pm U_1.$$

Із рівняння (4.5) маємо  $\frac{\hat{A}}{\hat{A}} = \pm \sin(\pi k - \varphi)$ . Якщо  $k = 0$ , отримуємо

$\varphi = -\arcsin \frac{B}{A}$ ,  $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Отже, для визначення  $\varphi$  достатньо виконати

лінійні вимірювання по кривій Лісажу на екрані осцилографа. Цей спосіб забезпечує вимірювання фазових зсувів сигналів з похибками близько ( $3^\circ - 5^\circ$ ), тому його натеper не застосовують у прецизійній фазовимірювальній апаратурі.

**Спосіб перетворення фазового зсуву сигналів у часовий інтервал** [4.13; 4.24; 4.28]. Раніше було показано, що фазовий зсув сигналів синусоїдної форми однозначно визначається затримкою сигналів у часі  $\tau$  (3.3). Значення  $\tau$  можна визначити за затримкою між характерними точками сигналів, наприклад, між моментами перетину сигналами нульового рівня у разі, якщо знаки похідних сигналів збігаються. Це дає змогу звести вимірювання  $\varphi$  до вимірювання часових інтервалів. Структуру фазометра, що пояснює цей принцип та епюри напруг, що ілюструють його роботу, показано відповідно на рис. 4.8, а, б.

Підсилювачі-обмежувачі 1, 2 реалізують функцію  $\text{sign}(\cdot)$  і формують з досліджуваних гармонічних сигналів  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  сигнали прямокутної форми (епюри в, г), які надходять на входи *RS*-тригера відповідно через формувачі 1, 2. Останні узгоджують вихідні сигнали підсилювачів-обмежувачів та вхідні сигнали тригера за рівнями напруг. *RS*-тригер формує імпульси тривалістю  $\tau$ , які формуються з періодом  $T$  (епюра д). За допомогою ключа отриманий імпульсний сигнал нормується за амплітудою – набуває фіксованих значень 0 або  $U_+$  (епюра е). Це необхідно для підвищення точності подальшого перетворення напруги у значення фазового зсуву сигналів. Фільтр низьких частот виділяє постійну складову імпульсного сигналу

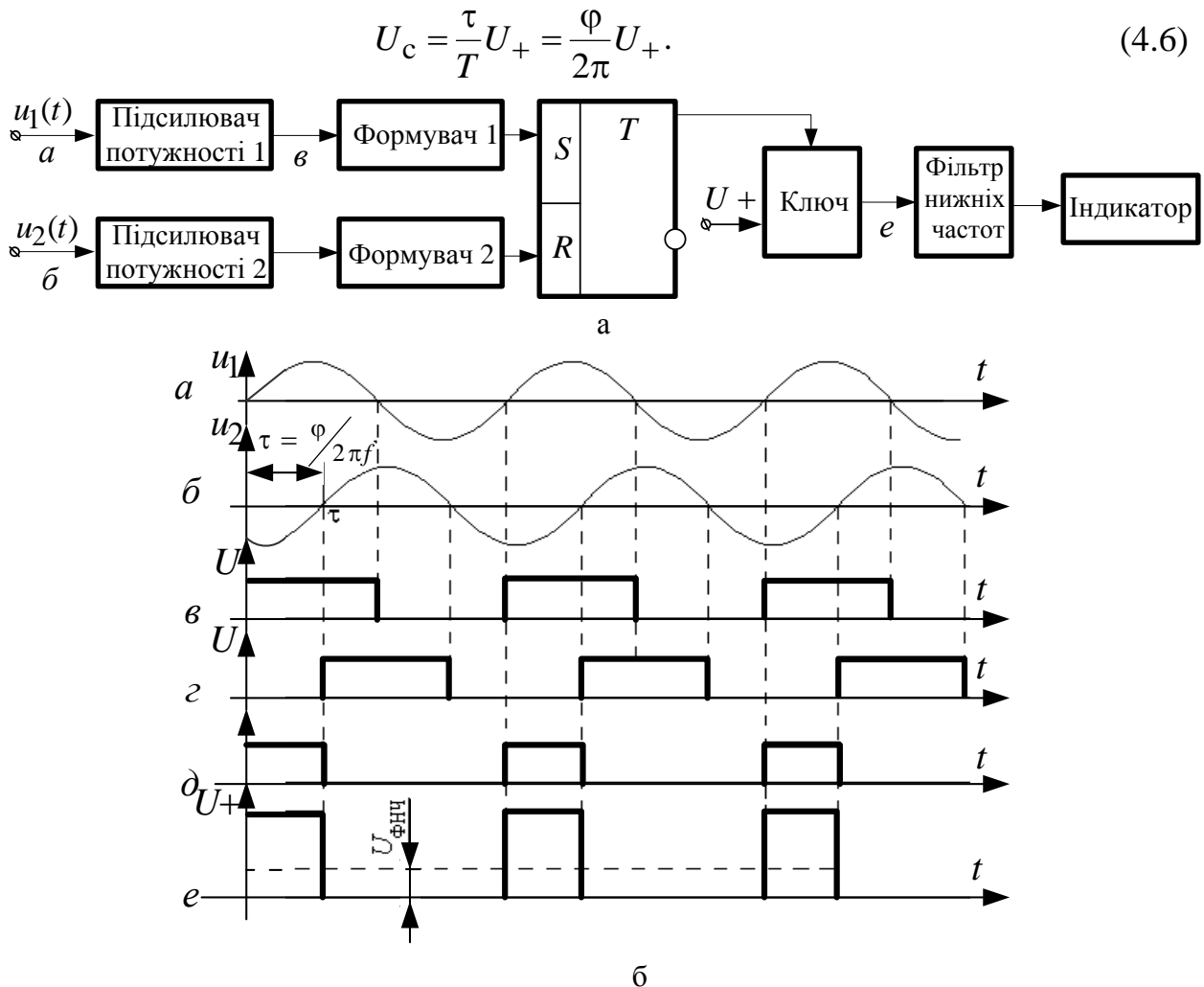


Рис. 4.8. Структура фазометра, що реалізує перетворення фазовий зсув - часовий інтервал (а) та епюри напруг, що пояснюють його роботу (б)

Аналізуючи рівняння перетворення фазометра (4.6), можна зробити такі висновки: 1) наведена схема забезпечує лінійне перетворення фазовий зсув – напруга; 2) результати вимірювання не залежать від частоти вхідних сигналів. Ці особливості розглядуваного способу безперечно є його перевагами.

В цифровому варіанті реалізації цього способу інтервал часу  $\tau$  перетворюється на цифровий код. Варіанти структур фазометрів з перетворенням фазовий зсув – часовий інтервал – код розглянуто у підрозділі 4.2.

Недоліком цього способу в аналоговому і цифровому варіантах реалізації лишається низька завадостійкість. Оскільки вимірювані часові інтервали тривалістю  $\tau$  формуються за нуль-переходами сигналів, наявність у вхідних сигналах шумів та вищих гармонік призводить до значних похибок вимірювання.

**Кореляційний спосіб** [4.23; 4.31] вимірювання фазових зсувів сигналів ґрунтується на зв'язку фазового зсуву, або затримки  $\tau < T$  досліджуваних

гармонічних сигналів  $u_1(t) = U_1 \cos 2\pi ft$  та  $u_2(t) = U_2 \cos(2\pi f(t - \tau))$  з відгуком кореляційного оператора виду

$$B_{1,2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u_1(t)u_2(t)dt = \frac{U_1 U_2}{2} \cos(2\pi f\tau) \quad (4.7)$$

Формула (4.7) справедлива за умови взаємної некорельованості завад у каналах фазометра і відсутності в складі сигналів вищих гармонік. За відомих значень амплітуд сигналів фазовий зсув між ними визначають за формулою:

$$\varphi(\tau) = 2\pi f\tau = \arccos \frac{2B_{1,2}(\tau)}{U_1 U_2} \quad (4.8)$$

У разі потреби в розширенні діапазону вимірювання на інтервал  $[0, 2\pi)$  необхідно вжити додаткових заходів.

Недолік цього способу полягає у тому, що за наявності у складі сигналів адитивних завад з'являється систематична складова похибки вимірювання фазових зсувів сигналів. Це пояснюється тим, що наявність шумів призводить до значних похибок в оцінюванні значення добутку напруг  $U_1, U_2$  та відгуку кореляційного оператора  $B_{1,2}(\tau)$ . Тому основне завдання кореляційних фазометрів – забезпечення високої завадостійкості, перебуває у певній суперечності з вимогою забезпечення роботи кореляційних фазометрів за низького співвідношення сигнал/завада. Іншими вадами цього способу є суттєва залежність результатів вимірювань від нелінійних спотворень сигналів (наявності вищих гармонік), нелінійного характеру рівняння кореляційного перетворення, точності встановлення значення часового зсуву  $\tau$ .

Лінеаризувати рівняння перетворення дозволяють кореляційні фазометри з перекриттям, у яких реалізується принцип обробки, подібний до обчислення знакової кореляційної функції [4.31]. Якщо перетворити вхідні сигнали у логічні функції вигляду  $A_{1(2)}(t) = 0,5 \text{sign}(u_{1(2)}(t) + 1)$  і виконати над ними логічну операцію «виключне АБО», то результатом цих перетворень матимемо функцію часу  $B(t) = A_1(t) \oplus A_2(t)$ . Функція  $B(t)$  існує у формі імпульсів тривалістю  $\tau = \frac{\varphi}{2\pi f}$ , що свідчить про лінійність перетворення. Таке перетворення реалізується на елементах цифрової техніки.

**Ортогональний спосіб** має високу точність і завадостійкість вимірювання фазових зсувів сигналів у широкому діапазоні значень співвідношення сигнал/завада. Цей спосіб забезпечує оптимальне за критерієм максимуму функції правдоподібності вимірювання фазових зсувів сигналів у випадку аналізу адитивної суміші  $u_2'(t)$  гармонічного сигналу (3.1) і білого шуму. В цьому разі функціонал правдоподібності визначають за формулою [4.25; 4.31]

$$L(\varphi) = \exp \left\{ -\frac{1}{S_0} \int_0^{T_c} [u_2'(t) - u_1(t, \varphi)]^2 dt \right\},$$

де  $S_0$  - спектральна щільність білого шуму. У випадку, коли час інтегрування кратний періоду гармонічного сигналу, тобто  $T_c = kT$ ,  $k = 1, 2, 3$ , маємо

$$L(\varphi) = A \exp \left\{ -\frac{2}{S_0} \int_0^{T_c} u_2'(t) u_1(t, \varphi) dt \right\} \quad (4.9)$$

де  $A$  - числовий коефіцієнт пропорційності. Отже, оптимальне вимірювання фазових зсувів сигналів зводиться до пошуку максимуму (нуля похідної за  $\varphi$ ) кореляційного інтегралу, що входить у вираз (4.9). Розклавши сигнал  $u_1(t, \varphi)$  на дві ортогональні складові, виконавши його диференціювання за  $\varphi$  і прирівнявши результат до нуля, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \int_0^{T_c} u_2'(t) U_1 \sin(2\pi ft + \varphi) dt &= U_1 \sin \varphi \int_0^{T_c} u_2'(t) \cos(2\pi ft) dt + \\ &+ U_1 \cos \varphi \int_0^{T_c} u_2'(t) U_1 \sin(2\pi ft) dt = U_1 a_c \sin \varphi + U_1 a_s \cos \varphi = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

З рівняння (4.10) маємо

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{a_s}{a_c}, \quad \varphi \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.11)$$

Для розширення діапазону визначення фазових зсувів до значення  $(-\pi, \pi)$  необхідно врахувати знаки складових  $a_s, a_c$ .

Операції перемноження, інтегрування та функціонального перетворення можуть бути реалізовані як в аналоговій, так і в цифровій формах. Похибка вимірювання суттєво залежить від дотримання умови  $T_c = kT$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

## 4.2. Методи перетворення частоти та початкових фаз сигналів

Розглянемо ряд допоміжних операцій з фазами сигналів, які часто застосовують для підвищення точності вимірювання та розширення діапазону вимірювання. До таких операцій належать: гетеродинне та стробоскопічне перетворення частоти сигналів, ділення («послаблення») та множення («підсилення») початкових фаз (фазових зсувів сигналів).

Для розширення частотного діапазону сигналів, фазові зсуви між якими необхідно виміряти, застосовують гетеродинне та стробоскопічне

перетворення, які дозволяють переносити фазові співвідношення між сигналами високої частоти на сигнали низької проміжної частоти. Розглянемо сутність таких перетворень.

**Гетеродинне перетворення сигналів** найчастіше використовують для вимірювання фазових зсувів сигналів на частотах понад 200 – 300 кГц [4.6; 4.9]. Гетеродинне перетворення полягає у перемноженні досліджуваних сигналів, наприклад (3.1) та (3.2) при  $x=0$  із сигналом допоміжного генератора – гетеродина:  $u_{\Gamma}(t) = U_{\Gamma} \cos(2\pi f_{\Gamma} t + \varphi_{\Gamma})$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ . Після перемноження досліджуваних сигналів з  $u_{\Gamma}(t)$  отримують:

$$u_0(t)u_{\tilde{a}}(t) = \frac{U_0 U_{\tilde{a}}}{2} \{ \cos(2\pi(f - f_{\tilde{a}})t \pm \varphi_0 - \varphi_{\tilde{a}}) + \cos(2\pi(f + f_{\tilde{a}})t \pm \varphi_0 + \varphi_{\tilde{a}}) \}, \quad (4.12)$$

$$u_1(t)u_{\tilde{a}}(t) = \frac{U_1 U_{\tilde{a}}}{2} \{ \cos(2\pi(f - f_{\tilde{a}})t \pm \varphi_1 - \varphi_{\tilde{a}}) - \cos(2\pi(f + f_{\tilde{a}})t \pm \varphi_1 + \varphi_{\tilde{a}}) \} \quad (4.13)$$

У фазовимірювальних пристроях задається різницева частота  $f_p = f - f_{\Gamma}$  для перенесення вимірювання фазових зсувів сигналів на низьку частоту. Аналіз виразів (4.12) та (4.13) показує, що фазовий зсув між сигналами на проміжній частоті лишається рівним фазовому зсуву між вхідними сигналами.

Структуру двоканального гетеродинного перетворювача частоти для фазометрії показано на рис. 4.9. Змішувачі 31, 32 перемножують вхідні сигнали  $u_1(t), u_2(t)$  із сигналом  $u_{\tilde{a}}(t)$  гетеродина Г. Буферні каскади БК1, БК2 зменшують небажане проходження сигналів з каналу в канал по ланцюгах гетеродина. Сигнали різницевої частоти виділяють фільтри Ф1, Ф2.

У ряді випадків доцільно переносити фазові зсуви на сигнали з частотою гетеродина. Така необхідність виникає, наприклад, у випадку реалізації компенсаційного методу вимірювання.

Особливості реалізації такого варіанта гетеродинного перетворення розглянемо на прикладі структурної схеми рис. 4.10.

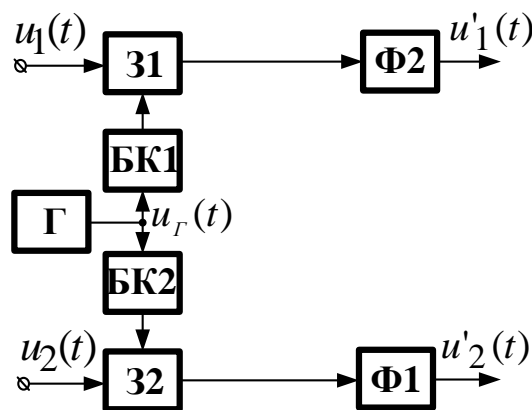


Рис. 4.9. Структура двоканального гетеродинного перетворювача фазових зсувів сигналів

У цій схемі мірою фазових зсувів сигналів є двофазний генератор ДГ, який формує гармонічні сигнали частоти  $f_{\Gamma}$  з каліброваним значенням фазового зсуву  $\varphi_{\Gamma}$  між ними. (На рисунку позначено фази гармонічних сигналів – вхідних, після перетворення і фільтрації, та вихідних.)

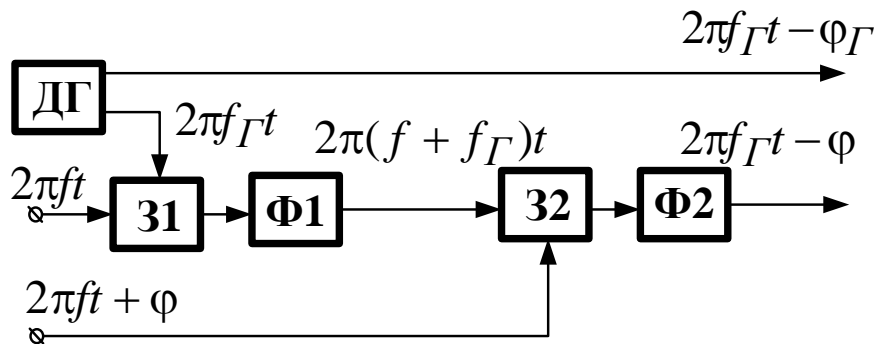


Рис. 4.10. Структура двоканального гетеродинного перетворювача з перенесенням фазових зсувів сигналів на частоту гетеродина

Гетеродинне перетворення сигналів дозволяє підвищити верхню граничну частоту вимірювальних гармонічних сигналів до сотень/тисяч мегагерців. Однак це потребує перестроювання гетеродина в широкому діапазоні частот (рис. 4.9), або перестроювання фільтра  $\Phi 1$  (рис. 4.10), що суттєво ускладнює автоматизацію процесу вимірювання. Крім того, на високих частотах зростає небажане взаємне проходження сигналів з каналу в канал фазометра, що спричиняє збільшення похибок вимірювання. Відчутно подолати ці недоліки дозволяє застосування стробоскопічного перетворення.

**Стробоскопічне перетворення сигналів** [4.27] полягає у вимірюванні миттєвих значень періодичних сигналів за допомогою коротких імпульсів, які називають строб-імпульсами (від англ. *strobe* – стробувальний, селектувальний імпульс). Частота строб-імпульсів менша за частоту сигналу у кожному новому періоді стробувальні імпульси зсуваються в часі на іншу ділянку в періоді сигналу і послідовно «зчитують» весь період сигналу по точкам. Отримане значення зберігається до надходження наступного строб-імпульсу. Стробоскопічне перетворення обох сигналів з вимірюваним фазовим зсувом між ними здійснюється однією послідовністю строб-імпульсів. Принцип стробоскопічного перетворення на прикладі перетворення пари гармонічних сигналів з частотою  $f = T^{-1}$  та фазовим зсувом  $\varphi = 2\pi f \tau_f$  між ними ілюструє рис. 4.11.

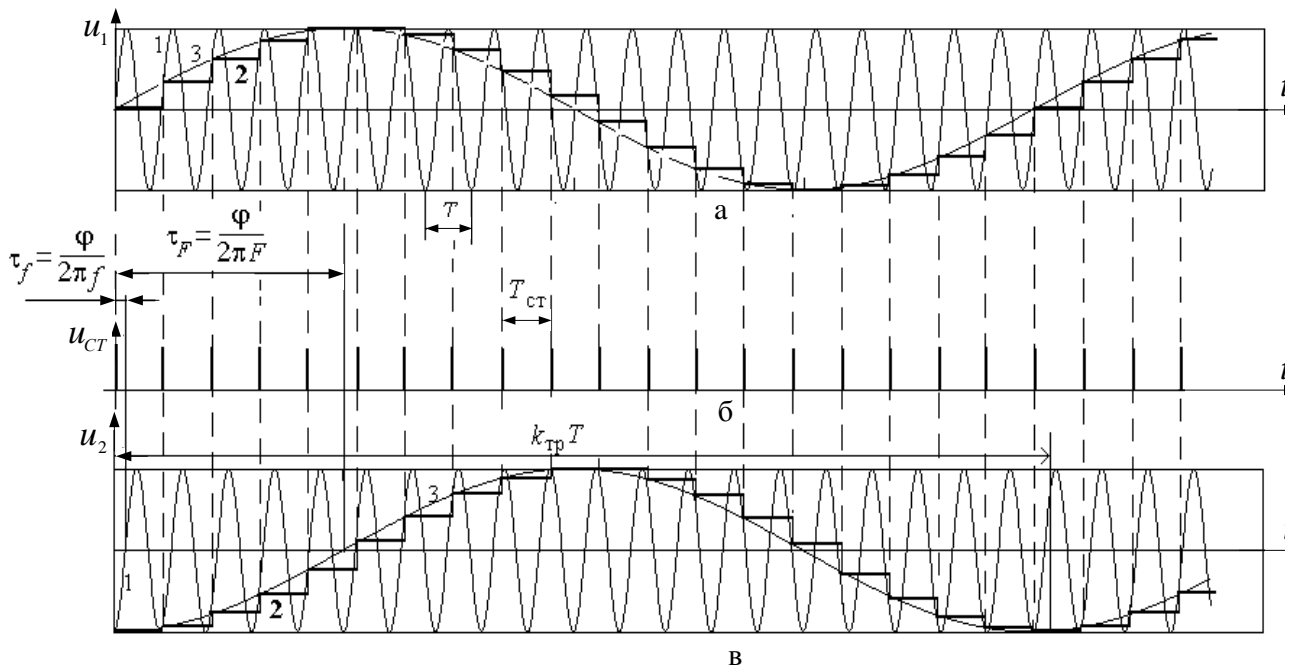


Рис. 4.11. Часові діаграми, що пояснюють принцип стробоскопічного перетворення сигналів: зображено: на епюрі а – перший сигнал 1, його східчастий прототип 2 після стробоскопічного перетворення та його обвідна 3; на епюрі б – послідовність строб-імпульсів; на епюрі в – другий сигнал 1, його східчастий прототип 2 після стробоскопічного перетворення та його обвідна 3.

Обвідні 3 сигналів ідентичні за формою до вхідних сигналів, проте трансформовані («розтягнуті») у часі. Їх частоти становлять  $F = \frac{f}{k_{тр}} = \frac{1}{k_{тр}T}$ , де  $k_{тр}$  - коефіцієнт трансформації.

Між основними гармоніками перетворених сигналів зберігся фазовий зсув  $\varphi$ , який відбувався для вхідних сигналів, проте відповідний цьому зсуву часовий інтервал  $\tau_F$  збільшився у  $k_{тр}$  разів:

$$\frac{\tau_F}{\tau_f} = \frac{f}{F} = k_{тр}.$$

Структуру двоканального стробоскопічного перетворювача для перенесення фазових зсувів сигналів на сигнали низької частоти показано на рис. 4.12. Генератор строб-імпульсів ГСІ виробляє короткі імпульси частотою  $f_0$ . Спектр сигналів на виході строб-перетворювачів СП1, СП2 містить гармоніки з частотами

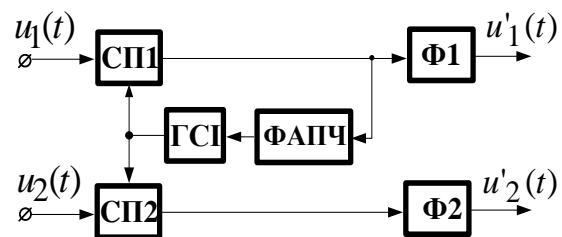


Рис. 4.12. Структура двоканального стробоскопічного перетворювача сигналів



$f \pm nf_0$ ,  $n \in N$ , де  $f$  - частота вхідного сигналу. Система фазового автопідстроювання частоти ФАПЧ здійснює в невеликих межах перестроювання частоти ГСІ для отримання в спектрі вихідних сигналів СП1,2 гармонік з певною фіксованою проміжною частотою  $f_{np}$ , які відфільтровуються фільтрами  $\Phi_1, \Phi_2$ .

Застосування стробоскопічного перетворення сигналів дозволяє суттєво зменшити діапазон перестроювання гетеродина, роль якого виконує ГСІ, без зменшення частотного діапазону вхідних сигналів. Крім того, стробоскопічні перетворювачі конструктивно можуть бути виконані окремо у виносних пробниках, які розташовуються безпосередньо в місцях відбору сигналу. Це значно зменшує паразитний зв'язок між каналами.

Стробоскопічні перетворювачі частоти було використано, наприклад, у компенсаційному фазометрі Ф5126, який забезпечує вимірювання фазових зсувів сигналів в діапазоні частот 1 - 150 МГц.

**Ділення фаз сигналів** застосовують під час вимірювання кумулятивних фазових зсувів сигналів для розширення діапазону вимірювання. Принцип ділення фаз сигналів ґрунтується на тому, що під час ділення частоти сигналу за допомогою подільників частоти піддається діленню вся фаза сигналу разом з початковою фазою. Якщо фази досліджуваних гармонічних сигналів до подільників частоти становлять

$$\Phi_1(t) = 2\pi ft - \varphi_1; \quad \Phi_2(t) = 2\pi ft - \varphi_2,$$

то після подільників частоти з коефіцієнтом ділення  $n$  фази отриманих сигналів дорівнюють відповідно

$$\Phi'_1(t) = 2\pi \frac{f}{n} t - \frac{\varphi_1}{n}; \quad \Phi'_2(t) = 2\pi \frac{f}{n} t - \frac{\varphi_2}{n}.$$

Отже, фазовий зсув між сигналами на зменшеній частоті  $\frac{f}{n}$  також

зменшується у  $n$  разів і становить  $\varphi' = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n}$ . Застосувавши після подільників частоти фазометр з діапазоном вимірювання  $[0, 2\pi)$  можна розширити діапазон однозначного вимірювання фазових зсувів у перерахунку на частоту вхідних сигналів у  $n$  разів і довести його до інтервалу  $[0, 2\pi n)$ .

Окрім розширення діапазону вимірювання ділення частоти, у фазометрії застосовують також для підвищення точності зразкової фазовимірювальної апаратури, а також для спряження за частотою гетеродинів і перетворювачів частоти сигналів тощо. У праці [4.9] розглянуто основні типи реалізації подільників частоти – це подільники на генераторах гармонічних коливань, релаксаційні та регенеративні подільники, подільники на основі фазової системи автопідстроювання частоти та подільники на цифрових лічильниках імпульсів.

**Множення фаз сигналів** застосовують для зменшення відносної похибки вимірювання малих фазових зсувів сигналів за однакового значення абсолютної похибки вимірювання фазових зсувів сигналів або для підвищення роздільної здатності фазометрів.

В основу множення фаз сигналів можуть бути покладені різні явища [4.9] такі, наприклад, як явище резонансу. Інша ідея множення фазових зсувів сигналів полягає у перетворенні їх форми: унаслідок перетворення гармонічних сигналів у сигнали прямокутної форми чи короткі імпульси (отримані, наприклад, в моменти перетину нульового рівня) спектр перетвореного сигналу збагачується вищими гармоніками з фазами вигляду  $2\pi\left(ft + \frac{\varphi}{2\pi}\right)j$ , де  $j$  - номер

гармоніки. Виділена зі спектра сигналу після перетворення його форми  $j$ -та гармоніка містить збільшену в  $j$  разів початкову фазу. Принцип множення фазових зсувів сигналів ілюструє схема на рис. 4.13. У цій схемі формувачі коротких імпульсів ФКІ1 та ФКІ2 формують імпульси в моменти перетину сигналами нульового рівня. Ці імпульси стробують високочастотний сигнал  $u_{\Gamma}(t)$  допоміжного генератора  $\Gamma$  частотою  $f_{\Gamma}$ . Вихідні фільтри  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  виділяють складові спектра сигналів з різницевою частотою  $f_p = f_{\Gamma} - jf$ , які, за

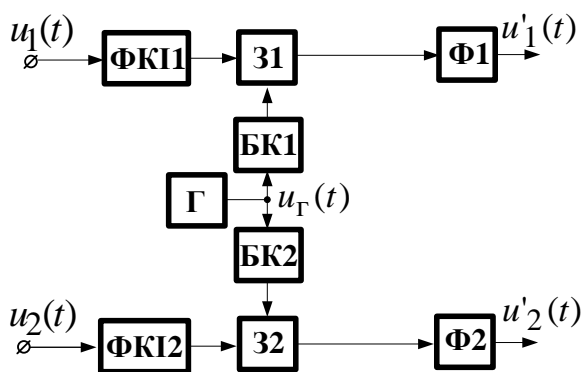


Рис. 4.13. Схема помножувача фазових зсувів сигналів

умови ідентичності фазочастотних характеристик каналів помножувача, мають такі фазові характеристики:

$$\Phi_1(t) = 2\pi f_p t - j\varphi_1,$$

$$\Phi_2(t) = 2\pi f_p t - j\varphi_2.$$

Отже, фазовий зсув сигналів становить  $j|\varphi_2 - \varphi_1|$ . Збільшення фазового зсуву в  $j$  разів за незмінної чутливості та похибки вимірювання фазометра еквівалентне такому ж

зменшенню відносної похибки вимірювання фазового зсуву  $|\varphi_2 - \varphi_1|$ .

Одним з недоліків розглянутого варіанта множення фазових зсувів сигналів є багатозначність перетворення. Дійсно, однозначне перетворення можливе за умови  $j|\varphi_2 - \varphi_1| < 2\pi$ , тобто в інтервалі фазових зсувів між вхідними сигналами  $|\varphi_2 - \varphi_1| < \frac{2\pi}{j}$ . Розширити інтервал вимірювання до значення  $2\pi$  можна, застосувавши метод кумулятивної різночастотої фазометрії. Його сутність стосовно методу вимірювання з множенням фазових зсувів полягає у тому, що останні вимірюють двічі: 1) без множення отримують однозначне, але з низькою точністю значення  $\varphi_1$  (прийнято, що  $\varphi_2 = 0$ ), 2)

після множення фазових зсувів знаходять уточнене значення  $\varphi'_1 \in \left[0, \frac{2\pi}{j}\right)$ .

Такий принцип вимірювання фазових зсувів сигналів ілюструє структурна схема на рис. 4.14.

Значення  $\varphi'_1$  використовують в пристрої узгодження для уточнення значення  $\varphi_1$  і оцінювання фазового зсуву сигналів за формулою

$$\varphi = \frac{2\pi}{j} \left[ j \frac{\varphi_1}{2\pi} - \frac{\varphi'_1}{2\pi} + 0,5 \right] + \frac{\varphi'_1}{j}.$$

Застосування методу множення фазових зсувів доцільне лише для дослідження гармонічних сигналів з незначним вмістом завад та вищих гармонік, наявність яких приводить до виникнення додаткових похибок вимірювання і які не усуваються множенням фазових зсувів сигналів.

Щодо ефективнішого використання енергії сигналу становить інтерес ідея нелінійного перетворення гармонічного сигналу на елементах з вольт-амперною характеристикою, яка описується поліномом Чебишова першого роду  $n$ -го порядку. В цьому випадку вся енергія вхідного сигналу незалежно від його частоти перетворюється на виході в енергію єдиної  $n$ -ї гармоніки.

Спосіб множення фазових зсувів сигналів найчастіше застосовують у разі потреби вимірювати фазові зсуви сигналів у незначному діапазоні їх зміни з високою точністю. Як приклад можна навести основні характеристики помножувача фазових зсувів сигналів Ф5230 :

- діапазон частот вхідних сигналів
  - а) у режимі формування прямокутних імпульсів, Гц..... $10^{-3} - 10^3$
  - б) у режимі множення фазових зсувів, Гц.....  $10^4 - 2 \cdot 10^5$
- діапазон напруг вхідних сигналів, В.....1 – 10
- коефіцієнт множення фазових зсувів, не менше .....36.

### 4.3. Методи кумулятивної різночастотної фазометрії

Деякі прикладні застосування фазового методу вимірювання, перетворення і передавання інформації у радіонавігації, зв'язку, радіогеодезії, неруйнівному контролі тощо потребують вимірювання величин ( $\varphi > 2\pi$ ) фазових зсувів сигналів вигляду

$$\Phi(t) = 2\pi \left[ \frac{\Phi(t)}{2\pi} \right] + \Phi(t) \bmod 2\pi = 2\pi n(t) + \varphi(t), \quad t \in [0, T_c], \quad (4.14)$$

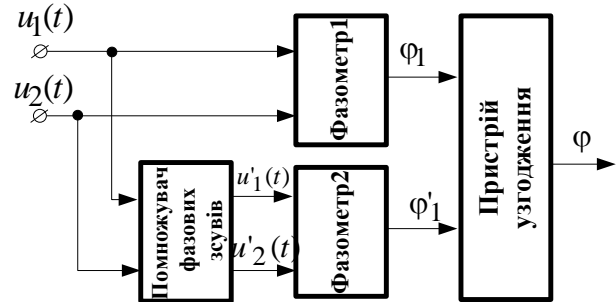


Рис. 4.14. Структура фазовимірювального пристрою з помноженням фазових зсувів в інтервалі  $[0, 2\pi)$

де  $n(t)$  - кількість цілих фазових циклів як функція часу  $t$ ;  $\varphi(t)$  - фазовий зсув сигналів у межах півінтервалу  $[0, 2\pi)$ . Передбачається, що  $\Phi(t)$  може безперервно змінюватись у часі зі швидкістю значно меншою за швидкість зміни функції  $\cos(2\pi ft)$ , або залишатись незмінною, при цьому умова  $\Phi(0) < 2\pi$  може й не виконуватись. Таке припущення не суперечить фізичній суті багатьох реальних досліджуваних процесів. За таких умов постає завдання однозначного визначення  $n(t)$ , або усунення неоднозначності фазових вимірювань, що досягається методами кумулятивної різночастотної фазометрії, реалізація яких передбачає вимірювання фазових зсувів  $\varphi_j \in [0, 2\pi)$  гармонічних сигналів на декількох (щонайменше двох) частотах [4.14-4.16; 4.18; 4.20; 4.22] і подальша сукупна обробка результатів цих вимірювань (див. підрозділ 3.3).

Стисло розглянемо способи реалізації методу кумулятивної різночастотної фазометрії на прикладі вимірювання незмінної за час вимірювання відстані  $D$ . Затримка поширення гармонічного сигналу частотою  $f$  на відстань  $D$  приводить до його фазового зсуву на величину

$$\Phi(D) = \frac{D}{V} 2\pi f = \frac{D}{\lambda} 2\pi = \left( n(D) + \frac{\varphi(D)}{2\pi} \right) 2\pi,$$

де  $V$  – фазова швидкість сигналу в середовищі поширення. Для підвищення роздільної здатності вимірювання відстані необхідно зменшувати  $\lambda$ , тобто збільшувати частоту коливань  $f$ . Це, в свою чергу, потребує збільшення діапазону однозначного вимірювання фазових зсувів сигналів за межі півінтервалу  $[0, 2\pi)$  і вимірювання фазових зсувів сигналів вигляду (4.14).

Кумулятивний різночастотний спосіб усунення неоднозначності передбачає: вимірювання фазових зсувів гармонічних сигналів на  $m$  частотах  $f_1, \dots, f_m$ ; формування множини значень виміряних фазових зсувів  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_m\}$ ,  $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ ; обчислення за цими даними значення  $n$ .

У випадку вимірювань  $D = \text{const}$  на двох частотах  $f_1 < f_2$  складають систему рівнянь

$$\begin{cases} D = \frac{\lambda_1}{2} \left( n_1(D) + \frac{\varphi_1(D)}{2\pi} \right); \\ D = \frac{\lambda_2}{2} \left( n_2(D) + \frac{\varphi_2(D)}{2\pi} \right), \end{cases} \quad (4.15)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2$  – довжини хвиль сигналів частотою  $f_1, f_2$  відповідно, що поширюються вздовж вимірюваної відстані у прямому і зворотному напрямках.

Система (4.15) не має однозначного розв'язку, оскільки кількість невідомих -  $D, n_1(D), n_2(D)$  перевищує кількість рівнянь. Тому її доповнюють певними початковими умовами, які, власне, і визначають спосіб усунення

неоднозначності. Так, наприклад, за способом з коливанням частоти маємо  $n_2(D) - n_1(D) = n$ , де  $n = 1, 2, \dots$ . Величина  $n$  визначається під час безперервної зміни частоти сигналу в невеликих межах від  $f_1$  до  $f_2$  (як правило,  $f_2/f_1 = 2 \div 3$ ). У праці [4.26] запропоновано і розглянуто спосіб з неперервною зміною частоти в широкому діапазоні від нижньої  $f_1$ , для якої виконується умова однозначного вимірювання максимальної відстані  $D_{\max}$ , тобто  $2D_{\max} < \lambda_1$  (отже, у рівнянні (4.15)  $n_1 = 0$ ), до верхньої  $f_2$ , яка визначається потрібною точністю результату вимірювання ( $f_2/f_1 = 100 \dots 1000$ ).

Відповідно до способів усунення неоднозначності вимірювань з використанням фіксованих частот система (4.15) доповнюється умовою  $n_1(D) = 0$  для найнижчої частоти, що дозволяє визначити  $n_2(D)$  як

$$n_2(D) = \left[ \frac{f_2}{f_1} \frac{\varphi_1(D)}{2\pi} - \frac{\varphi_2(D)}{2\pi} + 0,5 \right]. \quad (4.16)$$

Цей спосіб передбачає застосування сигналів значно рознесених за частотою, тобто сигналів, для яких виконується умова  $f_1 \ll f_2$ . У праці [4.14] розглянуто спосіб усунення неоднозначності з використанням близьких частот. Умова однозначного вимірювання виконується для частоти «віртуального», синтезованого сигналу з різницевою частотою  $f_p = f_2 - f_1$  (цей сигнал

утворений з двох реальних сигналів частотами  $f_1$  та  $f_2$ ):  $2D_{\max} < \lambda_p = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}$

. У цьому випадку для розв'язання багатозначності і визначення  $n_2$  необхідно в (4.15) замість  $\varphi_1(D)$  підставити отриманий для частоти  $f_p$  фазовий зсув

$$\varphi_p(D) = (2\pi + \varphi_2(D) - \varphi_1(D)) \pmod{2\pi}. \quad (4.17)$$

Слід зазначити, що в (4.16) не враховано можливі випадкові похибки вимірювання фазових зсувів. Тому, на перший погляд, може здатися, що відношення  $\frac{f_2}{f_1}$  може бути довільним. Але це не так. Реальні вимірювання

фазових зсувів супроводжуються неминучими похибками і змушують обмежувати це відношення з метою гарантованого розв'язання неоднозначності. Компроміс між необхідністю виконання умови  $f_1 \ll f_2$  та

обмеженістю значень  $\frac{f_2}{f_1}$  досягається проведенням вимірювань на допоміжних

(одній чи декількох) частотах  $f_d$ ,  $f_1 < f_d < f_2$ , і подальшим покроковим перерахунком результатів фазових вимірювань однієї частоти в іншу в

напрямку від вищої до нижчої або навпаки [4.26].

Розв'язання задачі усунення неоднозначності вимірювання фазових зсувів сигналів розглядалось у підрозділі 3.3, де було наведено алгоритм визначення числа цілих фазових циклів  $n$  та умова безпомилкового розв'язку задачі неоднозначності фазових вимірювань. Більш повну інформацію про різні способи та алгоритми обрахунку  $n$  та оцінки ймовірності виникнення грубих похибок можна знайти в роботах [4.14; 4.26]).

Розглянуті способи кумулятивної різночастотної фазометрії не завжди дозволяють здійснювати контроль правильного розв'язку задачі усунення неоднозначності (зокрема, у випадку, коли зменшується співвідношення сигнал/завада і відповідно збільшується ймовірність грубих помилок вимірювання, тобто неправильного визначення  $n$ ). Проте в ряді випадків таку задачу можна вирішити на основі використання числових методів, зокрема на основі використання системи числових залишкових класів. Нижче розглянуто один з таких методів кумулятивної різночастотної фазометрії запропонований в [4.26].

#### **4.4. Метод кумулятивної різночастотної фазометрії на основі числової системи залишкових класів**

Числова система залишкових класів (СЗК) добре відома в теорії чисел [4.1; 4.5]. За певними ознаками вона належить до частково непозиційних систем обчислення. Найбільш інтенсивні дослідження СЗК проводились у 50–60-ті роки ХХ ст. Вони були спрямовані на пошук нових систем обчислення для побудови арифметики обчислювальних машин. Передбачалось, що такі системи дозволять підвищити ефективність, завадостійкість та скоротити час виконання обчислень.

Система залишкових класів розвивалась здебільшого як спеціальна машинна арифметика [4.1; 4.4; 4.29; 4.30]. Значно рідше траплялись роботи, пов'язані з використанням СЗК у фізичному експерименті [4.11; 4.12; 4.21].

Але обчислювальна техніка розвивалась у напрямі використання позиційних систем числення і досягла суттєвих успіхів. На сьогодні комп'ютерні системи дозволяють розв'язувати задачі великої обчислювальної складності.

Це призвело до зменшення інтересу до СЗК і її потенціальних можливостей щодо виконання чисто обчислювальних задач. Водночас властивості СЗК, пов'язані з модульним характером подання інформації, роблять її досить привабливою щодо використання у ІВС як спосіб передавання, подання та відновлення переданої інформації. Зокрема, властивість циклічності, притаманна одночасно СЗК і фазовим зсувам сигналів, дозволяє застосувати подання останніх за допомогою СЗК [4.2; 4.16; 4.17]. Крім того, кодування інформації в СЗК можна використовувати також як спосіб передавання та

захисту інформації.

**Теоретико-числові засади багатовимірної фазометрії на основі СЗК.** Сутність СЗК полягає у поданні всіх цілих чисел  $A \in N$  множиною невід’ємних залишків  $A_{\tilde{N}\tilde{C}\tilde{E}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , утворених при діленні  $A$  на інші певні цілі взаємно прості числа  $n_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Цю групу чисел називають *модулями системи*, або основою СЗК [4.1; 4.5]. Множина залишків за кожним модулем  $\alpha_i \equiv A \pmod{n_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$  утворює кільце цілих чисел за певним модулем  $\alpha_i \in [0, n_i)$ .

Інтервал подання чисел  $[0, A_p)$ , обмежений значенням  $A_p = \prod_{i=1}^m n_i$ , називатимемо *робочим* діапазоном, цілі числа з інтервалу  $[0, A_p)$  – *правильними* числами, а значення  $A_p$  – межею робочого діапазону СЗК для обраної системи модулів.

Якщо основу СЗК доповнити додатковим модулем  $n_{m+1}$ , то утворюється інтервал подання чисел  $[0, A_i)$ , обмежений значенням  $A_i = \prod_{i=1}^{m+1} n_i$ . Інтервал  $[0, A_i)$  називатимемо *повним* діапазоном, а цілі числа з інтервалу  $[A_\delta, A_i)$  – *неправильними*.

Систему модулів  $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_{m+1})$ , яка задовольняє умову  $n_1 < n_2 < \dots < n_{m+1}$ , називатимемо *упорядкованою*.

Число  $A_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{m+1})$ , отримане з  $A_{\tilde{N}\tilde{C}\tilde{E}}$  вилученням залишку  $\alpha_i$ , називатимемо *проекцією* числа  $A$  за модулем  $n_i$ .

Довільну помилку в одному залишку подання  $A_{\tilde{N}\tilde{C}\tilde{E}}$  називатимемо *однократною*, у двох залишках – *двократною*, в декількох – *багатократною*.

**Твердження 4.1.** Нехай модулі системи залишкових класів

$$n_1, n_2, \dots, n_m, n_{m+1} \tag{4.18}$$

є взаємнопростими числами і задовольняють умову

$$n_i < n_{m+1}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.19}$$

і нехай  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$  – *правильне* число. Тоді число  $\tilde{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \tilde{\alpha}_k \neq \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$  – *неправильне* число.

*Доведення.* Оскільки число  $A$  правильне, то

$$A \pmod{n_{m+1}} < A_p = \frac{A_i}{n_{m+1}}. \tag{4.20}$$

Оскільки в числі  $\tilde{A}$ , поданому в СЗК, спотворено лише один  $k$ -тий залишок, а решта залишків лишилась незмінною, то в позиційній системі числення число  $\tilde{A}$  подається сумою числа  $A$  і такого цілого числа, яке ділиться без залишку на всі модулі  $n_1 \dots n_{m+1}$  за винятком модуля  $n_k$ , ділення на який дає залишок  $\alpha \in [0, n_k)$ .

Оскільки всі модулі взаємопрості числа, то

$$\tilde{A} = (A + n_1 n_2 \dots (n_k + \alpha) \dots n_{m+1}) \pmod{A_i} = \left( A + \alpha \frac{A_i}{n_k} \right) \pmod{A_i}. \quad (4.21)$$

Покажемо, що  $\tilde{A} < A_i$ . Візьмемо максимальне значення залишку  $\alpha = n_k - 1$ . У цьому випадку з урахуванням нерівності (4.19) маємо

$$A + A_i \left( \frac{n_k - 1}{n_k} \right) < \frac{A_i}{n_{m+1}} + A_i - \frac{A_i}{n_k} < A_i. \quad (4.22)$$

Покажемо, що  $\tilde{A} > A_p$ . Для цього достатньо виконати нерівність (4.22) за мінімального значення правильного числа, тобто при  $A = 0$

$$A_{\Pi} \frac{\alpha}{n_k} = A_p \alpha \frac{n_{m+1}}{n_k} > A_p.$$

Отже, доведено, що неправильне число  $\tilde{A}$  належить інтервалу  $[A_p, A_{\Pi})$ .

Таким чином, довільне спотворення одного із залишків, якими подається число  $A < A_p$  в СЗК, переводить його у разі відновлення в позиційній системі в інтервал  $[A_p, A_{\Pi})$ . З цієї теореми випливає важливий практичний наслідок: існує лише одне єдине значення залишку  $\alpha_k$ , яке повертає відновлене в позиційній системі число  $A$  в робочий діапазон  $[0, A_p)$ . Ілюстрація процесу переходу в повний діапазон неправильного числа зі спотворенням одного залишку і повернення числа в робочий діапазон після виправлення залишку графічно показано на рис. 4.15.

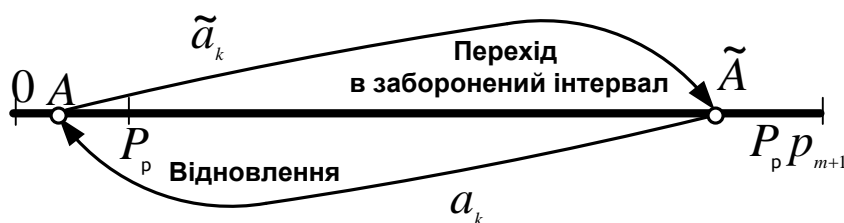


Рис. 4.15. Процес спотворення і відновлення правильного числа

*Твердження 4.1* дає теоретичне підґрунтя для виявлення і виправлення помилок даних, поданих кодами СЗК. Критерієм відсутності помилки в  $A_{\text{СЗК}}$  є виконання умови



$$A = \left[ \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i B_i \right] \pmod{A_i} < A_p, \quad (4.24)$$

тобто належність відновленого значення числа  $A$  до робочого діапазону  $[0, A_\delta)$ . Невиконання умови (4.24) свідчить про наявність помилки в одному чи декількох залишках.

Наведемо такий важливий наслідок з твердження 4.1 [4.1].

*Наслідок 1.* Нехай серед модулів системи є  $s$  таких модулів  $n_{i+1}, \dots, n_{i+s}$ , для яких виконується умова

$$\prod_{i=1}^s n_{i+t} < n_{m+1}. \quad (4.25)$$

Довільні спотворення в залишках за декількома або за всіма вказаними модулями для відновлення числа у позиційній системі числення перетворюють правильне число в неправильне.

Отже, перевіркою умови (4.24) можна виявити не тільки однократні, але й багатократні помилки в поданні чисел  $A_{СЗК}$  за умови (4.25).

**Твердження 4.2.** Нехай в СЗК з модулями (4.18), які є взаємпростими числами, і які задовольняють умову (4.19), задано правильне число  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$ . Проекції цих чисел за всіма модулями збігаються, тобто

$$A_1 = A_2 = \dots = A_i = \dots = A_{m+1} = A. \quad (4.26)$$

Доведення твердження 4.2 наведено в праці [4.1]. Воно дозволяє виконати перевірку неушкодженості  $A_{СЗК}$  шляхом порівняння різних проекцій відновленого числа. Якщо  $A > A_p$ , а проекція  $A_i < A_p$ , це свідчить про можливість помилки в  $i$ -му залишку. У разі обрахунку  $A_i$  кожній модифікованій системі модулів  $(n_2, n_3, \dots, n_{m+1})$ ,  $(n_1, n_3, \dots, n_{m+1})$ ,  $\dots$ ,  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$  відповідає певна система ортонормованих базисів з різними межами робочого діапазону  $A'_p$ .

Коригування виявлених помилок потребує додаткових обчислень. Одним з ефективних способів виявлення і виправлення помилок у СЗК є метод зведення залишків у поданні числа  $A_{СЗК}$  до нуля у всіх розрядах, окрім додаткового контрольного. Цей спосіб дістав назву «нуль-спосіб порівняння чисел», або просто «нуль-спосіб» [4.1; 4.3]. Сутність способу полягає у послідовному, розряд за розрядом, переході від вихідного подання числа  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$  до числа  $(0, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$ , кратного  $n_1$ , потім до числа  $(0, 0, \dots, \gamma_{m+1})$ , кратного  $n_1 n_2$  і т.д. за допомогою послідовного віднімання певних чисел, що називаються константами нуль-способу. Ці константи обираються як найменші можливі для

виконання наведеної операції числа, необхідні для того, щоб результат обчислень залишився в межах робочого діапазону. Загальна кількість числових

констант для системи з  $m$  модулями дорівнює  $\sum_{i=1}^m n_i - m$ .

Використання нуля-способу обґрунтовує таке твердження.

**Твердження 4.3.** Якщо у впорядкованій системі модулів  $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_{m+1})$  задано неправильне число  $\tilde{A} = (\alpha_1, \dots, \tilde{\alpha}_i, \dots, \alpha_{m+1})$  з помилкою, що дорівнює  $\Delta\alpha_i$  помилкою у  $i$ -му розряді за модулем  $n_i$ , тобто  $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \Delta\alpha_i \pmod{n_i}$ , і якщо в результаті застосування до числа  $\tilde{A}$  нуля-способу отримано подання  $(0, \dots, 0, \gamma_{m+1})$ , то число визначається  $\gamma_{m+1}$  помилкою таким співвідношенням

$$\gamma_{m+1} = \left[ \frac{\Delta\alpha_i m_i n_{m+1}}{n_i} \right] \pmod{n_{m+1}} + \delta,$$

де  $\delta = \overline{0,1}$ ,  $m_i$  – вага  $i$ -го ортонормованого базису

$$m_i = \frac{B_i n_i}{A_p}$$

Доведення твердження 4.3 наведено в праці [4.1]. Отриманий внаслідок реалізації нуля-способу результат не залежить від порядку застосування констант, і, в той же час, дає змогу визначити набір можливих помилок  $\Delta\alpha_i, i = \overline{1, m}$ , які приводять до певного значення  $\gamma_{m+1}$ . Це дозволяє ще на етапі проектування скласти таблицю можливих помилок залежно від  $\gamma_{m+1}$  і користуватись нею для їх виправлення. Пояснення нуля-способу наведено на рис. 4.16.

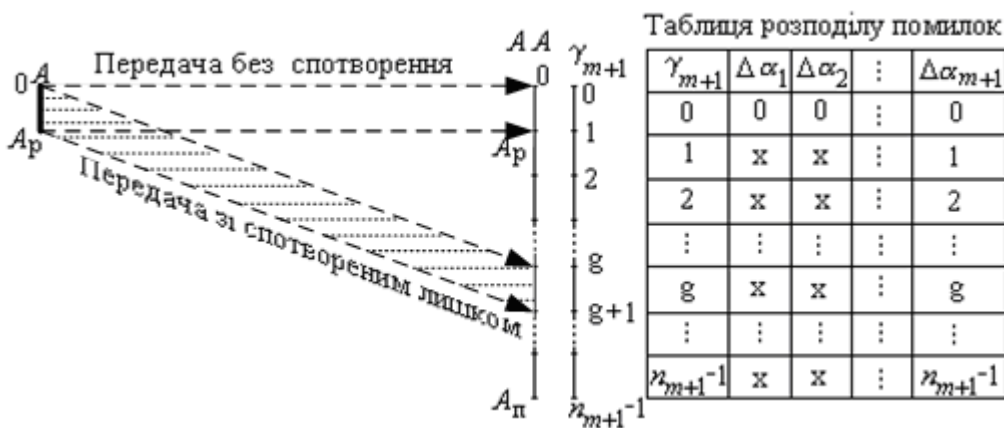


Рис. 4.16. Розподіл помилок залежно від  $\gamma_{m+1}$

Якщо не має помилки, то  $A \in [0, A_p)$ . Такій події відповідає значення  $\gamma_{m+1} = 0$ . Кожна з можливих помилок переводить правильне число  $A$  в неправильне  $\tilde{A}$ , яке належить до одного з інтервалів:  $[A_p, 2A_p)$ ,

$[2A_p, 3A_p), \dots, [mA_p, (m+1)A_p)$ . Номер інтервалу збігається з  $\gamma_{m+1}$ , що формується за допомогою нуль-способу, і дозволяє визначити сукупність модулів з помилками, а також значення цих помилок.

Для оптимізації обчислювальних витрат (або за особливих обмежень проведення фізичного експерименту) інколи необхідно визначити залишок  $\alpha_i = A \bmod n_i$  при розрахунках за іншим модулем  $n_j$ . Такий розрахунок можна виконати за формулою

$$\alpha_i = A \bmod n_i = \frac{n_i}{n_j} \left( \frac{An_j}{n_i} \bmod n_j \right).$$

Якщо, наприклад, вибрати  $n_j = 2^k$ , де  $k \in N$ , то залишок  $\alpha_i$  утворюватиметься автоматично під час виконання операцій  $\frac{An_j}{n_i}$  в арифметико-логічному пристрої у разі обмеження його розрядної сітки  $k$  двійковими розрядами.

**Відновлення цілих чисел в позиційній системі числення з їх представлення у СЗК.** Одним з основних питань практичного використання СЗК є відновлення в позиційній системі числення цілого числа  $A$ , поданого в СЗК залишками  $A_{\text{СЗК}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  за заданою системою модулів  $n_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . З теорії чисел [4.1; 4.5] відомо, що ця задача має однозначний розв'язок у випадку, якщо:

- 1) модулі системи  $n_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  – взаємно прості числа;
- 2) максимальне відновлюване число  $A_{\text{max}}$  задовольняє умову

$$A_{\text{max}} = A_p - 1 = \prod_{i=1}^m n_i - 1.$$

Ці вимоги забезпечуються вибором відповідних значень  $n_i$  та  $m$ . У разі їх виконання ціле число  $A \in [0, A_p)$  відновлюється за формулою

$$A = \sum_{i=1}^m \dot{a}_i B_i \pmod{A_p}, \quad (4.31)$$

де  $(B_1, \dots, B_i, \dots, B_m)$  – система ортонормованих базисів для обраної числової системи модулів. Базиси системи визначають таким чином. Задамо  $m$  цілих чисел  $B_j$  і визначимо відновлюване число  $A$  у вигляді

$$k_1 B_1 + \dots + k_i B_i + \dots + k_m B_m = A, \quad (4.32)$$

де  $k_i$  – числові коефіцієнти. Кожне з чисел  $B_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  у СЗК має векторне подання

$$B_j = (b_{1j}, \dots, b_{ij}, \dots, b_{mj}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.33)$$

Елементами векторів є залишки  $b_{ij}$  від ділення  $B_j$  на модулі  $n_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Ці залишки утворюють матрицю розміром  $m \times m$ :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1j} \dots b_{1m} \\ \dots \\ b_{i1} \dots b_{ij} \dots b_{im} \\ \dots \\ b_{n1} \dots b_{nj} \dots b_{mm} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.34)$$

Якщо число  $A$  подати залишками в СЗК, то рівняння (4.31) в матричній формі матиме вигляд

$$\mathbf{K} \times \mathbf{B} = \mathbf{A}, \quad (4.35)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_i \\ \dots \\ k_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Оскільки за умовами задачі розв'язком (4.35) мають бути цілі числа, необхідно, щоби визначник цього рівняння дорівнював  $\pm 1$ , тобто

$$\begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1j} \dots b_{1m} \\ \dots \\ b_{i1} \dots b_{ij} \dots b_{im} \\ \dots \\ b_{n1} \dots b_{nj} \dots b_{mm} \end{vmatrix} = \pm 1. \quad (4.37)$$

Найпростіший варіант виконання (4.37) отримаємо у випадку, коли матриця (4.34) є одиничною матрицею з елементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Задані таким чином числа утворюють у СЗК ортонормований базис системи. Останній запис означає, що

$$B_j(\text{mod } n_i) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, m},$$

тобто  $B_j$  ділиться націло на всі модулі, окрім  $j$ -го, ділення на який дає залишок «1».

За цих умов коефіцієнти рівняння в (4.36) визначають простим способом:  $k_i = a_i k$ , якщо  $i = \overline{1, m}$ . З виразу (4.34) та умови ортонормованості базису випливає, що  $B_j n_j = c A_p$ , де  $c$  – ціле число, а

$$B_j(\text{mod } n_j) \equiv \frac{c A_p}{n_j}(\text{mod } n_j) = 1. \quad (4.40)$$

Порівняння (4.40) є основним співвідношенням для обчислення базисів СЗК. Отже, бази системи повністю визначаються її модулями, є її незмінними константами і розраховуються на етапі проектування системи. Контроль правильності розрахунку базисів системи виконують перевіркою контрольного співвідношення

$$\left[ \sum_{j=1}^m B_j \right] (\text{mod } A_p) = 1.$$

Табличний метод розрахунку базисів системи СЗК для невеликих значень модулів СЗК наведено у праці [4.1], а програма sokbaz(P) обчислення базисів СЗК з довільною системою модулів – у додатку 2.

Система залишкових класів застосовувалась переважно до цілих чисел під час виконання арифметичних операцій. Водночас властивості СЗК разом з властивістю циклічності під час утворення залишків роблять її привабливою для застосування до циклічних фізичних величин таких, наприклад, як кути та фазові зсуви сигналів.

**Характерні особливості застосування СЗК у фазових ІВС.** Використання СЗК для розв'язання задач фазометрії надає фазовим методам нових властивостей і сприяє розширенню їх сфери застосування. Так, наприклад, використання СЗК дозволяє вирішити питання завадостійкого кодування інформації в системах передавання з фазовою модуляцією, забезпечити конфіденційність передавання інформації, можливість виявляти і коригувати помилки при передачі інформації, визначати фазові зсуви  $\Phi(t) > 2\pi$  у разі прицевійного вимірювання відстані, довжини, часової затримки, електричної довжини кабелю тощо [4.16 - 4.19]. В останньому випадку нагромаджений за час  $(0, t)$  фазовий зсув дорівнює  $\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t) = 2\pi k(t) + \varphi(t)$ , де  $k(t) \in N$  – кількість цілих фазових циклів;  $\varphi(t)$  – фазовий зсув в інтервалі  $[0, 2\pi)$  між гармонічними сигналами вигляду

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_1 \cos \Phi_1(t); \\ u_2(t) &= U_2 \cos \Phi_2(t), \quad t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (4.42)$$

де  $U_1, U_2$  – амплітуди сигналів;  $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$  – фазові характеристики сигналів.

Подібно до залишків у поданні чисел  $A_{\text{СЗК}}$  у фазометрії фази сигналів (4.42) частотою  $f_j, j = \overline{1, m}$  також можна подати як результат ділення фазових характеристик на модуль  $2\pi$ :

$$\varphi_j(t) = \Phi_j(t) \pmod{2\pi} = \Phi_j(t) - 2\pi \left[ \frac{\Phi_j(t)}{2\pi} \right], \quad j = 1, 2. \quad (4.43)$$

У праці [4.2] показано, що вибір значень частот та дискретності вимірювання фазових зсувів  $\Delta\varphi_j$  за формулами

$$f_j = \frac{1}{n_j \tau_0}; \quad (4.44)$$

$$\Delta\varphi_j = \frac{2\pi}{n_j}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4.45)$$

де  $\tau_0$  – інтервал часу, якому кратні періоди гармонічних сигналів, дозволяє визначати  $\Phi(t) > 2\pi$  за багаточастотним методом подібно до того, як розв'язується задача відновлення цілого числа  $A$  за його поданням залишками  $A_{\text{НСЕ}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m)$ . Таким чином, визначення  $\Phi(t)$  подібне до відновлення числа  $A$  за його поданням  $A_{\text{НСЕ}}$ . Маємо відповідність:

$$\begin{aligned} n_j &\Rightarrow f_j, \\ a_j &\Rightarrow \varphi_j, \\ A &\Rightarrow \Phi. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Значення залишків обчислюють за результатами вимірювань фазових зсувів  $\varphi_j$  гармонічних сигналів на частотах  $f_j, j = \overline{1, m}$ , як

$$\alpha_j = \left[ \frac{\varphi_j}{\Delta\varphi_j} \right]. \quad (4.47)$$

Результат вимірювання КФЗ на цій частоті формується відповідно до виразу

$$\Phi_j = A \Delta\varphi_j = A \frac{2\pi}{n_j}, \quad (4.48)$$

тобто без розділення на цілу  $2\pi k_j$  і дробову  $\varphi_j$  частини, на відміну від інших способів і не потребує додаткового узгодження цих величин. Значення числа  $A$  розраховують за результатами вимірювань фазових зсувів на всіх  $f_j, j = \overline{1, m}$

частотах.

Розглянуті теоретичні положення покладено в основу розробленого прецизійного способу вимірювання відстані.

**Спосіб визначення відстані на підставі результатів фазових вимірювань у СЗК.** Нехай треба визначити фіксоване значення відстані в інтервалі  $D \in (0, D_{\max})$ , незмінної на інтервалі часу спостереження  $T_c$  з дискретним кроком  $d_0$ . Вимірювання виконують фазовим кумулятивним різночастотним методом із застосуванням гармонічних сигналів на  $m$  частотах  $\{f_j, j = \overline{1, m}\}$  з довжинами хвиль  $\lambda_j < D_{\max}$ . Робочі частоти вибрано відповідно до рівняння (4.44) як

$$f_j = \frac{1}{n_j \tau_0} = \frac{V}{n_j d_0} = \frac{V}{\lambda_j}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4.49)$$

причому  $n_j$  – взаємно прості цілі числа,  $j = \overline{1, m}$ .

На кожній частоті спостерігається пара гармонічних сигналів, різниця фаз між якими утворилася під час поширення коливання вздовж відстані  $D$  в прямому і зворотному напрямках

$$\begin{aligned} u_{1j}(t) &= U_{1j} \sin(2\pi f_j t), \quad t \in [0, T], \quad j = \overline{1, m}; \\ u_{2j}(t, D) &= U_{2j} \sin\left[2\pi f_j t - \frac{2D}{\lambda_j} 2\pi\right], \quad t \in [0, T_c], \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

де  $U_{1j}$ ,  $U_{2j}$  – амплітудні значення сигналів. Результатом вимірювання є фазові зсуви, які утворюють вектор  $\overline{\varphi_m} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_m)$ , причому  $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Оскільки фазовий зсув  $\varphi_j(D)$  між сигналами (4.50) однозначно визначається лише в межах інтервалу  $[0, 2\pi)$ , то для  $j$ -го фазового зсуву можна записати порівняння

$$\varphi_j(D) \equiv \left(\frac{2D}{\lambda_j} 2\pi\right) \pmod{2\pi}, \quad (4.51)$$

тобто величини  $\varphi_j(D)$  та  $\frac{2D}{\lambda_j} 2\pi$  є порівнюваними за модулем  $2\pi$ . Це означає,

що ці величини мають однакові залишки у результаті ділення на  $2\pi$ .

Множина сигналів (4.50) з частотами (4.49) є множиною з ортогональними компонентами на часовому інтервалі

$$T_{\text{орт}} = \frac{d_0}{V} \prod_{j=1}^m n_j, \quad (4.52)$$

що дозволяє виконувати фазові вимірювання як послідовно в часі, так і одночасно на всіх частотах, тобто застосовувати як вимірювальний, полігармонічний сигнал, що подається сумою гармонічних складових з частотами (4.49).

Використаємо вираз (4.51). Помноживши його на  $\frac{n_j}{2\pi}$ , отримаємо

$$\frac{\varphi_j(D)}{2\pi} n_j \equiv \left( \frac{2D}{\lambda_j} n_j \right) (\text{mod } n_j). \quad (4.53)$$

Виберемо дискретний крок вимірювання фазових зсувів сигналів (4.50) згідно з рівнянням (4.45). Тоді порівняння (4.53) можна записати у вигляді

$$\frac{\varphi_j(D)}{\Delta\varphi_j} \equiv \left( \frac{2D}{d_0} \right) (\text{mod } n_j).$$

Таким чином, результат вимірювання фазових зсувів, з похибкою  $|\delta\varphi| < 0,5\Delta\varphi_j$  можна записати як  $\varphi_j(D) = \alpha_j(D)\Delta\varphi_j$ , де ціле число  $\alpha_j(D) \in [0, n_j)$  можна знайти так:

$$\alpha_j(D) = \left[ \frac{\varphi_j(D)}{\Delta\varphi_j} \right]. \quad (4.55)$$

З похибкою, яка не перевищує за абсолютною величиною значення  $0,5d_0$ , вимірювану відстань можна подати як  $D = A(D)\frac{d_0}{2}$ , де  $A(D)$  – ціле число, яке є

функцією відстані  $D$ ,  $A(D) = \left[ \frac{2D}{d_0} \right]$ . З урахуванням таких припущень та виразу

(4.55) для всіх  $j = \overline{1, m}$  частот можна скласти систему порівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1(D) \equiv (A(D)) (\text{mod } n_1), \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_j(D) \equiv (A(D)) (\text{mod } n_j), \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_m(D) \equiv (A(D)) (\text{mod } n_m). \end{cases} \quad (4.56)$$

В порівняннях (4.56) число  $A(D)$  дорівнює кількості відрізків довжиною  $0,5d_0$ , яка вкладається на вимірюваній відстані, а  $\alpha_j(D)$  – це залишки цього числа за модулями  $n_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Таким чином, накладені на вибір частот і дискретність вимірювання фазових зсувів початкові умови (4.44) та (4.45)



дозволяють подати числовий результат вимірювання  $A(D)$  залишками цього числа за системою модулів  $(n_1, \dots, n_j, \dots, n_m)$  і звести задачу розв'язання багатозначності фазових вимірювань до відновлення цілого числа  $A(D) = (\alpha_1(D), \dots, \alpha_j(D), \dots, \alpha_m(D))$  у позиційній системі числення. Процес утворення залишків  $\alpha_j(D)$  для вимірювальних сигналів на різних частотах ілюструє рис. 4.17.

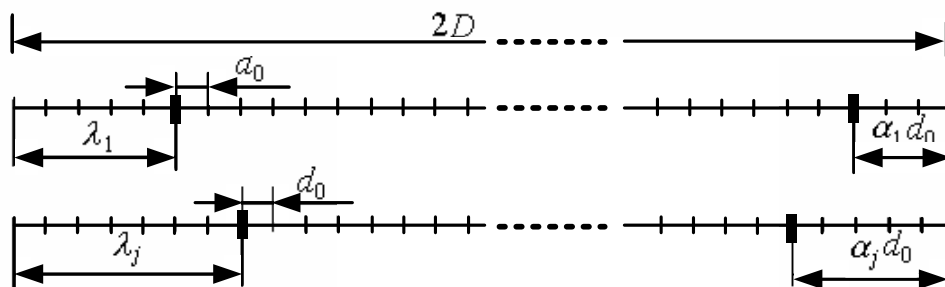


Рис. 4.17. Утворення залишків  $\alpha_j(D)$

Для однозначного відновлення числа  $A$  в позиційній системі числення необхідно задовольнити такі умови:

1) модулі системи  $n_j, j = \overline{1, m}$  – взаємно прості числа;

2) максимальна вимірювана відстань  $D_{\max} < \frac{d_0}{2} \prod_{j=1}^m n_j$ .

Ці умови забезпечуються відповідним вибором значень модулів  $n_j$  та їх кількості  $m$ . За належного вибору  $n_j$  та  $m$  результат вимірювання відстані обчислюється як

$$D = \frac{d_0}{2} \left( \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\varphi_j(D)}{\Delta\varphi_j} \right] B_j \right) \pmod{A_p}. \quad (4.57)$$

У рівнянні (4.57) вираз у дужках являє собою КФЗ сигналів  $j$ -ї частоти поділений на  $\Delta\varphi_j$ :

$$\left[ \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\varphi_j(D)}{\Delta\varphi_j} \right] B_j \right] \pmod{A_p} = \left[ \frac{\Phi_j(D)}{\Delta\varphi_j} \right] = \left[ \frac{2\pi k_j(D) + \varphi_j(D)}{\Delta\varphi_j} \right]. \quad (4.58)$$

Таким чином, визначення відстаней (отже, і КФЗ) зводиться до виконання ряду вимірювальних та обчислювальних операцій:

- вимірювання фазових зсувів сигналів у межах інтервалу  $[0, 2\pi)$  на частотах  $f_j, j = \overline{1, m}$ ;

- визначення залишків  $\alpha_j, j = \overline{1, m}$ ;
- обчислення суми добутоків  $\alpha_j B_j, j = \overline{1, m}$ , за модулем  $A_p$  та множення отриманого числа на ваговий коефіцієнт  $0,5d_0$  (у разі визначення відстаней), або  $\Delta\varphi_j = \frac{2\pi}{n_j}$  (у разі визначення КФЗ на частоті  $f_j$ ).

У запропонованому методі вимірювання, на відміну від відомих, не виконуються додаткові операції, спрямовані на окреме визначення кількості цілих фазових циклів. Виміряне значення  $\Phi_j$ , яке містить в собі і кількість цілих фазових циклів, і фазовий зсув в інтервалі  $[0, 2\pi)$ , знаходять за опрацьованими результатами вимірювань фазових зсувів сигналів на всіх частотах. Тобто кожне значення з множини  $\{\varphi_j, j = \overline{1, m}\}$  містить інформацію і про  $k_j$ , і про  $\varphi_j$ .

Проілюструємо застосування запропонованого способу на прикладі.

*Приклад 4.1.* Нехай вимірюється відстань 1955,1 м з дискретністю 1 м, тобто  $D=1955,1$  м,  $d_0=1$  м, і нехай модулі системи дорівнюють:  $n_1=13, n_2=17, n_3=19$ .

Розрахунки виконаємо в два етапи.

1. Етап підготовки вихідних даних.

Розрахунок робочого діапазону СЗК:  $A_p = \prod_{j=1}^3 n_j = 13 \cdot 17 \cdot 19 = 4199$ .

Перевірка виконання умови однозначного вимірювання відстані:  $D < D_{\max}$ :

$$D_{\max} = \frac{d_0}{2} A_{\max} = 0.5 \cdot 4198 = 2099 \text{ м. Отже } D_{\max} > D.$$

Розрахунок частот  $f_j, j = \overline{1, 3}$ . У разі використання електромагнітних хвиль, які поширюються у просторі зі швидкістю близько  $3 \cdot 10^8$  м/с, результати розрахунків частот згідно з виразом (4.44) дають такі значення:

$$f_1 \approx 23,077 \text{ ГГц}, \quad f_2 \approx 17,647 \text{ ГГц}, \quad f_3 \approx 15,789 \text{ ГГц}.$$

Розрахувавши ортонормовані базиси для заданих модулів СЗК, маємо:  $B_1=1938, B_2=494, B_3=1768$ .

Перевірка умови правильності визначення базисів (4.44):

$$\left[ \sum_{j=1}^3 B_j \right] (\text{mod } A_p) = [1938 + 494 + 1768] (\text{mod } 4199) = [4200] (\text{mod } 4199) = 1.$$

Результати розрахунків ступенів квантування фазових зсувів (4.45) та очікуваних фазових зсувів  $\varphi_j(D) = \Phi_j(D) \bmod 2\pi$  (4.51) зведено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 Розрахунки  $\Delta\varphi_j$  та  $\varphi_j(D)$  за даними прикладу 4.1

Параметри	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$\Delta\varphi_j$ , рад	0.4833	0.3696	0.3307
$\varphi_j(D)$ , рад	4.9361	0.0691	4.9876

2. Етап обробки результатів вимірювання фазових зсувів сигналів.

Визначення залишків  $\alpha_j(D)$  – відповідно до (4.55). За результатами вимірювань фазових зсувів визначаються (якщо не має похибок вимірювань) залишки  $\alpha_1(D)=10$ ,  $\alpha_2(D)=0$ ,  $\alpha_3(D)=15$  та формується вектор вхідних даних  $A_{CЗК}(D) = (10, 0, 15)$ .

Визначення результату вимірювання відстані відповідно до рівняння:

$$\begin{aligned} D &= 0,5 \cdot (10 \cdot 1938 + 0 \cdot 494 + 15 \cdot 1768) \pmod{4199} = \\ &= 0,5 \cdot (45900) \pmod{4199} = 0,5 \cdot (41990 + 3910) \pmod{4199} = 1955 \text{ м.} \end{aligned}$$

У реальному вимірювальному експерименті з визначення відстані процес вимірювання фазових зсувів супроводжується похибками, а обчислення – помилками. Це може призвести до того, що отримані числові значення залишків  $\tilde{\alpha}_j$  відрізнятимуться від їх істинних значень  $\alpha_j$  на величину  $\pm 1$  або навіть більшу. Отже, існує імовірність виникнення грубих похибок вимірювання, яка збільшується з наближенням  $\varphi_j(D)$  до значень кратних  $\Delta\varphi_j$ . Ці значення розділяють інтервали, що відповідають суміжним залишкам. Для зменшення ймовірності грубих похибок необхідно модифікувати алгоритм визначення залишків (4.55). Одним з можливих варіантів є штучне перенесення процесу визначення залишків в області, які розташовані якнайдалше від значень кратних  $\Delta\varphi_j$ . В цьому випадку необхідно вимірювати  $\varphi_j(D)$  ступенями, меншими за  $\Delta\varphi_j$ , а значення залишків обчислювати так:

$$a_j(D) = \left[ \frac{\varphi_j(D)}{\Delta\varphi_j} + L(\varphi_j) \right], \quad (4.59)$$

де коригувальна функція

$$L(\varphi_j) = \begin{cases} 0,5, & (\varphi_j) \pmod{\Delta\varphi_j} \in [0, 0,25\Delta\varphi_j); \\ 0, & (\varphi_j) \pmod{\Delta\varphi_j} \in [0,25\Delta\varphi_j, 0,75\Delta\varphi_j); \\ -0,5, & (\varphi_j) \pmod{\Delta\varphi_j} \in [0,75\Delta\varphi_j, \Delta\varphi_j). \end{cases} \quad (4.60)$$

Розглянемо числовий приклад застосування алгоритмів (4.59), (4.60).

*Приклад 4.2.* Нехай вимірювання фазових зсувів  $(\varphi_j(D)) \pmod{2\pi}$  для прикладу 4.1 супроводжується дією випадкових похибок  $\delta\varphi_j$ , причому  $|\delta\varphi_j| < 0,25\Delta\varphi_j$ . Результати обчислення залишків до і після їх коригування за впливу похибок  $\delta\varphi_j$  зведено в табл. 4.2.

**Таблиця 4.2 Результати розрахунку  $\delta\varphi_j$ ,  $\varphi_j$ ,  $\tilde{\alpha}_j$ ,  $\alpha'_j$  для прикладу 4.2**

Параметри	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$\delta\varphi_j$ , рад	-0,11	-0,08	0,05
$\varphi_j = \varphi_j + \delta\varphi_j$ , рад	4,8261	6,2723	5,0376
$\tilde{\alpha}_j$ (обчислення за (5.55))	9	16	15
$\alpha'_j$ (обчислення за (5.59))	9	16	14
$\alpha''_j$ (обчислення за (5.59))	10	0	15

Обчислення  $L(\varphi_j)$  для  $\alpha'_j$  виконувалось за результатами вимірювання на частоті  $f_1$ . Оскільки  $(\varphi_1) \pmod{\Delta\varphi_1} = (4,8261) \pmod{0,4833} = 0,4764$ , то  $L(\varphi_1) = -0,5$ . У першому випадку для визначення  $\alpha''_i$  використовувалась коригувальна функція, обчислена за результатами вимірювань на частоті  $f_3$ . У цьому випадку  $L(\varphi_3) = 0,5$ . До коригування залишків результат вимірювання відстані дорівнював  $D = 739$  м, тобто містив грубу похибку вимірювання. Результати вимірювання після їх коригування дорівнюють  $D' = 1954,5$  м та  $D'' = 1955$  м відповідно для першого і другого випадків. Ці результати не містять грубих похибок, що доводить ефективність запропонованого алгоритму обчислення залишків.

Обчислення залишків згідно з виразом (4.59) зменшує ймовірність виникнення грубих похибок, але не виключає повністю можливість їх появи.

Водночас цей метод визначення  $D$ , на відміну від усіх відомих, дозволяє коригувати та контролювати правильність розв'язання задачі неоднозначності фазових вимірювань. Такий контроль можна виконати допоміжним вимірюванням на додатковій частоті  $f_{m+1}$  (одній чи декількох) і визначенням додаткового контрольного залишку  $\alpha_{m+1}$  (чи декількох залишків) та застосуванням *твердження 4.1*. Розглянемо використання додаткового вимірювання для виявлення грубих помилок визначення відстані на прикладі.

*Приклад 4.3.* Скористаємось вихідними даними прикладу 4.1. Доповнимо СЗК додатковим контрольним модулем  $n_{m+1} = n_4 = 23$ . Цьому модулю відповідає робоча частота  $f_4 \approx 13,043$  МГц, ступінь квантування  $\Delta\varphi_4 \approx 0,2732$  рад, очікуваний фазовий зсув  $\varphi_4 \approx 0,0155$  рад та залишок  $\alpha_4 = 0$ . Базиси нової розширеної системи дорівнюють:  $B_1 = 81719$ ,  $B_2 = 34086$ ,  $B_3 = 10166$ ,  $B_4 = 67184$ , а повний діапазон подання чисел обмежений значенням  $A_i = A_p \delta_{m+1} = 96577$ . Якщо не має помилок у визначенні залишків, відновленим з розширеної СЗК числа  $A_{\text{СЗК}} = (10, 0, 15, 0)$  отримують такий результат

$$\begin{aligned} A &= [10 \cdot 81719 + 0 \cdot 34086 + 15 \cdot 10166 + 0 \cdot 67184] (\text{mod } 96577) = \\ &= (969680) (\text{mod } 96577) = (96577 \cdot 10 + 3910) (\text{mod } 96577) = 3910 < A_p, \end{aligned}$$

що відповідає заданій відстані  $D = 1955$  м.

Легко пересвідчитись, що спотворення довільного розряду числа  $A$  призводить до виходу відновленого числа з діапазону  $[0, 4199)$ . Так, наприклад, якщо  $\alpha_2 = 1$ , відновлене значення дорівнює  $\tilde{A} = 37996 > A_p$ , а якщо  $\alpha_2 = 16$ , то  $\tilde{A} = 66401 > A_p$ , що свідчить про наявність грубої похибки під час визначення залишків і вказує на потребу повторити вимірювальний експеримент.

За даними [4.1] уведення лише одного додаткового модуля  $n_{m+1} > n_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  дозволяє виявляти всі одиночні помилки і близько 95% подвійних помилок (помилки у двох залишках).

Таким чином, вимірювати відстані (КФЗ сигналів) у фазовій далекометрії можна за допомогою використання СЗК. Така можливість реалізується відповідним вибором значень частот та ступенів квантування фазових зсувів гармонічних сигналів і спеціальною обробкою результатів вимірювань. Діапазони вимірювань та частот сигналів можна змінювати відповідним вибором системи модулів (кількості та значення частот гармонічних сигналів).

Подання результатів кумулятивних різночастотних фазових вимірювань у СЗК дозволяє підвищити ймовірність визначень однозначності проведенням додаткових фазових вимірювань на одній чи декількох допоміжних частотах, контролем розв'язання задачі однозначності, пошуком помилкових значень залишків (помилкових результатів вимірювань фазових зсувів сигналів на окремих частотах) і їх виправленням, що особливо актуально для вимірювань за низького співвідношення сигнал/завада.

Використання запропонованого методу вимірювання та обробки найбільш доцільне для фазових ІВС, які призначені для вимірювання КФЗ, що значно перевищують  $2\pi$  за співвідношення сигнал/завада, яке наближається до одиниці.

#### 4.5. Підсумки до розділу

У розділі розглянуто основні методи фазометрії, в першу чергу відомі методи вимірювання та перетворення фазових зсувів гармонічних сигналів. За принципом проведення фазових вимірювань методи фазометрії поділяються на компенсаційний та методи перетворення фазових зсувів в інші величини – напругу, часовий інтервал, геометричні параметри осцилографічних зображень досліджуваних сигналів та кут повороту рухомої частини електромеханічних приладів, тощо.

Розглянуто допоміжні операції з фазами сигналів, які часто застосовують для підвищення характеристик точності вимірювання та розширення діапазону вимірювання. До таких операцій належать: гетеродинне та стробоскопічне перетворення частоти сигналів, ділення («послаблення») та множення («підсилення») початкових фаз (фазових зсувів сигналів).

Запропоновані методи фазометрії можна умовно поділити на два види:

- методи вимірювань фазових характеристик у межах півінтервалу  $[0, 2\pi)$ ;
- методи вимірювань, які дають змогу розширити межі вимірювань фазових характеристик за межі інтервалу  $2\pi$  (кумулятивні методи).

Кумулятивні методи розглянуто на прикладі методу кумулятивної різночастотної фазометрії для вимірювання незмінної під час вимірювання відстані до об'єкта. Наведено способи реалізації методу кумулятивної різночастотної фазометрії, обґрунтовано умови й обмеження щодо усунення неоднозначності вимірювання фазового зсуву сигналів.

Наведено нові результати розв'язання задач фазометрії на основі теоретико-числових засад використання числової СЗК. Відзначено, що числова СЗК добре відома в теорії чисел. За певними ознаками її можна віднести до частково непозиційних систем обчислення. Найбільш інтенсивні дослідження СКЗ проводили в 50–60-ті роки ХХ ст. при обґрунтуванні нових систем обчислення для побудови арифметики обчислювальних машин з метою підвищення ефективності, завадостійкості та скорочення часу виконання

обчислень. Але обчислювальна техніка розвивалась у напрямі використання позиційних систем числення і досягла суттєвих успіхів при розв'язанні складних обчислювальних задач. Можна припустити, що це зменшило інтерес до СЗК і її потенційних можливостей щодо виконання чисто обчислювальних задач. Але у зв'язку з тим, що властивості СЗК, залежить від модульного характеру подання інформації, це дає змогу їх ефективного використання у фазових ІВС. Зокрема, властивість циклічності, притаманна одночасно СЗК і фазовим зсувам сигналів, дозволяє застосовувати їх подання за допомогою СЗК. Крім того, кодування інформації в СЗК можна використовувати також як спосіб передавання та захисту інформації.

Так, запропоновано і детально розглянуто новий спосіб реалізації методу кумулятивної різночастотної фазометрії із застосуванням методів теорії чисел. Показано, що усунення неоднозначності під час вимірювання КФЗ сигналів понад  $2\pi$  при виконанні обґрунтованих необхідних та достатніх умов зводиться до відновлення цілого числа, поданого залишками у СЗК.

Обґрунтовано, що в цілому реалізація методу кумулятивних різночастотних фазових вимірювань у СЗК дає змогу підвищити ймовірність розв'язання задачі однозначності шляхом проведення додаткових фазових вимірювань на одній чи декількох допоміжних частотах, обчислити помилкові значення залишків (помилкових результатів вимірювань фазових зсувів на окремих частотах) і виправити їх.

Проблематиці основних методів фазометрії присвячено також наукові праці [4.1 – 4.32].

*Главное, делайте все с увлечением,  
это страшно украшает жизнь*  
Л.Д. Ландау

## Розділ 5

### **ТЕХНІЧНІ ЗАСОБИ РЕГУЛЮВАННЯ, ВИМІРЮВАННЯ ТА ВІДТВОРЕННЯ ФАЗОВИХ ЗСУВІВ ГАРМОНІЧНИХ СИГНАЛІВ**

У цьому розділі розглянуто характерні приклади реалізації пристроїв регулювання, вимірювання, перетворення та відтворення фазових зсувів електричних сигналів у широкому частотному і динамічному діапазонах.

Наведено схеми фазообертачів та ліній затримки сигналів, робота яких ґрунтується на використанні різних фізичних явищ та ефектів, структури фазометрів, що реалізують різні способи вимірювання фазових зсувів сигналів, а також структури прецизійних калібраторів фазових зсувів сигналів.

Розглянуті засоби вимірювальної техніки реалізуються схемотехнічним шляхом і наведені для ілюстрації розвитку фазометрії, широких можливостей фазовимірювальних перетворень та кращого розуміння алгоритмів отримання і обробки інформації у фазометрії. Наведений матеріал дає змогу краще зрозуміти сутність і переваги застосування нових інформаційних технологій у фазометрії, які дозволяють виконати більшу частину операцій обробки сигналів та вимірювальної інформації програмним шляхом, оцінити ефективність використання методів статистичної обробки даних фазових вимірювань.

#### **5.1. Засоби регулювання фазових зсувів гармонічних сигналів**

У класі фазових пристроїв налічується значна кількість видів фазообертачів [5.8; 5.10; 5.12 –5.15; 5.17; 5.18; 5.22]. Як відомо, ці пристрої забезпечують фазовий зсув між вхідним і вихідним гармонічними сигналами на певне задане каліброване значення. Такі пристрої використовують у компенсційних фазометрах, фазовимірювальних системах, системах з квадратурною обробкою сигналів тощо. Фазообертачі з фіксованим фазовим зсувом на  $90^\circ$  створюють квадратурні сигнали для кругових розгортки, які застосовують для керування фазами випромінюваних та прийнятих сигналів фазових антенних решіток тощо. Фазообертачі з регульованим фазовим зсувом високої точності, які здатні протягом значного інтервалу часу зберігати градувальну характеристику, використовують як вимірювальні. Вони призначені для формування високостабільного і відомого з високою точністю фазового зсуву сигналів у межах інтервалу  $(0, 360^\circ)$ , іноді в інтервалі  $(-n360^\circ, n360^\circ)$ , де  $n$  – ціле число.

Кожний чотириполіусник, до складу якого входять реактивні елементи, може бути використаний як фазообертач, оскільки він має певну фазочастотну характеристику. Стабільність цієї характеристики обумовлена стабільністю  $R$ ,



$L$ ,  $C$  елементів, що входять до його складу, та видом залежності фазового зсуву сигналів від параметрів цих елементів.

Нижче розглянуто принципи дії та схемні рішення деяких типів фазообертачів.

Інтегрувальні та диференціальні  $RC$ -ланки є найпростішими фазообертачами (див. рис. 5.1). Для фазообертача на основі інтегрувальної  $RC$ -ланки (див. рис. 5.1) амплітудо-частотна та фазочастотна характеристики мають вигляд

$$|\dot{K}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fCR)^2}},$$

$$\varphi(f) = -\arctg 2\pi fCR.$$

Графіки цих функцій зображено на рис. 5.2.

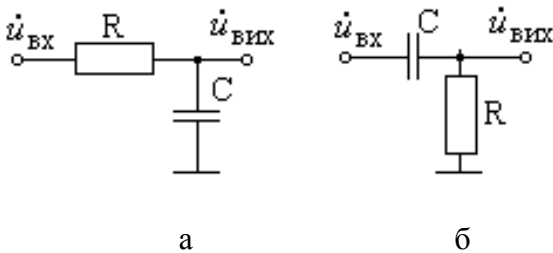


Рис. 5.1. Фазообертачі на інтегрувальній (а) та диференціальній (б)  $RC$ -ланках

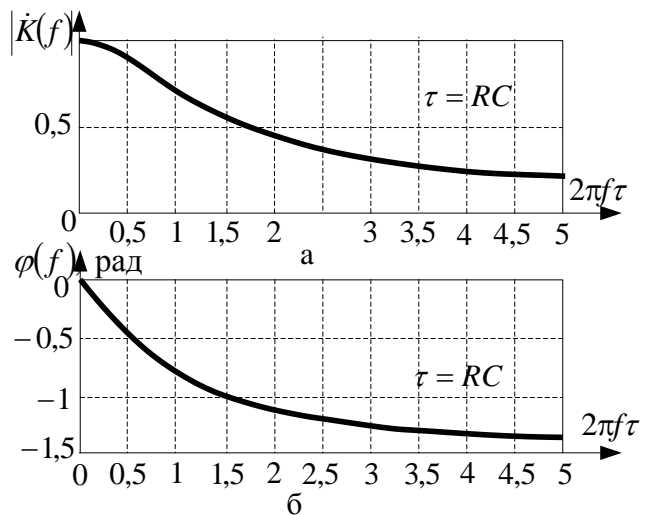


Рис. 5.2. Амплітудно-частотні (а) та фазочастотні характеристики (б) інтегрувальної  $RC$ -ланки

Для фазообертача, що є диференціальною  $RC$ -ланкою (рис. 5.1, б) АЧХ та ФЧХ визначають відповідно так

$$|\dot{K}(f)| = \frac{2\pi fCR}{\sqrt{1 + (2\pi fCR)^2}}; \quad \varphi(f) = \arctg \frac{1}{2\pi fCR}.$$

Фазообертачі  $RC$ -типу застосовують для отримання фіксованих та плавно змінюваних фазових зсувів сигналів у діапазоні низьких частот, переважно на фіксованих частотах у діапазоні  $\varphi \in (-0,5\pi, 0,5\pi)$ . Мінімальна похибка можлива для незначного діапазону фазових зсувів сигналів.

На практиці отримали поширення фазообертачі, в яких для зменшення загасання сигналу використовують підсилювачі – диференціальні та інтегрувальні підсилювачі. Схему інтегрувального підсилювача на операційному підсилювачі  $DA$  показано на рис. 5.3.

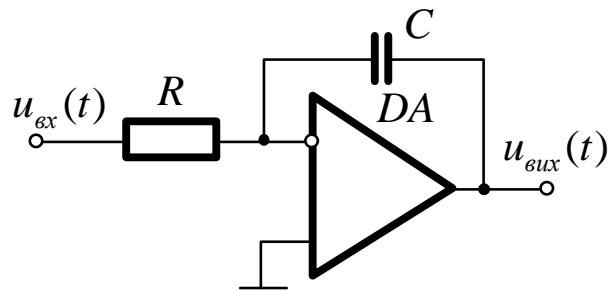


Рис. 5.3. Схема інтегрального підсилювача на операційному підсилювачі

Для значних коефіцієнтів підсилення операційних підсилювачів комплексний коефіцієнт передачі схеми становить

$$\dot{K}(f) \approx -\frac{1}{i2\pi fCR}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Основними джерелами похибок таких фазообертачів є скінченне значення коефіцієнта підсилення підсилювача, наявність активної складової в комплексному опорі конденсатора та реактивності резистора.

За наявності двох квадратурних сигналів можна шляхом їх додавання з різними коефіцієнтами передачі реалізувати пристрій з діапазоном регулювання фазового зсуву сигналів в інтервалі  $(0, 90^\circ)$ . Варіант схеми такого фазообертача показано на рис. 5.4.

Синфазна і квадратурна складові сигналів формуються відповідно з використанням потенціометрів  $R1, R6$ . Сигнали додаються з використанням однакових і точно підібраних однотипних резисторів  $R3, R4$ . Для сумарного сигналу маємо

$$u_{\text{аєо}}(t) = U_1 \cos(2\pi ft) + U_2 \sin(2\pi ft) = U_c \sin(2\pi ft + \varphi_c),$$

де

$$U_c = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}, \quad \text{tg}\varphi_3 = \frac{U_2}{U_1} \in [0, \infty)$$

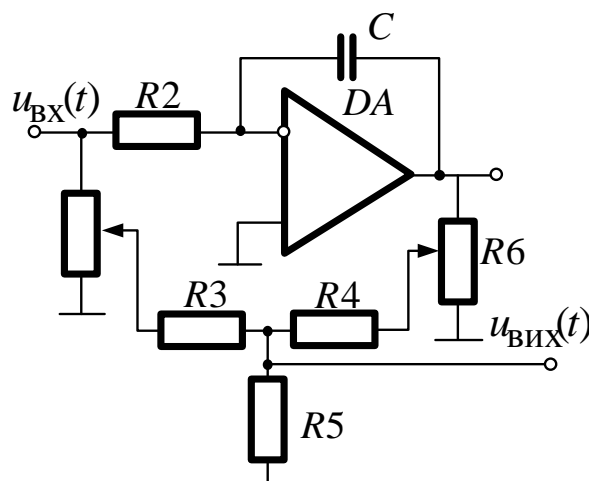


Рис.5.4. Схема фазообертача на основі додавання квадратурних сигналів

Діапазон регулювання фазових зсувів сигналів у фазообертачі такого типу можна розширити до інтервалу  $(0, 360^\circ)$  почерговим інвертуванням квадратурних сигналів, що додаються.

Застосовуючи принцип обробки квадратурних компонентів сигналу, можна реалізувати кодкерований фазообертач, принцип дії якого ґрунтується на використанні відомого тригонометричного співвідношення

$$U \cos(2\pi ft - \varphi_\zeta) = U \cos(2\pi ft) \cos(\varphi_\zeta) + U \sin(2\pi ft) \sin(\varphi_\zeta).$$

Структурну схему кодкерованого фазообертача з підсумовуванням квадратурних сигналів показано на рис. 5.5. Відповідно до співвідношення фазообертач ФО формує квадратурний сигнал  $U \sin(2\pi ft)$  із вхідного сигналу  $U \cos(2\pi ft)$ . Ці сигнали перемножуються в чотириквadrантних цифро-аналогових перетворювачах ЦАП1 та ЦАП2 відповідно на коди  $N_S = [N_{\max} \sin(\varphi_\zeta)]$  та  $N_{\tilde{n}} = [N_{\max} \cos(\varphi_\zeta)]$ . Останні задаються формувачем кодів фазових зсувів ФКФЗ і визначають кут необхідного фазового зсуву сигналу. Квадратурні сигнали використовуються в ЦАП1 та ЦАП2 як опорні сигнали. На їх виходах формуються відповідно сигнали  $\frac{U}{N_{\max}} \sin(2\pi ft) [N_{\max} \sin(\varphi_\zeta)]$  та  $\frac{U}{N_{\max}} \cos(2\pi ft) [N_{\max} \cos(\varphi_\zeta)]$ , де  $N_{\max} = 2^n$ ,  $n$  – кількість двійкових розрядів ЦАП. Додавання цих сигналів виконує суматор СМ.

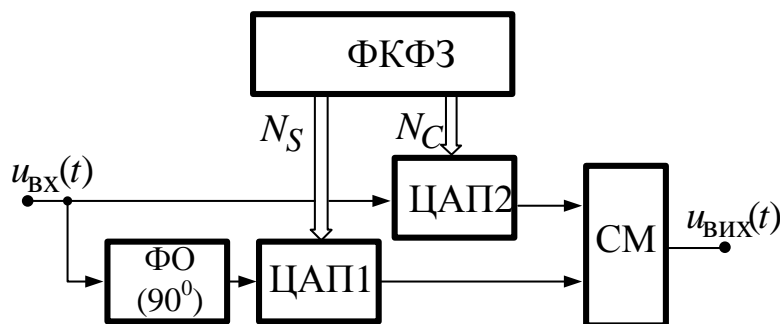


Рис. 5.5. Структурна схема кодкерованого фазообертача

Під час побудови фазових радіотехнічних систем виникає потреба в отриманні з одного вихідного гармонічного сигналу декількох сигналів, фазові співвідношення між якими зберігаються в широкій смузі частот. Цього досягають за допомогою *фазорізницевих схем*. На рис. 5.6 показано загальну структуру (а) і приклад фазорізницевої схеми (б). Фазорізницева схема являє собою шестиполіусник з однією парою вхідних затискачів і двома парами вихідних затискачів, які мають властивість зберігати певні амплітудні й фазові співвідношення між вихідними сигналами в заданому діапазоні частот.

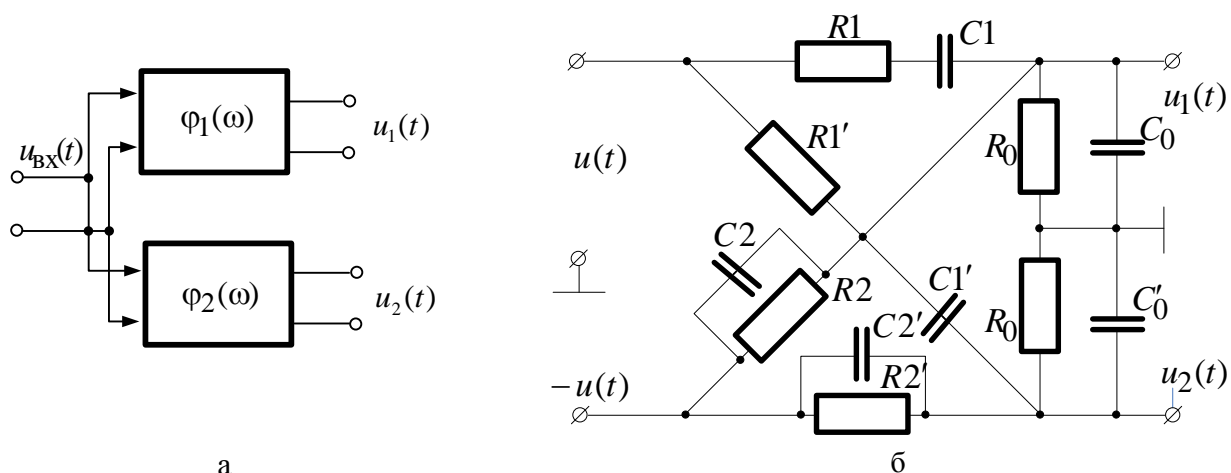


Рис. 5.6. Загальна структура (а) і приклад принципової схеми фазорізницевої ланки (б)

Мостові  $RC$ -фазообертачі (рис. 5.7, а) застосовують як на низьких, так і на високих частотах для регулювання фазових зсувів сигналів у діапазоні  $0 - 180^\circ$ . Амплітуда вихідного сигналу  $|\dot{u}_{\text{ВИХ}}|$  лишається незмінною і рівною амплітуді вхідного сигналу  $|\dot{u}_{\text{ВХ}}|$  у випадку, якщо міст навантажується на досить великий опір. Принцип дії фазообертача зрозумілий з векторної діаграми на рис. 5.7, б. Діаметр  $AB$  кола зображує амплітуду вхідного сигналу  $\dot{u}_{\text{ВХ}}(t)$ . Цей сигнал прикладено до ідентичних за комплексними опорами паралельних  $RC$ -кіл, через які протікають рівні струми. Точки  $C, D$  діаграми відповідають однойменним точкам схеми. Фазовий зсув між сигналами  $\dot{u}_{\text{ВХ}}(t)$  та  $\dot{u}_{\text{ВИХ}}(t)$  визначається кутом між діаметрами  $AB$  та  $CD$ .

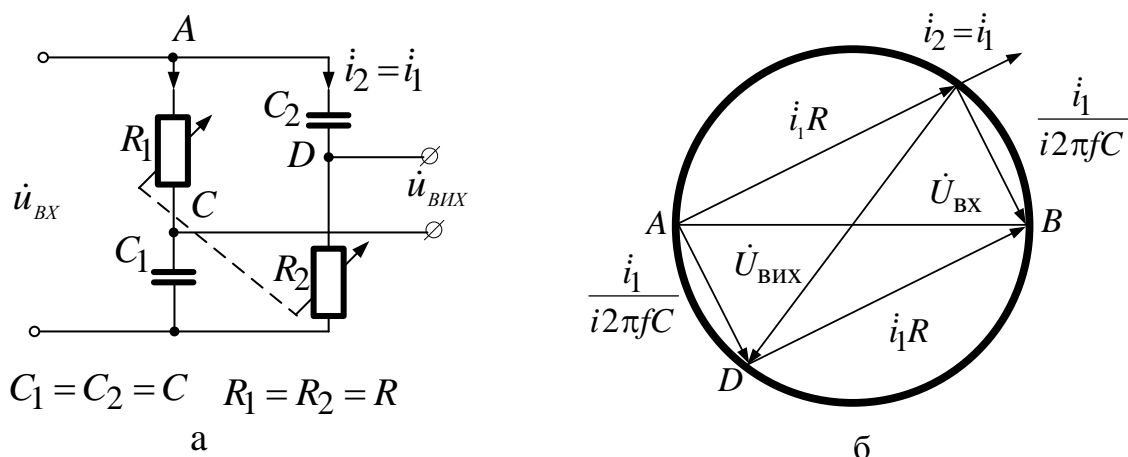


Рис. 5.7. Фазообертач мостового типу (а) та векторна діаграма його роботи (б)

Певним недоліком схеми є відсутність загальної точки вхідної і вихідної ланки. Цей недолік можна усунути, якщо подати вхідний сигнал на фазообертач через трансформатор. Інший недолік полягає в тому, що градувальна характеристика фазообертача  $\varphi = F(R, C, f)$  залежить від частоти. Отже, на кожній частоті сигналу потрібно користуватись іншою градувальною

характеристикою.

У діапазоні інфранизьких і низьких частот для регулювання фазових зсувів сигналів в інтервалі  $(-n360^\circ, n360^\circ)$  застосовують *кругові реостати*, які забезпечують неперервну зміну фазового зсуву сигналів без будь-яких додаткових комутацій сигналу і зв'язаних з цим перехідних процесів у колах формування вихідних сигналів. Схему реостатного кругового фазообертача показано на рис. 5.8.

Круговий реостат являє собою кільце з ізолювального матеріалу з намотаною обмоткою тонкого дроту з високим питомим опором. У чотирьох рівномірно розподілених по кільцю точках є відводи, на які подаються сигнали, фазовий зсув між якими в суміжних відводах становить  $\pm 90^\circ$ . По обмотці переміщується повзунк, за допомогою якого «знімається» сигнал з довільною початковою фазою.

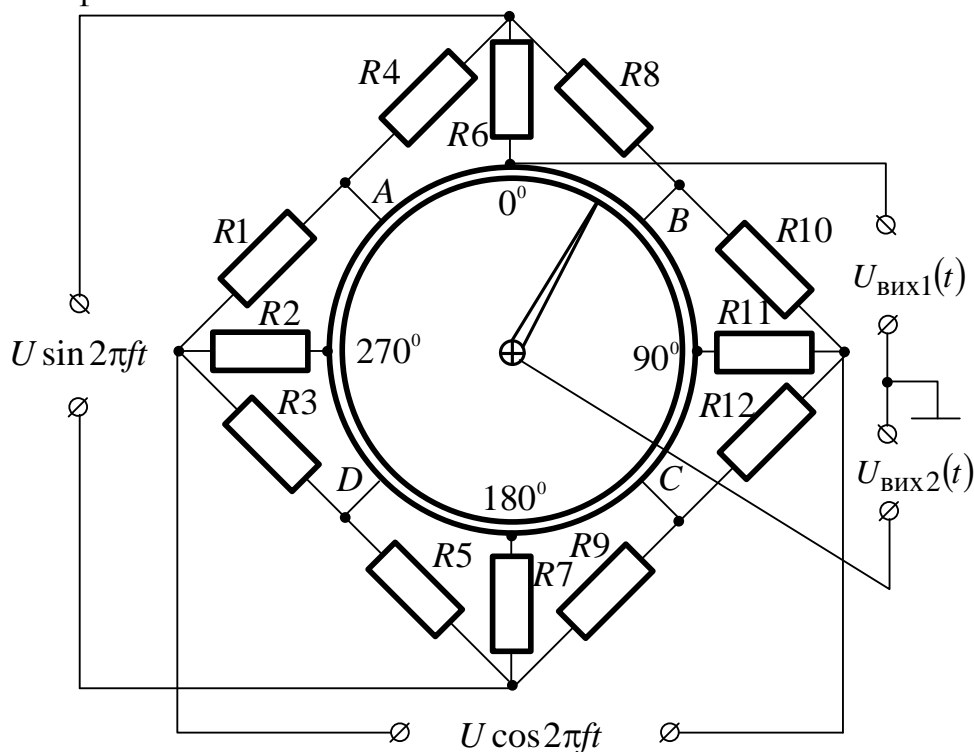


Рис.5.8. Схема фазообертача реостатного типу

Фазовий зсув вихідного сигналу кругового реостатного фазообертача нелінійно залежить від кута повороту повзунка. Для зменшення похибки нелінійності в схему фазообертача вводять вирівнювальні резистори  $R1 - R12$ , які забезпечують підключення до реостата напруг через кожні  $45^\circ$ . Без вирівнювальних резисторів коливання вихідного сигналу фазообертача залежно від кута повороту становить близько 29%, а у випадку підключення резисторів не перевищує 9,25%, у той час, як розрахункова похибка за фазою сигналу не перевищує  $1,9^\circ$ .

Основним недоліком фазообертачів з вирівнювальними резисторами є їх складність та громіздкість конструкції.

Фазовий зсув сигналів в інтервалі  $(0, 360^\circ)$  можна задавати за допомогою індукційних фазообертачів, поворотних трансформаторів та сельсинів, які працюють у режимі фазообертача.

Принцип роботи індукційних фазообертачів полягає у створенні потоку збудження у вигляді обертового колового або пульсуючого магнітного поля. Схему такого фазообертача показано на рис. 5.9.

Фазовий зсув вихідного сигналу відносно вхідного дорівнює механічному куту повороту роторної обмотки  $L5$  відносно статорних обмоток  $L1 - L4$ .

Індукційні фазообертачі є принципово одночастотними. Вони мають високий коефіцієнт передачі і незначні похибки перетворення кута повороту у фазовий зсув сигналів. Залежно від частотного діапазону фазові похибки індукційних фазообертачів становлять  $2^\circ - 10^\circ$ .

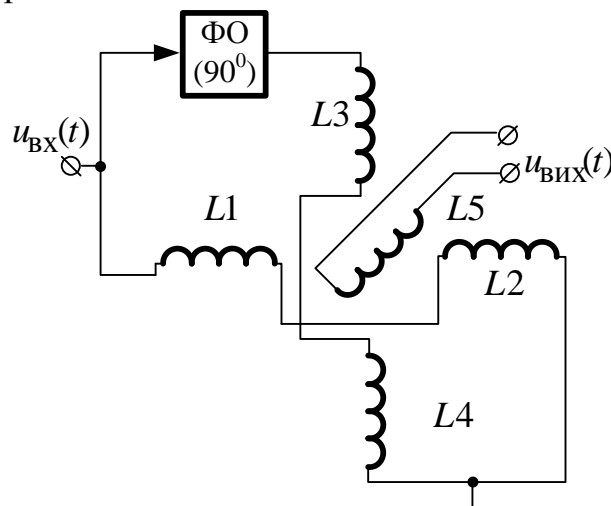


Рис. 5.9. Схема індукційного фазообертача з обертовим круговим електромагнітним полем: ФО - фазообертач

Ємнісні фазообертачі дозволяють формувати фазові зсуви сигналів в діапазоні від  $0$  до  $360^\circ$  в інтервалі частот  $(0,05 - 5)$  МГц. Ємність окремих секцій чотирисегментного змінного конденсатора змінюється за рахунок діелектричного ексцентрика  $E$ , який обертається у просторі між спільною пластинною  $S5$  та секторами  $S1 - S4$ . Електричну схему та взаємне розміщення пластин ємнісного фазообертача показано наведені відповідно на рис. 5.10, а, б.

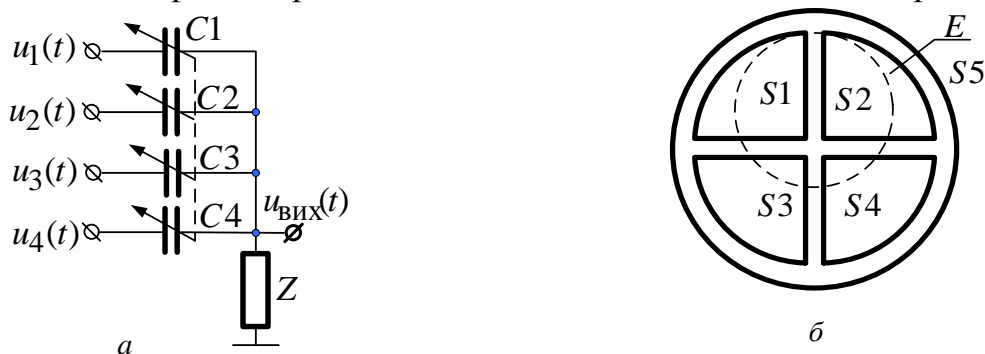


Рис. 5.10. Електрична схема (а) та взаємне розміщення пластин ємнісного фазообертача (б)

Плавну зміну початкової фази вихідного сигналу отримують за рахунок того, що вхідний гармонічний сигнал фазообертача розщеплюється на чотири однакові за амплітудою сигнали  $u_1(t) - u_4(t)$ , які відрізняються, – попередній від наступного за фазою на кут  $90^\circ$ . Вихідний сигнал може мати довільне значення фазового зсуву відносно вхідного сигналу. Внесений фазообертачем фазовий зсув сигналу дорівнює куту повороту ротора за умов, коли ємності конденсаторів  $C1 - C4$  змінюються за синусоїдним законом, амплітудні значення сигналів  $u_1(t) - u_4(t)$  однакові за їх синусоїдної зміни і фазового зсуву між ними  $90^\circ$ .

Якщо не має вимог до рівності частот вхідного і вихідного сигналів, похибки ємнісних, індукційних та реостатних фазообертачів можна зменшити за рахунок ділення частоти вихідних сигналів фазообертача. Зміна фазового зсуву сигналу фазообертача на  $360^\circ$  приводить до зміни фазового зсуву сигналу на виході подільника частоти на  $360^\circ/n$  ( $n$  – коефіцієнт ділення подільників частоти) і до такого ж зменшення похибки задання фазового зсуву сигналів.

Як фазообертач з високою роздільною здатністю застосовують лінії затримки. Їх винятковою особливістю є здатність регулювання фазового зсуву сигналів як гармонічного, так і сигналів більш складної форми. Крім того, вони дозволяють одночасно отримувати декілька різних сигналів з різними затримками (початковими фазами). Для створення ліній затримки сигналів використовують різні принципи. Відомі електромагнітні, п'єзоелектричні, акустичні й інші лінії затримки. Найбільш поширеними є електромагнітні із зосередженими постійними параметрами на  $RC$ - та  $LC$ -елементах (рис. 5.11, а, б) і які будуються з однотипних комірок.

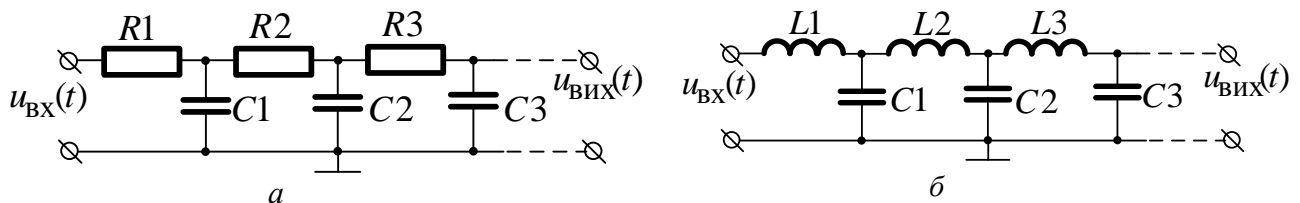


Рис.5.11. Лінії затримки на  $RC$ - (а) та  $LC$ -елементах (б)

Оскільки їх параметри суттєво залежать від частоти, то такі лінії затримки сигналів розраховують на фіксовані частоти. Фазовий зсув гармонічного сигналу на виході лінії на  $RC$ - елементах з кількістю комірок  $k$  і опорам  $R$  та ємностями  $C$  відносно вхідного сигналу

$$\varphi_3(f) = k\sqrt{\pi fRC}.$$

Фазовий зсув між вхідним і вихідним сигналами у лініях з рівномірно розподіленими постійними параметрами визначають за формулою

$$\varphi_3(f) = 2\pi fl\sqrt{LC},$$

де  $L, C$  – індуктивність і ємність ланки на одиницю довжини;  $l$  – довжина ланки. Регулювання фазового зсуву досягається зміною довжини  $l$ .

Лінії затримки можна будувати і за іншими принципами. Наприклад, у

праці [5.25] розглянуто ультразвукові лінії затримки (УЛЗ), принцип дії яких ґрунтується на використанні пружних хвиль. Відносно низька швидкість поширення цих хвиль ( $\sim 5 - 10$  км/с) дозволяє створювати компактні лінії затримки електричних сигналів на час від часток мікросекунд до десятків мілісекунд. Ультразвукові лінії затримки складаються з трьох основних елементів – вхідного 1 та вихідного 2 електроакустичних перетворювачів, які перетворюють електричні коливання в пружні на вході лінії і пружні коливання в електричні – на її виході, та звукопроводу 3, у якому поширюються ультразвукові хвилі (рис. 5.12, а, б).

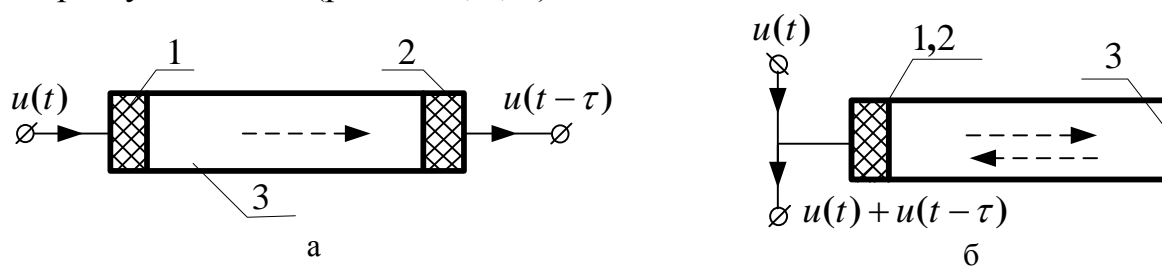


Рис.5.12. Схеми ультразвукових ліній затримки, які працюють «на проходженні» (а) і «на відбитті» (б)

Залежно від характеру включення УЛЗ можуть працювати «на проходженні» (рис. 5.12, а) та «на відбитті» (рис. 5.12, б). У першому випадку вхідний і вихідний перетворювачі розділені, в другому – це один спільний перетворювач, який працює як вхідний під час подачі сигналу  $u(t)$ , і як вихідний під час формування затриманого сигналу  $u(t - \tau)$ . Електромеханічне перетворення, як правило, здійснюється п'єзоелектричними або магнітострикційними перетворювачами. Звукопровід 3 виготовляють у вигляді твердого середовища, в якому пружні хвилі поширюються з малим загасанням.

Ультразвукові лінії затримки умовно поділяють на три групи залежно від застосованих пружних хвиль, форми звукопроводу та його розмірів: 1) на об'ємних хвилях, 2) на поверхневих хвилях, 3) хвилевідні. В УЛЗ першого типу акустичну енергію розподіляють по всьому перетину звукопроводу, розміри якого суттєво перевищують довжину хвиль у хвильоводі. Вони працюють в діапазоні частот від 10 МГц до 10 ГГц. Різновиди УЛЗ на об'ємних хвилях які відрізняються геометрією поширення коливань у звуководі, мають змінну чи постійну довжину звукопроводу, різну кількість виходів на різні чи однакові затримки сигналів.

Пружні хвилі в УЛЗ на поверхневих хвилях поширюються в тонкому приповерхневому шарі хвильоводу, товщина якого співмірна з довжиною хвилі, а розміри перетину хвильоводу перевищують довжину хвилі. Робочий діапазон частот УЛЗ такого типу становить 10 МГц – 1 ГГц. В таких УЛЗ електромеханічне перетворення сигналів здійснюється за допомогою нанесених на поверхню звукопроводу електродів. Ці електроди утворюють двофазні еквідистантні (рис. 5.13,а) чи нееквідистантні (рис. 5.13, б) ґратки.



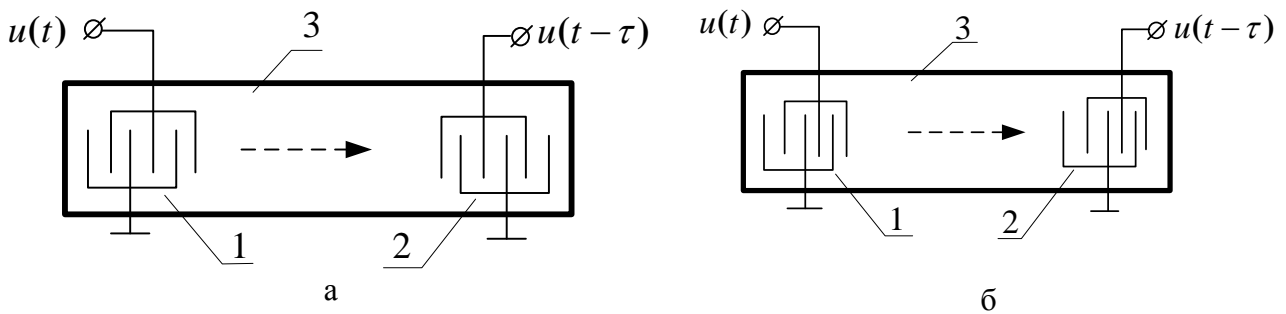


Рис. 5.13. Схеми УЛЗ на поверхневих хвилях з перетворювачами у вигляді еквідистантних (а) та нееквідистантних (б) ґраток

У більшості випадків відстань між електродами у напрямі поширення поверхневих хвиль становить  $0,25\lambda$  – чверть довжини хвилі. Завтовшки електроди зазвичай виконують розміром  $0,1 - 0,2$  мкм. Пластини звукопроводу вирізають з монокристала п'єзоелектрика (ніобату літію, кристалічного кварцу, германату вісмуту тощо). Чистота обробки поверхні для сигналів частотою (200 – 300) МГц не нижча 14- го класу. Ультразвукові лінії затримки на поверхневих хвилях розрізняються конструкцією та кількістю відводів. Змінна затримка сигналів в УЛЗ на поверхневих хвилях реалізується шляхом механічного переміщення електродів уздовж робочої поверхні звукопроводу.

У хвилепровідних УЛЗ акустична енергія локалізується по всьому перетину звукопроводу, розміри якого є зіставними з довжиною хвилі. Залежно від форми звукопроводу їх поділяють на смужкові, для зсувних хвиль і дротяні для поздовжніх хвиль. Як приклад, на рис. 5.14 показано схему дротяної УЛЗ на поздовжніх хвилях.

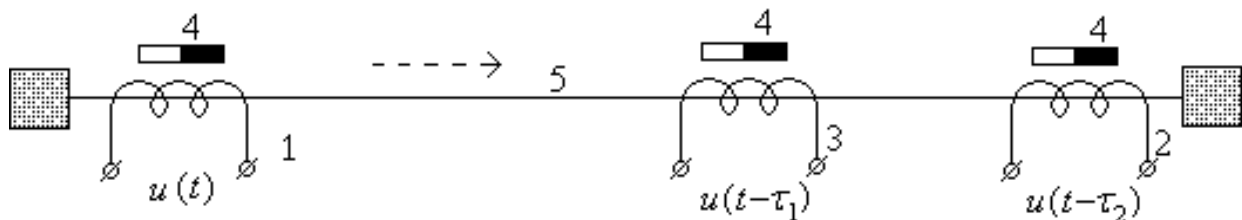


Рис.5.14. Схема магнітострикційної лінії затримки

Час затримки вихідних сигналів визначається відстанню між вхідним перетворювачем 1 та вихідними перетворювачами 2, 3. Постійні магніти 4 створюють поле підмагнічування для запобігання подвоєнню частоти затриманого сигналу. Хвилепроводом слугує дріт 5, виготовлений з магнітострикційного матеріалу (наприклад, сплаву нікелю та кобальту).

Межа частотного діапазону магнітострикційних УЛЗ зазвичай не перевищує 5 МГц. Основні переваги УЛЗ цього типу – можливість отримання затримок до 20 мс за втрат не більших ніж 20 – 30 дБ та простота реалізації багатовідвідних і змінних УЛЗ.

Фазообертачі на діапазон надвисоких частот сигналів будують за іншими принципами. Найбільш часто застосовують високочастотні відбивні фазообертачі, на лініях змінної довжини, поляризаційні, феритові та з

діелектричною пластиною [5.14; 5.15; 5.17].

У фазообертачах відбивного типу вихідний сигнал формується з відбитого від неоднорідності вхідного сигналу. Фазовий зсув між вхідним і вихідним сигналами регулюється зміщенням короткозамикачів у хвилеводі.

Принцип дії фазообертача на лінії змінної довжини тромбонного типу полягає в тому, що вихідний сигнал  $U_{\text{в\ddot{e}д}}(t)$  на виході відрізка хвилеводу при проходженні вхідної хвилі після збільшення його довжини на  $2\Delta L$  (рис. 5.15) отримує додатковий фазовий зсув пропорційний  $2\Delta L$ :

$$\Phi_3 = \frac{4\pi\Delta L}{\lambda},$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі у хвилеводі. Довжина хвилеводу змінюється під час зміщення відносно один одного двох відрізків ліній передачі.

Недоліком фазообертачів цього типу є їх вузькосмуговість, зумовлена конструкцією та частотозалежними елементами, а також наявністю паразитних відбиттів сигналу, вплив яких збільшується з підвищенням частоти. Такі відбиття сигналу виникають унаслідок неоднорідності в місцях, де одна частина хвилеводу переходить в іншу.

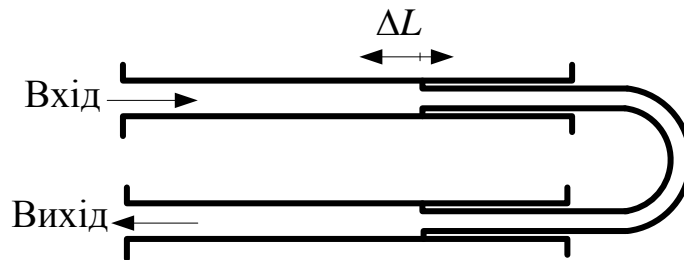


Рис. 5.15. Фазообертач на лінії змінної довжини тромбонного типу

Похибки фазообертачів цього типу перебувають у межах інтервалу  $\pm(0,1-1)^\circ$  для діапазону частот від 1 до 12,4 ГГц. Загасання сигналу у фазообертачі не перевищує 0,5 дБ.

У діелектричних фазообертачах зміна внесеного у сигнал фазового зсуву досягається введенням пластинки з діелектрика в середину хвилеводу, яку розміщено паралельно поперечній складовій електричного поля. Зменшення фазової швидкості хвилі, зумовлене розміщенням пластини у полі, призводить до фазового зсуву хвилі на виході пристрою. Фазообертачі такого типу забезпечують зміну фазового зсуву сигналів в інтервалі  $(0, 360^\circ)$  з похибками, які перебувають в інтервалі  $\pm(0,3^\circ, 3^\circ)$ . Фазообертачі потрібно калібрувати на кожній робочій частоті, оскільки їх теоретичні й практичні характеристики завжди розрізняються.

Серед електрично керованих фазообертачів найбільш поширеними є феритові фазообертачі. В таких приладах ферит розміщують в однорідному магнітному полі в середині хвилеводу. Максимальний фазовий зсув між вхідним і вихідним сигналами фазообертача такого типу забезпечується на частоті 10 ГГц і становить близько  $500^\circ$ .

## 5.2. Засоби вимірювання фазових зсувів сигналів

**Фазометри на основі фазових детекторів.** Одним з найпростіших варіантів вимірювання фазових зсувів сигналів є фазометр з перетворенням фазових зсувів сигналів у постійну напругу з її подальшим вимірюванням. Ці операції виконуються за допомогою відповідно фазового детектора (ФД) та вольтметра постійного струму.

Фазовий детектор виконує дві операції: 1) перемноження двох гармонічних сигналів і 2) фільтрацію добутку сигналів. Фазовий детектор будують за балансною чи мостовою схемами. Як приклад на рис. 5.16 зображено схему балансного ФД [5.14].

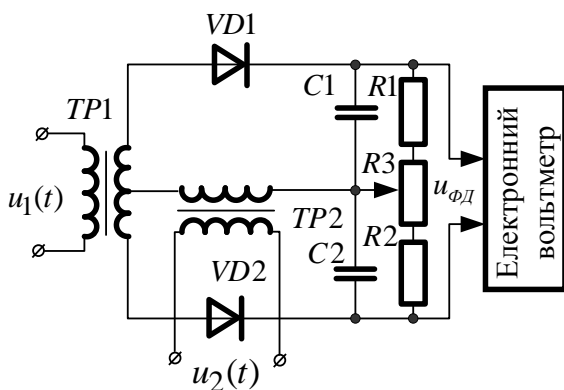


Рис. 5.16. Схема фазометра з балансним фазовим детектором

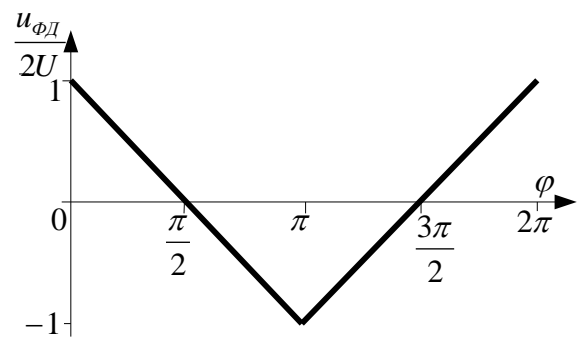


Рис. 5.17. Графік залежності нормованої вихідної напруги ФД від фазового зсуву між вхідними сигналами

Цей ФД працює в режимі амплітудного детектування. Для градуювання шкали вольтметра у градусах амплітудні значення досліджуваних гармонічних сигналів вирівнюються і калібруються:  $U_1 = U_2 = U$ . За допомогою трансформаторів TP1 та TP2 до діодів VD1, VD2 прикладаються відповідно сума і різниця вхідних сигналів

$$u_1(t) + u_2(t) = U(\cos(2\pi ft + \varphi) + \cos(2\pi ft)) = 2U \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(2\pi ft + \frac{\varphi}{2}\right);$$

$$u_1(t) - u_2(t) = U(\cos(2\pi ft + \varphi) - \cos(2\pi ft)) = -2U \sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(2\pi ft + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Опори резисторів  $R_1$ ,  $R_2$  та ємності конденсаторів  $C_1$ ,  $C_2$  вибирають з умови  $R_1 C_1 = R_2 C_2 \gg T$  ( $R_1, R_2 \gg R_3$ ), де  $T = 1/f$  – період сигналу. В цьому випадку сигнали на конденсаторах  $C_1$ ,  $C_2$  у сталому режимі дорівнюють амплітудним значенням відповідно сумарного і різницевого сигналів, а результат вимірювання вольтметра становить

$$u_{\text{ФД}}(\varphi) = U_{C_1}(\varphi) + U_{C_2}(\varphi) = 2U \left( \left| \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \right| - \left| \sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \right| \right). \quad (5.1)$$

Залежність  $\frac{u_{\text{ФД}}(\varphi)}{2U} = F(\varphi)$ , показано на рис. 5.17. Перевагою цієї схеми ФД є майже лінійна залежність значень напруги  $u_{\text{ФД}}$  (5.1) від фазового зсуву сигналів.

Проте однозначне визначення фазового зсуву сигналів можливе лише в інтервалі  $\varphi \in [0, \pi)$ . Для розширення діапазону однозначного перетворення фазових зсувів сигналів на інтервал  $[0, 2\pi)$  необхідно вжити додаткових заходів, наприклад, виконати додаткове вимірювання після збільшення фазового зсуву між сигналами на фіксоване значення  $\varphi_0$ . Цей фазовий детектор працює в діапазоні частот до сотень мегагерців і забезпечує вимірювання фазових зсувів сигналів з похибками не більше  $\pm(2-3)^\circ$ .

**Фазометри на основі перетворення фазового зсуву сигналів у часовий інтервал.** Одним з характерних представників фазометрів цього класу є тригерний фазометр з перетворенням часового інтервалу в цифровий код, структурну схему якого показано на рис. 5.18, а) [5.14; 5.21; 5.23].

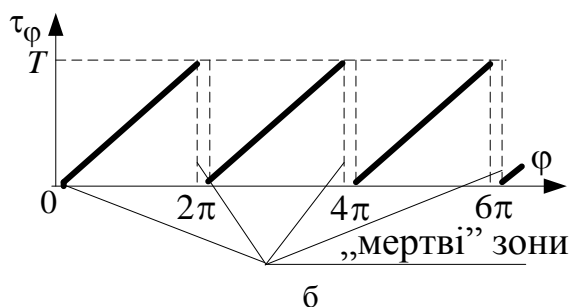
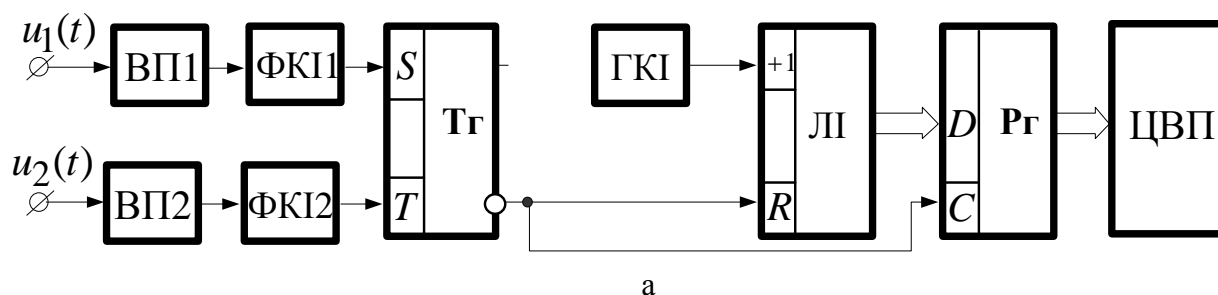


Рис. 5.18. Структурна схема тригерного фазометра (а) та залежність  $\tau_\varphi(\varphi)$  (б)

На вхід фазометра надходять гармонічні сигнали  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  частотою  $f=1/T$ , фазовий зсув  $\varphi_x$  між якими потрібно виміряти. Принцип дії фазометра полягає у виділенні інтервала часу  $\tau_\varphi = \varphi_x / (2\pi f)$  між моментами перетину сигналами  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  нульового рівня і подальшого перетворення інтервалу  $\tau_\varphi$  у числовий еквівалент –  $n_\varphi = \lfloor \tau_\varphi T_d^{-1} \rfloor$ , де  $T_d$  - період квантуючих імпульсів. Графік функції  $\tau_\varphi(\varphi)$  зображено на рис. 5.18,б.

Для визначення фазового зсуву сигнали  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  через вхідні пристрої ВП1 та ВП2, які узгоджують електронні блоки фазометра з вимірювальними колами за опорами й напругами, та формувачі коротких імпульсів ФКІ1 і ФКІ2

надходять відповідно на входи  $S$  (установлення в одиницю) та  $R$  (установлення в нуль) тригера Тг. Для мінімізації похибки підключення фазометра його активні входні опори мають бути якомога більшими, а ємності – меншими. До складу входних пристроїв можуть входити повторювачі, підсилювачі, підсилювачі-обмежувачі, підсилювачі з автоматичним регулюванням підсилення та тригери Шмідта. Фазочастотні характеристики ВП мають бути ідентичними для зменшення додаткових похибок вимірювання.

Імпульс з інвертуючого виходу Тг установлює лічильник імпульсів ЛІ в режим рахування і дає змогу підрахувати відповідну кількість імпульсів, сформовану генератором квантуючих імпульсів ГКІ протягом часу  $\tau_{\phi}$ .

Отриманий код

$$n_{\phi} = \left[ \frac{\tau_{\phi}}{T_d} \right] = \left[ \frac{\phi}{2\pi f T_d} \right] \quad (5.2)$$

перепишується в регістр Рг, після чого лічильник імпульсів ЛІ встановлюється в нульовий стан і стає готовим до наступного циклу вимірювання. Результат вимірювання (один за період сигналу) відображається цифровим відліковим пристроєм ЦВП. Число  $n_{\phi}$  однозначно (з точністю до похибки квантування) визначає результат вимірювання фазового зсуву сигналів:  $\phi = 2\pi f T_d n_{\phi}$  (рад).

Для переходу до градусної міри необхідно домножити значення  $\phi$  на коефіцієнт  $360/2\pi$ .

Основну похибку вимірювання визначає похибка квантування часових інтервалів. Середньоквадратичне значення цієї похибки [5.21] становить  $\sigma_1 = \frac{T_d}{\sqrt{6}}$  (в перерахунку до фазової похибки  $\sigma'_1 = 2\pi \frac{T_d}{T\sqrt{6}}$ ).

Специфічною для цифрових часоімпульсних фазометрів є методична похибка, спричинена вищими гармоніками входних сигналів. Фізичну суть цієї похибки викладено в підрозділі 5.4.

Наявні у досліджуваному сигналі вищі гармоніки по-різному діють на моменти часу переходу через нуль цього сигналу відносно переходів через нуль його основної гармоніки. Парними гармоніками зсуваються різнойменні переходи сигналу через нуль у протилежних напрямках. Тому для зменшення похибки від наявності парних гармонік та постійної складової використовують метод двох вимірювань, який зводиться до вимірювання середнього значення фазового зсуву як півсуми двох значень – між переходами через нуль зростаючих та спадних гілок входних сигналів. Фазометри з такою методикою вимірювання дістали назву фазометрів двопівперіодної дії. Цей принцип було покладено в основу роботи фазометра Ф2-13, який у свій час випускався серійно.

Непарні вищі гармоніки, на відміну від парних, зсувають переходи через

нуль сигналів в одному напрямі відносно відповідних переходів через нуль основної гармоніки сигналу. Тому за цим методом не вдається скомпенсувати вплив непарних вищих гармонік за рахунок обробки двох вимірювань.

Іншою суттєвою вадою фазометрів, побудованих за схемою (рис. 5.18, а), є те, що в околі значень  $0$  та  $360^\circ$  існують зони нестійкої роботи – так звані "мертві зони" (рис. 5.18, б). У цих зонах показання тригерного фазометра однозначно невизначені, оскільки тригери потребують певного скінченного часу  $\tau_c$  на спрацювання його електронних компонентів. Якщо на входи тригера надходять два імпульси з різницею в часі  $\tau \leq \tau_c$ , тригер може опинитись у одному з двох станів. Відношення інтервалу  $\tau_c$  до періоду  $T$  вхідного сигналу зростає зі збільшенням частоти. Тому чим вище значення  $f$ , тим більша зона невизначеності поблизу вимірюваних значень  $0^\circ$  та  $360^\circ$ . Цього недоліку позбавлені фазометри з перекриттям. Ці фазометри відрізняються від тригерних лише способом формування часового інтервалу, для чого використовують логічні схеми. Схему фазометра з перекриттям показано на рис. 5.19, а.

Часовий інтервал  $\tau_\phi$  на схемі «сума по модулю два» формується без утворення "мертвих зон", що видно з графіка функції  $\tau_\phi(\phi)$  на рис. 5.19, б.

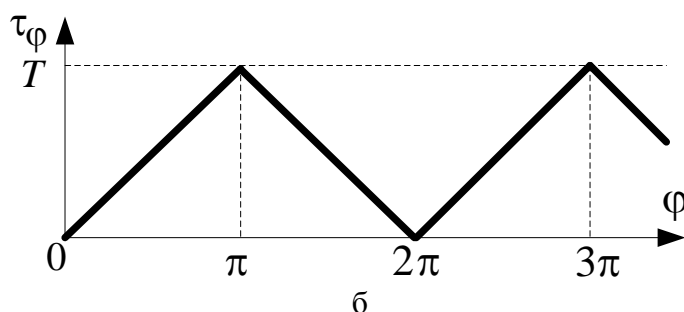
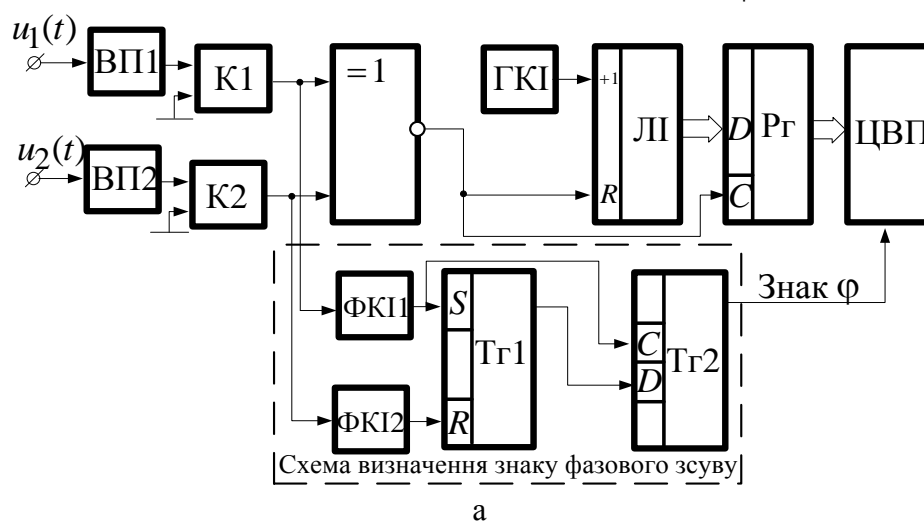


Рис.5.19. Структурна схема фазометра з перекриттям (а) та залежність  $\tau_\phi(\phi)$  (б)

Проте однозначне вимірювання фазових зсувів сигналів можливе лише в інтервалі  $[0, \pi)$ , оскільки вихідний сигнал цієї схеми формується пропорційно зсуву між обома півхвилями вихідних сигналів компараторів.

З метою розширення діапазону вимірювання фазометрів з перекриттям до інтервалу  $(-\pi, \pi)$  в схему фазометра додатково введено пристрій визначення знаку фазового зсуву між сигналами, до складу якого входять формувачі коротких імпульсів ФКІ1, ФКІ2 та тригери Тг1, Тг2.

Найбільший вплив на сумарну похибку вимірювання фазових зсувів сигналів розглянутих фазометрів мають такі складові: похибка вимірювання часового інтервалу  $\tau_{\phi}$  і похибки визначення періоду  $T$  вхідних сигналів. Кожній з цих похибок властиві ті самі складові, як і в разі часоімпульсного вимірювання часових інтервалів: похибка квантування, похибка формування часових інтервалів, зумовлена порогом спрацювання формувача імпульсів, і похибка, спричинена завадами.

Гранична відносна похибка квантування часового інтервалу  $\tau_{\phi}$  становить

$$\delta\phi = \pm \frac{1}{n_{\phi}} = \pm \frac{2\pi f}{f_{d\phi}}.$$

Із цього виразу видно, що похибка квантування збільшується з підвищенням частоти  $f$  вхідних сигналів за однакових значень вимірюваного фазового зсуву  $\phi$  і частоти  $f_d$ . Зі зменшенням частоти вхідних сигналів похибка квантування  $\delta\phi$  зменшується за інших однакових умов, тому нижня частотна межа для таких фазометрів майже необмежена, тобто ці фазометри є низькочастотними.

Залежність числового результату вимірювання фазового зсуву  $n_{\phi}$  від частоти  $f$  вхідних сигналів (5.2) є другим суттєвим недоліком розглянутих варіантів фазометрів, оскільки вона не дає змоги проградувати фазометр в одиницях фазового зсуву в частотному діапазоні вхідних сигналів. Усувають залежність результату вимірювання від частоти вимірюваних сигналів і розширюють частотний діапазон цифрових фазометрів з перетворенням *фазовий зсув сигналів – часовий інтервал* такими способами [5.21]:

- 1) вимірюванням частоти  $f$  чи періоду  $T$  сигналу з обчисленням величини  $2\pi n_{\phi} f T_d$  або  $360 n_{\phi} f T_d$ , де  $n_{\phi} \in N$ ;
- 2) застосуванням схем перетворення частоти, які дозволяють виконати перенесення вимірюваних фазових зсувів сигналів на фіксовану проміжну частоту  $f_{\text{пр}}$ ;
- 3) формуванням квантуючих імпульсів шляхом множення частоти вхідних сигналів, тобто  $f_d = K_{\text{пч}} f$ ,  $K_{\text{пч}} \in N$ ; цю операцію виконують на підставі систем фазового автопідстроювання частоти (ФАПЧ);
- 4) застосуванням фазометра з постійним часом вимірювання.

Сутність першого способу полягає у виконанні додаткового вимірювання частоти  $f$  сигналу, після чого можна визначити фазовий зсув сигналів

$$\varphi = 2\pi n_{\varphi} f T_{\text{д}}.$$

Відповідно до другого способу виконують перенесення фазових зсувів сигналів з певного діапазону частот на фіксовану проміжну частоту  $f_{\text{пр}}$ , для якої виконується умова  $f_0 = Kf_{\text{пр}}$ , де  $K$  – коефіцієнт, і завдяки чому результат вимірювання не залежить від частоти сигналу. Розглянемо більш детально інші два варіанти усунення залежності результату вимірювання від частоти сигналу.

Схему тригерного фазометра з формуванням квантуючих імпульсів змінної частоти сигналу за допомогою системи ФАПЧ, до складу якої входять: фазовий детектор ФД, підсилювач некомпенсації ПН, керований генератор квантуючих імпульсів КГКІ та подільник частоти ПЧ з коефіцієнтом ділення  $K_{\text{пч}}$ , показано на рис. 5.20.

Вихідний сигнал ФД через ПН змінює частоту КГКІ. Цей процес можливий у випадку, якщо первинна різниця частот сигналів на вході ФД не перевищує певного значення  $\Delta f_3$  – так званої смуги захоплення. Значення  $\Delta f_3$  визначається фільтром низьких частот, який входить до складу ФД.

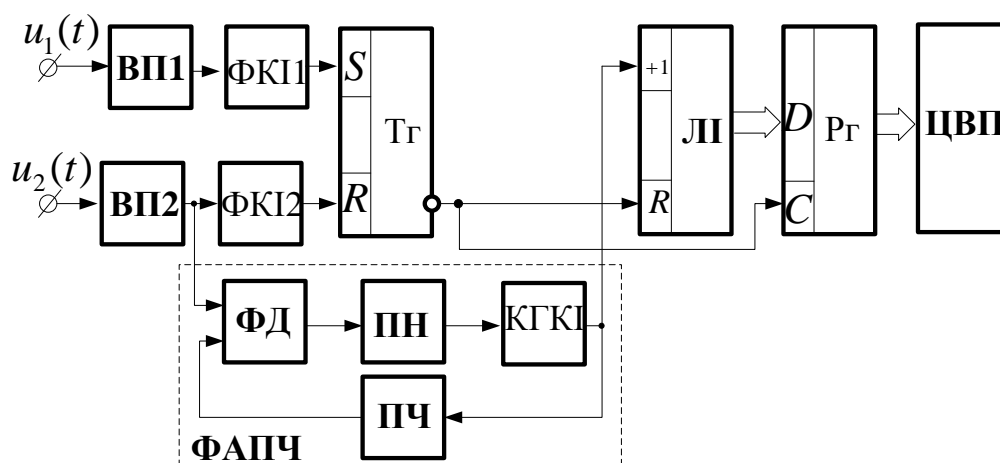


Рис. 5.20. Схема фазометра з множенням частоти квантуючих імпульсів

У схемі рис. 5.20 частота повторення квантуючих імпульсів  $f_0(f)$  є лінійною функцією частоти досліджуваних сигналів:  $f_{\text{д}}(f) = K_{\text{пч}} f$ , де  $K_{\text{пч}}$  – коефіцієнт ділення подільника частоти ФАПЧ. З урахуванням цього та рівності (5.2) кількість підрахованих лічильником за один період імпульсів становить

$$n_{\varphi} = \left[ \tau_{\varphi} f_{\text{д}}(f) \right] = \left[ \frac{K_{\text{пч}}}{360} \varphi \right].$$

Якщо брати  $K_{\text{пч}} = 3600$ , то отримаємо значення  $n_{\varphi}$  в десятих частках градуса.

Певним недоліком такого фазометра є збільшений час вимірювання, оскільки завершення перехідних процесів у ФАПЧ під час умикання приладу триває принаймні  $(5 - 10)T$ , де  $T$  – період досліджуваного сигналу. Частотний діапазон приладу обмежений і здебільшого визначається смугою  $\Delta f_3$  ФАПЧ.



Більш широкосмуговими є фазометри з постійним часом вимірювання. Такі фазометри вимірюють середнє значення незмінного в часі фазового зсуву між досліджуваними сигналами за деякий певний інтервал часу  $T_B \gg T$ , який не залежить від частоти вхідного сигналу. Якщо визначити  $T_B$  пропорційним  $T_D$ , наприклад, як  $T_B = K_{ПЧ} T_D$ , то за час  $T_B$  кількість періодів досліджуваного вхідного сигналу становитиме  $m = T_B f$ , а загальна кількість підрахованих імпульсів

$$n'_\varphi = [mn_\varphi] = \left[ \frac{K_{ПЧ} T_D}{2T} \frac{\varphi}{360 f T_D} \right] = \left[ \frac{K_{ПЧ} \varphi}{720} \right]. \quad (5.3)$$

Кількість  $n'_\varphi$  є результатом вимірювання  $\varphi$  у градусах. З виразу (5.3) випливає, що цей результат не залежить ні від  $f$ , ні від  $f_D$ . Якщо взяти  $K_{ПЧ} = 720 \cdot 10^a$  при  $a = 0, 1, 2, \dots$ , то з точністю до похибки квантування реалізується просте рівняння перетворення:  $\varphi = 10^{-a} n'_\varphi$ .

Структурна схема фазометра з постійним часом вимірювання [5.11, 5.21] наведена на рис. 5.21, а, а епюри лічильних імпульсів – на рис. 5.21, б.

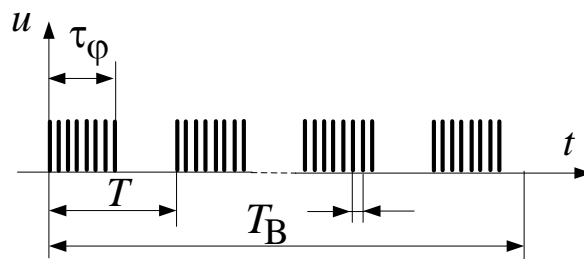
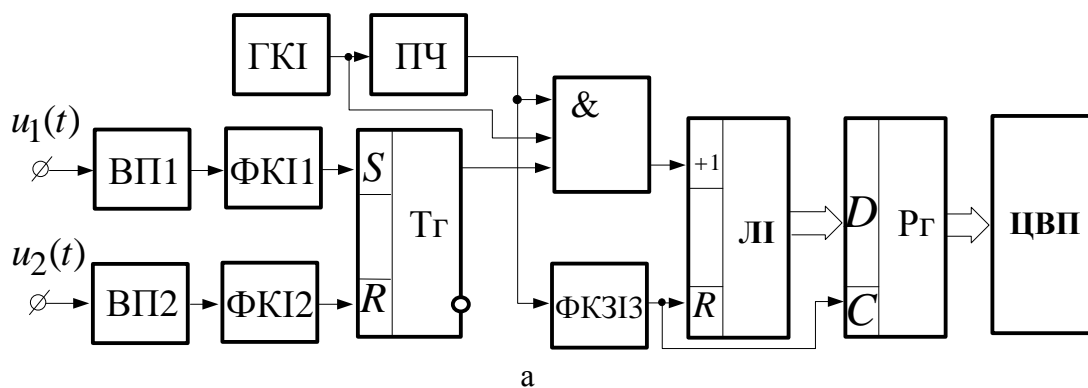


Рис. 5.21. Структурна схема фазометра з постійним часом вимірювання (а) та епюри лічильних імпульсів (б)

У цій схемі часоімпульсне перетворення виконується за допомогою схеми "Г", яка керується не тільки імпульсами тривалістю  $\tau_\varphi$ , але й імпульсами тривалістю  $T_B$ , які формуються за допомогою генератора квантуючих

імпульсів ГКІ та подільника частоти ПЧ. Лічильник імпульсів ЛІ підраховує кількість імпульсів  $n_{\phi}$  відповідно до (5.13). Числовий код  $n_{\phi}$  зберігається в регістрі Рг та відображається на цифровому відліковому пристрої ЦВП. На початку кожного нового циклу вимірювання за допомогою схеми формування коротких імпульсів ФКІЗ виробляється імпульс установлення в нуль лічильника ЛІ. Переднім фронтом цього імпульсу результат попереднього вимірювання записується у регістрі Рг.

Значна частка похибки вимірювання визначається складовими, які зумовлені квантуванням часових інтервалів. Середньоквадратична похибка вимірювання  $\phi$  фазометром з постійним часом вимірювання [5.11]

$$\sigma = \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_H^2},$$

де  $\sigma_B$  – високочастотна складова похибки, зумовлена квантуванням часових інтервалів  $\tau_{\phi}$  імпульсами квантування частотою  $f_D$ ;  $\sigma_H$  – низькочастотна складова похибки квантування, зумовлена тим, що інтервал  $T_B$  містить неціле число інтервалів  $\tau_{\phi}$  (похибка квантування інтервалу  $T_B$  імпульсами  $\tau_{\phi}$ , які слідує з частотою  $f$ ).

З урахуванням того, що середньоквадратична похибка квантування одного часового інтервалу  $\tau_{\phi}$  становить  $\sigma_1 = \frac{T_D}{\sqrt{6}}$ , між значеннями  $\tau_{\phi}$  та  $\phi$  існує функціональний зв'язок  $\phi = 360\tau_{\phi}f$ , а отримані на різних періодах сигналу результати статистично незалежні, маємо

$$\sigma_B = \frac{\sigma_1}{\sqrt{m}} 360f = \frac{360f}{\sqrt{6m}f_D}; \quad (5.4)$$

$$\sigma_H = \frac{T_B}{2\sqrt{3m}} 180f. \quad (5.5)$$

З рівнянь (5.4), (5.5) випливає, що для зменшення похибки вимірювання потрібно виконати умову  $m \gg 1$ , або  $T_B \gg T$ , що обмежує нижню межу частотного діапазону фазометра.

Розглянутий принцип вимірювання фазових зсувів сигналів реалізовано у цифровому фазометрі Ф2-34. Безумовні переваги розглянутих фазометрів – можливість вимірювати в широкій смузі частот сигнали без додаткових регулювань та зменшення випадкових похибок вимірювання через усереднення. Певні недоліки цих фазометрів – чималий час вимірювання та низька завадозахищеність.

**Компенсаційні фазометри.** У загальному випадку в компенсаційних фазометрах фазовий зсув вимірюваних сигналів компенсується фазовим зсувом, що вносить еталонний фазообертач – аналоговий чи цифровий [5.9; 5.14; 5.27]. Відлік вимірюваного фазового зсуву сигналів здійснюється за

шкалою фазообертача. Більш високу точність вимірювання забезпечують цифрові компенсаційні фазометри (ЦКФ), які реалізують одну з показаних на рис. 5.22 а, б структурних схем.

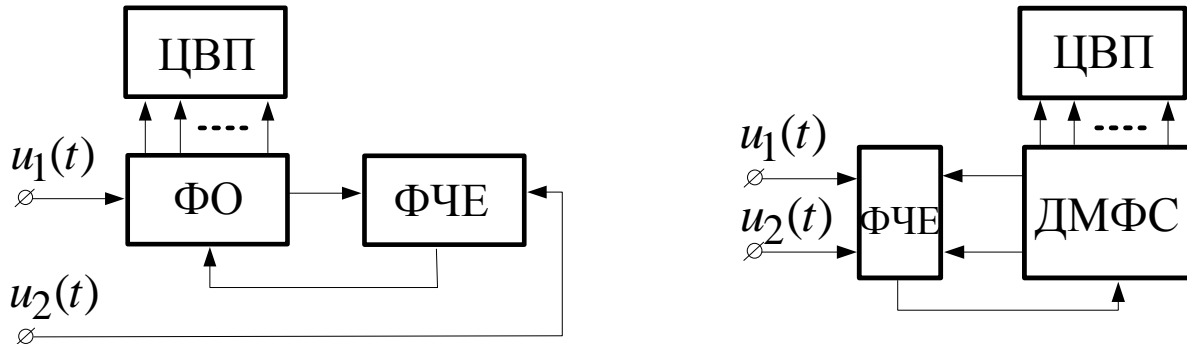


Рис. 5.22. Узагальнені структури двох цифрових компенсаційних фазометрів

Сигнали  $u_1(t) = U_1 \cos(2\pi ft + \varphi_1)$  та  $u_2(t) = U_2 \cos(2\pi ft + \varphi_2)$  з вимірюваним фазовим зсувом між ними діють безпосередньо або після попереднього підсилення на входи фазочутливого елемента ФЧЕ (фазового детектора чи індикатора нульового фазового зсуву сигналів). Фаза одного із сигналів заздалегіть зміщується за допомогою градуйованого фазообертача ФО на величину, яка фіксується ЦВП. Сигнал з виходу ФЧЕ надходить на керувальний вхід ФО, змінюючи фазовий зсув ФО таким чином, щоби звести різницю початкових фазових зсувів сигналів на входах ФЧЕ до  $90^\circ$  (чи  $0^\circ$ ). На момент досягнення компенсації вихідна напруга ФЧЕ досягає нульового значення і значення вимірюваного фазового зсуву зчитується з ЦВП.

Безперечною перевагою ЦКФ є їх здатність до вимірювання фазових зсувів сигналів за наявності завад. Похибка вимірювання ЦКФ залежить головним чином від похибки каліброваного ФО і чутливості ФЧЕ.

Більш досконалішими є ЦКФ із застосуванням двоканального мірника фазових зсувів (МФЗ) [5.7; 5.8], структуру якого показано на рис. 5.23.

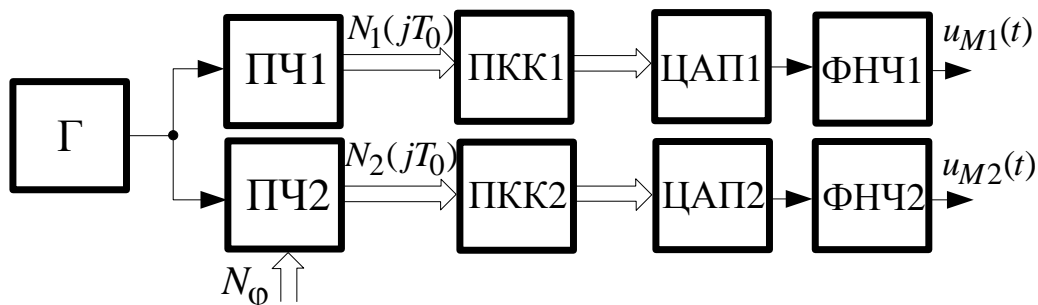


Рис. 5.23. Структурна схема мірника фазового зсуву сигналів

Фазовий зсув вихідних сигналів  $u_{M1}(t)$  та  $u_{M2}(t)$  визначається часовим зсувом моментів установлення в нуль подільників частоти ПЧ1 і ПЧ2 з однаковим коефіцієнтом ділення  $K_{ПЧ}$ . У разі зсуву цих моментів у часі на

величину періоду  $T_d$  коливань генератора  $\Gamma$  фазовий зсув між вихідними сигналами в градусах становить  $\Delta\varphi = \frac{360}{K_{\dot{\tau}}}$ . Отже, потрібний крок зміни фазових

зсувів сигналів забезпечується вибором відповідного коефіцієнта ділення  $K_{\text{ПЧ}}$ .

Частота вихідних сигналів МФЗ дорівнює  $f_m = \frac{f_d}{K_{\text{ПЧ}}}$ . Формування потрібного

значення фазового зсуву між вихідними сигналами МФЗ забезпечується попереднім установленням у нуль подільника ПЧ2 відносно подільника ПЧ1. Поточна фаза вихідної напруги ПЧ у межах інтервалу  $[0, 2\pi)$  визначається поточним значенням коду подільника частоти. Фазовий зсув між вихідними сигналами подільника частоти визначається різницею значень кодів  $N_1(jT_d) - N_2(jT_d)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , і може, наприклад, зчитуватись з ПЧ1 у момент установлення ПЧ2 у нуль.

Вихідні коди  $N_1(jT_{\dot{a}})$ ,  $N_2(jT_{\dot{a}})$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  подільників ПЧ1 і ПЧ2 використовують як адреси перетворювачів код – код ПЧК1, ПЧК2, що формують коди значень сигналів гармонічної (або іншої) форми, які далі перетворюються у східчастий сигнал цифро-аналоговими перетворювачами ЦАП1, ЦАП2. Перші гармоніки цих сигналів з каліброваним значенням фазового зсуву між ними відфільтровуються фільтрами низької частоти ФНЧ1, ФНЧ2.

Розглянутий принцип покладено в основу роботи калібратора фазових зсувів сигналів Ф5125, який дозволяє установлювати фазові зсуви в діапазоні  $0 - 359^\circ$  з дискретністю  $1^\circ$ , похибкою, що не перевищує  $0,1^\circ$  у діапазоні частот вихідних сигналів –  $0,01$  Гц –  $20$  кГц.

Використання розглянутих МФЗ дозволяє побудувати ЦКФ з високими метрологічними характеристиками. Оскільки МФЗ працюють на фіксованій частоті, то в ЦКФ необхідно виконувати порівняння фазових зсувів сигналів МФЗ з фазовими зсувами сигналів певного робочого діапазону частот. Зокрема через використання перетворення частоти сигналів. Приклади структурних схем ЦКФ з гетеродинним перетворенням частоти показано на рис. 5.24, а, б. Основна ідея реалізації гетеродинного перетворення частоти сигналу полягає у використанні як гетеродина регульованої МФЗ.

Вхідні гармонічні сигнали  $u_1(t)$  та  $u_2(t)$  через вхідні пристрої ВП1 та ВП2 надходять на змішувачі Зм1, Зм2 двоканального гетеродинного перетворювача частоти, що ілюструє рис. 5.24, а. Як гетеродин використовують подільники частоти ПЧ1, ПЧ2 з коефіцієнтами ділення  $K_{\text{ПЧ}}$ . На входи цих подільників надходять імпульси з частотою  $f_d$  з генератора ГТ1. Блоки ГТ1, ПЧ1, ПЧ2 та схема порозрядного зрівноважування СПЗ утворюють двоканальну МФЗ.

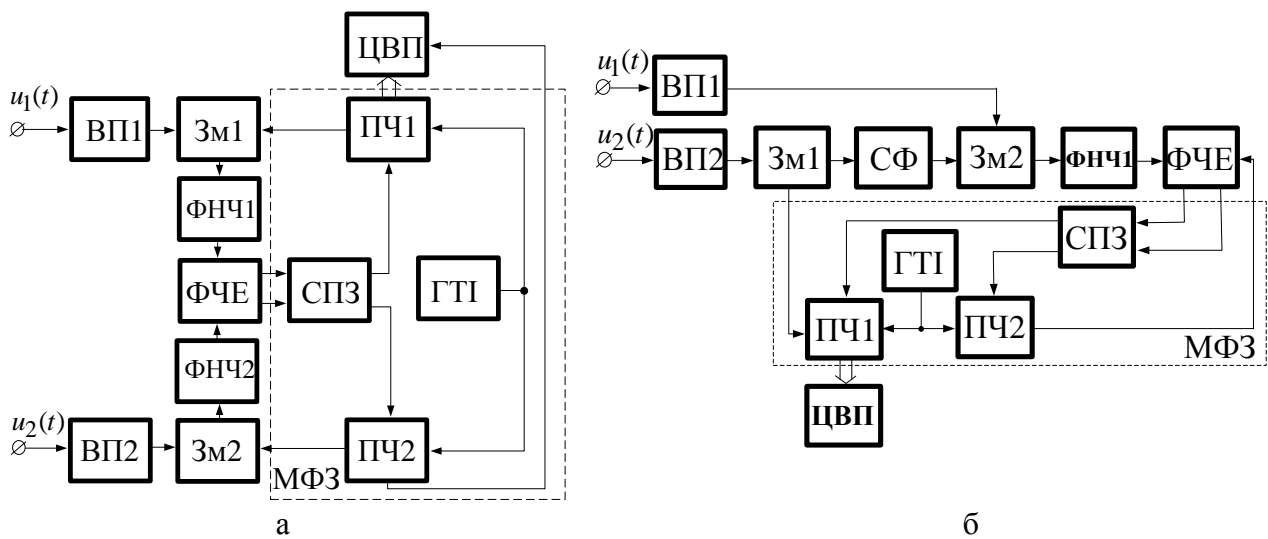


Рис. 5.24. Структурні схеми ЦКФ з гетеродинним перетворенням частоти сигналу

Після перетворення частоти сигналу селективними пристроями (на схемі – фільтрами нижніх частот ФНЧ1 та ФНЧ2) виділяються сигнали різницевої частоти  $f - f_m$  з фазовим зсувом  $\varphi - \varphi_m$ . Фазочутливий елемент ФЧЕ, яким є, наприклад, індикатор синфазності сигналів, формує сигнали керування СПЗ, які змінюють значення  $\varphi_m$  до виконання умови  $\varphi - \varphi_m = 0$ . Після виконання цієї умови фазовий зсув між вихідними сигналами подільників частоти стає рівним фазовому зсуву між вхідними сигналами  $u_1(t)$  та  $u_2(t)$ . Для відображення результату вимірювання служить цифровий відліковий пристрій ЦВП, у який переписується поточний код подільника ПЧ1 у момент установки в нуль ПЧ2.

Гранична похибка розглянутого ЦКФ визначається похибкою квантування –  $\Delta\varphi = \frac{360}{K_{пч}}$  (у градусах), яка обумовлена кроком регулювання фази сигналу у МФЗ. Схема на рис. 5.24, а забезпечує вимірювання фазових зсувів сигналів в певному діапазоні частот за рахунок зміни частоти ГТІ. Швидкодія фазометрів, що реалізують цей принцип роботи, порівняно невисока.

Швидкодія ЦКФ збільшується у разі використання подвійного перетворювача частоти. Структуру ЦКФ з подвійним перетворенням частоти сигналу зображено на рис. 5.24, б. Відповідно до цієї схеми реверсивне керування значенням  $\varphi_m$  виконується в каналі, який не містить інерційних ланок, а фазовий зсув сигналів  $\varphi - \varphi_m$  формується на частоті сигналів міри. Це дозволяє майже на порядок зменшити час вимірювання.

Часовий компенсаційний фазометр за схемою рис. 5.24, б забезпечує високу точність вимірювання та швидкодію, проте працює тільки на фіксованій частоті сигналу.

Перенести фазові співвідношення між досліджуваними сигналами з більш широкої смуги частот на фіксовану частоту дозволяє стробоскопічне перетворення.

У стробоскопічних перетворювачах вхідні сигнали перемножуються з періодичною послідовністю коротких імпульсів. Зважаючи на широкий дискретний спектр частот послідовності строб-імпульсивної зміна їх частоти у відносно невеликих межах забезпечує широкий частотний діапазон перетворення вхідних сигналів. Частота вихідних сигналів перетворювача фіксується за допомогою системи ФАПЧ імпульсів стробувальної послідовності. Це значно спрощує автоматизацію процесу вимірювання.

Схему ЦКФ зі стробоскопічним перетворенням частоти вимірюваних сигналів показано на рис. 5.25. За таким принципом побудовано ЦКФ типу Ф5126 [5.27].

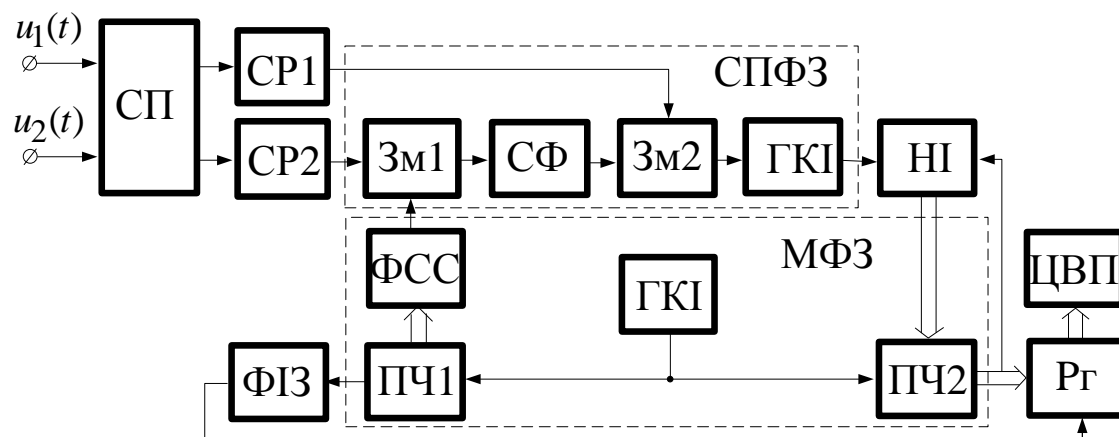


Рис. 5.25. Структурна схема ЦКФ зі стробоскопічним перетворенням частоти сигналу

Вхідні сигнали  $u_1(t)$  та  $u_2(t)$ , фазовий зсув між якими необхідно виміряти, надходять на входи двоканального стробоскопічного перетворювача частоти СП, на виходах якого отримують низькочастотні копії вхідних сигналів  $u_{1н}(t)$  та  $u_{2н}(t)$  фіксованої проміжної частоти  $f_{п} = 16,35$  кГц. Ці сигнали надходять на стабілізатори рівня СП1 та СП2, де відбувається нормування їх амплітуд. Отримані на виході стабілізаторів рівня сигнали подаються на схему перетворення фазових зсувів сигналів СПФЗ, на яку з формувача синусоїдного сигналу ФСС надходить також гармонічний сигнал  $u_{1м}(t)$  частотою  $f_{м} = 2$  кГц. Мірник фазових зсувів формує сигнали  $u_{1м}(t)$  та  $u_{2м}(t)$ , фазовий зсув  $\varphi_{м}$  між якими регулюється з дискретом  $0,1^\circ$ .

Фазовий зсув між сигналами на вході нуля-індикатора НІ дорівнює різниці  $\varphi - \varphi_{м}$ . Нуль-індикатор залежно від знака і значення цієї різниці формує сигнали керування мірою, які надходять на ПЧ2. Після досягнення рівності  $\varphi = \varphi_{м}$  зміна фазового зсуву сигналів міри завершується і формувач імпульсу запису ФІЗ виробляє імпульс запису коду ПЧ2 у регістр Рг у момент заповнення коду ПЧ1. На ЦВП відображається результат вимірювання як поточне значення  $\varphi_{м}$ .

**Кореляційні фазометри.** Метод вимірювання фазових зсувів гармонічних сигналів через взаємкореляційну функцію досліджуваних сигналів (4.8), яка визначається як відгук  $B_{12}(\tau)$  кореляційного оператора, розглянуто у підрозділі 4.1 Беручи до уваги, що для  $\varphi = 0$  ( $\tau = 0$ ) значення автокореляційної функції сигналу визначає дисперсію сигналу, з рівняння (4.8) маємо [5.11; 5.26]: дисперсії досліджуваних випадкових процесів виду (3.31) дорівнюють  $\sigma_1^2 = \frac{U_1^2}{2}$ ,

$\sigma_2^2 = \frac{U_2^2}{2}$ . Тоді отримуємо

$$\cos \varphi = \frac{B_{12}(\tau)}{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (5.6)$$

У випадку застосування методів ЦОС вираз (5.6) реалізовується таким чином. Вхідні сигнали синхронно перетворюються аналого-цифровими перетворювачами (АЦП) в цифрові коди  $N_1[j], N_2[j]$ , де  $j = \overline{1, n}$  номер відліку;  $n$  – кількість відліків на період досліджуваних сигналів. Оцінки взаємкореляційної функції для фіксованого значення  $\tau$  та дисперсій процесів визначають відповідно так:

$$B_{12}(\tau)_{\tau=\tau_3} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n N_1[j] N_2[j], \quad j \in (1, n), \quad (5.7)$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n N_1^2[j], \quad (5.8)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n N_2^2[j]. \quad (5.9)$$

З урахуванням співвідношення (5.7 – 5.9) цифровий еквівалент виразу (4.8) має вигляд

$$\cos \varphi = \frac{\sum_{j=1}^n N_1[j] N_2[j]}{\sqrt{\sum_{j=1}^n N_1^2[j] \sum_{j=1}^n N_2^2[j]}}. \quad (5.10)$$

Структуру кореляційного фазометра з дискретною обробкою сигналів зображено на рис. 5.26. За цією схемою реалізації вхідних ергодичних випадкових процесів  $\xi_1(\omega, t)$  та  $\xi_2(\omega, t)$  (сума гармонічних сигналів та завад) надходять на вхідні пристрої ВП1 та ВП2. Блок виділення періоду БВП формує часовий інтервал, рівний періоду вхідних сигналів з метою подальшого формування в пристрої керування ПК моментів дискретизації вхідних процесів.

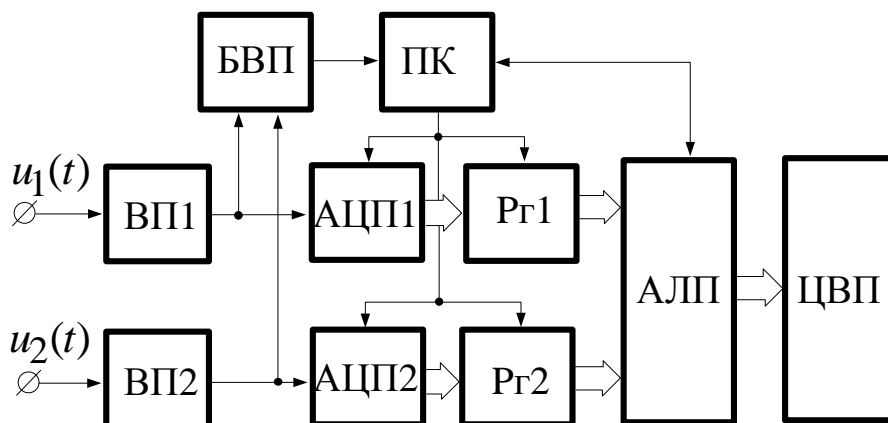


Рис. 5.26. Структура кореляційного фазометра

Пристрої кореляційного фазометра АЦПП1 та АЦПП2 на кожному періоді сигналу формують  $n$  синхронних вибірок миттєвих значень вхідних сигналів, які через регістри пам'яті Рг1 та Рг2 надходять в арифметико-логічний пристрій АЛП, який реалізує передбачені алгоритмом (5.10) операції.

Певним недоліком кореляційних фазометрів є значна залежність похибки вимірювання від інтенсивності завад та наявності вищих гармонік у спектрі досліджуваних сигналів. Характерним є те, що ці складові похибки значно збільшуються на межах інтервалу вимірюваних фазових зсувів  $(0, \pi)$  і набувають мінімальних значень в околі значення  $\varphi = 0,5\pi$ . Це пояснюється нелінійним характером функції перетворення фазового зсуву сигналів (4.8).

До схеми виділення періоду сигналу [5.11] не ставлять особливо жорсткі вимоги до точності визначення періоду: розрахунки свідчать, що за  $n = 40$  відліків сигналу на періоді максимальна похибка дискретизації не перевищує  $0,5^\circ$ , що досягається при визначенні періоду з відносною похибкою 2,5%.

**Фазометри з ортогональною обробкою сигналів.** Метод визначення фазового зсуву між сигналами шляхом їх аналогової обробки за ортогональним методом вимірювання (4.11) забезпечує отримання оптимальної за критерієм максимуму функції правдоподібності статистичної оцінки  $\varphi$  для випадку вимірювань початкової фази гармонічних сигналів вигляду (3.1) з їх адитивної суміші з білим гауссівським шумом [5.6; 5.11; 5.26]. Оскільки такий метод передбачає виконання великого обсягу обчислень, слід надавати перевагу його реалізації в цифровому варіанті. Структури цифрових фазометрів з дискретною ортогональною обробкою сигналів показано на рис. 5.27, а,б. Ці структури дають уявлення про розподіл функцій фазометра між його апаратною і програмно – апаратною частинами у двоканальному (а) та одноканальному (з комутацією каналів) (б) варіантах.



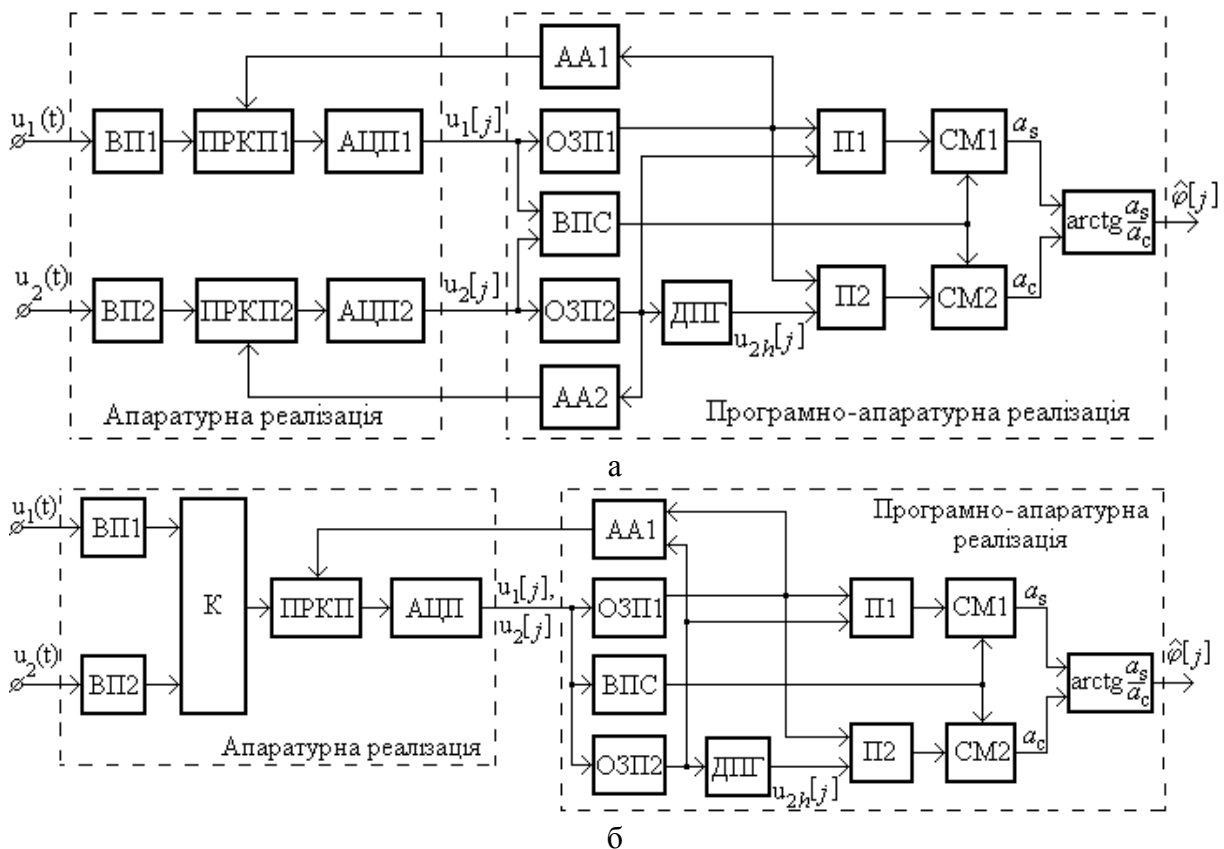


Рис.5.27. Структурно-логічні схеми двоканального (а) та одноканального (б) фазометрів, що реалізують ортогональний спосіб вимірювання: ВП – вхідний пристрій; ПРКП – підсилювач з регульованим коефіцієнтом підсилення; АЦП – аналого-цифровий перетворювач; АА – аналізатор амплітуд; ОЗП – оперативний запам’ятовуючий пристрій; ДПГ – дискретний перетворювач Гільберта; П – помножувач; СМ – суматор;  $\arctg \frac{S}{C}$  – обчислювач значень функції арктангенса; К – комутатор; ВПС – вимірювач періоду сигналу

На входи фазометрів діють два сигнали, кожний з яких є адитивною сумішшю гармонічних сигналів і реалізації білого гауссівського шуму вигляду

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_1 \cos(2\pi ft + \varphi_1) + x_1(t), \quad t \in [t_1, t_2], \\ u_2(t) &= U_2 \cos(2\pi ft + \varphi_2) + x_2(t), \end{aligned} \quad (5.11)$$

де  $x_1(t), x_2(t)$  – реалізації білого гауссівського шуму з дисперсіями відповідно  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ .

Функціонування пристроїв ВП1, ВП2 дає змогу узгодити характеристики вимірювальних сигналів з характеристиками вимірювальних каналів системи. Пристрої ПРКП1, ПРКП2 узгоджують динамічний діапазон вхідних сигналів і діапазон перетворення АЦП1, АЦП2. Ці пристрої, як правило, реалізуються у вигляді окремого порта, який конструктивно розміщується на материнській платі ПК.

Після підсилення сигнали (5.11) синхронно дискретизуються з періодом дискретизації  $T_d$  і квантуються, у результаті чого на виході АЦП1, АЦП2

маємо дві послідовності вибірок:  $\{u_1[j]=u_1(jT_d), j=1,2,3,\dots\}$  та  $\{u_2[j]=u_2(jT_d), j=1,2,3,\dots\}$ . Послідовність відліків  $u_1[j], u_2[n]$  надходять відповідно на ОЗП1 та ОЗП2. Аналізатори АА1, АА2 формують сигнали управління для ПРКП1, ПРКП2. Вибір періоду дискретизації сигналів здійснюється програмно.

Згідно виразу (4.10) підсумовування вибірок здійснюється впродовж інтервалів часу, кратних періоду вимірювальних сигналів, тому до складу системи входить вимірювач періоду сигналів ВПС.

Часто пристрої збору даних, що застосовуються для введення аналогових сигналів у ПК, мають одноканальну структуру, тобто мають один АЦП і комутатор для підключення декількох вхідних сигналів. Такі одноканальні пристрої збору даних можуть бути застосовані для дослідження фазових зсувів низькочастотних сигналів. Структуру фазометра, що орієнтована на використання одноканальних пристроїв збору даних, зображено на рис. 5.27б. У цьому варіанті, за несинхронного формування відліків вхідних сигналів (наприклад, для парних значень  $j=2k$ ,  $k=1,2,\dots$ , визначають вибірки першого сигналу  $u_1[2k]$ , а для непарних  $j=2k+1$  вибірки другого сигналу  $u_2[2k+1]$ ), виникає систематична похибка визначення фазових зсувів  $\Delta\varphi_c = 2\pi f T_d$ , яку необхідно враховувати в остаточному формуванні результату вимірювання.

**Кумулятивні фазометри.** За визначенням (3.6) під кумулятивними розуміють нагромаджені за певний час спостереження фазові зсуви між гармонічними сигналами близькими за значенням частот. Кумулятивні фазові зсуви КФЗ сигналів можуть перевищувати значення  $2\pi$ .

Найпростіший спосіб визначення КФЗ сигналів — розширення діапазону вимірювання фазометра за допомогою подільників частоти. У разі ділення частоти гармонічного сигналу у  $n$  разів у стільки ж разів зменшується початкова фаза сигналу. Тому застосування на вході звичайного фазометра з діапазоном вимірювання  $[0, 2\pi)$  подільників частоти з коефіцієнтом ділення  $n$  дозволяє розширити діапазон однозначного вимірювання КФЗ сигналів на інтервал  $[0, 2\pi n)$ . Водночас з розширенням діапазону однозначного вимірювання у стільки ж разів збільшується похибка вимірювання фазових зсувів сигналів.

Іншим способом визначення КФЗ  $\Phi(t)$  є неперервне стеження за вимірюваним фазовим зсувом сигналів в інтервалі  $[0, 2\pi)$  в слідкуючому режимі і безперервне нагромадження приростів фази без втрати інформації про переходи через межі цілих фазових циклів. Якщо для двох суміжних значень КФЗ, розділених часом дискретизації  $T_d$ , виконується умова  $|\Phi[j+1]-\Phi[j]| < \pi$ , то значення КФЗ, нагромаджене за час спостережень від моменту  $t = t_{\Pi}$  до  $t = t_{\Pi} + jT_d$ , визначають за формулою

$$\Phi(jT_d) = 2\pi n[j] + \varphi[j] = \varphi(t_{\Pi}) + \sum_{k=0}^j \Delta\varphi[k], \quad \varphi(t_{\Pi}) \in [0, 2\pi), \quad (5.12)$$

де фазові зсуви  $\Delta\varphi[j]$  обчислюють згідно з виразами:

$$\Delta\varphi[j] = \begin{cases} \varphi[t_i + (j+1)T_{\ddot{a}}] - \varphi[t_i + jT_{\ddot{a}}], & |\varphi[t_i + (j+1)T_{\ddot{a}}] - \varphi[t_i + jT_{\ddot{a}}] \in (0, \pi), \\ 2\pi - \varphi[t_i + (j+1)T_{\ddot{a}}] + \varphi[t_i + jT_{\ddot{a}}], & \pi < |\varphi[t_i + (j+1)T_{\ddot{a}}] - \varphi[t_i + jT_{\ddot{a}}] \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Виконання умови (5.12) виключає можливість пропуску цілого числа фазових циклів під час визначення КФЗ. У той же час ця умова суттєво обмежує допустиму швидкість зміни КФЗ сигналів.

Більш широкі можливості для стеження за швидкоплинними КФЗ надає спосіб з роздільним визначенням цілої ( $2\pi n[j]$ ) і дробової ( $\varphi[j]$ ) частин КФЗ сигналів. Структурну схему кумулятивного фазометра з роздільним синхронним визначенням складових КФЗ сигналів  $n[j]$  та  $\varphi[j]$  показано на рис. 5.28.

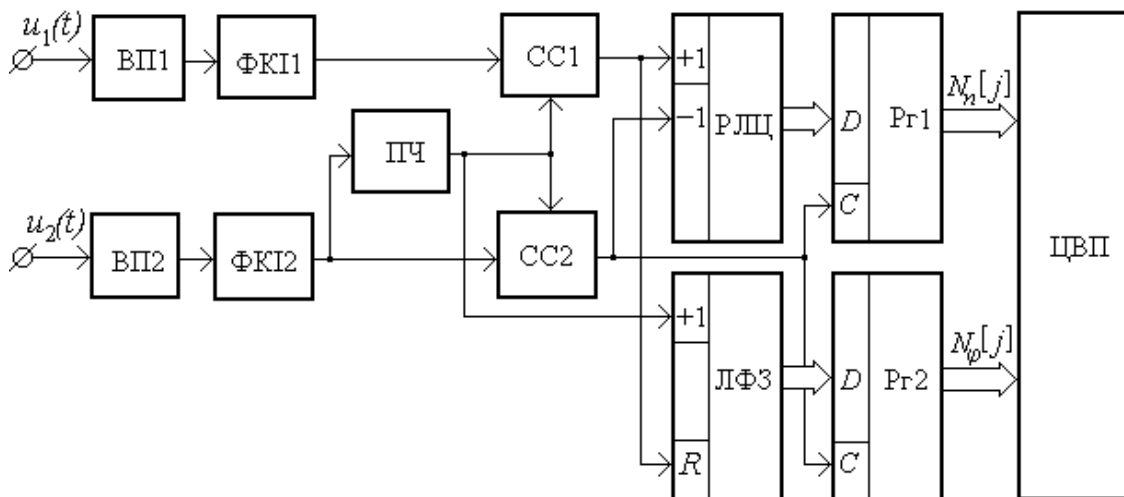


Рис. 5.28. Структурна схема кумулятивного фазометра із синхронним визначенням  $2\pi n[j]$  та  $\varphi[j]$

У цій схемі передбачено визначення  $n[j]$  за різницею нуль-переходів сигналів через їх виділення за допомогою формувачів коротких імпульсів ФКІ1, ФКІ2 та їх підрахунку реверсивним лічильником циклів РЛЦ. Значення фазового зсуву сигналів у частках, кратних  $2^m$ ,  $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ , формується в лічильнику фазових зсувів ЛФЗ під час його заповнення лічильними імпульсами, які формуються помножувачем частоти ПЧ із сигналу  $u_2(t)$  і мають частоту у  $2^m$  разів більшу за частоту цього сигналу. Для стійкої роботи фазометра й уникнення можливих збоїв роботи РЛЦ (у випадку збігу в часі вхідних імпульсів) імпульси з ФКІ1, ФКІ2 додатково проходять через схеми синхронізації СС1, СС2, які їх узгоджують з різними фронтами лічильних імпульсів, що формуються ПЧ. Отримані в РЛЦ та ЛФЗ поточні коди  $n[j]$ ,  $\varphi[j]$  – відповідно цілого числа і дробової частки кумулятивного фазового

зсуву сигналів, синхронно переписуються в регістри Rг1, Rг2 та відображаються цифровим відліковим пристроєм ЦВП.

Принцип синхронного отримання поточних значень  $n[j]$ ,  $\varphi[j]$  сигналів реалізовано в праці [5.1].

Ще вищу швидкодію забезпечує спосіб вимірювання КФЗ сигналів з роздільним несинхронним визначенням  $n[j]$  та  $\varphi[j]$ . Такий спосіб має такі переваги: дозволяє застосовувати спеціальні методи фазометрії, включаючи методи перетворення частоти вхідних сигналів, для забезпечення високої точності вимірювання КФЗ сигналів після завершення перехідних процесів, пов'язаних з їх зміною, і одночасно дозволяє визначати оцінки  $n[j]$  за високої швидкості зміни КФЗ сигналів по нуль-переходах вхідних сигналів. Принцип побудови вимірювача з несинхронним визначенням оцінок  $n[j]$  та  $\varphi[j]$  ілюструє структура кумулятивного фазометра на рис. 5.29.

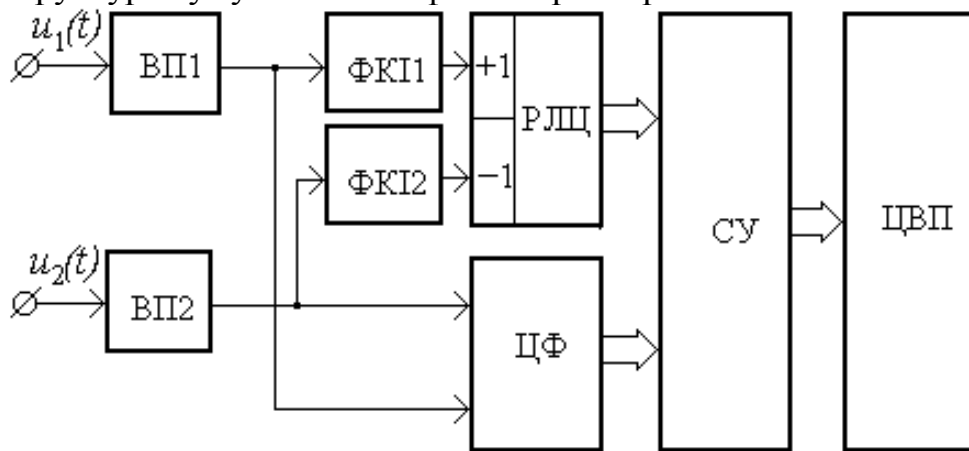


Рис. 5.29. Структурна схема кумулятивного фазометра з несинхронним визначенням  $2\pi n[j]$  та  $\varphi[j]$

За такої організації процесу вимірювання значення  $n[j]$  та  $\varphi[j]$  визначають роздільно та неузгоджено і отримують з випадковими похибками  $\delta\varphi_n[j]$  та  $\delta\varphi_\varphi[j]$ . Результат вимірювання у цьому випадку має вигляд:

$$\Phi[j] = 2\pi \left[ \frac{\Phi[j] + \delta\varphi_n[j]}{2\pi} \right] + [\Phi[j] + \delta\varphi_\varphi[j]] \bmod 2\pi, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad \Phi(0) < 2\pi.$$

Похибки  $\delta\varphi_n[j]$  та  $\delta\varphi_\varphi[j]$  є незалежними і знакозмінними, внаслідок чого  $\Phi[j]$  може відрізнятись від дійсного значення КФС на величину  $\pm 2\pi$ . Отже є

ймовірність виникнення грубих похибок. Для усунення таких похибок отримані несинхронно відліки оцінок  $n[j]$  та  $\varphi[j]$  узгоджуються в схемі узгодження СУ.

Можливі декілька варіантів узгодження оцінок  $n[j]$  та  $\varphi[j]$ .

*Варіант 1.* Максимальна ймовірність грубих похибок виникає в околі значень  $\Phi[j] \bmod 2\pi = 0$ , тобто на межах фазових циклів. Ймовірність грубих похибок зменшується штучним зміщенням поточного значення  $\Phi[j]$  в окіл найближчої до нього точки, для якої  $\Phi \bmod 2\pi = \pi$ . Оцінку числа цілих циклів в  $j$  – му такті спостереження визначають за формулою

$$n[j] = \left\lfloor \frac{\Phi[j] + L(\varphi[j])}{2\pi} \right\rfloor,$$

де  $L(\varphi[j]) = \pi - \varphi[j]$  – корегувальна функція. Умову запобігання грубим похибкам вимірювання визначають виконанням нерівності

$$-\pi < \delta\varphi_n[j] + \delta\varphi_\varphi[j] < \pi.$$

У разі незначних фазових похибок ( $\delta\varphi_n[j], \delta\varphi_\varphi[j] < \pi/4$ ) існує можливість зменшити кількість значень  $L(\varphi[j])$  до трьох:

$$L(\varphi[j]) = \begin{cases} \pi, & 0 \leq \varphi < 0,5\pi; \\ 0, & 0,5\pi \leq \varphi < 1,5\pi; \\ -\pi, & 1,5\pi \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Це призводить до незначного збільшення ймовірності грубих похибок, але значно спрощує апаратну реалізацію. Умова запобігання грубим похибкам у загальному вигляді у порівняно з рівнянням (5.23) має складніший вигляд, а саме:

$$\begin{cases} \pi < \delta\varphi_n + \delta\varphi_\varphi < 0,5\pi, & 0 \leq \varphi[j] < 0,5\pi, \\ -0,5\pi < \delta\varphi_n + \delta\varphi_\varphi < 0,5\pi, & 0,5\pi \leq \varphi[j] < 1,5\pi, \\ -0,5\pi < \delta\varphi_n + \delta\varphi_\varphi < \pi, & 1,5\pi \leq \varphi[j] < 2\pi, \end{cases}$$

*Варіант 2.* Двоступеневе узгодження значень оцінок  $n[j]$  та  $\varphi[j]$ . Для цього виконується додаткове, допоміжне вимірювання  $\varphi_k[j]$ , результат якого містить у собі узгоджені частини  $n[j]$  і  $\varphi[j]$ . Тобто  $\varphi_k[j]$  частково «перекривається» з  $n[j]$  та  $\varphi[j]$ . Значення  $\varphi_k[j]$  формується як результат вимірювання КФЗ досліджуваних сигналів, заздалегідь поділених за частотою в  $k$  разів. Ділення частоти одночасно приводить і до зменшення КФЗ сигналів у  $k$  разів:  $\Phi_k[j] = 2\pi \frac{n[j]}{k} + \frac{\varphi[j]}{k}$ . Подамо  $n[j] = km[j] + l[j]$ , де  $m[j], l[j]$  – цілі числа, причому  $l = \overline{0, (k-1)}$ . Оцінка вимірюваного фазового зсуву

$$\varphi_k[j] = \Phi_k[j] \bmod 2\pi = 2\pi \frac{l[j]}{k} + \frac{\varphi[j]}{k} = \varphi_{\text{ст}}[j] + \varphi_{\text{м}}[j].$$

Отриманий допоміжний результат  $\varphi_k[j]$  містить у собі узгоджені (без грубої похибки) частини: значення  $\varphi_{\text{ст}}[j]$  (старші розряди) частини цілих фазових циклів у межах  $[0, (k-1)]$  та грубе значення фазового зсуву  $\varphi_{\text{м}}[j]$  (молодші розряди  $\varphi_k[j]$ ) між досліджуваними сигналами. Наявність  $\varphi_k[j]$  дозволяє виконати узгодження  $n[j]$  та  $\varphi[j]$  у два етапи. На першому узгоджуються результати  $\varphi[j]$  та  $\varphi_k[j]$  і визначається оцінка значення частини цілих фазових циклів між сигналами

$$l[j] = \left[ \frac{k\varphi_k[j]}{2\pi} - \frac{\varphi[j]}{2\pi} + 0.5 \right]. \quad (5.13)$$

На другому етапі узгоджуються результати  $l[j]$  та  $n[j]$  і визначається оцінка другої частини цілих фазових циклів

$$m[j] = k \left[ \frac{n[j] - l[j]}{k} + 0.5 \right]. \quad (5.14)$$

З виразів (5.13) та (5.14) випливає умова, за якої не виникають грубі похибки, яка полягає у виконанні такої сукупності нерівностей

$$\begin{cases} -\pi + \frac{2\pi k}{N} < k\delta\varphi_k + \delta\varphi < \pi - \frac{2\pi k}{N}, \\ -\pi + \frac{2\pi}{k} < \delta\varphi_n < \pi - \frac{2\pi}{k}, \end{cases}$$

де  $\delta\varphi_k$  – похибка визначення  $\varphi_k[j]$ ;  $N$  – кількість ступенів квантування  $\varphi_k[j]$ . Остаточний результат вимірювання дорівнює:

$$\Phi[j] = 2\pi[km[j] + l[j]] + \varphi[j].$$

Структуру кумулятивного фазометра за розглянутим варіантом узгодження цілої і дробової частин КФЗ показано на рис. 5.30.

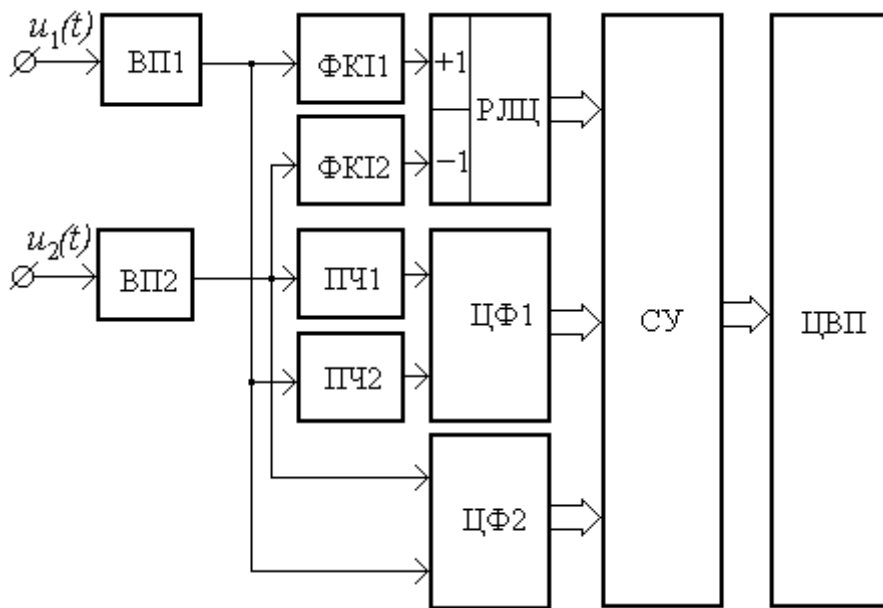


Рис. 5.30. Структура вимірювачів КФЗ, що реалізує двоступеневе узгодження  $2\pi n[j]$  та  $\phi[j]$ : ВП – вхідний пристрій; ПЧ – подільник частоти; ФКІ – формувач коротких імпульсів; РЛЦ – реверсивний лічильник циклів; ЦФ – цифровий фазометр; СУ – схема узгодження; ЦВП – цифровий відліковий пристрій

Принцип несинхронного отримання поточних значень  $n[j]$ ,  $\phi[j]$  реалізовано в праці [5.1].

**Технічні характеристики серійних фазометрів.** Відомості про основні технічні характеристики вітчизняних і закордонних фазометрів, які випускались протягом 60 – 80 роках минулого століття, наведено в табл. 5.1 – 5.3 [5.14; 5.21; 5.26].

Таблиця 5.1. Основні технічні характеристики експериментальних та серійних фазометрів, що випускались у СРСР

Параметр	Значення параметрів						
	Ф2 – 28	ЦФ – 17	Ф2 – 34	ФК2 – 35	ЦФ – 30М	Ф5131	Ф5126
Діапазон частот	5Гц– 500кГц	1 Гц– 7 МГц	1 Гц– 5 МГц	0,1 Гц– 10 МГц	0,1 Гц– 10 МГц	$10^{-3}$ Гц– 1 МГц	1МГц– 150МГц
Діапазон амплітуд вхідних сигналів, ...°	10 мВ– 10В	2 мВ– 2 В	2 мВ– 2 В (2–200) В	1 мВ– 1 В (1–300) В	1 мВ–2 В	50мВ– 100 В	10 мВ– 1 В
Основна похибка,°	0,03*	0.02*	$0,1+10^{-7}f^{\#}$	0,03*	0,03* 0,1	0,5	0,3

Розділ 5

Ціна одиниці молод. разряду	0,01	0,01	0,01	0,001...1	0,001	0,1	0,1
Час вимірювання, с	0,1—5	1,3—13/ <i>f</i>	—	—	1,10,50	—	—
Споживана потужність, ВА	75	35	35	95	35	—	—
Маса, кг	11	5	4,8	15	5	16	17
Габарити, мм	340×20× ×315	312×93× ×316	312×93× ×316	490×133× ×475	312×93× ×316	—	—

\* Для Ф2 – 28 у діапазоні частот (20—100) кГц та для рівнів сигналів понад 0,1 В; для ЦФ – 17 у діапазоні частот (1—100000) Гц та для рівнів сигналів понад 0,2 В; для Ф2 – 34 у діапазоні частот (20—5·10<sup>6</sup>) Гц та для рівнів понад 10 мВ (*f* – частота в Гц); для ФК2 – 35 у діапазоні частот (10—2·10<sup>5</sup>) Гц та для рівнів понад 10 мВ; для ЦФ – 16 у діапазонах (10—50) кГц (0,003°), (0,1 Гц—10) кГц і (50—500) кГц (0,01°), (0,5—2) МГц (0,05°); для ЦФ – 30М відповідно у діапазонах 0,1—10<sup>6</sup> Гц, 10<sup>6</sup>—10<sup>7</sup> та для рівнів сигналів понад 10 мВ.

Цифрові фазометри Ф2-28, Ф2-34 (серійні) та ЦФ-17 (експериментальний зразок) призначені для вимірювання фазових зсувів та їх приростів між двома гармонічними сигналами.

Цифровий фазометр – компаратор фази ЦФ-16 призначено для передачі розміру міри фазового зсуву сигналів від міри вищого розряду до мір першого і другого розрядів.

Цифровим фазометром ФК-35 вимірюють фазові зсуви між двома гармонічними або імпульсними сигналами, а також частоту, напруги та відношення напруг сигналів. У фазометрі передбачено індикацію нормованих значень похибок вимірюваних параметрів сигналів.

Цифровий фазометр ЦФ-30М (експериментальний зразок) додатково до функцій, що виконує фазометр ФК-35, вимірює швидкості зміни фазових зсувів сигналів (у цьому режимі діапазон вимірювання приладу становить ±10<sup>6</sup> рад).

Основні характеристики деяких фазометрів, призначених для вимірювання фазових зсувів між гармонічними сигналами високих і надвисоких частот, наведено в табл. 5.2, а характеристики зарубіжних серійних фазометрів у табл. 5.3.

**Таблиця 5.2. Основні технічні характеристики фазометрів високої та надвисокої частот сигналів**



Параметри	Значення параметрів		
	ФК2 – 12	ФК2 – 14	ФК2 – 12
Діапазон частот	(1–1000) МГц	(110–7000) МГц	(110–12400) МГц
Межі вимірювання, ... °	0±180	0±180	0±180
Основна похибка вимірювання, ... °	2,5	3	1
Вхідна амплітуда сигналів	15 мВ–1 В	(5·10 <sup>-10</sup> –5·10 <sup>-4</sup> ) В	(5·10 <sup>-7</sup> –5·10 <sup>-4</sup> ) Вт
Вхідний опір, Вхідна ємність	80 кОм 3,5 пФ (з пробником) 500 Ом (з трійником)	50 Ом –	50 Ом –
Габарити, мм	490x175x475	–	488x213x475 488x113x475
Маса, кг	17,5	26; 12; 5	47

Таблиця 5.3. Основні технічні характеристики зарубіжних серійних фазометрів

Параметр	Значення параметрів				
	355 В (Wiltron, США)	305 (Dranetz, США)	6500 (Krohn– Hite, США)	4001–5 (PSI, Велика Британія)	2791 (Bruel & Khar, Данія)
1	2	3	4	5	6
Діапазон частот	10 Гц– 2 МГц	2 Гц–700 кГц (до 11 МГц з перетворенням частоти)	3 Гц–5 МГц	1 Гц–3 МГц	2 Гц–200 кГц
Діапазон амплітуд вхідних сигналів	1 мВ–400 В	10 мВ–300 В	(0,1–20) В	(0,1–300) В	10 мВ–15 В
Основна похибка, ... °	0,0015 ф	0,03–2,5	0,05–35	0,1–6	1
Ціна одиниці молодшого разряду, ... °	0,1	0,01	0,01	0,01	1
Маса, кг	13,6	–	6,8	5	2,8

### 5.3. Метрологічне забезпечення фазометрії

**Калібратори фазових зсувів сигналів.** Під калібраторами фазових зсувів сигналів розуміють двоканальні генератори сигналів синусоїдної (чи прямокутної) форми, які формують два сигнали, фазовий зсув між якими можна встановлювати із заданою високою точністю.

Натепер відомо значну кількість способів та засобів формування фазових зсувів сигналів [5.15; 5.16]. Значного поширення набули цифрові двофазні генератори, у яких фазовий зсув між сигналами формується не за допомогою фазообертача, а утворюється між двома сигналами, синтезованими за допомогою цифрових схем з декількома стійкими станами [5.7; 5.8]. Найчастіше за такі цифрові схеми використовують подільник частоти. В цифрових подільниках частоти з коефіцієнтом ділення  $k$  кожному значенню коду відповідає одно з  $(k-1)$  дискретних значень початкової фази вихідного коливання:  $\varphi_i = \frac{2\pi}{k}i$ ,  $i = \overline{0, (k-1)}$ .

Калібратори фазових зсувів сигналів на подільниках частоти будують за загальною структурною схемою (див. рис. 5.23, підрозділ 5.2), застосовуваною як міру фазового зсуву сигналів у компенсаційному фазометрі. Частота вихідних сигналів схеми залежить як від коефіцієнта ділення подільників частоти, так і від частоти генератора тактових імпульсів. Певний недолік цієї схеми: зменшення дискретного кроку задання фазових зсувів сигналів (збільшення коефіцієнту ділення) за незмінної швидкодії подільників частоти призводить до зменшення верхньої межі частотного діапазону калібратора. Цей недолік частково усувається в схемі калібратора з цифровим синтезом сигналів на основі нагромаджувального суматора. Узагальнену схему такого калібратора фазових зсувів сигналів показано на рис. 5.31.

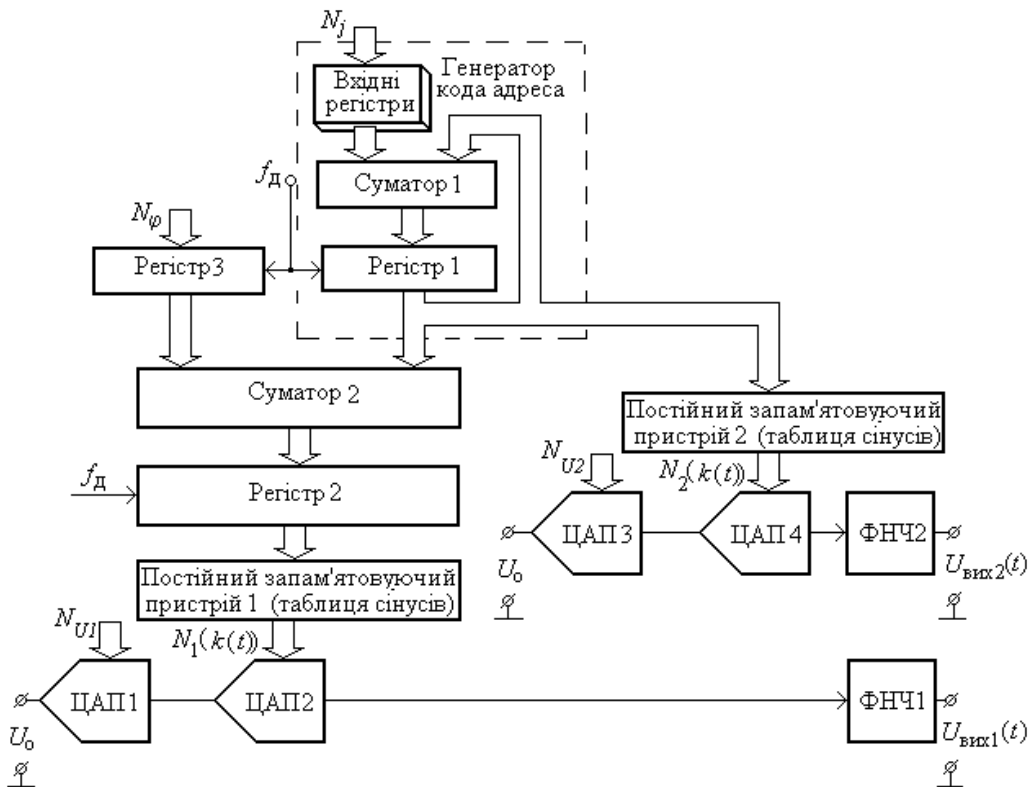


Рис. 5.31. Узагальнена схема калібровача фазових зсувів з цифровим синтезом сигналів на основі нагромаджувального суматора

До складу схеми входить генератор коду адреси, який разом з частотою дискретизації  $f_d$  визначає частоту синтезованого сигналу. Цей пристрій являє собою нагромаджувальний  $m$ -розрядний суматор з вхідними регістрами. На виході суматора отримуємо коди поточної фази сигналу за модулем  $2^m$  (код  $2^m$  відповідає  $2\pi$ ). Коди  $N_j \in [1, 2^{m-4}]$  надходять у вхідні регістри і можуть програмно перемикатись у процесі роботи. Цим кодам відповідає крок збільшення фази  $\frac{\pi}{2^{m-1}} N_j$ . Нагромаджувальний суматор, утворений суматором 1 і регістром 1. Вихідний код нагромаджувального суматора з частотою  $f_d$  збільшується на величину  $N_j$ . Його поточне значення на  $k$ -му такті роботи становить  $(N_j k(t)) \bmod 2^m$ , а  $k(t) = [f_d t]$ .

Фазовий зсув між генерованими сигналами формується шляхом зсуву адресних кодів двох синтезованих сигналів на необхідну задану величину  $N_\phi$ , яка зберігається в регістрі 3. Цей код додається в суматорі 3 до поточного коду адреси, і, таким чином, в регістрі 3 утворюється код адреси  $(N_j k(t) + N_\phi) \bmod 2^m$ .

Пам'ять (постійні запам'ятовувальні пристрої 1, 2) відіграє роль таблиці значень функцій (наприклад, синусоїдного сигналу), де зберігаються  $2^m$  значень

$n$  – розрядних кодів генерованої функції. Коди поточних значень фази сигналу надходять на адресні входи пам'яті, на виходах яких формуються коди відповідних поточних значень функції

$$N_1(k(t)) = 2^{n-1} + \left[ 2^{n-1} \sin \left( 2\pi \frac{N_j k(t) + N_\phi}{2^m} \right) \right],$$

$$N_2(k(t)) = 2^{n-1} + \left[ 2^{n-1} \sin \left( 2\pi \frac{N_j k(t)}{2^m} \right) \right].$$

Основна частота генерованих сигналів становить  $f_o = \frac{N_j}{2^m} f_d$  (для обраного максимального значення  $(N_j)_{\max} = 2^{m-4}$  маємо  $f_o = 2^{-4} f_d$ , тобто на період синтезованого синусоїдного сигналу припадає 16 їх дискретних значень).

Перетворення кодів  $N_1(k(t))$ ,  $N_2(k(t))$  у сигнали виконується  $n$  – розрядними перемножувальними цифро аналоговими перетворювачами ЦАП 2 і 4. Ці пристрої реалізують функції перетворення вигляду

$$u_{\text{вих}} = \frac{N}{2^n} u_{\text{вх}},$$

де  $u_{\text{вх}}, u_{\text{вих}}$  – відповідно вхідний і вихідний сигнали ЦАП,  $N$  – перетворюваний у сигнал код. Амплітудні значення вихідних сигналів регулюються допоміжними ЦАП1, ЦАП3, які перетворюють постійну напругу  $U_o$  у пропорційні кодам  $N_{U1}, N_{U2}$  сигнали. На виходах ЦАП2, ЦАП4 формуються сигнали

$$u_{\text{вих1}}(t) = \frac{U_o}{2^n} N_{U1} \frac{N_1(k(t))}{2^n} = \frac{U_o}{2^{2n}} N_{U1} \left\{ 2^{n-1} + \left[ 2^{n-1} \sin \left( 2\pi \frac{N_j k(t) + N_\phi}{2^m} \right) \right] \right\}; \quad (5.15)$$

$$u_{\text{вих2}}(t) = \frac{U_o}{2^n} N_{U2} \frac{N_2(k(t))}{2^n} = \frac{U_o}{2^{2n}} N_{U2} \left\{ 2^{n-1} + \left[ 2^{n-1} \sin \left( 2\pi \frac{N_j k(t)}{2^m} \right) \right] \right\}. \quad (5.16)$$

Постійну складову в сигналах (5.15), (5.16), у разі використання одноквadrантних ЦАП можна видалити за допомогою фільтрів низьких частот.

Крім постійної складової в спектрах сигналів (5.15), (5.16) з'являються вищі гармоніки. Ідеалізований східчасто-апроксимований синусоїдний сигнал має у своєму складі, окрім основної, ще й гармоніки з частотами  $(np \pm 1)f_o$  і представляється рядом

$$u(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} \left\{ \sin(2\pi f_0 t + \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np-1} \sin[2\pi(np-1)f_0 t + \varphi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np+1} \sin[2\pi(np+1)f_0 t + \varphi] \right\},$$

де  $p$  – кількість вибірок на періоді сигналу. Найближча до основної частоти гармоніка має номер  $(np - 1)$ . Для розглянутого вище випадку  $p = 2^4$  найближча гармоніка має номер "15" і разом з іншими вищими гармоніками може бути легко відфільтрована за допомогою фільтрів нижніх частот.

Принцип цифрового формування сигналів з каліброваним значенням фазового зсуву між ними використана, зокрема у вимірювальних двофазних генераторах [5.4; 5.5]. У разі потреби сформовані на низьких частотах фазові зсуви сигналів можуть бути перенесені на більш високі частоти за допомогою гетеродинного перетворення частоти.

Похибки формування заданих фазових зсувів синтезованих сигналів можуть бути дуже малими й обумовлені здебільшого рівнем розв'язки каналів калібратора, похибками ЦАП та неідентичністю застосованих фільтрів нижніх частот.

Основні технічні характеристики калібраторів фазових зсувів сигналів наведено в табл.5.4.

Таблиця 5.4. Основні технічні характеристики калібраторів фазових зсувів сигналів

Параметр	Значення параметрів		
	Ф1 – 4	Ф5125	Ф5224
1	2	3	4
Діапазон частот	5 Гц – 10 МГц	0,125 Гц – 20 кГц	$10^{-3}$ Гц – 200 кГц
Діапазон відтворюваних фазових зсувів, ... °	0 – 359	0 – 359	0 – 359
Дискретність, ... ° (діапазон частот)	10 (5 Гц – 2 МГц) 30 (5 – 10 МГц)	1	0,1 ( $10^{-3}$ Гц – 20 кГц); 1 (20 – 200 кГц)
Основна похибка, ° (діапазон частот)	0,03 (20 Гц – 10 кГц) 0,05 (10 кГц – МГц) 0,1 (5–20 Гц, 1– 10 МГц)	0,03	0,1
Значення напруг сигналів (СКЗ)	1 мВ – 1 В (500 Ом)	10 мВ – 10 В (600 Ом)	1 мВ – 10 В (500 Ом)
Коефіцієнт гармонік, %	1 (5 Гц – 1 МГц), 2 (2 – 10 МГц)	1,5	1
1	2	3	4
Споживана потужність,	150	130	120

ВА			
Масса, кг	20	18	18
Габаритні розміри, мм	488×213×475	490×210×375	440×158×435

**Методи перевірки фазовимірювальної апаратури.** Апаратурні похибки фазовимірювальних приладів та систем визначають як відповідними розрахунками, так і експериментальним шляхом у процесі їх розроблення та експлуатації.

Основу метрологічного забезпечення фазовимірювальної апаратури становлять державні еталони та зразкові засоби вимірювання [5.14]. У СРСР до складу еталона фазових зсувів входили такі засоби: генератор сигналів змінної напруги, резистивно-ємнісний фазообертач, що складався з набору мір опору та повітряного змінного конденсатора; лінія затримки; вимірювальний міст змінного струму для вимірювання індуктивності лінії затримки; компенсатори змінного струму для градування кіл лінії затримки і повірки зразкових засобів вимірювань; вимірювальний міст змінного струму для узгодження ланок лінії затримки. Еталон одиниці кута фазового зсуву сигналів за ГОСТ 8.139–75 (рис. 5.32) призначався для відтворення фазових зсувів між сигналами на частоті 1000 Гц у діапазоні значень від 0 до 360°. Середньоквадратичне відхилення відтворених фазових зсувів сигналів від їх номінальних значень становило від 0,0003° до 0,01° з невилученою систематичною складовою похибкою від 0,0002°+10<sup>-4</sup>φ° до 0,004°+0,000017φ°.

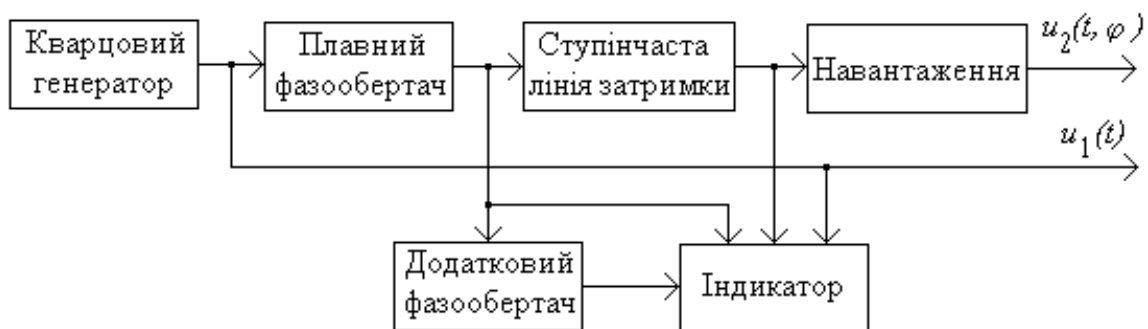


Рис. 5.32. Структура еталону кута фазового зсуву сигналів

Гармонічний сигнал кварцового генератора частотою 1000 Гц надходить на один з виходів еталона безпосередньо, а на другий – через плавно регульований фазообертач та ступінчасту лінію затримки. Фазообертач призначено для відтворення фазового зсуву сигналів в інтервалі значень 0 – 5°, а лінія затримки, яка складається з  $n$  кіл навантажених на узгоджене навантаження, – для розширення діапазону відтворених фазових зсувів сигналів на інтервал [0 – 360°]. Висока точність і повторюваність відтворення фазових зсувів сигналів досягалась використанням високостабільних  $RC$  та  $LC$

елементів фазообертачів та їх термостабілізацією.

Передачу розміру одиниці фазового зсуву сигналів зразковим засобам вимірювання першого розряду виконують звірянням за допомогою компаратора та робочого засобу вимірювання методом прямих вимірювань. У свою чергу, зразкові засоби вимірювання першого розряду – калібратори фазових зсувів та зразкові пасивні фазообертачі – застосовують для перевірки зразкових засобів вимірювання фазових зсувів сигналів другого розряду. Похибка зразкових засобів вимірювань першого розряду не повинна перевищувати  $0,1^\circ$ , а другого розряду –  $0,3^\circ$ .

Робочі засоби вимірювання кутів фазових зсувів між електричними сигналами на більш високих частотах перевіряють за спеціальними методиками.

Під час перевірки фазовимірювальної апаратури за допомогою калібраторів фазових зсувів сигналів результат перевірки містить сумарну похибку, яка складається з похибок фазометра і калібратора. Для практичних завдань фазометрії у цьому випадку можливі два варіанти. Якщо похибкою калібратора порівняно з похибкою фазометра можна знехтувати, то відтворюване калібратором значення фазового зсуву сигналів беруть за дійсне значення і похибку фазометра визначають однозначно як різницю показань цих приладів. У випадку, коли похибки калібратора і фазометра є зіставними можна, застосувати наведені в праці [5.11] методи розділення цих похибок (спектральний, алгебричний, статистичний).

Основні відомості про перевірку електромеханічних та електронних фазометрів наведено в працях [5.17; 5.20]. Найпростіший і тому найбільш поширений методу повірки – метод безпосереднього злічення результатів вимірювання з еталонним фазометром.

Крім загальних методів перевірки апаратурні систематичні похибки фазометрів можна виявити методами *самоперевірки* [5.10; 5.15; 5.18]. Таку можливість обумовлено тим, що, по-перше, вимірювання фазових зсувів сигналів є відносним, по-друге, легко відтворюється нульовий фазовий зсув, по-третє, фазовий зсув гармонічних сигналів під час їх плавної зміни повторюється через кожні  $360^\circ$ . Один з варіантів реалізації цього методу передбачає наявність двох плавно регульованих некаліброваних фазообертачів та джерела гармонічних сигналів.

Самоперевірку фазометра виконують за такою методикою. Спочатку на обидва входи фазометра подається один і той же сигнал, тобто синфазні сигнали. Після калібрування фазометра в один з каналів умикають перший фазообертач. Плавним регулюванням фазообертача установлюють показання фазометра, що дорівнюють  $180^\circ$ . Не змінюючи настроювання фазообертача, його вмикають і на його місце вмикають другий фазообертач. Регулюванням останнього також досягають показань фазометра  $180^\circ$ . Після цього вмикають в один канал обидва фазообертачі. Показання фазометра повинні дорівнювати 0

(360°). Якщо показання фазометра становлять  $\varphi_1$ , то похибка фазометра в точці 180° становить  $0,5\varphi_1$ .

Для отримання похибки фазометра в точці 90° повторюють згадані вище операції для цього фазового зсуву з такими відмінностями. Обидва фазообертачі окремо регулюють до отримання на фазометрі відліку 90°. Після вмикання послідовно з'єднаних фазообертачів в один канал маємо показання фазометра  $180^\circ + \varphi_2$ . Похибка фазометра в точці 90° становить  $\varphi_2 - 0,5\varphi_1$ . Таким же чином можуть бути визначені похибки в точках 45°, 22,5°, 11,25° і т.д.

Метод самоперевірки забезпечує визначення похибок фазометрів в діапазоні частот сигналів від десятків герців до десятків мегагерців з похибкою не більше 0,1°. У діапазоні надвисоких частот фазообертачі й фазометр мають бути узгоджені.

Нормативні документи, які діють нині та використовувались раніше в галузі фазометрії, наведені в таблиці 5.5.

**Таблиця 5.5 Перелік основних нормативних документів в області фазометрії**

№	Позначення документа	Назва документа	Термін дії
1	2	3	4
1	ГОСТ 8.462 – 82	Фазометры и фазовращатели сверхвысокочастотные. Методы и средства поверки	Чинний
2	ГОСТ 8039 – 79	Фазометры. Общие технические условия	Не діє з 01.01.96р.
3	ГОСТ 8039 – 93	Фазометры. Общие технические условия	Чинний
4	ДСТУ 4005 – 2000	Метрологія. Вимірювачі девіації частоти та девіації фази. Методи повірки	Без обмежень
5	МИ 1949 – 88	ГСИ. Государственная поверочная схема для средств измерений угла фазового сдвига между двумя электрическими напряжениями в диапазоне частот $1 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^7$ Гц	Без обмежень
6	МИ 1672 – 87	ГСИ. Фазометры электронные. Методика поверки (по МИ 152 – 78)	Без обмежень
7	МИ 343 – 83	ГСИ. Калибратор фазовых сдвигов Ф5224. Методы и средства поверки	Те саме
8	–	Калибратор фазовых сдвигов Ф5125. Техническое описание и инструкция по эксплуатации	– // –
9	3.393.067 ТО	Фазометр цифровой Ф5131. Техническое описание и инструкция по эксплуатации	– // –
10	МИ 2009 – 89	Измерители коэффициента мощности (фазометры) (на	– // –



		основе ГОСТ 8.039 – 79 и ГОСТ 8.551 – 86)	
11	8.416 – 81	ГСИ. Государственный специальный эталон и общесоюзная поверочная схема для средств измерения угла сдвига фаз в диапазоне частот 2,5 – 3,5 ГГц	–//–
12	8.533 – 85	ГСИ. Государственный специальный эталон и общесоюзная поверочная схема для средств измерения угла сдвига фаз в диапазоне частот 25,95 – 37,50 ГГц	–//–
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
13	2138 – 91	ГСИ. Государственный специальный эталон и общесоюзная поверочная схема для средств измерения угла сдвига фаз в диапазоне частот 53,57 – 78,33 ГГц	–//–
14	2139 – 91	ГСИ. Государственный специальный эталон и общесоюзная поверочная схема для средств измерения угла сдвига фаз в коаксиальных трактах в диапазоне частот 0,001 – 17,4 ГГц	–//–
15	109 – 88	ГСИ. Калибраторы угла фазового сдвига образцовые. Методика поверки	–
16	194 – 62	По поверке фазометров. Инструкция	–
17	17 – 74	Методика поверки электронного фазометра. Методики институтов	–
18	152 – 78	Методика поверки электронного фазометра. Методики институтов	Не діє
19	1782 – 87	ГСИ. Установки супергетеродинные для измерения ослабления и фазового сдвига Д1 ДК1. Методика поверки	–

#### **5.4. Похибки вимірювання фазових зсувів сигналів**

Фазові вимірювання супроводжуються дією ряду специфічних похибок, які не можна не враховувати під час оцінювання сумарної похибки результату вимірювання, зокрема й під час перевірки фазометричної апаратури. До таких похибок передусім належать: похибка від паразитного зв'язку між каналами фазометра, похибка від скінченного значення вхідного опору фазометра, амплітудно – фазова похибка, похибка від наявності у вимірювальному сигналі вищих гармонік, похибка від неідентичності фазочастотних характеристик каналів фазометра [5.9; 5.10; 5.21; 5.13].

*Похибка від паразитного зв'язку між каналами фазометра* виникає внаслідок часткового проходження сигналів з одного каналу в інший і має випадковий характер. Такий небажаний обопільний перехресний вплив вхідних сигналів один на одній утворюється завдяки паразитних ємнісним та індуктивним зв'язком між колами каналів. Механізм виникнення цієї похибки пояснює структурна схема (рис. 5.33, а) та векторна діаграма сигналів (рис. 5.33, б).

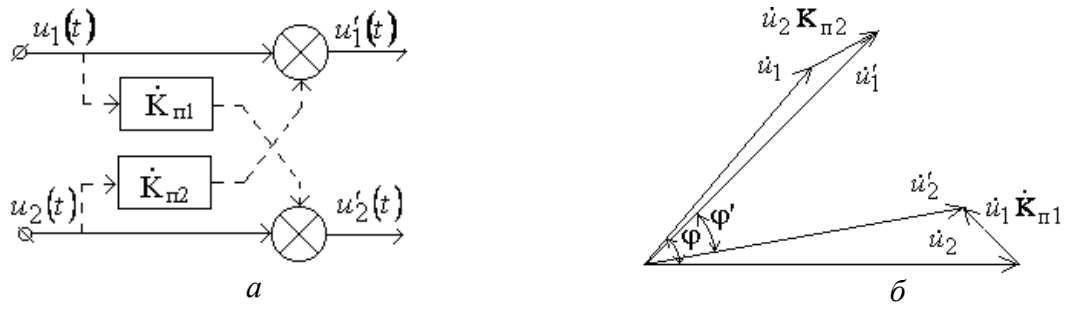


Рис. 5.33. Механізм виникнення похибки від паразитного зв'язку між каналами фазометра (а) та векторна діаграма сигналів (б)

Наявний паразитний зв'язок між каналами враховано уявними колами з комплексним коефіцієнтами передачі  $\dot{K}_{п1}$ ,  $\dot{K}_{п2}$ . Сигнали, що пройшли через ці кола додаються до (віднімаються від) сигналів в інших каналах. Без паразитного зв'язку фазовий зсув між вхідними сигналами  $\dot{i}_1, \dot{i}_2$  становить  $\varphi$  (рис. 5.33, б). Для спотворених за рахунок паразитного зв'язку сигналів  $\dot{i}'_1, \dot{i}'_2$  фазовий зсув змінюється до величини  $\varphi \neq \varphi'$ . Отже, абсолютне значення фазової похибки становить  $\delta\varphi_1 = \varphi' - \varphi$ . Якщо необхідно знайти граничне значення цієї похибки, то потрібно вважати канали паразитного зв'язку симетричними –  $\dot{K}_{п1} = \dot{K}_{п2} = Ke^{-i\varphi}$ . З урахуванням того, що на входи фазометра діють сигнали, подані комплексними амплітудами  $\dot{i}_1 = U_1 e^{-i\varphi}$ ,  $\dot{i}_2 = U_2$ , маємо

$$\begin{aligned} \dot{i}'_1 &= \dot{i}_1 + \dot{i}_2 Ke^{-i\varphi} = U_1 e^{-i\vartheta_1}, \\ \dot{i}'_2 &= \dot{i}_2 + \dot{i}_1 Ke^{-i\varphi} = U_2 e^{-i\vartheta_2}. \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= -\arctg \frac{U_1 \sin \varphi + KU_2 \sin \varphi}{U_1 \cos \varphi + KU_2 \cos \varphi}, \\ \vartheta_2 &= -\arctg \frac{KU_1 \sin(\varphi + \varphi)}{U_2 + KU_1 \cos(\varphi + \varphi)}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Формули (5.17) отримано за умови, що знаменники цих виразів відмінні від 0. Для однакових значень сигналів, тобто якщо  $U_1 = U_2$  та  $K \ll 1$ , маємо

$$\varphi' = \vartheta_1 - \vartheta_2 = \arctg[K \sin(\varphi + \varphi)] - \arctg \frac{K \sin \varphi + \sin \varphi}{K \cos \varphi + \cos \varphi}. \tag{5.18}$$

З виразу (5.18) випливає, що максимальна фазова похибка від зв'язку між каналами наближено оцінюється величиною  $\delta\varphi_{1,\max} \approx 2K$ , наприклад, якщо  $K = 10^{-3}$  (– 60 дБ),  $\delta\varphi_{1,\max} \approx 0,002$  рад або  $\delta\varphi_{1,\max} \approx 0,11^\circ$ .

**Похибка від скінченного значення вхідного опору фазометра (похибка підімкнення).** У фазовимірювальній апаратурі особливі технічно обгрунтовані вимоги ставляться до вхідних опорів та їх довгострокової стабільності. Це зумовлено тим, що повний опір вхідних кіл фазометрів містить і активну, і ємнісну складові, які утворюють фазообертачі. За рахунок їх дії у досліджувані сигнали вноситься додатковий фазовий зсув. Для кількісного оцінювання цієї похибки розглянемо вхідне коло фазометра (рис. 5.34). На цьому рисунку вхідний опір фазометра показано паралельно підімкненими активним резистором та конденсатором. Додатковий фазовий зсув сигналу, обумовлений вхідною ємністю фазометра, становить

$$\delta\varphi_2 \approx -\arctg 2\pi f C_1 R_{\bar{a}}.$$

Наприклад, якщо  $C_1 = 10$  пФ,  $R_{\bar{a}} = 50$  Ом,  $f = 10$  МГц маємо  $\delta\varphi_2 \approx 17^\circ$ . За повної ідентичності каналів фазометра сигнал у другому каналі теж отримає додатковий фазовий зсув  $\delta\varphi_2 \approx 17^\circ$ .

Природно, що повністю ідентичні вхідні канали фазометрів реалізувати неможливо. І навіть незначні розбіжності параметрів вхідних каналів фазометра призводять до відчутних похибок. Наприклад, у разі розбіжності вхідних ємностей на 1 пФ додатковий фазовий зсув між вхідними сигналами для розглянутих вище умов ( $C_1 = 10$  пФ,  $R_{\bar{a}} = 50$  Ом,  $f = 10$  МГц,) становитиме  $\delta\varphi_2 \approx 1,8^\circ$ .

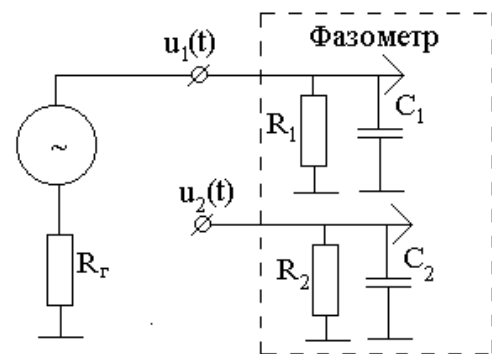


Рис. 5.34. Еквівалентна схема вхідних кіл фазометра

**Похибка від наявності у вхідних сигналах вищих гармонік.** Порівнювані сигнали містять у своєму складі зазвичай вищі гармоніки. Їх наявність веде до появи ще однієї складової похибки фазових вимірювань – похибки від вищих гармонік.

З'ясуємо механізм утворення цієї похибки. Вищі гармоніки спотворюють форму сигналу, отже, зміщують у часі нульові переходи сигналу відносно нуль-переходів першої гармоніки. Вплив вищих гармонік сигналу наочно ілюструють графіки на рис. 5.35, на яких зображено першу і третю гармоніки та сумарний сигнал.

Фазова похибка від вищих гармонік  $\delta\varphi_3 = 2\pi f \Delta\tau$ , де  $\Delta\tau$  – зсув у часі нуля – переходу сумарного сигналу відносно першої гармоніки. Ця похибка також

має випадковий характер.



Рис. 5.35. Графічна ілюстрація механізму утворення фазової похибки від наявності у вхідному сигналі вищих гармонік

Максимальне значення зсуву нуля-переходів сигналів у часі, враховуючи дію всіх наявних у сигналі  $n$  вищих гармонік, становить

$$|\Delta\tau_{\max}| = -\frac{1}{2\pi f} \arcsin K_f, \quad (5.19)$$

де  $K_f = \frac{\sqrt{\sum_{j=2}^n U_j^2}}{U_1}$  – коефіцієнт гармонік. Отже, максимальне значення цієї похибки наближено оцінюється значенням  $\delta\varphi_3 \approx K_f$ .

За наявності вищих гармонік в обох вхідних сигналах значення  $|\Delta\tau_{\max}|$ , яке визначено рівнянням (5.19), подвоюється.

**Амплітудно-фазова похибка.** Додатковий фазовий зсув, який отримують сигнали після проходження підсилювачів, залежить не лише від частоти, але й від амплітуди вхідного сигналу. Тому, проектуючи, розраховуючи і випробовуючи фазовимірювальну апаратуру, необхідно досягати ідентичності як амплітудно-частотних, так і фазочастотних характеристик каналів фазометра.

Амплітудно-фазову похибку зумовлено зміною співвідношення амплітуд порівнюваних гармонічних напруг. Така похибка найбільше впливає на результат вимірювання фазометрів, що реалізують перетворення «фазовий зсув – часовий інтервал». Механізм дії цієї похибки ілюстровано графіками, які зображено на рис. 5.36.

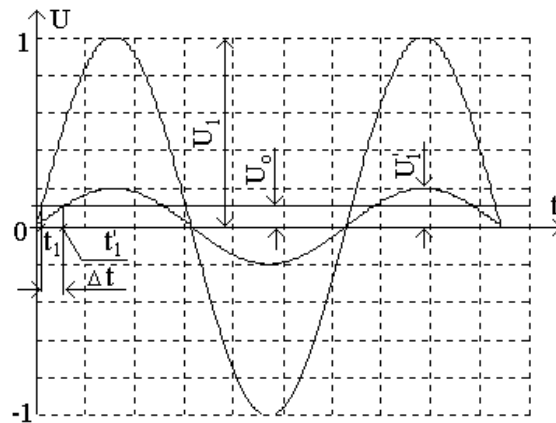


Рис. 5.36. Графічна ілюстрація механізму виникнення амплітудно-фазової похибки у тригерному фазометрі

Формувачі коротких імпульсів (рис. 5.18,а) спрацьовують у разі досягнення гармонічним вхідним сигналом певного рівня напруги  $U_0$ . Момент спрацьовування формувача визначається з рівняння  $U_1 \sin 2\pi f t_1 = U_0$ , звідки  $t_1 = \frac{1}{2\pi f} \arcsin \frac{U_0}{U_1}$ . Зміна амплітуди сигналу до значення  $U_1'$  приводить до зміни моменту перетину сигналом  $u_1(t)$  рівня  $U_0$ . Цей новий момент перетину сигналом рівня  $U_0$  визначається за формулою  $t_1' = \frac{1}{2\pi f} \arcsin \frac{U_0}{U_1'}$ . Якщо

$$U_0 \ll U_1, \text{ маємо } t_1 = \frac{1}{2\pi f} \frac{U_0}{U_1}, \quad t_1' = \frac{1}{2\pi f} \frac{U_0}{U_1'}$$

Таким чином, унаслідок зміни амплітуди сигналу виникає його затримка в часі на величину  $\Delta t = t_1' - t_1$  спрацювання формувача. Цій затримці відповідає похибка

$$\delta\varphi_4 = 2\pi f (t_1' - t_1) \approx U_0 \frac{U_1' - U_1}{U_1 U_1'} \quad (5.35)$$

**Похибка від неідентичності фазочастотних характеристик каналів фазометра.** Ланки, що входять до складу каналів оброблення сигналів фазометра характеризуються своїми комплексними коефіцієнтами передачі. До таких вузлів належать вхідні пристрої, фільтри, підсилювачі, системи автоматичного регулювання підсилення тощо. Канали обробки сигналів подано узагальненими блоками з коефіцієнтами передачі  $\dot{K}_1(f) = K_1(f)e^{-i\psi_1(f)}$  та  $\dot{K}_2(f) = K_2(f)e^{-i\psi_2(f)}$  на рис. 5.37. Отже, на вході ФВП наявні сигнали, які в комплексній формі можна подати виразами :

$$\begin{aligned} \dot{i}'_1(f) &= U_1 e^{-j\varphi} K_1(f) e^{-i\psi_1(f)} = K_1 U_1 e^{-i[\varphi + \psi_1(f)]}, \\ \dot{i}'_2(f) &= U_2 K_2(f) e^{-i\psi_2(f)} = K_2 U_2 e^{-i\psi_2(f)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

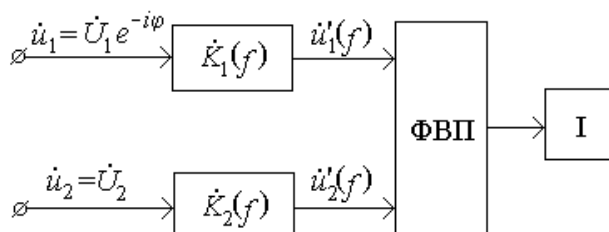


Рис. 5.37. Виникнення похибки від неідентичності ФЧХ каналів фазометра:  
І – індикатор, ФВП – фазовимірювальний перетворювач.

Фазовий зсув між сигналами на вході ФВП становить  $(\varphi + \psi_1(f) + \psi_2(f))$ . На одній робочій частоті  $f_p$  додатковий фазовий зсув сигналів, який має характер систематичної похибки і дорівнює значенню  $\Delta\varphi_4 = \psi_1(f_p) + \psi_2(f_p) = \text{const}$  можна враховувати в результаті вимірювання шляхом калібрування фазометра (установивши нульове показання приладу І за умови подачі на входи фазометра синфазних сигналів). Калібрування значно складніше виконати при роботі фазометра в певному діапазоні частот. Тому, проектуючи фазометри, прагнуть досягнути ідентичності ФЧХ, або застосовують спеціальні перетворення (гетеродинне, стробоскопічне), які дозволяють перенести вимірювання фазових зсувів сигналів з певного діапазону частот на фіксовану частоту.

### 5.5. Підсумки до розділу

У п'ятому розділі значну частину матеріалу присвячено наведенню прикладів реалізації пристроїв регулювання, вимірювання, перетворення та відтворення фазових зсувів електричних сигналів у широкому частотному і динамічному діапазонах.

Серед засобів регулювання фазових зсувів гармонічних сигналів є чимало різновидів фазообертачів, які забезпечують фазовий зсув між вхідним і вихідним гармонічними сигналами на певне задане каліброване значення. Такі пристрої використовують у компенсаційних фазометрах, фазовимірювальних системах, системах з квадратурною обробкою сигналів тощо.

Фазообертачі з регульованим фазовим зсувом високої точності, які здатні протягом значного інтервалу часу зберігати градувальну характеристику, використовують як вимірювальні. Вони призначені для формування

високостабільного і відомого з високою точністю фазового зсуву сигналів у межах інтервалу  $(0, 360^\circ)$ , іноді в інтервалі  $(-n360^\circ, n360^\circ)$ , де  $n$  – ціле число.

Розглянуто принципи дії та схемні рішення ряду фазообертачів: диференціювальні та інтегрувальні  $RC$ -ланки; фазорізницеві схеми; мостові  $RC$ -фазообертачі; індукційні фазообертачі, поворотні трансформатори та сельсини, які працюють у режимі фазообертача; ємнісні фазообертачі; лінії затримки.

Фазометри відомі як засоби вимірювання фазових зсувів сигналів. Принцип дії одного з простих варіантів фазометра ґрунтується на перетворенні фазових зсувів сигналів у постійну напругу з її подальшим вимірюванням.

Розглянуто функціонування фазометрів на підставі перетворення фазового зсуву сигналів у часовий інтервал, компенсаційних та кореляційних фазометрів, фазометрів з ортогональною обробкою сигналів. Так, серійний випуск фазометрів типу Ф2-44 є характерним прикладом реалізації методу перетворення фазового зсуву сигналів у часовий інтервал. Безумовні переваги таких фазометрів для вимірювань фазових зсувів – можливість виконувати вимірювання в широкій смузі частот сигналів без додаткових регулювань та зменшення випадкових похибок вимірювання за рахунок усереднення. Певні недоліки цих фазометрів – це тривалий час вимірювання та низька заводо захищеність.

Описано принципи дії кумулятивних фазометрів, які дають змогу вимірювати КФЗ сигналів понад  $2\pi$ . Більш широкі можливості для стеження за швидкоплинними КФЗ надає спосіб з роздільним визначенням цілої ( $2\pi n[j]$ ) і дробової ( $\phi[j]$ ) частин КФЗ сигналів. Реалізація цього способу вимірювання КФЗ сигналів з роздільним несинхронним визначенням  $n[j]$  та  $\phi[j]$  має такі переваги: можливість застосовувати спеціальні методи фазометрії, включаючи методи перетворення частоти вхідних сигналів, для забезпечення високої точності вимірювання КФЗ сигналів після завершення перехідних процесів, пов'язаних з їх зміною, і одночасно дозволяє визначати оцінки  $n[j]$  за високої швидкості зміни КФЗ сигналів по нуль-переходах вхідних сигналів.

Як довідковий матеріал наведено технічні характеристики серійних фазометрів, що випускались у СРСР і деяких зарубіжних фірм.

Описано метрологічне забезпечення фазометрії через застосування відомих методів фазовимірювальної апаратури, включаючи використання калібраторів фазових зсувів сигналів.

Наведено ряд чинних нормативних документів метрологічного забезпечення.

Розглянуто основні фактори формування похибок під час вимірювання фазових зсувів сигналів, зокрема похибок спричинених паразитним зв'язком між каналами фазометра, скінченним значенням вхідного опору фазометра (похибка підімкнення), наявністю у вхідних сигналах вищих гармонік, неідентичністю амплітудно-частотних і фазочастотних характеристик каналів фазометра.

## *Розділ 5*

У цілому, ґрунтуючись на результатах аналізу функціонування технічних засобів регулювання, вимірювання та відтворення фазових зсувів гармонічних сигналів, які розглянуто у п'ятому розділі, а також враховуючи результати наукових публікацій [5.1 – 5.28], можна стверджувати про забезпечення метрологічних характеристик таких технічних засобів фазометрії за співвідношення сигнал/завада значно більшого за одиницю.



*Нам необхідно знати, ми будемо знати*  
Напис на могилі Д. Гільберта (1862 – 1943),  
м. Геттінген, Німеччина

## Розділ 6

### ПЕРЕТВОРЕННЯ ГІЛЬБЕРТА ТА ЙОГО ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ У ФАЗОМЕТРІЇ

Матеріал цього розділу призначено для обґрунтування використання перетворення Гільберта і відповідних рекомендацій щодо його застосування для розв'язання завдань фазометрії. Для чого потрібна популяризація використання перетворення Гільберта? Можна навести аналогію із застосуванням перетворення Фур'є у процесі обробки сигналів, яке має чітку фізичну інтерпретацію і широко використовується. Що стосується перетворення Гільберта, зроблено лише перші кроки щодо обґрунтування його прикладного використання, про що свідчать результати ряду наукових публікацій. Тому варто розглянути:

- коротку справку теоретичних інтегральних перетворень Гільберта і його основних властивостей;
- результати реалізації перетворення Гільберта у фазових системах, зокрема комп'ютеризованих;
- приклади ефективного розв'язання конкретних задач фазометрії з використанням перетворення Гільберта.

Потреба у висвітленні таких питань у більш широкому змісті полягає у тому, що результати використання перетворення Гільберта наведено, здебільшого, в окремих журнальних наукових публікаціях. Це обумовлює розгляд лише окремих питань і не дає змоги аналізувати науково-технічну проблему використання перетворення Гільберта в цілому, наприклад, розв'язувати задачі наукового напрямку вимірювань – фазометрії.

#### 6.1. Перетворення Гільберта як оператор перетворення сигналів

##### 6.1.1. Інтегральні зображення перетворення Гільберта та його властивості

Спочатку наведемо відоме означення [6.14]

**Означення 6.1.** Перетворенням Гільберта дійсної функції  $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ ,  $p = \overline{1, 2}$  є невластивий інтеграл вигляду

$$f_1(x) = \mathbf{H}[f(x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+s) - f(x-s)}{s} ds, \quad (6.1)$$

де  $\mathbf{H}(\cdot)$  – позначення оператора перетворення Гільберта.

Якщо  $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ ,  $p = \overline{1, 2}$ , то і функція  $f_1(x) \in L_p(-\infty, \infty)$  і тоді справедливе обернене перетворення Гільберта вигляду

$$f(x) = \mathbf{H}^{-1}[f_1(x)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x+s) - f_1(x-s)}{s} ds. \quad (6.2)$$

Формулам (6.1) і (6.2) еквівалентні такі формули

$$f_1(x) = \mathbf{H}[f(x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{s-x} ds; \quad (6.3)$$

$$f(x) = \mathbf{H}^{-1}[f_1(x)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(s)}{s-x} ds, \quad (6.4)$$

де інтеграли розуміють у сенсі головного значення (головного значення за Коші).

Важливим класом функцій для прикладних завдань є клас функцій  $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$ ,  $p \in (1, 2)$ . Для заданих функцій обґрунтоване використання формул (6.1) – (6.4).

Відомо також [6.14], що перетворенням Гільберта функції  $f(x)$  називається невластний інтеграл вигляду

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds. \quad (6.5)$$

Цей інтеграл називають *гільбертовим сингулярним інтегралом*.

Якщо  $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$  і

$$\int_0^{2\pi} f_1(x) dx = 0,$$

то обернена формула має вигляд

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds, \quad (6.6)$$

при цьому

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0.$$

Інтегральні оператори, які породжені перетворенням Гільберта, є обмеженими неперервними лінійними операторами з відповідними властивостями.

Наведемо основні властивості перетворення Гільберта для функцій таких класів:  $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$  або  $L_p[0, 2\pi)$ ,  $p = 1, 2$ .

**Основні властивості перетворення Гільберта.**

1. *Лінійність.* Для функцій  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$  за довільних чисел  $\alpha_1, \alpha_2$

$$\mathbf{H}[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] = \alpha_1 \mathbf{H}[f_1(x)] + \alpha_2 \mathbf{H}[f_2(x)]. \quad (6.7)$$

2. *Властивість зсуву.* Для довільного дійсного значення  $s \in \mathbb{R}$  виконується рівність

$$\mathbf{H}[f(x-s)] = f_{\mathbf{H}}(x-s). \quad (6.8)$$

3. *Властивість ортогональності.* Для функції  $f(x)$  і її гільберт-образу  $f_{\mathbf{H}}(x)$  виконується умова ортогональності

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_{\mathbf{H}}(x) dx = 0. \quad (6.9)$$

Виконання умови (6.9) визначає ортогональність функцій  $f(x)$  і  $f_{\mathbf{H}}(x)$ .

4. *Подвійне перетворення Гільберта.* У разі подвійного застосування перетворення Гільберта до функції  $f(x)$ , маємо

$$\mathbf{H}[\mathbf{H}[f(x)]] = -f(x). \quad (6.10)$$

5. *Властивість парності та непарності.* Якщо  $f(x)$  парна функція змінної  $x$ , то  $f_{\mathbf{H}}(x)$  – непарна, якщо  $f(x)$  непарна, то  $f_{\mathbf{H}}(x)$  – парна.

6. *Властивість інваріантності зміни масштабу.* Для довільного числа  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$  має місце

$$\mathbf{H}[f(\alpha x)] = f_{\mathbf{H}}(\alpha x). \quad (6.11)$$

7. *Комутативність для використання лінійних операторів.* Для обмеженого лінійного оператора  $\mathbf{B}[\cdot]$

$$\mathbf{H}[\mathbf{B}[f(x)]] = \mathbf{B}[\mathbf{H}[f(x)]]. \quad (6.12)$$

8. *Перетворення Фур'є.* Нехай існує перетворення Фур'є функції  $f(x)$  –  $\mathbf{F}[f(x)]$ , де  $\mathbf{F}[\cdot]$  – оператор перетворення Фур'є. Із формули (6.3) випливає, що гільберт-образ  $f_{\mathbf{H}}(x)$  функції  $f(x)$  визначається як згортка функції  $f(x)$  з ядром

перетворення Гільберта:  $\mathbf{H}[f(x)] = f(x) \cdot \frac{1}{\pi x}$ . Перетворення Фур'є функції  $\frac{1}{\pi x}$  має

вигляд

$$\mathbf{F}\left[\frac{1}{\pi x}\right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-i2\pi f x} dx = \dot{K}(f) = -i \operatorname{sign}(f) = \begin{cases} -i, & f > 0; \\ 0, & f = 0; \\ i, & f < 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

Отже, перетворення Фур'є (спектр) гільберт-образу  $f_H(x)$  пов'язано зі спектром вхідної функції  $f(x)$  співвідношенням

$$\mathbf{F}[f_H(x)] = -i \operatorname{sign}(f) \mathbf{F}[f(x)]. \quad (6.14)$$

Використаємо наведені теоретичні дані перетворення Гільберта для подальшого аналізу сигналів і розв'язання задач фазометрії.

### 6.1.2. Практична реалізація перетворення Гільберта

**Фізична інтерпретація.** З виразу (6.13) випливає, що перетворення Гільберта реалізується за допомогою лінійного фільтра з передатною характеристикою  $\dot{K}(f) = -i \operatorname{sign}(f)$  та імпульсною характеристикою  $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ ,  $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  (рис. 6.1). Цей фільтр можна вважати ідеальним фазообертачем, оскільки для нього  $|\dot{K}(f)| = 1$ , крім значення  $|\dot{K}(0)| = 0$ , отже, такий фільтр зсуває або «повертає» фази всіх компонентів спектра на кут  $+0,5\pi$  у діапазоні від'ємних частот та на  $-0,5\pi$  у діапазоні додатних, і залишає незмінним амплітудні співвідношення між всіма частотними компонентами сигналу  $f(x)$ .

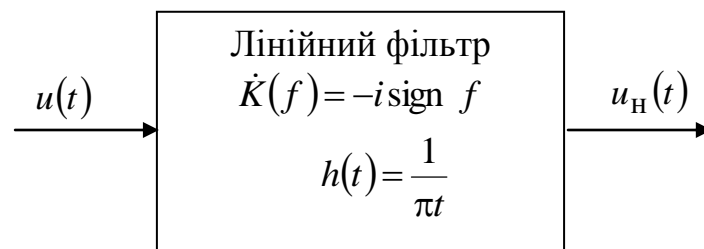


Рис. 6.1. Лінійний фільтр, що реалізує пряме перетворення Гільберта

Обернене перетворення Гільберта реалізує лінійний фільтр з передатною характеристикою

$$\dot{K}^{-1}(f) = \frac{1}{\dot{K}(f)} = -\dot{K}(f) = i \operatorname{sign}(f), \quad f \neq 0. \quad (6.15)$$

Для практичних застосувань фазометрії важливу роль відіграють такі властивості:

*Властивість однорідності:*

- у часі – якщо  $u(t)$  замінити на  $u(t - t_0)$ ,  $t_0 = \text{const}$ , то для гільберт-образу  $u_H(t)$  відповідно маємо  $u_H(t - t_0)$ ;
- за фазою – якщо в спектрі Фур'є  $u(t)$  зсунути всі фази складових на кут  $\theta_0 = \text{const}$ , то отримаємо  $u(t, \theta_0)$  замість  $u(t)$  і  $u_H(t, \theta_0)$  замість  $u_H(t)$ ;
- за частотою – якщо в спектрі Фур'є  $u(t)$  зсунути всі частоти на величину  $f_0 = \text{const}$ , то отримаємо  $u(t, f_0)$  замість  $u(t)$  і  $u_H(t, f_0)$  замість  $u_H(t)$ .

*Спектральні співвідношення.* Якщо існує перетворення Фур'є сигналів  $u(t)$  і  $u_H(t)$ , то їх спектри відповідно  $S_u(f)$  і  $S_{u_H}(f)$  визначають так

$$S_{u_i}(f) = \begin{cases} S_u(f), & f > 0; \\ S_u(0+), & \lim_{\delta \rightarrow 0} (0 + \delta); \\ -S_u(0-), & \lim_{\delta \rightarrow 0} (0 - \delta); \\ -S_u(f), & f < 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Для комплекснозначного сигналу

$$\dot{z}(t) = u(t) + iu_H(t) \quad (6.17)$$

відповідно маємо

$$S_{\dot{z}}(f) = \begin{cases} 2S_u(f), & f > 0, \\ S_u(0), & f = 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (6.18)$$

Як графічну ілюстрацію на рис. 6.2 подано приклади відповідних графіків спектрів сигналів  $S_u(f)$ ,  $S_{u_H}(f)$  і  $S_{\dot{z}}(f)$ .

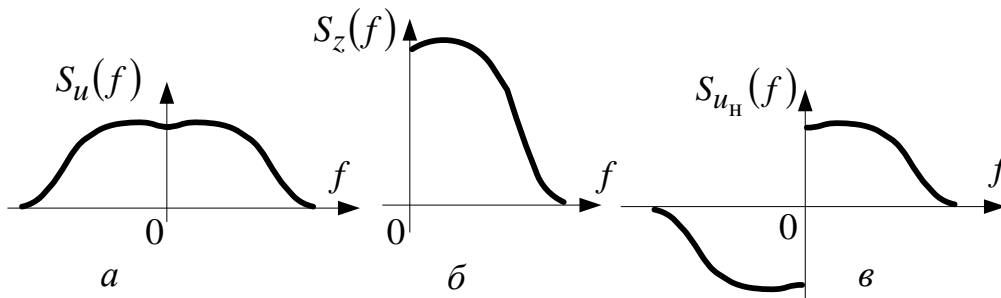


Рис. 6.2. Графіки спектрів сигналів  $u(t)$  (а),  $\dot{z}(t)$  (б) та  $u_H(t)$  (в)

Результат, який описується формулою (6.18), обґрунтовується властивостями перетворення Гільберта. Так у діапазоні додатних частот спектри Фур'є сигналів  $u(t)$  і  $u_H(t)$  з урахуванням додаткового зсуву на мінус  $0,5\pi$  додаються. У діапазоні від'ємних частот спектри Фур'є таких сигналів перебувають у протифазі і їх сума дорівнює нулю.

**Перетворення Гільберта на фінітних інтервалах часу.** Основні теоретичні результати, які пов'язані з використанням перетворення Гільберта, були отримані для функцій, що задавались на нескінченних часових інтервалах. Для практичної реалізації перетворення Гільберта актуальним є використання перетворення на скінченному (фінітному) інтервалі часу. Крім того, практична реалізація інтегрального перетворення Гільберта (6.3) навіть на обмеженому інтервалі часу вважається непростою.

У загальному випадку перетворення Гільберта є фізично нереалізовним. Тому всі реальні вимірювання характеристик сигналів на основі перетворення

Гільберта можна виконувати лише наближено. Дійсно, амплітудна, фазова і частотна (похідна фазової в часі) характеристики сигналу  $u(t)$  мають інтегральний характер. Визначення цих характеристик потребує обробки сигналу на всьому часовому інтервалі його визначення. Для деяких випадків можна отримати наближені оцінки цих характеристик за результатами обмежених певним часовим вікном спостережень сигналу [6.6; 6.11]. Такі випадки можливі тоді, коли вагомий внесок в інтеграл (6.3) роблять відповідні фінитні значення досліджуваних характеристик. Зокрема, така можливість існує для обробки вузькосмугових сигналів. Вона дозволяє застосувати «ковзну» обробку для визначення поточних оцінок характеристик досліджуваних сигналів. Зупинимось на цьому більш детально.

Наведемо таке означення.

**Означення 6.2.** *Інтегральне перетворення функції  $u(t)$  вигляду*

$$u_{\hat{a}}(t) = \mathbf{H}_{\hat{a}}[u(t)] = - \int_{t-T_{\hat{a}}}^t \frac{u(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau, \quad (6.19)$$

будемо називати ковзним перетворенням Гільберта, де  $T_{\hat{a}} > 0$  - тривалість часового вікна.

Термін “ковзне” означає, що часове вікно тривалістю  $T_{\hat{a}}$  можна вибрати довільно на часовій вісі  $t$ . Використаємо фінитне часове вікно

$$B(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t-T_{\hat{a}}, t) \\ 0, & t \notin [t-T_{\hat{a}}, t) \end{cases} \quad (6.20)$$

Як правило, рекомендується вибрати ковзне часове вікно  $T_{\hat{a}} > T_0$ , де  $T_0$  – період сигналу  $u(t)$ . У цьому випадку ковзне перетворення Гільберта сигналу  $u(t)$  згідно з (6.19) визначають так

$$u_{\hat{a}}(t) = \mathbf{H}[B(t)u(t)] \approx B(t)\mathbf{H}[u(t)] \approx B(t)u_1(t). \quad (6.21)$$

Оскільки, спектри Фур'є  $B(t)$  та  $u(t)$ , зазвичай, перекриваються, то значення  $u_{\hat{a}}(t)$  та  $u_H(t)$  не будуть збігатися між собою і відрізнятимуться на певну методичну похибку  $\Delta_M$ , тобто  $u_{\hat{a}}(t) = u_1(t) + \Delta_1$ .

Ковзна обробка сигналу дозволяє отримати параметри сигналів у реальному часі, однак «платою» за таку можливість є відповідна поява методичної похибки вимірювання  $\Delta_M$ , яка зростає зі зменшенням часу спостережень під час обробки сигналу.

**Дискретне перетворення Гільберта.** Практична реалізація ковзного перетворення Гільберта (6.19) у неперервній (аналоговій) формі, здебільшого, викликає труднощі, деякі з них можна подолати, використавши дискретне перетворення Гільберта.

Методологію використання дискретного перетворення Гільберта розглянемо на конкретному прикладі дослідження дискретної комплекснозначної послідовності сигналу.

1. Задамо дискретну комплекснозначну послідовність сигналу у вигляді

$$\dot{z}[j] = u[j] + iu_{\text{H}}[j], \quad j = \overline{1, n}. \quad (6.22)$$

Цю послідовність можна розглядати як деякий вкладений дискретний сигнал у неперервний сигнал (6.17), отриманий з періодом дискретизації  $T_{\text{д}}$ . Природно, що множина таких вкладених дискретних послідовностей у загальному випадку є зліченною (нескінченною). Цей факт обов'язково потрібно враховувати під час порівняльного аналізу результатів неперервної і цифрової обробки сигналів.

У послідовності (6.22) відомі або задані лише значення дійсної послідовності  $u[j]$ , яку визначають як дискретні значення спостережень або вимірювань досліджуваного сигналу  $u(t)$ .

Далі необхідно знайти дискретну дійсну послідовність  $u_{\text{H}}[j]$  як дискретний гільберт-образ дискретної послідовності  $u[j]$ .

Для  $\dot{z}[j]$  використовують такі умови:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \dot{z}[j] &= u[j]; \\ \operatorname{Im} \dot{z}[j] &= u_{\text{H}}[j]; \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\sum_{j=1}^n u[j]u_{\text{H}}[j] = 0.$$

2. Спектральний метод обчислення послідовності  $\dot{z}[j]$ , заданої на скінченній множині  $j = \overline{1, n}$  [6.3; 6.19; 6.20], який ґрунтується на співвідношенні (6.18), передбачає такі етапи:

2.1. Розрахунок  $n$ -точкового дискретного перетворення Фур'є  $S_u(m)$  послідовності  $u[j]$

$$S_u(m) = \sum_{j=1}^n u[j] \exp\left(-i \frac{2\pi}{n} jm\right); \quad (6.24)$$

Значення  $S_u(m)$  обчислюються для дискретних частот  $f_m = \frac{m}{n\Delta t}$ ,  $0 \leq m \leq n-1$ .

2.2. Розрахунок  $n$ -точкового дискретного перетворення Фур'є  $S_{\dot{z}}(m)$  послідовності  $\dot{z}[j]$  з використанням (6.18)

$$S_{\dot{z}}(m) = \begin{cases} S_u[0] & \text{äëÿ } m = 0; \\ 2S_u[m] & \text{äëÿ } 1 \leq m < \frac{n}{2} - 1; \\ S_u[m] & \text{äëÿ } m = \frac{n}{2}; \\ 0 & \text{äëÿ } \frac{n}{2} + 1 \leq m \leq n - 1. \end{cases} \quad (6.25)$$

Перетворення Фур'є сигналу  $\dot{z}[j]$  має односторонній спектр (тільки додатні частоти), причому спектральні складові такого сигналу дорівнюють подвоєним значенням спектральних складових дійсного сигналу  $u[j]$ .

2.3. Обчислення  $\dot{z}[j]$  за значеннями  $S_{\dot{z}}(m)$  з використанням оберненого дискретного перетворення Фур'є

$$\dot{z}[j] = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} S_{\dot{z}}[m] \exp\left(i \frac{2\pi}{n} jm\right). \quad (6.26)$$

Цей метод обчислення комплексної послідовності  $\dot{z}[j]$  реалізовано у програмному пакеті Matlab як функція `hilbert` [6.21].

Послідовність  $\dot{z}[j]$  є комплексозначною, в якій дійсна частина — вхідна дійсна послідовність  $u[j]$ , а уявна частина  $u_H[j]$  — дискретне перетворення Гільберта послідовності  $u[j]$ .

Використання дискретної послідовності  $\dot{z}[j]$  у виді (6.22) узагальнює терміни «фазова характеристика» і «фазовий зсув» для класу дискретних послідовностей сигналів, що особливо актуально для дискретної фазометрії.

## 6.2. Характеристики сигналів на основі перетворення Гільберта

Розвиток технічних систем передачі та обробки широкого класу сигналів, у першу чергу, радіотехнічних, систем керування, телекомунікаційних, вимірювальних, зумовили потребу розв'язувати відповідні завдання досліджень теорії сигналів і систем. Природно, що результати розв'язання таких задач дають змогу узагальнити, обґрунтувати чи започаткувати новий етап проведення досліджень. Тим самим можна висунути пропозицію для подальшого розвитку фазометрії на основі перетворення Гільберта сигналів, а саме: використати можливість уведення більш загальних характеристик сигналів, при цьому раніше введені і широко використовувані параметри і характеристики сигналів у практичній фазометрії — це їх окремі випадки.

**Неперервний випадок.** Спочатку запропонуємо характеристики для неперервних сигналів і наведемо таке означення.



**Означення 6.3.** Для заданого дійсного сигналу  $u(t)$  визначається і ставиться у відповідність комплекснозначний сигнал вигляду (6.17), тобто

$$\dot{z}(t) = u(t) + iu_H(t),$$

де  $u(t) \in L_p(-\infty, \infty)$  або  $u(t) \in L_p(0, 2\pi)$ ,  $p = \overline{1, 2}$  - математична модель сигналу, а її перетворенням Гільберта є дійсна функція

$$u_H(t) = \mathbf{H}[u(t)].$$

Тоді на основі подання (6.26) у вигляді

$$\dot{z}(t) = |\dot{z}(t)| \exp(i \arg \dot{z}(t)) = A(t) \exp(i\Phi(t)) \quad (6.27)$$

неперервний дійсний сигнал  $u(t)$  має такі дійсні неперервні характеристики:

а) амплітудну характеристику

$$A(t) = \sqrt{u^2(t) + u_H^2(t)}; \quad (6.28)$$

б) фазову характеристику

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \arg \dot{z}(t) = \operatorname{arctg} \frac{u_H(t)}{u(t)} + \frac{\pi}{2} \{2 - \operatorname{sign} u_H(t)(1 + \operatorname{sign} u(t))\} + \\ + 2\pi \mathbf{K}[u(t), u_H(t)], \end{aligned} \quad (6.29)$$

де  $\mathbf{K}[\cdot]$  - оператор, що усуває стрибки фази в точках  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{N}$  (оператор розгортання фази);

в) частотну характеристику

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt}. \quad (6.30)$$

Узагальненням поняття «фазовий зсув» між двома гармонічними коливаннями з однаковою частотою є таке означення

**Означення 6.4.** Різницею фазових характеристик двох заданих дійсних сигналів  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$ , кожному з яких ставиться у відповідність комплекснозначний сигнал вигляду (6.26), називається неперервна функція

$$\varphi(t) = \Phi_2(t) - \Phi_1(t), \quad (6.35)$$

де відповідна фазова характеристика  $\Phi_j(t)$  сигналу  $u_j(t)$ ,  $j = \overline{1, 2}$  визначається виразом (6.29).

Широке використання цифрової обробки сигналів зумовлює значущість узагальнення характеристик дискретних сигналів.

**Дискретний випадок.** На підставі означень 6.3 і 6.4 наведемо таке означення

**Означення 6.5.** Для заданої послідовності дискретного сигналу  $u[j]$ ,  $j = \overline{1, n}$  ставиться у відповідність послідовність комплекснозначного сигналу (6.22), тобто

$$\dot{z}[j] = u[j] + iu_H[j],$$

де  $z[j]$  – вкладена дискретна послідовність комплекснозначного сигналу (6.17).

Тоді з урахуванням (6.28)– (6.30) дійсна послідовність  $u[j]$ ,  $j = \overline{1, n}$  має такі дійсні характеристики:

г) дискретну амплітудну характеристику

$$A[j] = \sqrt{u^2[j] + u_H^2[j]}; \quad (6.32)$$

д) дискретну фазову характеристику

$$\Phi[j] = \arg z[j] = \arctg \frac{u_I[j]}{u[j]} + \frac{\pi}{2} \{2 - \text{sign } u_I[j](1 + \text{sign } u[j])\} + 2\pi L[u[j], u_I[j]]; \quad (6.33)$$

е) дискретну частотну характеристику

$$\Phi[j] = \frac{\Phi[j] - \Phi[j-1]}{2\pi T_{\text{ä}}}. \quad (6.34)$$

На основі означення 6.5 наводимо таке означення

**Означення 6.6.** Різницею дискретних фазових характеристик двох заданих дискретних сигналів  $u_1[j]$  і  $u_2[j]$ , кожному з яких ставиться у відповідність послідовність комплекснозначних сигналів вигляду (6.22), називається дискретна послідовність

$$\phi[j] = \Phi_2[j] - \Phi_1[j]. \quad (6.35)$$

Як обґрунтування необхідності введення таких характеристик наведемо характерний приклад використання в теорії детектування радіотехнічних сигналів методу комплексних амплітуд, одним з різновидів якого є метод обвідної і фази.

**Метод обвідної і фази.** Наведені вище матеріали дають змогу розглянути суть відомого методу обвідної і фази. Згідно з цим методом, досліджуваний сигнал  $u(t)$  задається у вигляді [6.10]

$$u(t) = A(t) \cos \Phi(t), \quad t \in T, \quad (6.36)$$

де функція  $A(t)$  називають обвідною, а  $\Phi(t)$  – фазою сигналу  $u(t)$ .

У загальному випадку обвідна визначається як деяка функція для відповідної множини функцій, під якою розуміють криву, що обмежує частину простору, заповнену лініями множини, які відрізняються між собою деяким параметром. У загальному вигляді обвідна для множини кривих  $f(x, y, \alpha) = 0$ , де  $\alpha$  – параметр, який визначається при розв'язанні системи рівнянь [6.5]

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0; \\ \frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \end{cases} \quad (6.37)$$

де  $x, y$  – координати точок функцій. Обвідна в кожній точці є дотичною до однієї з ліній множини кривих (6.37).

На базі моделі (6.36) можна описати значну кількість інформаційних

сигналів. Але структура такої моделі потребує певного обґрунтування. Якщо задано праву частину (6.36), тобто  $A(t)$  і  $\Phi(t)$ , то модель визначається однозначно. Але якщо задано ліву частину (6.36), тобто  $u(t)$ , то в загальному випадку дві функції  $A(t)$  і  $\Phi(t)$  однозначно визначити неможливо. Для розв'язання поставленої задачі використовують перетворення Гільберта [6.3].

В основу методу комплексних амплітуд або символічного методу покладено дослідження подання сигналу вигляду (6.26).

Функція  $u_1(t)$  певною мірою зв'язана з функцією  $u(t)$ , остання у більшості випадків і спостерігається під час проведення експериментальних досліджень, тобто функцію  $u(t)$  можна вважати заданою. Функцію  $A(t)$  називають у прикладних роботах «комплексною амплітудою», що й породжує назву методу, а  $\Phi(t)$  — аргумент названий фазою. Необхідно відзначити, що така термінологія певною мірою суперечлива. Терміни «амплітуда» і «фаза» розуміють відповідно як величину та лінійну функцію часу. Крім того, їх визначають тільки для гармонічного (моногоармонічного) сигналу. Більш складні сигнали, наприклад, полігармонічні можна описувати з використанням більш складної множини параметрів. У разі застосування моделі (6.36), яка описує широкий клас сигналів фазометрії, потрібно використовувати амплітудну  $A(t)$  і фазову  $\Phi(t)$  характеристики сигналу. Природно, що введення таких характеристик надто ускладнює процес дослідження сигналів, передусім інформаційні технології вимірювань, зокрема і фазометрію. Тому у цій роботі значну увагу приділено обґрунтуванню методології використання перетворення Гільберта для визначення характеристик як відповідних функцій досліджуваних сигналів.

Модель вигляду (6.26) отримала назву «аналітичний сигнал», у англійській літературі — *pre-envelopes* (передобвідна). Остання назва певною мірою є умовною. Термін «аналітичний» визначає в математиці клас аналітичних функцій, а термін «сигнал» характеризує фізичну природу сигналу, який по суті є відображенням певної інформації. Тому надалі будемо використовувати такі терміни моделі (6.26):

- комплекснозначний сигнал  $\dot{z}(t)$ ;
- амплітудна характеристика  $u(t)$  як модуль сигналу  $\dot{z}(t)$ , тобто  $|\dot{z}(t)| = A(t)$ ;
- фазова характеристика сигналу  $u(t)$  як аргумент сигналу  $\dot{z}(t)$ , тобто  $\text{Arg}\dot{z}(t) = \Phi(t)$ .

Для заданого сигналу  $u(t)$  при обґрунтуванні (6.26) необхідно визначити  $u_1(t)$ . Використання перетворення Гільберта дає змогу визначити гільберт-образ  $u_H(t)$  і однозначно задати сигнал у вигляді (6.26).

Таким чином, при обґрунтуванні (6.36) для досліджуваного сигналу отримаємо

$$A(t) = |\dot{z}(t)| = \sqrt{u^2(t) + u_H^2(t)} \quad (6.38)$$

i

$$\Phi[t] = \arg \dot{z}(t) = \arg z(t) + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.39)$$

де

$$\text{Arg } \dot{z}(t) = \begin{cases} \arctg \frac{u_1(t)}{u(t)} & \text{äëÿ } u(t) > 0; \\ \arctg \frac{u_1(t)}{u(t)} + \pi & \text{äëÿ } u(t) \leq 0, \quad u_1(t) \geq 0; \\ \arctg \frac{u_1(t)}{u(t)} - \pi & \text{äëÿ } u(t) \leq 0, \quad u_1(t) \leq 0. \end{cases} \quad (6.40)$$

### 6.3. Перетворення Гільберта випадкових процесів

Для дійсного випадкового стаціонарного процесу  $\xi(\omega, t)$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ , який належить до класу процесів  $L_2(-\infty, \infty)$  або  $L_2(0, 2\pi)$ , маємо перетворення Гільберта  $\xi_1(\omega, t) = \mathbf{H}[\xi(\omega, t)]$ . Спряжений з  $\xi(\omega, t)$  стаціонарний випадковий процес  $\xi_1(\omega, t)$  дозволяє створити комплекснозначний випадковий процес [6.3;6.10]

$$\dot{\zeta}(\omega, t) = \xi(\omega, t) + i\xi_1(\omega, t) = |\dot{\zeta}(\omega, t)|e^{i\Phi(\omega, t)}. \quad (6.41)$$

Процес (6.41) також стаціонарний і належить до класу гільбертових випадкових процесів.

Процес  $\dot{\zeta}(\omega, t)$  виду (6.41) вважається вхідною дією при аналізі лінійних систем, тобто його використовують замість процесу  $\xi(\omega, t)$ , який реально надходить на їх входи. Це особливо зручно для аналізу роботи детекторів, коли за умовою задачі необхідно дослідити не сам відгук, а значення амплітудної чи фазової характеристики сигналу.

Розглянемо характеристики  $A(\omega, t)$  і  $\Phi(\omega, t)$  для двох дійсних випадкових процесів

$$\xi(\omega, t) = A(\omega, t)\cos \Phi(\omega, t); \quad \xi_1(\omega, t) = A(\omega, t)\sin \Phi(\omega, t), \quad (6.42)$$

які в праці [6.13] названі, відповідно, модулем і фазою процесу (6.41).

Зображення вигляду (6.42) дозволяє розглядати відповідно процеси  $\xi(\omega, t)$  і  $\xi_1(\omega, t)$  як гармонічні коливання, що модулюються за амплітудою і фазою випадковими процесами  $A(\omega, t)$  та  $\Phi(\omega, t)$ . Випадкові процеси  $A(\omega, t) > 0$  та  $\Phi(\omega, t) > 0$  визначаються через процеси  $\xi(\omega, t)$  та  $\xi_1(\omega, t)$  згідно з такими формулами

$$A(\omega, t) = \sqrt{\xi^2(\omega, t) + \xi_1^2(\omega, t)}; \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, t) = \arctg \frac{\xi_1(\omega, t)}{\xi(\omega, t)} + \frac{\pi}{2} \{2 - \text{sign } \xi_1(\omega, t)[1 + \text{sign } \xi(\omega, t)]\} + \\ + \mathbf{K}[\xi_1(\omega, t), \xi(\omega, t)] = \mathbf{L}[\xi(\omega, t), \xi_1(\omega, t)] + \mathbf{K}[\xi(\omega, t), \xi_1(\omega, t)], \end{aligned} \quad (6.44)$$

де  $\mathbf{L}[\xi(\omega, t), \xi_1(\omega, t)]$  – оператор однозначного визначення кута в інтервалі  $[0, 2\pi)$ ,  $\mathbf{K}[\cdot]$  – оператор, що усуває стрибки фази в точках  $2\pi n$ ,  $n \in N$ .

Між процесами  $\xi(\omega, t)$  і  $\zeta(\omega, t)$  існує взаємооднозначна відповідність. Отже, визначивши модуль і аргумент  $\zeta(\omega, t)$  можна знайти амплітудні й фазові характеристики  $\xi(\omega, t)$ , як відмічалось раніше.

Визначені рівняннями (6.43), (6.44) випадкові процеси  $A(\omega, t)$  та  $\Phi(\omega, t)$  будемо називати відповідно *амплітудною* і *фазовою характеристиками дійсного випадкового процесу*  $\xi(\omega, t)$ .

Розглянемо особливості кореляційних функцій процесів  $\xi(\omega, t)$  та  $\xi_1[\omega, t]$ . Нехай процес  $\xi(\omega, t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ ,  $\omega \in \Omega$  має автокореляційну функцію  $R_{\xi\xi}(\tau)$  зі спектральною щільністю (енергетичним спектром)  $S_{\xi\xi}(f) = \mathbf{F}[R_{\xi\xi}(\tau)]$ , де  $R_{\xi\xi}(\tau)$  – автокореляційна функція процесу  $\xi(\omega, t)$ . Для спряженого за Гільбертом процесу  $\xi_1(\omega, t) = \mathbf{H}[\xi(\omega, t)]$  з урахуванням властивості (6.16) маємо  $S_{\xi_1\xi_1}(f) = S_{\xi\xi}(f)$ , звідки випливає  $R_{\xi_1\xi_1}(\tau) = \mathbf{F}^{-1}[S_{\xi\xi}(f)] = R_{\xi\xi}(\tau)$ .

Для взаємної спектральної щільності та взаємної кореляційної функції процесів  $\xi(\omega, t)$  і  $\xi_1(\omega, t)$  маємо відповідно

$$S_{\xi\xi_1}(f) = iS_{\xi\xi}(f)\text{sign}(f); \quad (6.45)$$

$$R_{\xi\xi_1}(\tau) = -R_{\xi\xi}(\tau) \cdot \frac{1}{\pi t} = -\mathbf{H}[R_{\xi\xi}(\tau)] = -(R_{\xi\xi})_i(\tau). \quad (6.46)$$

Оскільки, процес  $\xi(\omega, t)$  дійсний, то кореляційна функція  $R_{\xi\xi}(\tau)$  є парною функцією, відповідно  $(R_{\xi\xi})_i(\tau)$  з урахуванням виразу (6.16) – непарною. У праці [6.16] також показано, що зв'язаний з процесом  $\xi(\omega, t)$  комплекснозначний процес  $\zeta(\omega, t)$  (6.41) має автокореляційну функцію

$$\begin{aligned} \dot{R}_{\zeta\zeta}(\tau) = \mathbf{M}\{[\xi(\omega, t + \tau) + i\xi_1(\omega, t + \tau)][\xi(\omega, t) - i\xi_1(\omega, t)]\} = \\ = 2[R_{\xi\xi}(\tau) + i(R_{\xi\xi})_i(\tau)] \end{aligned} \quad (6.47),$$

яка являє собою нову комплекснозначну функцію, що зв'язана з функцією  $R_{\xi\xi}(\tau)$ . Із формули (6.47) слідує, що амплітудна характеристика автокореляційної функції комплекснозначного сигналу  $\zeta(\omega, t)$  визначається формулою

$$|\dot{R}_{\xi\xi}(\tau)| = 2\sqrt{R_{\xi\xi}^2(\tau) + \left(R_{\xi\xi}\right)_H^2(\tau)}. \quad (6.48)$$

Амплітудну характеристику автокореляційної функції  $R_{\xi\xi}(\tau)$  застосовують для оцінювання затримки акустичного шумового сигналу у разі поширення в дисперсійному середовищі [6.4]. Отримана на основі перетворення Гільберта амплітудна характеристика автокореляційної функції  $R_{\xi\xi}(\tau)$  дозволяє підвищити точність визначення затримки поширення шумоподібних сигналів, які породжуються витіканням речовин у продуктопроводах та ін.

Відомо також [6.13], що взаємна спектральна щільність  $S_{\xi\xi_1}(f)$  та взаємна кореляційна функція  $R_{\xi\xi}(\tau)$  двох спряжених випадкових процесів  $\xi(\omega, t)$  та  $\xi_1(\omega, t)$  зв'язані перетворенням Фур'є. Тому з урахуванням (6.45) взаємну кореляційну функцію  $R_{\xi\xi}(\tau)$  можна визначити так:

$$R_{\xi\xi_1}(\tau) = -R_{\xi_1\xi}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{\xi\xi_1}(f) \sin(2\pi f\tau) df. \quad (6.49)$$

Із формули (6.49) слідує важливий висновок: взаємна кореляційна функція  $R_{\xi\xi_1}(\tau)$  двох спряжених випадкових процесів  $\xi(\omega, t)$  та  $\xi_1(\omega, t)$  є непарною, а для  $\tau = 0$  маємо  $R_{\xi\xi_1}(\tau) = 0$ , тобто у збіжні моменти часу ці випадкові процеси некогерентні (ортогональні). Ця суттєва властивість випадкового процесу (6.41) ще не набула практичного використання.

Якщо  $\xi(\omega, t)$  стаціонарний гауссівський процес, то і  $\xi_1(\omega, t)$  також буде стаціонарним гауссівським процесом, а їх сумісний розподіл двовимірним гауссівським, причому у збіжні моменти часу ці процеси незалежні.

#### 6.4. Амплітудна і фазова характеристики випадкового вузькосмугового стаціонарного процесу

У ряді випадків вхідні сигнали фазових ІВС являють собою вузькосмугові стаціонарні сигнали – тобто такі, для яких спектральна щільність (енергетичний спектр) концентрується в невеликій смузі частот  $\Delta f$  в околі певної центральної частоти  $f_0 \gg \Delta f$  [6.13]. У фазометрії, як правило, значення  $f_0$  відоме або може бути визначено як частота опорного сигналу – одного з двох вимірювальних сигналів:

$$\xi(\omega, t) = A(\omega, t) \cos \Phi(\omega, t); \quad (6.50)$$

$$u_0(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0), \quad U_0 > 0, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi). \quad (6.51)$$

Надалі будемо вважати  $\varphi_0 = 0$  і

$$\Phi(\omega, t) = 2\pi f_0 t + \varphi(\omega, t), \quad (6.52)$$

тобто досліджуватимемо фазову характеристику вузькосмугового сигналу (6.50) відносно відповідної фазової характеристики гармонічного сигналу (6.51).

Підставивши рівняння (6.52) в (6.45), отримаємо випадковий вузькосмуговий сигнал у вигляді:

$$\xi(\omega, t) = A(\omega, t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(\omega, t)) = D(\omega, t) \cos 2\pi f_0 t - C(\omega, t) \sin 2\pi f_0 t \quad (6.53)$$

де

$$D(\omega, t) = A(\omega, t) \cos \varphi(\omega, t), \quad C(\omega, t) = A(\omega, t) \sin \varphi(\omega, t). \quad (6.54)$$

Для спряженого за Гільберта сигналу маємо

$$\xi_1(\omega, t) = D(\omega, t) \sin 2\pi f_0 t + C(\omega, t) \cos 2\pi f_0 t, \quad (6.55)$$

що дозволяє визначити амплітудну характеристику випадкового вузькосмугового сигналу  $\xi(\omega, t)$  і різницю фазових характеристик сигналів (6.50) і (6.51). З урахуванням  $\varphi_0 = 0$  маємо

$$A(\omega, t) = \sqrt{D^2(\omega, t) + C^2(\omega, t)}; \quad (6.56)$$

$$\varphi(\omega, t) = \Phi(\omega, t) - 2\pi f_0 t = \mathbf{L}[C(\omega, t), D(\omega, t)] + \mathbf{K}[C(\omega, t), D(\omega, t)] - 2\pi f_0 t. \quad (6.57)$$

Суттєвим для різниці фазових характеристик двох сигналів згідно з формулою (6.57) є те, що процес  $\varphi(\omega, t)$  внаслідок наявності другої і третьої складових може приймати значення поза межами інтервалу  $[0, 2\pi)$ , що необхідно обов'язково враховувати у процесі визначення щільності розподілу ймовірності різниці фазових характеристик сигналів.

Розв'язавши рівняння (6.53) та (6.55) відносно  $D(\omega, t)$  і  $C(\omega, t)$ , отримаємо

$$D(\omega, t) = \xi(\omega, t) \cos(2\pi f_0 t) + \xi_1(\omega, t) \sin(2\pi f_0 t); \quad (6.58)$$

$$C(\omega, t) = -\xi(\omega, t) \sin(2\pi f_0 t) + \xi_1(\omega, t) \cos(2\pi f_0 t). \quad (6.59)$$

Позначивши кореляційні і взаємкореляційні функції процесів  $D(\omega, t)$  і  $C(\omega, t)$  як  $R_D(\tau)$ ,  $R_C(\tau)$ ,  $R_{DC}(\tau)$ ,  $R_{CD}(\tau)$  можна показати, що

$$R_D(\tau) = R_C(\tau) = R_{\xi\xi}(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) + R_{\xi\xi_1}(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau); \quad (6.60)$$

$$R_{DC}(\tau) = -R_{CD}(\tau) = -R_{\xi\xi}(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau) + R_{\xi\xi_1}(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau). \quad (6.61)$$

З виразів (6.60) і (6.61) отримаємо

$$R_{\xi\xi}(\tau) = R_D(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) - R_{DC}(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau). \quad (6.62)$$

Функції  $R_{\xi\xi}(\tau)$  та  $R_{\xi\xi_1}(\tau)$  можна виразити через енергетичний спектр  $S_\xi(f)$  випадкового процесу  $\xi(\omega, t)$ :

$$R_D(\tau) = R_C(\tau) = \int_0^{\infty} S_{\xi}(f) \cos[2\pi(f - f_0)\tau] df. \quad (6.63)$$

Із формули (6.63) випливає важливий висновок: дисперсії процесів  $D(\omega, t)$  і  $C(\omega, t)$  дорівнюють дисперсії процесу  $\xi(\omega, t)$ :

$$R_D(0) = R_C(0) = R_{\xi}(0). \quad (6.64)$$

Для вузькосмугового процесу межі інтегрування в рівнянні (6.63) можуть бути розширені до  $\pm\infty$ , при цьому результат інтегрування залишиться незмінним. Це дозволяє дати таке наближення для кореляційних функцій:

$$R_D(\tau) = R_C(\tau) \approx \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}^*(f) \cos(2\pi f\tau) df, \quad (6.65)$$

де  $S_{\xi}^*(f) = S_{\xi}(f_0 - f)$  – енергетичний спектр процесу  $\xi(\omega, t)$ , який зміщений в діапазон нижніх частот. Із формули (6.65) випливає, що для вузькосмугового процесу виду (6.56) енергетичні спектри стаціонарних випадкових процесів  $D(\omega, t)$  і  $C(\omega, t)$  зосереджені в низькочастотному діапазоні. З урахуванням рівнянь (6.56), (6.57) цей висновок можна поширити і на амплітудну характеристику  $A(\omega, t)$  та різницю фазових характеристик  $\varphi(\omega, t)$ . Отже, вузькосмуговий процес має характер високочастотного колювання з несучою частотою  $f_0$  і повільно змінюваними характеристиками  $A(\omega, t)$  та  $\varphi(\omega, t)$ . Відповідно до цього можна обґрунтувати під час дослідження таких процесів використання наступного виразу

$$\frac{d\Phi(\omega, t)}{dt} = 2\pi f_0 + \frac{d\varphi(\omega, t)}{dt} > 0. \quad (6.66)$$

З виразу (6.66) випливає, що фазова характеристика вузькосмугових процесів «розгортається» тільки в бік збільшення її значень. Оскільки процес  $\Phi(\omega, t)$  визначається однозначно і є неперервним у всьому діапазоні значень (див. формулу (6.44)), то похідна процесу (6.66), яка має зміст випадкової миттєвої частоти, також визначається однозначно у всьому діапазоні визначення такої характеристики.

Перейдемо до розгляду взаємних кореляційних функцій випадкових процесів  $D(\omega, t)$  і  $C(\omega, t)$ . З урахуванням (6.64) маємо

$$R_{DC}(\tau) = -R_{CD}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{\xi}(f) \sin[2\pi(f - f_0)\tau] df. \quad (6.67)$$

З визначеною у роботі похибкою [6.13] маємо таке наближення для взаємних кореляційних функцій



$$R_{DC}(\tau) = -R_{CD}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{\xi}^*(f) \sin(2\pi f\tau) df. \quad (6.68)$$

Проаналізуємо формули (6.67), (6.68). Із формули (6.67) випливає, що для  $\tau=0$ , тобто у збіжні моменти часу випадкові процеси  $D(\omega, t)$  і  $C(\omega, t)$  некогерентні і некорельовані, оскільки  $R_{DC}(\tau=0)=0$ . Якщо  $\xi(\omega, t)$  – стаціонарний гауссівський випадковий процес, то  $D(\omega, t)$  і  $C(\omega, t)$  також є стаціонарними гауссівськими випадковими процесами, незалежними у збіжні моменти часу.

Із формули (6.68) випливає, що у випадку, коли енергетичний спектр  $S_{\xi}(f)$  вузькосмугового процесу  $\xi(\omega, t)$  симетричний і якщо  $f_0$  збігається з центральною частотою такого спектра, то, враховуючи що  $R_{DC}(\tau) = -R_{CD}(\tau) = 0$ , вираз (6.62) спрощується і має вигляд:

$$R_{\xi}(\tau) = R_D(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau). \quad (6.69)$$

Таким чином, якщо білий шум має гауссівський розподіл щільності ймовірності і проходить через вузькосмугову лінійну систему з центральною частотою  $f_0$ , то процес на виході лінійної системи можна описати виразом (6.53), де  $D(\omega, t)$  і  $C(\omega, t)$  – незалежні випадкові процеси.

### 6.5. Комп'ютерне моделювання завдань визначення характеристик модульованих сигналів

Отримані вище результати застосування перетворення Гільберта, включаючи й дискретне перетворення Гільберта використаємо для комп'ютерного моделювання при визначенні характеристик модульованих сигналів.

Наведемо результати комп'ютерного моделювання для конкретних прикладів визначення амплітудної і фазової характеристик сигналів зі складними законами модуляції. Комп'ютерне моделювання виконано для модульованих сигналів з такими параметрами:

- частота та період дискретизації  $f_D = 10^5$  Гц,  $T_D = 10^{-5}$  с;
- обсяг вибірки  $M = 10^4$ .

*Приклад 6.1.* Виконати комп'ютерне моделювання визначення характеристик сигналу з амплітудно-частотною модуляцією вигляду

$$u[j] = A_0 [j] [1 + 0,5 \cos(2\pi 50n\Delta t)] \times \sin\left(2\pi 10^3 j\Delta t + 20 \cos(2\pi 40 j\Delta t) + \theta\right), \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (6.70)$$

$$A_0[j] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j \in [500, 9500] \\ 0, & \text{якщо } j \in [0, 499], j \in [9501, 10000] \end{cases} \quad (6.71)$$

Модуляція виконувалась за гармонічним законом: амплітудна модуляція – з частотою 50 Гц і глибиною модуляції 0,5, а частотна – з частотою 40 Гц і глибиною модуляції 0,8. Результати моделювання графічно показано на рис. 6.3.

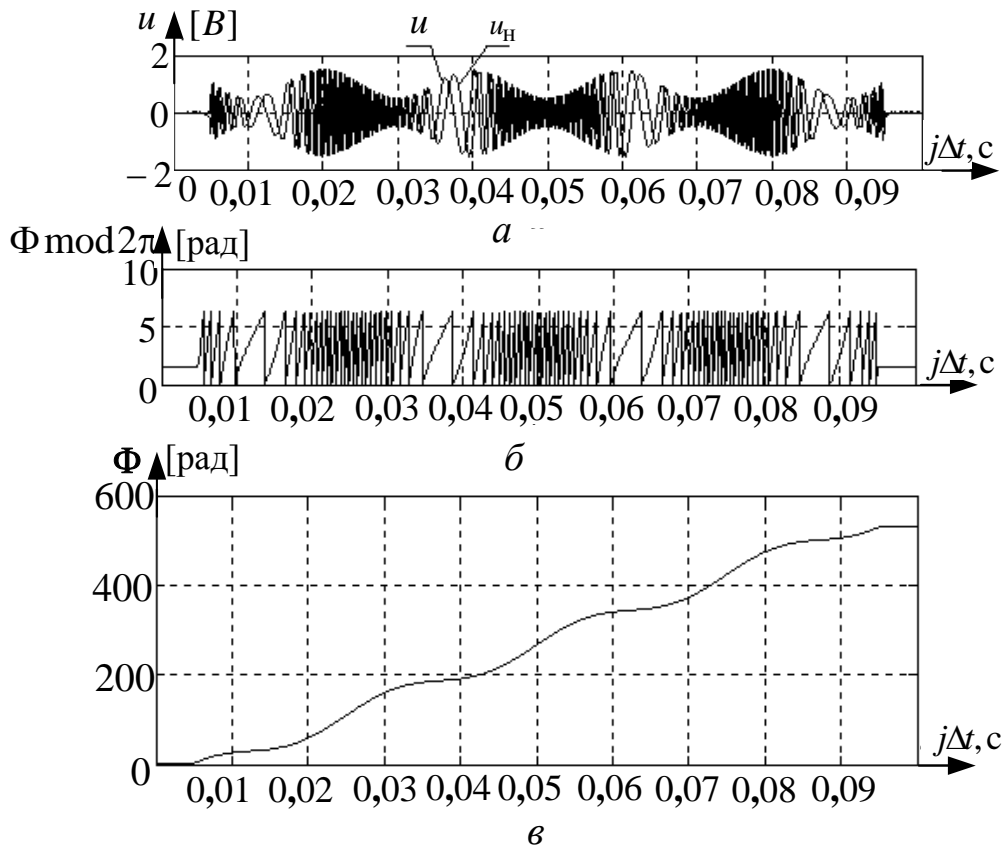


Рис. 6.3. Графіки послідовностей  $u[j]$  і  $u_H[j]$  (а),  $(\Phi[j]) \bmod 2\pi$  (б) та  $\Phi[j]$  (в).

Графік послідовностей  $u[j]$  і  $u_H[j]$  показано на рис. 6.3, а; графік дискретної фазової характеристики  $(\Phi[j]) \bmod 2\pi \in [0, 2\pi)$  – на рис. 6.3, б, графік послідовності значень  $\Phi[j]$  – на рис. 6.3, в.

Графік дискретної амплітудної характеристики  $A[j]$  за формулою (6.32), показано на рис. 6.4, а, графік абсолютної похибки її обчислення  $\Delta A[j] = A[j] - A[j](1 + 0,5 \cos(2\pi 50 j\Delta t))$  – на рис. 6.4, б, графік дискретної частотної характеристики  $f[j]$  за формулою (6.34) – на рис. 6.4, в, графік абсолютної похибки її обчислення  $\Delta f[j] = f[j] - 1000 [1 + 0,8 \cos(2\pi 40 j\Delta t)]$  – на рис. 6.4, в.

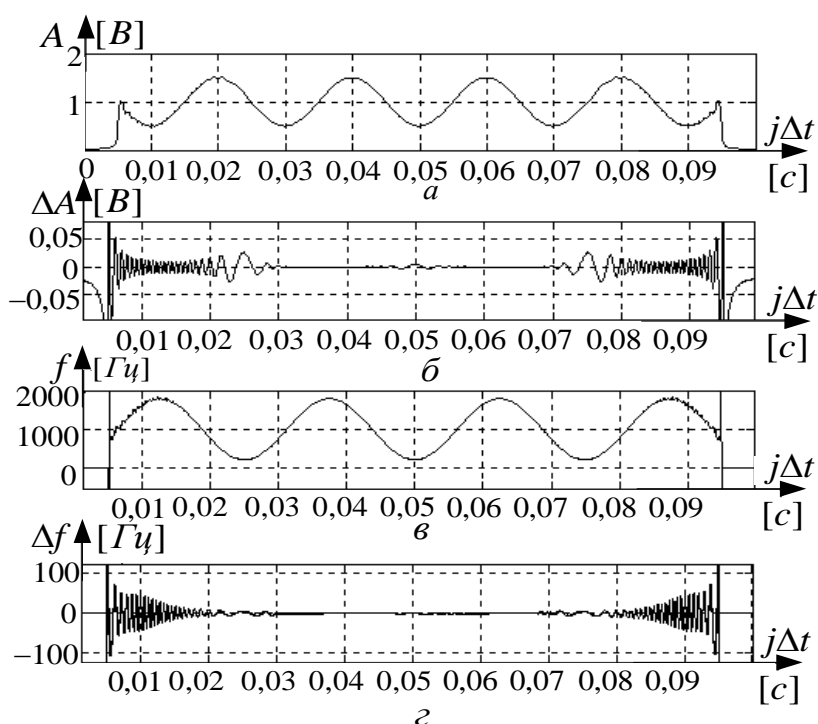


Рис. 6.4. Графіки послідовностей  $A[j]$  (а),  $\Delta A[j]$  (б),  $f[j]$  (в) та  $\Delta f[j]$  (г)

З аналізу графіків на рис. 6.4 можна зробити такі висновки: 1)  $\Delta A[j]$  зростає зі зменшенням частоти, 2) значення  $\Delta A[j]$  і  $\Delta f[j]$  зростають на межі інтервалу спостереження.

*Приклад 6.2.* Серія реалізацій сигналу з амплітудно-фазовою маніпуляцією

$$u[j] = A_0[j] \cdot \sin(2\pi 400 j\Delta t + \varphi[j] + \lambda), \quad \lambda \in [0, 2\pi); \quad (6.72)$$

$$A_0[j] = \begin{cases} 2, & \text{якщо } j \in [3000, 7000] \\ 1, & \text{якщо } j \in [500, 2999], j \in [7001, 9500] \\ 0, & \text{якщо } j \in [0, 499], j \in [9501, 10000] \end{cases}$$

$$\varphi[j] = \begin{cases} 0,5\pi, & j \in [4000, 6000] \\ 0, & j \notin [4000, 6000] \end{cases}$$

Амплітудна маніпуляція виконувалась в моменти часу  $t_1 = 0,03$  с та  $t_2 = 0,07$  с, а фазова маніпуляція на величину  $\pm 0,5\pi$  – у моменти  $t_3 = 0,04$  с та  $t_4 = 0,06$  с.

Послідовності  $u[j]$ ,  $u_H[j]$  показано на рис. 6.5,а,  $\Phi[j] \bmod 2\pi$  – на рис. 6.5,б, а амплітудну характеристику  $A[j]$  – на рис. 6.6,а абсолютну похибку обчислення амплітудної характеристики  $\Delta A[j] = U[j] - A_0[j]$  – на рис. 6.6,б та значення миттєвої частоти  $f[j]$  (в) відповідно до (6.34), – на рис. 6.6,в.

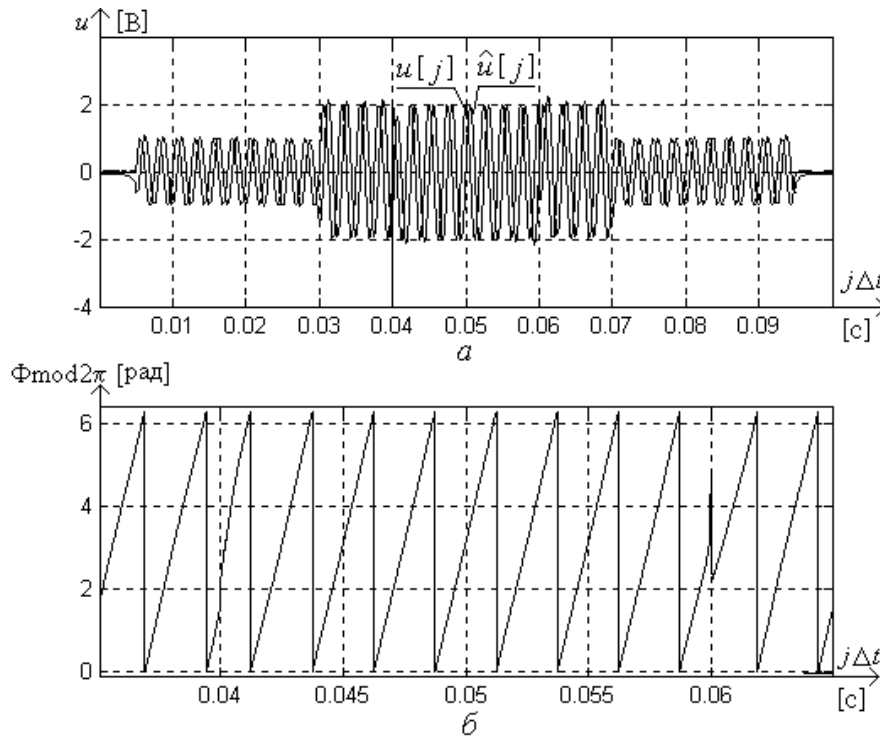


Рис. 6.5. Графіки послідовностей  $u[j]$  і  $u_H[j]$  (а) та  $(\Phi[j]) \bmod 2\pi$  (б)

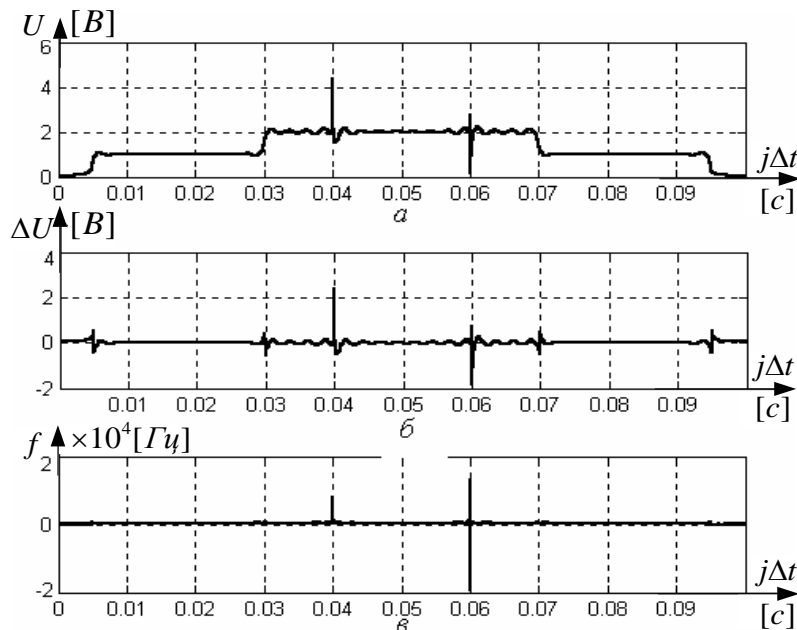


Рис. 6.6. Графіки послідовностей  $U[j]$  (а),  $\Delta U[j]$  (б), та  $f[j]$  (в)

Застосування формул (6.32) – (6.34), як видно з рис. 6.5 і рис. 6.6, дозволяє визначати дискретні амплітудну, фазову та миттєву частотну характеристики сигналів зі складними законами модуляції таких характеристик.

Програмна реалізація комп'ютерного моделювання процесу визначення амплітудної та фазової характеристик сигналів зі складними законами модуляції несучого гармонічного коливання наведено у додатку 2.

### 6.6. Комп'ютерне моделювання завдань віконної обробки сигналів в умовах обмеженого часу спостережень

Під час використання дискретного перетворення Гільберта для розв'язання завдань фазометрії у ряді випадків, наприклад, коли інформація вибіркового значення сигналу постійно оновлюється, потрібно застосовувати дискретне перетворення Гільберта на скінченних часових інтервалах з ковзною обробкою даних. У цьому разі виникає методична похибка вимірювання амплітудної і фазової характеристик сигналу. Для визначення цих похибок розглянемо таке завдання.

Проаналізуємо сигнал на заданій скінченній вибірці  $\{u(j\Delta t) = u(j), j = \overline{1, n}, n < \infty\}$  для оцінювання відповідних характеристик сигналу  $u(t)$ ,  $t \in [0, T_c]$ , для чого необхідно обчислити оцінки амплітудної і фазової характеристик сигналу  $u(t)$  на скінченних інтервалах  $[t - T_{\hat{a}}, t]$ , де  $T_{\hat{a}}$  – тривалість часового вікна,  $T_{\hat{a}} < T_c$ , а  $T_c$  – інтервал часу спостереження сигналу  $u(t)$ .

Амплітудну, фазову і частотну характеристики сигналу  $u(t)$  визначають за заданою на всьому часовому інтервалі  $u(t)$ , тобто використовують всю інформацію про сигнал. Інакше кажучи, для визначення поточних значень таких характеристик сигналу потрібно опрацювати весь сигнал на часовому інтервалі його спостереження. Для деяких випадків, коли вагомий внесок в інтеграл (6.19) роблять відповідні ділянки в околі значень характеристик, що обраховуються, можна отримати наближені оцінки характеристик за результатами спостережень сигналу, обмежених певним часовим вікном [6.12]. Зокрема, для вузькосмугових сигналів існує можливість “ковзної” обробки з визначенням поточних оцінок сигналу. Нехай ковзному перетворенню Гільберта відповідає інтегральне перетворення (6.17), тобто

$$u_{\hat{a}}(t) = - \int_{t - \hat{a}}^t \frac{u(\tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau, \quad t \in [\hat{a}, \infty).$$

Як відомо, ковзна обробка сигналу дозволяє отримати параметри сигналів у реальному часі, але зростання методичної похибки є «платою» за таку можливість. Виконаймо комп'ютерне моделювання для кількісної оцінки методичних похибок параметрів сигналу в умовах обмеженого часу обробки.

*Приклад 6.3.* Проведемо дослідження реалізацій амплітудно-модульованого сигналу  $u(t)$ . Вибіркові значення реалізацій сигналу отримано відповідно до виразу

$$u_{\hat{a}}[j] = A[j] \sin(2\pi f j \Delta t + \lambda), \quad \lambda \in [0, 2\pi), \quad j \in [1, 10^4], \quad (6.73)$$

для якого взято такі параметри:  $f = 400$  Гц,  $\Delta t = 10^{-5}$  с,

$$A[j] = \begin{cases} 1 \text{ В, якщо } j \in [3000, 7000]; \\ 0,5 \text{ В, якщо } j \in [500, 2999], j \in [7001, 9500]; \\ 0, \text{ якщо } j \in [0, 499], j \in [9501, 10000] \end{cases} \quad (6.74)$$

Амплітудна маніпуляція сигналу виконується в моменти часу  $t_1 = 0,03$  с і  $t_2 = 0,07$  с. Загальний вигляд послідовностей  $u_B[j]$  та  $u_{\hat{1}}[j]$  показано на рис. 6.7, а,б.

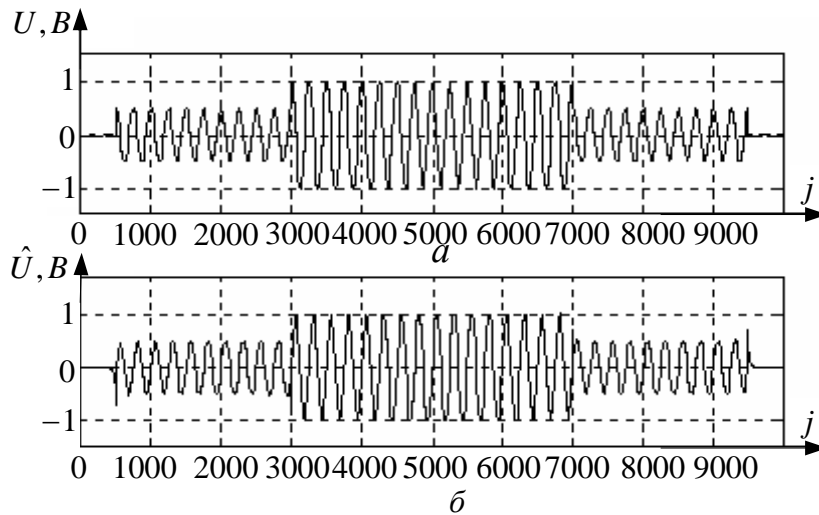


Рис. 6.7. Послідовності  $u[j]$  (а) та  $u_{\hat{1}}[j]$  (б)

Дослідимо застосування ковзної обробки дискретної послідовності вузькосмугового сигналу. На рис. 6.7 зображено ділянки гільберт-образів  $u_{\hat{1}}[j]$  та  $u_{\hat{1}\hat{a}}[j]$ , які отримано відповідно зі всієї послідовності  $u[j]$  і її частини  $u_B[j] = u[j]B_1[j]$ , де  $B_1[j]$  – функція вікна

$$B_1[j] = \begin{cases} 1, \text{ якщо } j \in [4538, 5500]; \\ 0, \text{ якщо } j \notin [4538, 5500] \end{cases} \quad (6.75)$$

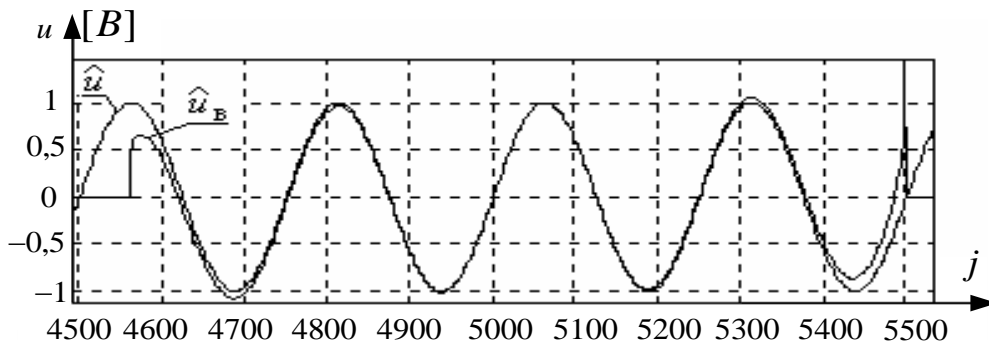


Рис. 6.8. Ділянки послідовностей  $u_{\hat{1}}[j]$  та  $u_B[j] = u[j]B_1[j]$ , обраховані відповідно зі всієї послідовності  $u[j]$  та її частини з часовим вікном  $B_1[j]$

Послідовність  $B_1[j]$  відмінна від нуля на часовому інтервалі  $(0, \frac{15}{4f})$ .

Значення абсолютної методичної похибки  $\Delta u_1[j] = u_1[j] - u_{1\hat{a}}[j]$  для вікна  $B_1[j]$  показано на рис. 6.8,а, і розширеного вікна  $B_2[j]$  (б), де

$$B_2[j] = \begin{cases} 1, & j \in [3538, 6500] \\ 0, & j \notin [3538, 6500] \end{cases} \quad (6.76)$$

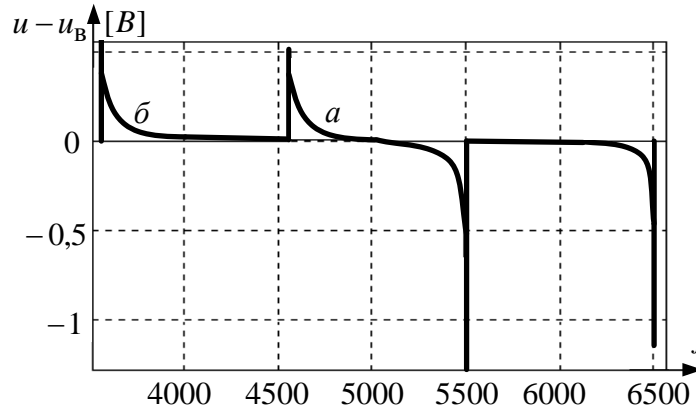


Рис. 6.8. Методична похибка  $\Delta u_{H_B}[j] = u_H[j] - u_{H_B}[j]$  обчислення спряженої послідовності  $u_{H_B}[j]$  для часових вікон  $B_1[j]$  (а) та  $B_2[j]$  (б)

Аналіз отриманих результатів моделювання залежностей дає змогу зробити такі висновки.

Аналізуючі результати обробки сигналів з обмеженим в часі вікном, слід виділити явище Гіббса, що обумовлює методичну похибку обчислення спряжених за Гільбертом сигналів. Для зменшення цієї похибки слід, вибирати тривалість вікна кратною періоду досліджуваних сигналів, тобто  $T_{\hat{a}} = kT = k_{\hat{a}}\Delta t$ ,  $k, k_{\hat{a}} \in N$ , а, значення  $u_{1\hat{a}}[j]$  – із середньої частини часового вікна  $B_1$ , де похибки найменші, тобто з вікна  $B_2$  (рис. 6.9). Це зумовлено тим, що методична похибка визначення  $u_1[j]$  на ділянці вікна має знакозмінний характер, на краях часового вікна  $B_1$  вона значно зростає, а в середній частині вікна має найменші значення. Тому зважаючи на зменшення відповідних похибок, можна рекомендувати з кожного краю вікна вилучати не менше  $0,25k_B$  відліків як таких, що містять неприпустимо великі методичні похибки.

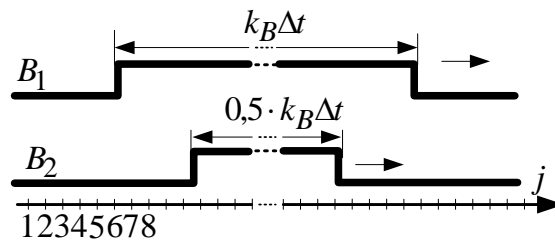


Рис.6.9. Взаємне розміщення вікон у подвійному ковзному вікні

Збільшення розміру вікна веде до зменшення  $\Delta u[j]$ . Похибка  $\Delta u[j]$  значно зменшується у випадку, якщо обрати тривалість вікна кратною періоду

$f^{-1}$ . Результати моделювання свідчать, що діапазон мінімальної похибки зміщується до початку чи кінця вікна у випадку, коли останні наближаються до початку періоду сигналу частотою  $f$ .

Слід відзначити факт використання на практиці спектрального аналізу різних часових вікон, наприклад, замість прямокутного вікна використовують вікно у вигляді трапеції, тобто з пологими фронтами для зменшення впливу явища Гіббса на отримувані спектрограми. Проте застосовувати такий підхід до аналізу сигналів у часовому діапазоні у ряді випадків недоцільно, оскільки додаткове спотворення сигналу буде призводити до додаткових спотворень його часових характеристик.

Таким чином, для зменшення методичної похибки, в умовах обмеженого часу існування сигналу, запропоновано застосовувати подвійне вікно, або вікно у вікні: перше вікно забезпечує вибір ділянки сигналу  $u[j]$  для обчислення  $u_{\hat{a}}[j]$ , а друге вікно виділяє середню частину  $u_{\hat{a}}[j]$ , яку обраховано з найменшою похибкою. При цьому, обґрунтування вибору послідовності двох вікон  $\{B_1[j], j=1,2\}$  забезпечує можливість «зшивання» окремих ділянок  $u_{\hat{a}}[j]$  на всьому інтервалі задання сигналу [6.12].

Розглянемо як трансформуються похибки обчислення дискретної послідовності сигналу у ковзному режимі в похибки визначення амплітудної і фазової характеристик сигналу. Для цього виконаємо комп'ютерне моделювання визначення дискретних амплітудної (6.32) та фазової характеристик (6.33) послідовності (6.73) для вікон (6.75) і (6.76). Результати моделювання зображено графічно на рис. 6.10.

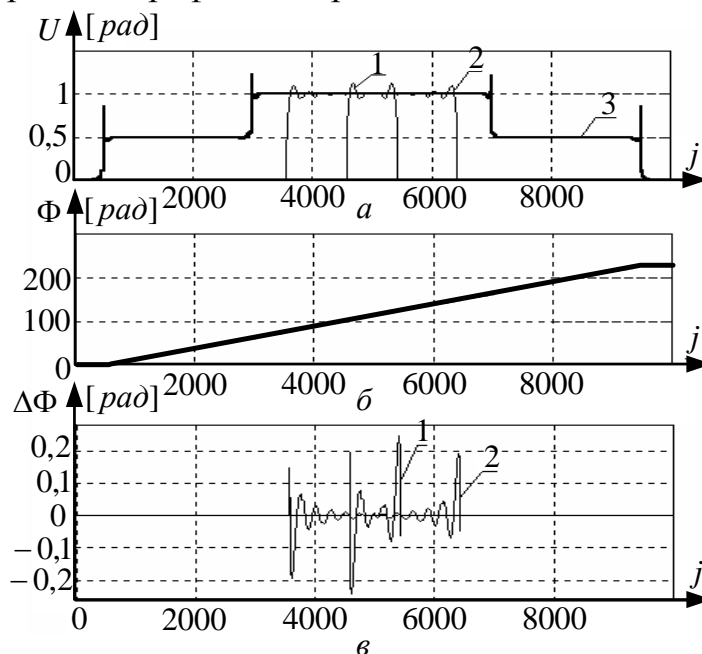


Рис. 6.10. Значення обвідної  $U[j]$  (а), фазової характеристики  $\Phi[j]$  (б) та похибки обчислення фази  $\Delta\Phi[j]$  (в) для вікон  $B_2[j]$  (криві 1) та  $B_1[j]$  (криві 2)



На рис. 6.10 зображено: а – амплітудні характеристики для частини послідовності (6.73) з вікнами  $B_2[j]$  (крива 1),  $B_1[j]$  (крива 2) та без віконної обробки (крива 3); б – фазова характеристика послідовності (6.73); в – абсолютні значення методичної похибки визначення фазової характеристики  $\Delta\Phi[j] = \Phi_{\text{в}}[j] - \Phi[j]$  для вікон  $B_1$  (крива 1) і  $B_2$  (крива 2).

Максимальні значення абсолютної і відносної методичних похибок визначення дискретних амплітудної і фазової характеристик зведено в табл. 6.1. Похибка визначалась в середній частині вікна для ділянки завдовжки  $\frac{1}{3}$  тривалості вікна.

**Таблиця 6.1. Методична похибка оцінювання амплітудної і фазової характеристик сигналу в разі використання прямокутного часового вікна**

Вікно	Методична похибка оцінки АХС		Методична похибка оцінки ФХС	
	Абсолютна, В	Відносна, %	Абсолютна, рад	Відносна, %
$B_1[j]$	0,02	2	0,035	0,56
$B_2[j]$	0,01	1	0,01	0,16

Аналіз результатів обчислень з використанням прямокутного часового вікна дозволяє зробити наступні висновки:

- відповідна компонента значень похибок обчислень дискретних амплітудної і фазової характеристик сигналу визначається дією явища Гіббса, зокрема ця компонента зростає на краях часового вікна порівняно з похибками в його середній частині;

- відносні значення похибок обчислень для амплітудної характеристики у заданих умовах моделювання реалізацій сигналу більші (у середньому в п'ять разів), ніж для фазової характеристики.

Слід відзначити, що відомі результати застосування віконної обробки сигналів і вікон різної форми (Хеммінга, Ханна, трикутне, Бартлетта, Блекмена, Кайзера, Чебишова тощо) для обчислення спектральних характеристик сигналів для підвищення точності їх оцінки. Тому виникає потреба розв'язувати широке коло завдань дослідження методичних похибок обчислення амплітудних та фазових характеристик сигналів в умовах їх віконної обробки.

## 6.7. Підсумки до розділу

Матеріали по використанню перетворення Гільберта у задачах фазометрії наведені у шостому розділі. В основному отримані результати по двом науково-технічним проблемам:

- обґрунтування застосування перетворення Гільберта для розв'язання задач фазометрії;

- практична реалізація рекомендацій по використанню дискретного перетворення Гільберта у задачах фазометрії, як одного із ефективних методів цифрової обробки сигналів.

Обґрунтування класу досліджуваних сигналів є одним з основних питань при перетворенні Гільберта. Тому спочатку обґрунтовано клас досліджуваних сигналів, який суттєво розширює області застосування перетворення Гільберта. Це клас як випадкових, так і детермінованих сигналів. Застосування скінченного часового вікна перетворення Гільберта дає можливість значно розширити клас досліджуваних сигналів, але питання ефективності використання перетворення Гільберта потребує додаткових досліджень для кожної конкретної задачі. Про це свідчать відомі результати використання так званого методу обвідної і фази, а також інші результати досліджень.

Перейдемо до висвітлення найбільш вагомих результатів використання перетворення Гільберта.

Відомі теоретичні властивості перетворення Гільберта, які наведені на початку розділу, у подальшому використовуються для конкретних задач фазометрії.

Розглянута фізична інтерпретація для практичної реалізації перетворення Гільберта. Перетворення Гільберта виконується за допомогою лінійного фільтра, який є ідеальним фазообертачем, тому що такий фільтр "зсуває" або "повертає" фази всіх компонент спектра сигналу на кут  $+0,5\pi$  в області від'ємних частот та на  $-0,5\pi$  в області додатних і лишає незмінним амплітудні співвідношення між всіма частотними компонентами сигналу. Під спектром сигналу розуміється перетворення Фур'є сигналу. У загальному плані перетворення Гільберта є фізично нереалізованим. Тому всі реальні вимірювання характеристик сигналів на основі перетворення Гільберта можна виконувати лише наближено. Запропоновано застосування "ковзного" дискретного перетворення Гільберта з використанням часових вікон, що дає можливість використати модель комплекснозначного сигналу і досліджувати амплітудні і фазові характеристики сигналу у реальному часі.

Систематизовані і досліджені властивості перетворення Гільберта для детермінованих і випадкових сигналів. Введення на основі перетворення Гільберта комплекснозначного сигналу дає можливість однозначно визначити поняття "фазової характеристики" та "різниці фазових характеристик" для широкого класу вузькосмугових сигналів.

Базуючись на використанні "ковзного" дискретного перетворення Гільберта показано, що є можливість застосувати обчислювальні методи при моделюванні і визначенні кількісних оцінок амплітудних, фазових і частотних характеристик дискретних послідовностей комплекснозначних сигналів зі скінченим об'ємом відліків.

Отримані конкретні результати комп'ютерного моделювання задач визначення характеристик модульованих сигналів з використанням прямокутного часового вікна дозволяє зробити наступні висновки:

- відповідна компонента значень похибок обчислень амплітудної і фазової характеристик сигналу визначається дією явища Гіббса, а саме ця

компонента зростає на краях часового вікна порівняно з похибками в його середній частині;

- відносні значення похибок обчислень для амплітудної характеристики сигналу у заданих умовах моделювання реалізацій сигналу більші (в декілька разів), ніж для фазової характеристики сигналу.

Аналіз результатів комп'ютерного моделювання дає можливість стверджувати, що методичні похибки, обумовлені скінченною тривалістю часового вікна можна суттєво зменшити вибором параметрів вікна, застосуванням подвійного вікна, а також застосуванням інших, відмінних від прямокутного, типів часових вікон.

Ряд результатів по використанню перетворення Гільберта у задачах фазометрії наведено у роботах [6.1 – 6.22].

## Розділ 7

### СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ ВИПАДКОВИХ КУТІВ ТА ЇХ ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

У цьому розділі більш детально розглянуті основні положення статистичної теорії кутометрії та фазометрії розпочатих у розділі 2, де наведені лише загальні відомості про дослідження випадкових кутів. Проведений порівняльний аналіз статистичних характеристик та параметрів випадкових величин розподілених на прямій з розподіленими на колі випадковими кутами. Наведено теоретичні розподіли модуля і аргумента випадкового вектора з незалежними гауссівськими компонентами, амплітудна і фазова характеристики детермінованого та випадкового вузькосмугових процесів, статистичні моделі випадкових фазових зсувів сигналів, постановка задачі статистичної обробки результатів фазових вимірювань, означення та обґрунтування вибіркового кругових характеристик випадкового кута.

Також отримано результати кореляційного аналізу фазових характеристик циклічних випадкових процесів, розглянуто апроксимацію розподілу фази випадкового вузькосмугового процесу розподілом Мізеса.

Тому результати даного розділу з однієї сторони є логічним продовженням результатів розділу 2, а з іншої у сукупності з ними мають за мету висвітлити проблематику статистичних моделей випадкових кутів та їх основні характеристики.

#### 7.1. Статистична модель випадкових кутів на площині

Створення сучасних інформаційних технологій обумовлює актуальність і важливість задач статистичних кутових та фазових вимірювань у різних галузях науки і техніки. Обґрунтування статистичних моделей сигналів для розв'язання задач вимірювання їх фазових характеристик базується на основі застосування сучасного апарату теорії ймовірності та математичної статистики. Особливої актуальності ця задача набуває у випадку аналізу роботи фазовимірювальної апаратури у разі низького співвідношення сигнал/завада. Статистична модель дає можливість створювати і обґрунтовувати нові алгоритми статистичної обробки результатів фазових вимірювань.

У підрозділі 2.1 випадковий кут  $\Psi(\omega)$  визначений як випадкова величина, що задана на фіксованому ймовірнісному просторі  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , де  $\Omega$  - простір елементарних подій  $\omega \in \Omega$ ,  $\mathcal{F}$  - алгебра ( $\sigma$ -алгебра) підмножин  $\Omega$ , а  $P$  - ймовірність випадкових подій  $\mathcal{F}$ .

Використовуючи ці результати наведемо наступне означення.

**Означення 7.1.** *Дійсна випадкова величина*

$$\psi(\omega) = \Psi(\omega) - \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] \cdot 2\pi, \quad \omega \in \Omega, \quad (7.1)$$

де  $\left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right]$  - ціла частина випадкового кута  $\Psi(\omega) \in R$ , називається випадковим кутом (випадковим фазовим зсувом)  $\psi(\omega)$  на  $[0, 2\pi)$ , якщо функція розподілу  $\psi(\omega)$

$$G(x') = P\{\omega \in \Omega : 0 < \psi(\omega) \leq x'\}, \quad x' \in [0, 2\pi), \quad (7.2)$$

має наступні властивості:

1.  $G(x')$  монотонно неспадна на інтервалі  $x' \in [0, 2\pi)$  і є неперервною справа;

2.  $G(2\pi) = 1$  і є неперервною в точці  $x' = 2\pi$ ;

3.  $G(0) = 0$ ; (7.3)

4.  $G(x'_2) - G(x'_1) \geq 0$  при  $x'_2 \geq x'_1$ ,  $x'_1, x'_2 \in [0, 2\pi)$ .

Аналіз виразу (7.2) вказує на відмінність функції розподілу  $G(x')$  від традиційної функції розподілу на числовій прямій  $R$  [7.1;7.2]: функція  $G(x')$  задана на скінченному інтервалі аргументу  $x' \in [0, 2\pi)$ . Тому як і в п. 2.4 будемо називати функцію  $G(x')$  функцією розподілу ймовірностей випадкового кута  $\psi(\omega)$  на  $[0, 2\pi)$ .

Подальший аналіз характеристик випадкових кутів засвідчить той факт, що ймовірнісний розгляд таких кутів буде, в основному базуватись на використанні функції розподілу  $G(x')$  на  $[0, 2\pi)$ .

Для більш загального випадкового кута  $\Psi(\omega) \in R$ ,  $\omega \in \Omega$ , маємо

**Означення 7.2.** Дійсна випадкова величина  $\Psi(\omega) > 2\pi$

$$\Psi(\omega) = \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] \cdot 2\pi + \psi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (7.4)$$

називається випадковим кутом  $\Psi(\omega)$  на  $R$ , якщо  $\psi(\omega)$  є випадковим кутом на  $[0, 2\pi)$  з функцією розподілу  $G(x')$  на  $[0, 2\pi)$ , визначеною за означенням 1, а інтегральна функція розподілів ймовірностей послідовності випадкових кутів

$\Psi(\omega)$  на  $R$  для  $\forall k \in Z$ , де  $k = \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right]$ , визначається формулою (2.13), тобто

$$F(x) = G(x') + \left[ \frac{x}{2\pi} \right] + C, \quad x \in R, \quad x' \in [0, 2\pi).$$

Для обґрунтування виразу (2.13) потрібне виконання двох умов (2.14) і (2.15), тобто:

$$P\left\{\omega \in \Omega : \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] = k, \quad k \in Z\right\} = 1,$$

i

$$P\{\omega \in \Omega : \psi(\omega) \in [0, 2\pi)\} = 1.$$

**Функція розподілу ймовірностей випадкового кута  $\psi(\omega)$  на  $[0, 2\pi)$ .**

Властивості такої функції розподілу

$$G(x') = P\{\omega \in \Omega : 0 < \psi(\omega) \leq x'\}, \quad x' \in [0, 2\pi), \quad (7.5)$$

були наведені в означенні 7.1. Ці властивості повністю співпадають з відомими властивостями традиційної функції розподілу ймовірностей випадкової величини [7.2], за виключенням того факту, що функція  $G(x')$  задана на скінченному інтервалі  $x \in [0, 2\pi)$ , але згідно (2.13) на різних ділянках  $R$ . Для кутових вимірювань приймається ще одна статистична гіпотеза: для всіх різних значень  $k$  функція  $G(x')$  є незмінною, тобто

$$G_k(x') \equiv G(x'), \quad \forall k \in Z, \quad (7.6)$$

де  $G_k(x')$  - функція розподілу  $\psi_k(\omega)$  на  $[0, 2\pi)$  для довільного, але конкретного  $k \in Z$ .

**Інтегральна функція розподілів ймовірностей послідовності випадкових кутів  $\Psi(\omega)$  на  $R$  для  $\forall k \in Z$  згідно (2.13) має наступний вид**

$$F(x) = G(x') + \left[ \frac{x}{2\pi} \right] + C, \quad x \in R, \quad x' \in [0, 2\pi).$$

З першого погляду  $F(x)$  не може мати властивостей традиційної функції розподілу ймовірностей. З цих позицій в порівнянні з терміном «функція розподілу», яка наведена у роботі [7.12], була змінена її назва, а саме *інтегральна функція розподілів ймовірностей послідовності випадкових кутів  $\Psi(\omega)$  на  $R$* , яка у більшій мірі відображає її властивості.

Згідно [7.12] наведемо властивості функції  $F(x)$ :

1.  $F(x)$  - монотонно неспадна;
2.  $F(x)$  - неперервна справа на  $x \in R$ ;
3.  $F(-\infty) = -\infty$ ;
4.  $F(\infty) = \infty$ ;
5.  $F(x') = F(x') - F(0_-)$ ,  $x' \in [0, 2\pi)$ ; (7.7)
6.  $F(x) - \frac{x}{2\pi}$  є періодичною функцією з періодом  $2\pi$ ;
7.  $F(x + 2\pi) - F(x) \equiv 1$ ,  $x \in R$ ;
8. Для  $0 \leq x_2 - x_1 \leq 2\pi$

$$P\{\omega \in \Omega : x_1 < \Psi(\omega) \leq x_2\} = \begin{cases} 0, & x_2 \leq x_1; \\ F(x_2) - F(x_1) & (x_1 < x_2 \leq x_1 + 2\pi); \\ 1, & x_2 > x_1 + 2\pi. \end{cases}$$

9. Для характерного випадку різниці кутів у межах  $2\pi$   $0 < x_2 - x_1 \leq 2\pi$  маємо

$$\begin{cases} F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < x' \leq x_2\} \text{ при } \left[ \frac{x_2}{2\pi} \right] = \left[ \frac{x_1}{2\pi} \right]; \\ (F(x'_2) - F(0)) + (F(x'_1) - F(2\pi)) = P\{(0 \leq x' \leq x'_2) + P(x'_1 \leq x' \leq 2\pi)\} \text{ при } \left[ \frac{x_2}{2\pi} \right] = \left[ \frac{x_1}{2\pi} \right] + 1, \end{cases}$$

де  $x'_1 = x_1 \pmod{2\pi}$ ,  $x'_2 = x_2 \pmod{2\pi}$ .

10. Постійна складова  $C$ , як правило, дорівнює нулю, але в залежності від постановки задачі кутових вимірювань може приймати і інші числові значення [7.12].

Із наведених властивостей функції  $F(x)$ ,  $x \in R$ , слідує, що монотонно неспадна функція  $F(x)$  має однакові прирости

$$F(x + 2\pi(k+1)) - F(x + 2\pi k) = 1, \quad \forall k \in Z,$$

що не суперечить властивостям нормованої ймовірнісної міри на інтервалі  $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$ .

Таким чином на кожному скінченному інтервалу  $\{2\pi k\} \cup [0, 2\pi)$ ,  $k \in Z$ , числової прямої  $R$  розподіл ймовірностей довільного випадкового кута  $\Psi(\omega)$  виду (7.5) для конкретного  $k$  має розподіл ймовірностей  $G(x')$  випадкового кута на  $[0, 2\pi)$ . Це також підтверджує один із основних висновків роботи [7.12]: ймовірнісний аналіз довільних випадкових кутів зводиться до ймовірнісного аналізу його дробової частини.

З метою уникнення подальших протиріч і непорозумінь, як зазначалось у підрозділі 2.1, функцію  $F(x)$  будемо іменувати *інтегральною функцією розподілів ймовірностей послідовності випадкових кутів  $\Psi(\omega)$  на  $R$  для  $\forall k \in Z$* .

На рис. 7.1 наведені в якості ілюстрації графіки: а) неперервної функції  $G_H(x')$ ; б) дискретної функції  $G_D(x')$ .

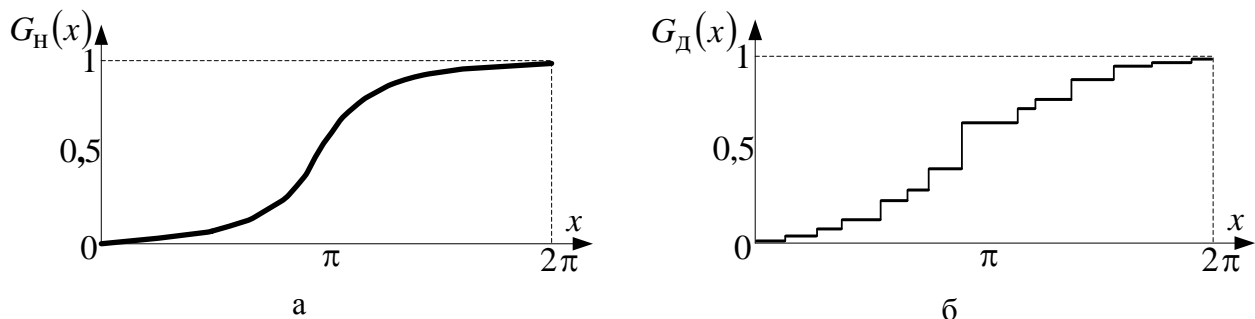


Рис. 7.1. Графіки функцій розподілу  $G_H(x')$  (а) і  $G_D(x')$  (б)

Загальний вид функції  $F(x)$  потребує відповідної інтерпретації. Один із варіантів графіка функції для неперервного випадку в якості ілюстрації, наведений на рис. 7.2.

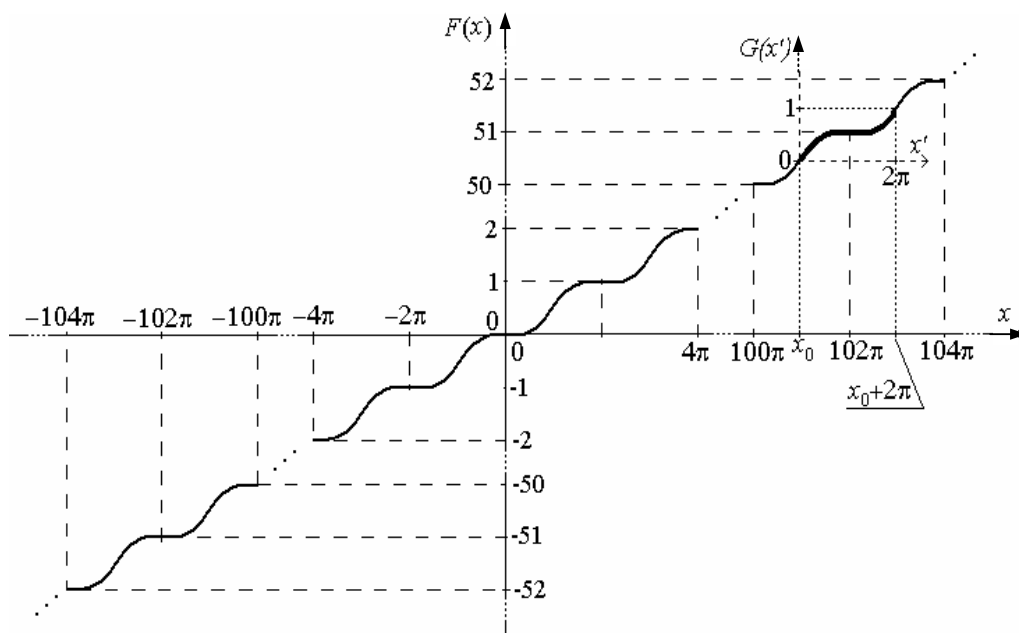


Рис. 7.2. Графік неперервної функції  $F(x)$

Значна кількість кутових вимірювань пов'язана з відсутністю фіксованої точки початку координат, тобто за нульовий напрямок може бути прийняте, у загальному випадку, довільне число  $x_0$  з числової вісі  $R$ . Тоді результати кутових вимірювань доцільно розглядати в інтервалі  $[x_0, x_0 + 2\pi)$  або  $(x_0 - \pi, x_0 + \pi)$ ,  $x_0 \in R$ .

Задання функції  $F(x)$  у виді (2.13) включає всі можливі як теоретичні (ідеалізовані), коли  $x_0 \rightarrow -\infty$  або  $x_0 \rightarrow \infty$ , так і практичні випадки ( $x_0$  - скінченне число).

**Щільність розподілу ймовірностей  $p(x)$  випадкового кута  $\psi(\omega)$  на  $[0, 2\pi)$ .** Функція  $p(x)$  для абсолютно неперервних законів розподілу на колі не тільки має деякі властивості, які співпадають з властивостями функції  $p(x)$  на прямій, але й має ряд відмінних від них.

Для неперервних функцій  $G(x')$  і  $F(x)$  випадкових кутів згідно (2.18) маємо

$$G(x_2) - G(x_1) = F(x_2 + 2\pi k) - F(x_1 + 2\pi k) = \int_{x_1}^{x_2} p(y) dy, \quad x_1, x_2 \in [0, 2\pi), \quad k \in Z.$$

Функція  $p(x)$  називається **щільністю розподілу ймовірностей випадкового кута  $\psi(\omega)$  на  $[0, 2\pi)$**  і має наступні властивості:

1.  $p(x + 2\pi) = p(x)$ ,  $p(x)$  є періодичною функцією з періодом  $2\pi$ .



$$2. p(x) \geq 0, \quad x \in [0, 2\pi). \quad (7.8)$$

$$3. \int_0^{2\pi} p(x) dx = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} p(x) dx = 1, \quad k \in Z.$$

**Статистична модель випадкового кута на одиничному колі.**

Розглянемо випадковий кут  $\Psi(\omega)$  з областю визначення  $\Omega = \{\omega \in [0, 2\pi)\}$  та областю значень  $\Theta \subset R$ . Створимо комплекснозначну випадкову величину

$$\hat{\eta}(\omega) = \cos[\Psi(\omega)] + i \sin[\Psi(\omega)]. \quad (7.9)$$

Формула (7.9) встановлює однозначну відповідність між напрямками величини  $\hat{\eta}(\omega)$  та дробовою частиною  $\psi(\omega)$  випадкового кута  $\Psi(\omega)$ :

$$\psi(\omega) = (\Psi(\omega)) \bmod 2\pi = \Psi(\omega) - \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] 2\pi, \quad (7.10)$$

Для випадкового кута  $\Psi(\omega)$  його дробова частина  $\psi(\omega)$  є також випадковою величиною.

На рис. 7.3 реалізація випадкової величини  $\hat{\eta}(\omega)$  відображається на площині в декартовій системі координат  $xOy$ , а реалізація  $\theta$  випадкового кута  $\psi(\omega)$  співпадає в цій системі з напрямком цього вектора  $\mathbf{r}$ , який починається в точці  $O$  і закінчується в точці з координатами  $(x = \cos \theta; y = \sin \theta)$ . Кут  $\theta$  відраховується від осі  $Ox$ , як правило, у напрямку проти ходу стрілки годинника. Отже,  $\arg(\mathbf{r}) = \theta$ . У разі зміни  $\theta$  на  $2\pi$  рад кінець вектора  $\mathbf{r}$  описує на площині  $xOy$  повне коло одиничного радіуса і повертається в ту саму точку кола. Можна побудувати симетричну систему відрахування випадкових кутів  $\Psi(\omega)$  у напрямі за ходом стрілки годинника. Коло з одиничним радіусом, тобто  $|\mathbf{r}| = 1$ , будемо також називати *нормованим* або *одиничним колом*.

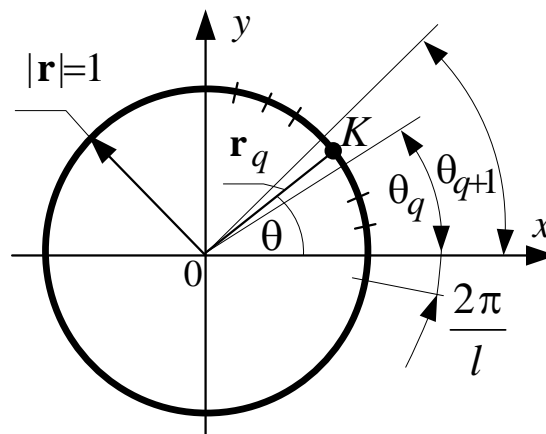


Рис. 7.3. Графічне зображення результатів кутових спостережень на колі

Розділимо коло на скінченне число  $l$  рівних дуг точками кола  $\frac{\pi}{l}(2q+1)$ ,  $q = \overline{0, (l-1)}$ , почавши відлік  $q$  від осі  $Ox$  у напрямі проти ходу стрілки годинника. Ці точки утворюють скінченне розбиття  $D$  одиничного кола. Наприклад, якщо  $l=4$  маємо крок  $\frac{\pi}{2}$  і множину точок розбиття  $\left\{ \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\}$ .

З'єднаємо початок координат із зазначеними точками на колі векторами  $\mathbf{r}$ . Побудовані радіус-вектори утворюють із віссю  $Ox$  кути  $\psi_q = \frac{\pi}{l}(2q+1)$ ,  $q = \overline{0, (l-1)}$ .

Виділимо елементарну подію  $\omega_q$ , яка настає внаслідок реалізації такої сукупності умов: для довільних дійсних  $\theta_q$  і таких  $\theta_{q+1}$ , що  $0 \leq \theta_{q+1} - \theta_q < 2\pi$ , в інтервалі  $[\theta_q, \theta_{q+1})$  знайдеться число  $\theta$ , яке за модулем  $2\pi$  є значенням  $\psi(\omega)$ . Це твердження можна записати у виді

$$\omega_q = \{ \psi(\omega) \equiv \theta \pmod{2\pi}, \theta \in [\theta_q, \theta_{q+1}) \}, \quad q = \overline{1, l-1}. \quad (7.11)$$

Отже, континууму значень напрямків  $\mathbf{r}$  в інтервалі  $[0, 2\pi)$  поставлено у відповідність скінченну множину елементарних подій  $\Omega = \{ \omega_q, q = \overline{0, l-1} \}$ , яку отримано розбиттям  $D$  одиничного кола на скінченне число  $l$  рівних інтервалів. Операції з усіма підмножинами  $\Omega$  утворюють алгебру  $\mathbf{F}$ .

Для завершення побудови моделі випадкового кута залишилося задати ймовірності  $P_q$  подій  $\omega_q$  з простору  $\Omega$ . З урахуванням циклічної природи кутів визначимо ймовірності таким чином (7.12):

$$P_q = \begin{cases} P\{ \theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi(\omega) < \theta_{q+1} \pmod{2\pi} \}, \left[ \frac{\theta_q}{2\pi} \right]^+ = \left[ \frac{\theta_{q+1}}{2\pi} \right]^+; \\ P\{ 0 \leq \psi(\omega) < \theta_{q+1} \pmod{2\pi} \} + P\{ \theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi(\omega) < 2\pi \}, \left[ \frac{\theta_q}{2\pi} \right]^+ = \left[ \frac{\theta_{q+1}}{2\pi} \right]^+ + 1. \end{cases}$$

Ймовірність довільної події  $B \in \mathbf{F}$  у загальному вигляді визначається як

$$P(B) = \sum_{\{ \omega_q \in \mathbf{F} \}} P(\omega_q). \quad (7.13)$$

Для обчислення ймовірностей (7.12) необхідно ввести функцію, що породжує ймовірнісну міру. Використовуючи  $F(\theta)$ , ймовірність (7.12)

визначається як

$$P(\theta_q \leq \Psi(\omega) < \theta_{q+1}) = \begin{cases} 0, & \text{для } \theta_{q+1} < \theta_q; \\ F(\Psi_{q+1}) - F(\Psi_q), & \text{для } \theta_q \leq \theta_{q+1} < \theta_q + 2\pi; \\ 1, & \text{для } \theta_{q+1} > \theta_q + 2\pi. \end{cases} \quad (7.14)$$

Визначаючи функцію  $F(x)$ , скористаємось її зв'язком з відповідною щільністю розподілу ймовірності  $p(\theta)$ :

$$F(\theta_{q+1}) - F(\theta_q) = \int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} p(x) dx, \quad (7.15)$$

де  $\theta_q, \theta_{q+1}$  – фіксовані кути, що відповідають розбиттю  $D$ .

Ймовірнісний простір  $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ , де  $P = P(B)$ ,  $B \in \mathcal{F}$  – ймовірність події  $B$ , визначає ймовірнісну модель кутових спостережень під час статистичного вимірювального експерименту.

На множині  $\Omega$  побудуємо стохастичну міру  $\varphi(\omega_q)$ , яка дорівнює довжині дуг, що містяться між піввіссю  $Ox$  та векторами  $\mathbf{r}_q$ ,  $q = \overline{0, (l-1)}$ . Отже,

$\varphi(\omega_q) = \frac{2\pi}{l} q$  – випадкова функція від інтервалу розбиття  $D$ . Множина подій з

$\Omega$  відображається на числову вісь  $x(\omega) = \left\{ \varphi(\omega_q), q = \overline{0, (l-1)} \right\}$ ,  $x(\omega) \in X \subseteq R$ .

Клас підмножин  $X$  дає можливість побудувати алгебру  $\mathcal{B}$ . Використовуючи вирази (7.14), (7.15), нескладно знайти ймовірності  $P(A \in \mathcal{B})$  для визначеного закону розподілу ймовірності. Таким чином, отриманий ймовірнісний простір  $\{X, \mathcal{B}, P_\varphi\}$ , де  $P_\varphi = \{P(A), A \in \mathcal{B}\}$ , визначає область значень статистичної моделі випадкового кута  $\Psi(\omega)$ .

## 7.2. Закони розподілів випадкових кутів на колі

Зазначалось вище, що однією з характерних ознак кола є виконання на колі операції додавання за модулем  $2\pi$ . Це обумовлює властивість періодичності законів щільності розподілу ймовірності випадкового кута, чим вони суттєво відрізняються від розподілів ймовірності випадкових величин [7.16], і потребує врахування цієї особливості у статистичній обробці. На рис. 7.4 зображено загальний вигляд щільності розподілу ймовірності випадкового кута  $p(\theta)$ ,  $\theta \in (-\infty, \infty)$ .

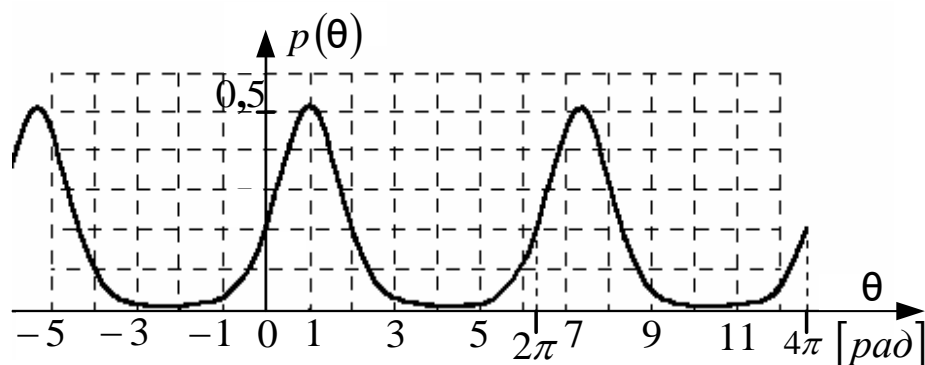


Рис. 7.4. Загальний вигляд щільності розподілу ймовірності випадкового кута

Графік на рис. 7.4 побудований за умов апріорної невизначеності розташування інтервалу вимірювання  $[\theta_i, \theta_i + 2\pi)$ , де  $\theta_i$  - початок інтервалу і

для якого виконується умова нормування: 
$$\int_{\theta_i}^{\theta_i + 2\pi} p(\theta) d\theta = 1.$$

Щільність розподілу ймовірності  $p(\theta)$  на рис. 7.4. періодична з періодом  $2\pi$ . В теорії статистичної кутометрії такі розподіли називають одночастотними [7.12]. Багаточастотні розподіли мають період менше за  $2\pi$  в певне ціле число разів, тобто період  $\frac{2\pi}{j}$ ,  $j = 2, 3, \dots$  В статистичній фазометрії, як правило, маємо

справу з фазовими зсувами сигналів, які характеризуються одночастотними розподілами. Тому далі звернемо увагу саме на такі розподіли.

Розглянемо і виконаємо порівняльний аналіз найбільш характерних законів розподілів ймовірності випадкових кутів на колі, використавши при цьому результати роботи [7.12].

**Намотаний гауссівський розподіл.** Цей розподіл відіграє винятково важливу роль в статистиці випадкових кутів та в статистичній фазометрії. Він належить до сім'ї намотаних розподілів, яка утворюється під час нелінійного перетворення випадкової величини  $\xi(\omega)$  у випадковий кут  $\psi(\omega)$  виду

$$\psi(\omega) = [K\xi(\omega)] \bmod 2\pi, \quad (7.16)$$

де  $K$  – масштабний коефіцієнт перетворення. Перетворення (7.16) випадкової величини  $\xi(\omega)$  у випадковий кут  $\psi(\omega)$  приводить до трансформації законів розподілу на прямій в намотані закони розподілу ймовірності випадкових кутів (тобто в розподіли, що “намотані” на одиничне коло). Якщо на прямій задано розподіл  $F(x)$  випадкової величини  $\xi(\omega)$ , то намотаний на одиничне коло розподіл  $F(x)$  визначатиме відповідний намотаний закон розподілу  $F_{2\pi}(\theta)$  випадкового кута  $\psi(\omega)$  в інтервалі  $[0, 2\pi)$ . У загальному випадку

$$F_{2\pi}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [F(\theta + 2\pi j) - F(2\pi j)], \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (7.17)$$

Якщо випадкова величина  $\xi(\omega)$  має щільність розподілу ймовірності  $p(x)$ , то неперервний випадковий кут  $\psi(\omega)$  також розподілений неперервно зі щільністю розподілу ймовірності

$$p_{2\pi}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(\theta + 2\pi j), \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (7.18)$$

У загальному випадку функція  $p_{2\pi}(\theta)$  несиметрична відносно середини інтервалу  $[0, 2\pi)$ , а на його кінцях набуває однакових значень:  $p_{2\pi}(0) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi} p_{2\pi}(\theta)$ . У багатьох випадках значення  $j$  в сумі можна обмежити величиною  $\pm 1 \dots \pm 5$ , оскільки розподіли ймовірності випадкових величин мають скінченні дисперсії.

Довільний закон розподілу на прямій можна перетворити в намотаний. Оскільки для випадкової величини  $\xi(\omega)$  часто обґрунтовується гауссівський розподіл ймовірності, слід очікувати, що в статистичній фазометрії найчастіше буде мати місце намотаний гауссівський розподіл, щільність розподілу ймовірності якого на інтервалі  $[0, 2\pi)$  задається виразом

$$p_{2\pi}(\theta / \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[(\theta - \mu) \bmod 2\pi + 2\pi j]^2}{2\sigma^2}\right), \quad (7.19)$$

де  $\mu$  – математичне сподівання;  $\sigma$  – середньоквадратичне відхилення випадкової величини  $\xi(\omega)$ . Чим менше  $\sigma$ , тим більше намотаний гауссівський закон розподілу ймовірності концентрується в околі математичного сподівання.

Даний закон має важливу властивість: сума незалежних кутів  $\sum_{k=1}^n \theta_k$ , кожний з яких має розподіл (7.19), теж має такий самий розподіл, але з іншими характеристиками.

Приклад трансформації випадкової величини з гауссівською щільністю розподілу ймовірності у випадковий кут відповідно до формули (7.16) для  $K = 1$  показано на рис. 7.5.

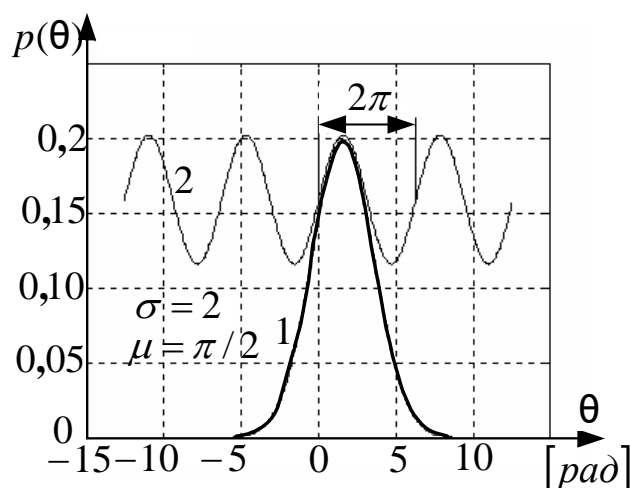


Рис. 7.5. Графіки щільності розподілу ймовірності гауссівського (1) і намотаного гауссівського (2) розподілів з параметрами  $\sigma = 2$ ,  $\mu = 0,5\pi$

Відмітимо, що під час застосування фазового методу, природним є прагнення забезпечити відповідну чутливість перетворення, яка визначається коефіцієнтом  $K$ . Один зі шляхів досягнення цієї мети є збільшення значення  $K$ . Проте таке збільшення значення  $K$  має обмеження, оскільки супроводжується зростанням дисперсії намотаного розподілу. Дійсно, при необмеженому зростанні  $K$  намотаний гауссівський розподіл прямує до рівномірного і задача визначення оцінки  $\hat{\mu}$  стає беззмістовною.

Характеристична функція  $f_{2\pi}(n) = f_n$  намотаного гауссівського розподілу ймовірності має вигляд

$$f_n = \alpha_n = \exp\left(-\frac{n^2\sigma^2}{2}\right), \quad b_n = 0, \quad n \in Z. \quad (7.20)$$

Доцільність та обґрунтованість застосування намотаного гауссівського розподілу у статистичній фазометрії можна підтвердити на основі центральної граничної теореми на колі [7.12]. Ця теорема доводить, що для незалежних випадкових кутів  $\psi_1(\omega), \dots, \psi_n(\omega)$ , які мають однакову функцію розподілу ймовірності  $F(\theta)$ , розподіл ймовірності нормованої суми кутів

$$\psi_{\Sigma}(\omega) = \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \psi_j(\omega) \right] \bmod 2\pi \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ наближається до намотаного}$$

гауссівського розподілу. Оскільки у статистичній фазометрії маємо справу саме з обробкою реалізацій випадкових фазових зсувів, ймовірності яких розподілені за однаковими законами, це дає підстави вважати найбільш важливими для цієї галузі вимірювань намотаний гауссівський розподіл та розподіл ймовірності Мізеса, останній з яких у більшості практичних випадків використовується для апроксимації гауссівського закону з найменшою похибкою у порівнянні з іншими законами.

Приклади щільностей розподілу ймовірності намотаного гауссівського розподілу для різних значень параметрів показано на рис. 7.6 а,б. З цих графіків видно, що намотаний гауссівський розподіл одновіршинний і симетричний відносно значення  $\theta = \mu(\text{mod } 2\pi)$ .

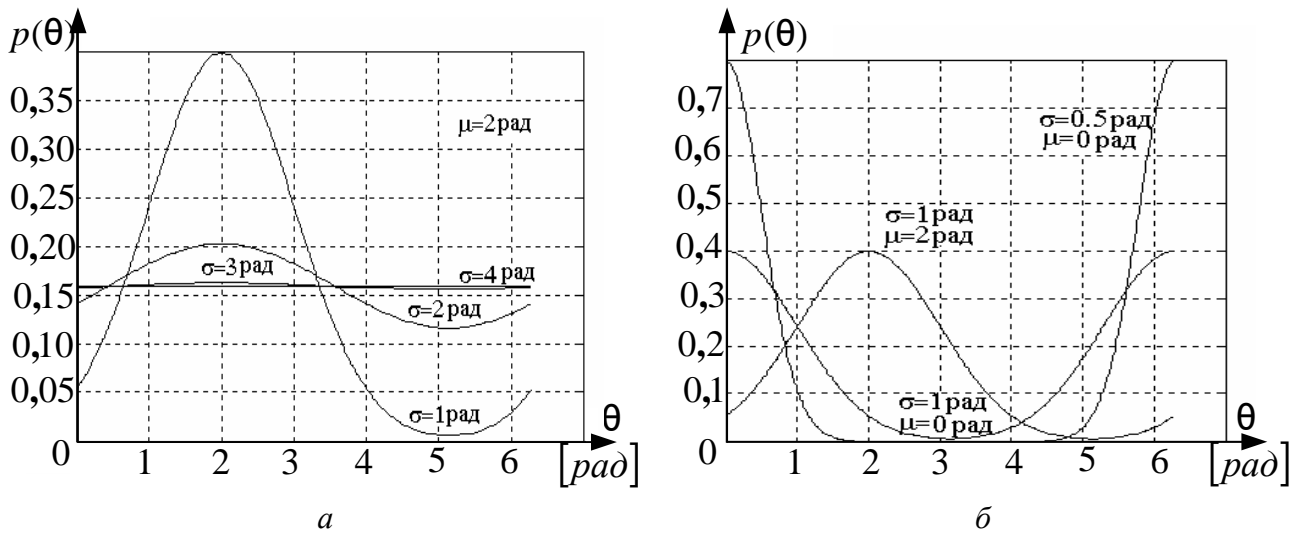


Рис. 7.6. Щільність намотаного гауссівського розподілу ймовірностей випадкових кутів з параметрами: а –  $\mu = 2$  рад і  $\sigma = (1; 2; 3; 4)$  рад; б –  $\mu = 0; 2$  рад і  $\sigma = (0,5; 1)$  рад

На інтервалі  $[0, 2\pi)$  відношення максимального до мінімального значень щільності розподілу ймовірностей (тобто значення щільності розподілу для кутів  $\mu$  і  $(\mu + \pi)(\text{mod } 2\pi)$ ) не залежить від  $\mu$ , тому його доцільно визначати для  $\mu = 0$ . Це відношення дорівнює

$$\frac{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2\pi j)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2\pi j + \pi)^2}{2\sigma^2}\right)} = \frac{1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2\pi j)^2}{2\sigma^2}\right)}{2 \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2\pi j)^2}{2\sigma^2}\right)} = 1 - \left[ 2 \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2\pi j)^2}{2\sigma^2}\right) \right]^{-1}. \quad (7.21)$$

Якщо  $\sigma \rightarrow \infty$  граничний розподіл перетворюється на рівномірний зі значенням щільності  $1/2\pi$  (на рис. 7.6,а графіки зі значеннями параметра  $\sigma = 3$  рад та  $\sigma = 4$  рад майже не розрізняються), а збільшення  $\mu$  приводить до зміщення максимуму функції в бік більших значень кутів. На інтервалі  $[0, 2\pi)$  розподіл (7.19) має дві точки перегину.

**Розподіл Мізеса.** В статистичному аналізі випадкових кутів вагому роль відіграє закон розподілу ймовірності Мізеса. Щільність розподілу ймовірності Мізеса для випадкового кута  $\psi(\omega)$  визначається за формулою

$$p_M(\theta | \mu, k) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp\{k \cos(\theta - \mu)\}, \quad |\mu| < \infty, \quad k > 0, \quad (7.22)$$

де  $I_0(k)$  – модифікована функція Бесселя першого роду і нульового порядку

$$I_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{k \cos \theta\} d\theta; \quad (7.23)$$

$\mu$  – круговий середній напрям випадкового кута;  $k$  – параметр концентрації випадкового кута в околі  $\mu$ . Графіки функцій  $f(\theta)$  для різних значень параметрів представлені на рис. 7.7.

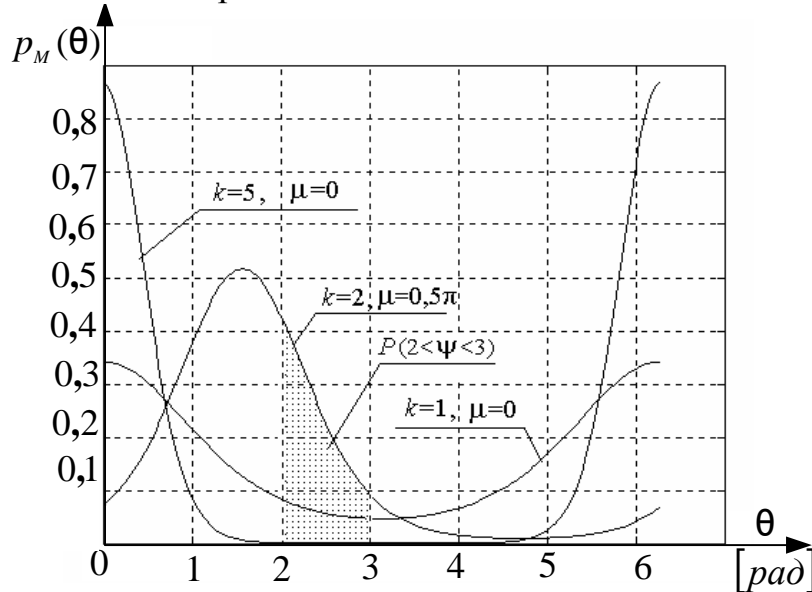


Рис.7.7. Графіки щільності розподілу ймовірності Мізеса для різних значень параметрів  $k$  і  $\mu$

Зі збільшенням параметра  $k$  розподіл Мізеса концентрується навколо  $\mu$  (якщо  $k=2$  і  $\mu = 0,5\pi$ , розподіл майже повністю зосереджений на дузі від 0 до 3 рад, а якщо  $k \rightarrow 0$ , то перетворюється на рівномірний).

Розподіл Мізеса одновершинний та симетричний відносно значення  $\mu$ , яке є математичним сподіванням цього розподілу. Відношення значення щільності розподілу, аргументом якої є мода  $\mu$  до значення щільності в антимоді  $(\mu + \pi)(\text{mod } 2\pi)$  дорівнює  $e^{2k}$ . У інтервалі  $[\mu - \pi, \mu + \pi)$  щільність (7.22) має дві точки перегину -  $\mu \pm \arccos \frac{\sqrt{1+4k^2}-1}{2k}$ .

Характеристична функція розподілу Мізеса визначається так

$$f_n = \alpha_n = \frac{I_n(k)}{I_0(k)}. \quad (7.24)$$

Цей розподіл має наступну важливу властивість: найбільш правдоподібною оцінкою параметра  $\mu$  є круговий середній напрям.

Відповідний вибір параметрів намотаного гауссівського розподілу ймовірності дозволяє задовільно апроксимувати його розподілом Мізеса. На рис.



7.9. наведено приклади апроксимації щільності розподілу Мізеса відповідно щільністю гауссівського намотаного розподілу.

Графіки на рис. 7.8 свідчать про задовільну збіжність законів за відповідного вибору значень їх параметрів, причому зі зменшенням значення  $k$  розбіжність між законами зменшується.

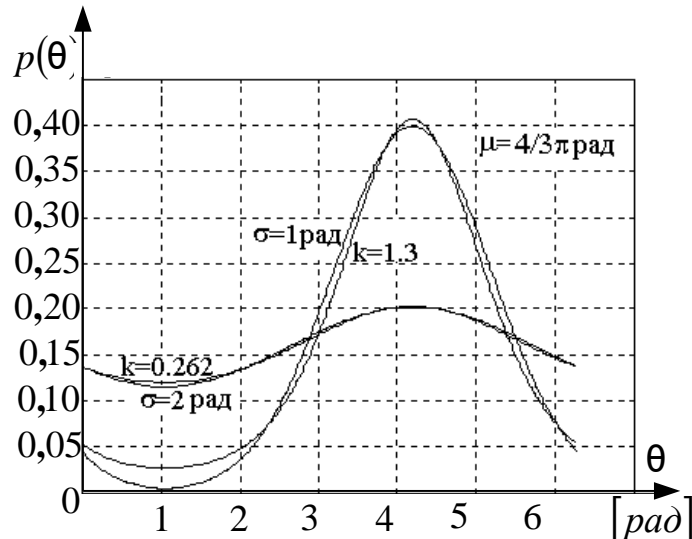


Рис. 7.8. Графіки щільностей ймовірності намотаного гауссівського та розподілу Мізеса з параметрами:  $\mu = 4\pi/3$  рад,  $\sigma = 1$  рад і  $k = 1,3$  та  $\sigma = 2$  рад і  $k = 0,262$

Визначимо співвідношення для параметрів  $\sigma$  і  $k$  щільностей ймовірності (7.19) і (7.23), за якого дані розподіли мають однакову кругову дисперсію випадкових фазових зсувів. З цією метою прирівняємо модулі їх характеристичних функцій (7.20) і (7.24) для  $u = 1$ . Маємо

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln \frac{I_1(k)}{I_0(k)}}. \quad (7.25)$$

Зазначені розподіли ймовірності мають відмінні властивості, які використовуються для статистичного аналізу випадкових кутів. Оскільки закони задовільно апроксимують один одного, їх подібність дозволяє сподіватись, що тією чи тією мірою ці властивості притаманні обом розподілам.

Крім того, розподіл (7.22), порівняно з намотаним гауссівським розподілом (7.19), має математичний запис, який приводить до простіших оцінок параметрів розподілу. Наведені корисні характеристики розподілу Мізеса свідчать на користь його застосування в задачах статистичної фазометрії.

**Типові розподіли на колі.** Інші, відомі в статистичному аналізі випадкових кутів, розподіли [7.12], які можуть знайти застосування у статистичній фазометрії, наведено у табл. 7.1.

Таблиця 7.1. Розподіли ймовірності випадкових кутів

Назва	Щільність розподілу ймовірності $p(\theta)$	Характеристична функція $f_n$
Рівномірний	$\frac{1}{2\pi}$ .	$\frac{e^{2\pi ni} - 1}{2\pi ni} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$
Кардіоїдний	$(2\pi)^{-1}[1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)],$ $ \mu  < \infty,  \rho  < 0,5.$	-
Трикутний	$\frac{1}{8\pi} [4 - \pi^2 \rho + 2\pi \rho  \pi - \theta ],$ $\rho \leq \frac{4}{\pi^2}$	$\alpha_{2n-1} = \frac{\rho}{(2n-1)^2},$ $\alpha_{2n} = 0,$ $\beta_n = 0.$
Намотаний Коші *)	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - \cos 2\rho + \rho^2},$ $\rho = e^{-a} \in [0,1].$	$\rho^{ a }$

\*Примітка. Розподіл Коші на прямій має щільність розподілу ймовірності

$$p(x, a) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad x \in R, \quad a > 0.$$

Намотаний розподіл ймовірності Коші, як і гауссівський намотаний розподіл, має властивість безмежно подільного закону розподілу.

Дискретний розподіл ймовірностей випадкових кутів, для якого визначено ймовірності

$$P \left[ \psi \equiv \left( v + \frac{2\pi q}{l} \right) \bmod 2\pi \right] = P_q, \quad q = \overline{0, l-1}, \quad (7.26)$$

дістав назву гратчастого розподілу, а величина  $2\pi/l$  – крока гратки. Для ймовірностей (7.26) виконується умова нормування:  $\sum_q P_q = 1$ . Цей розподіл

можна вважати зосередженим у вершинах вписаного в одиничне коло правильного  $l$ -кутника. Якщо має місце  $P_q = l^{-1}$ , то розподіл ймовірностей перетворюється у рівномірний дискретний.

Характеристична функція гратчастого розподілу у випадку  $v \equiv 0 \bmod 2\pi$  дорівнює

$$f_n = \sum_{q=0}^{l-1} P_q \exp\left(\frac{2\pi q n i}{l}\right). \quad (7.27)$$

Для рівномірного дискретного розподілу маємо

$$f_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{2\pi}, \\ 0, & n \not\equiv 0 \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (7.28)$$

Розглянуті розподіли ймовірності випадкових кутів, їх характеристики та властивості дозволяють виконувати статистичний аналіз випадкових кутів та різних фізичних циклічних процесів з випадковою природою після їх перетворення у фазові характеристики сигналів.

### 7.3. Характеристична функція випадкових кутів, її властивості та застосування

**Визначення характеристичної функції випадкових кутів.** У статистичному аналізі випадкових кутів важливу роль відіграє характеристична функція [7.12]. Її визначення розглянуто в розділі 2. Згідно (2.19) маємо

$$f_n = \mathbf{M}\{\exp(in\Psi(\omega))\} = \int_0^{2\pi} e^{inx} dG(x) = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{inx} dF(x), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Продовжимо розгляд характеристичної функції випадкових кутів та її властивостей.

Для неперервних та дискретних випадкових кутів на основі загального визначення характеристичної функції (2.19) маємо відповідно такі вирази

$$f_n = \int_0^{2\pi} \exp(in\theta') p(\theta') d\theta', \quad (7.29)$$

$$f_n = \sum_{j=1}^m P_j \exp\left(in \frac{2\pi j}{m}\right) \quad (7.30)$$

Для випадкових кутів характеристичну функцію  $f_n$  можна подати формулою (2.20), тобто

$$f_n = \alpha_n + ib_n = \rho_n \exp(i\mu_n),$$

де, згідно (2.21) і (2.22) маємо

$$\alpha_n = \mathbf{M} \cos(n\psi) = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) dF(\theta), \quad b_n = \mathbf{M} \sin(n\psi) = \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) dF(\theta).$$

Оскільки для випадкового кута  $\psi(\omega)$  визначення (7.30) має сенс лише тоді, коли функція  $\exp(in\psi(\omega))$  є періодичною з періодом  $2\pi$ , то  $n$  може бути тільки цілим числом:  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Тому у випадку розподіленої на колі випадкової величини характеристична функція являє собою послідовність тригонометричних моментів, обчислених відносно нульового початкового напрямку.

**Основні властивості характеристичної функції випадкових кутів.**

1. Модуль характеристичної функції  $|f_n| \leq 1$ .
2. При  $n = 0$  маємо  $f_0 = 1$ .
3. Характеристична функція від'ємного аргументу дорівнює комплексноспряженій характеристичній функції:  $f_{-n} = f_n^*$ . Така властивість обґрунтовується виразами (2.20) і (2.21), оскільки  $\alpha_{-n} = \alpha_n$ ,  $b_{-n} = -b_n$ .
4. Характеристична функція суми незалежних випадкових кутів  $\psi_1(\omega), \dots, \psi_m(\omega)$  дорівнює добутку характеристичних функцій компонент:

$$f_n = \prod_{j=1}^m f_n^{(j)}, \quad (7.31)$$

де  $f_n^{(j)}$  - характеристична функція  $n$ -го порядку  $j$ -тої компоненти.

Ця властивість характеристичної функції часто використовується у задачах кутометрії. Це пов'язано, наприклад, з наступним фактом.

Щільність розподілу ймовірностей суми двох незалежних випадкових кутів  $[\psi_1(\omega) + \psi_2(\omega)] \bmod 2\pi$  визначається згорткою щільності розподілу ймовірностей складових

$$p(\theta) = \int_0^{2\pi} p_2(\theta - x)p_1(x)dx = \int_0^{2\pi} p_1(\theta - x)p_2(x)dx. \quad (7.32)$$

5. Характеристична функція кута  $[\psi(\omega) + \nu] \bmod 2\pi$ , де довільний дійсний  $\nu = \text{const}$ , дорівнює

$$\mathbf{M}e^{in(\psi + \nu)} = e^{in\nu} f_n. \quad (7.33)$$

Більш детально розглянемо наступну властивість характеристичної функції випадкових кутів.

6. Щільність розподілу ймовірності випадкових кутів однозначно визначається її характеристичною функцією [7.12]

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\theta}. \quad (7.34)$$

Формула (7.34) являє собою розклад  $p(\theta)$  в ряд Фур'є. Відповідно до критерію Діріхле апроксимація (7.34) має місце для широкого класу функцій  $p(\theta)$ , які на інтервалі  $[0, 2\pi)$  мають лише скінченне число максимумів і мінімумів та скінченне число розривів. Використання (7.34) в ряді випадків

дозволяє суттєво спростити вирази для щільності розподілу ймовірності випадкових кутів.

Характеристичну функцію можна обчислити відносно довільного початкового напрямку  $\nu$ . В цьому разі маємо

$$f_n(\nu) = \mathbf{M}e^{in(\psi-\nu)} = \alpha_n(\nu) + ib_n(\nu) = \rho_n(\nu)e^{i\mu_n(\nu)}. \quad (7.35)$$

Використовуючи властивість (2.20) характеристичної функції випадкових кутів можна довести наступні співвідношення:

$$\rho_n(\nu) = \rho_n, \quad \mu_n(n) \equiv (\mu_n - n\nu) \bmod 2\pi. \quad (7.36)$$

Доведено також [7.12], що коли ряд  $\sum |f_n|^2$  збігається, то має місце обернена формула, яка дозволяє визначити щільність розподілу ймовірності за тригонометричними моментами

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \right\}. \quad (7.37)$$

Сумісна характеристична функція випадкових кутів  $\psi_1(\omega), \dots, \psi_n(\omega)$  визначається виразом

$$f_{n_1, \dots, n_m} = \mathbf{M} \exp \left[ i \sum_{j=1}^m n_j \psi_j(\omega) \right] = \int_{\Theta(k)} \exp[i(n, \theta)] dF(\theta), \quad (7.38)$$

де  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$  – вектор, компоненти якого є цілими числами,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,

$(\mathbf{n}, \theta) = \sum_{j=1}^m n_j \theta_j$  – скалярний добуток векторів  $\mathbf{n}$  та  $\theta$ , а множина  $\Theta(k)$ , що

визначає область інтегрування, задається як

$$\Theta(k) = \left( \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) : 2\pi k_j \leq \theta_j < 2\pi k_j + 1, \quad j = \overline{1, n} \right). \quad (7.39)$$

**Приклади практичного застосування характеристичної функції випадкових кутів.** Використання формул (7.32) і (7.37) для практичних задач досліджень в ряді випадків спрощує визначення аналітичного виразу щільності розподілу ймовірності випадкових кутів та їх параметрів. Зокрема, з характеристичної функції розподілу Мізеса (7.24) можна визначити параметри розподілу наступним чином:

$$a_1 = f_1 \cos \mu = \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \cos \mu, \quad (7.40)$$

$$b_1 = f_1 \sin \mu = \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \sin(k), \quad (7.41)$$

$$v = 1 - |f_1| = 1 - \frac{I_1(k)}{I_0(k)}. \quad (7.42)$$

Інший важливий для практичного застосування приклад використання характеристичної функції пов'язаний з визначенням функціональної залежності між параметрами різних законів щільності ймовірності. Відомо [7.12], що щільність ймовірності намотаного гауссівського розподілу задовільно апроксимується щільністю ймовірності розподілу Мізеса. Апроксимація одного розподілу іншим передбачає також збіжність їх характеристичних функцій (7.20) та (7.24). Прирівнявши характеристичні функції для  $n = 1$  маємо

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) = \frac{I_1(k)}{I_0(k)}, \quad (7.43)$$

звідки визначаємо

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln\left(\frac{I_1(k)}{I_0(k)}\right)}. \quad (7.44)$$

Графік залежності  $\sigma(k)$  згідно формули (7.44) наведено на рис. 7.9.

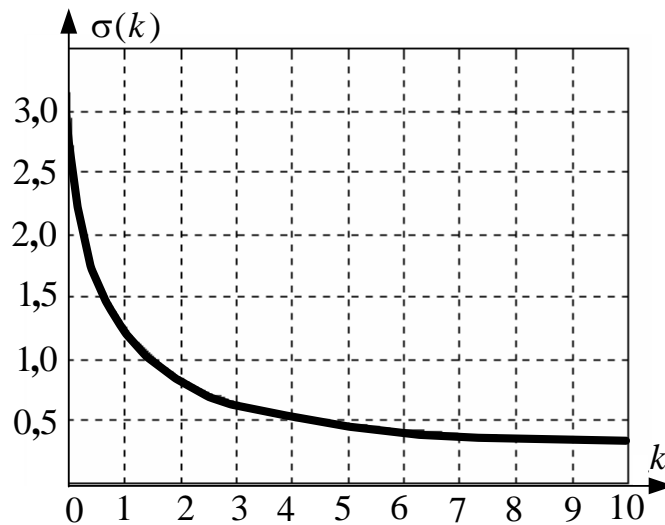


Рис. 7.9. Графік функції  $\sigma(k)$

Таким чином, щільність розподілу ймовірності намотаного гауссівського розподілу з параметрами  $(\mu, \sigma)$  може бути апроксимована щільністю розподілу ймовірності Мізеса з параметрами  $[\mu, k]$  за умови виконання рівності (7.44).

Застосування характеристичних функцій дозволяє вирішити і наступне важливе питання статистичної обробки випадкових кутів – визначення законів розподілів ймовірності суми випадкових кутів.

Розглянемо скінченну суму незалежних випадкових кутів  $\psi_1(\omega), \dots, \psi_m(\omega)$

$$\Psi(\omega) = \psi_1(\omega) + \dots + \psi_m(\omega). \quad (7.45)$$

У випадку  $m$  однаково розподілених кутів характеристична функція для  $\Psi(\omega)$  дорівнює

$$f_{n_1, \dots, n_m} = \prod_{j=1}^n f_{n_j}^{(j)} = (f_n)^m. \quad (7.46)$$

Якщо ряд  $\sum |f_n|^2$  збігається, то випадковий кут  $\Psi(\omega)$  розподілений неперервно, а його щільність розподілу ймовірності згідно з (7.43) можна визначити рядом

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_n)^m \exp(-in\theta). \quad (7.47)$$

**Щільність розподілу ймовірності скінченної суми незалежних** випадкових кутів будемо називати згорткою розподілу складових [7.12]. Для пояснення такої назви розглянемо випадок коли  $n = 2$ , тобто  $\psi(\omega) = \psi_1(\omega) + \psi_2(\omega)$ . Нехай  $F(\theta_1)$ ,  $F(\theta_2)$ ,  $F(\theta)$  – відповідно функції розподілу ймовірності випадкових кутів  $\psi_1(\omega)$ ,  $\psi_2(\omega)$ ,  $\psi(\omega)$ . Вважаємо, що випадкові кути незалежні, тоді має місце:

$$F(\theta) = \int_0^{2\pi} F_2(\theta - \nu) dF_1(\nu) + C_1 = \int_0^{2\pi} F_1(\theta - \nu) dF_2(\nu) + C_2, \quad (7.48)$$

де  $C_1$ ,  $C_2$  – константи. Якщо один з кутів має неперервну функцію розподілу ймовірностей (наприклад,  $\psi_2(\omega)$ ), то сума  $\psi(\omega)$  також має неперервний розподіл, щільність ймовірності якого

$$p(\theta) = \int_0^{2\pi} p_1(\theta - \nu) dF(\nu). \quad (7.49)$$

З рівності (7.49) слідує, що в разі рівномірного розподілу одного з двох незалежних випадкових кутів їх сума також визначається рівномірним розподілом.

Якщо обидва кути мають неперервні функції розподілу ймовірностей, то щільність ймовірності суми  $\psi(\omega)$  можна визначити за формулою (7.32), тобто

$$p(\theta) = \int_0^{2\pi} p_2(\theta - \nu) p_1(\nu) d\nu = \int_0^{2\pi} p_1(\theta - \nu) p_2(\nu) d\nu,$$

де  $p_1(\theta)$ ,  $p_2(\theta)$  – щільності розподілу ймовірності випадкових кутів  $\psi_1(\omega)$  і  $\psi_2(\omega)$ .

#### 7.4. Числові характеристики випадкового кута

При дослідженнях випадкового кута разом із функцією розподілу, щільністю розподілу, характеристичною функцією важливу роль відіграють числові характеристики випадкового кута. У цьому питанні маємо повну аналогію з числовими характеристиками випадкової величини. Але враховуючи специфіку статистичних кутових вимірювань, для випадкових кутів числові характеристики мають інші терміни (назви) у порівнянні з числовими характеристиками на прямій випадкових величин і у певній мірі відрізняються формулами при їх обчисленні. У цьому підрозділі більш детально зупинимось на цьому.

Згідно з виразом (2.19) характеристична функція законів розподілу ймовірностей випадкового кута на колі є послідовністю тригонометричних моментів. Це дає можливість однозначно визначити характеристичну функцію такими моментами, на відміну від законів розподілів на прямій.

**Тригонометричні моменти.** Дійсні тригонометричні моменти законів розподілу визначаються формулами (2.21) і (2.22), тобто

$$\begin{aligned} a_n &= \mathbf{M}\{\cos n\Psi(\omega)\}, \\ b_n &= \mathbf{M}\{\sin n\Psi(\omega)\}. \end{aligned}$$

Характеристична функція у полярній формі може бути представлена як

$$f_n = \rho_n \exp(i\mu_n), \quad (7.50)$$

де  $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\mu_n = \text{Arg} f_n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Всі вище наведені числові характеристики визначені для початкового нульового напрямку з полярним кутом

$$\varphi_0 \equiv 0 \pmod{2\pi}. \quad (7.51)$$

Для такого випадку, крім наведених вище позначень тригонометричних моментів використовують наступні

$$f_n(0), a_n(0), b_n(0), \rho_n(0), \mu_n(0),$$

які дають більш чітку інтерпретацію відносно напрямків на колі.

Тригонометричні моменти випадкового кута  $\Psi(\omega)$  відносно довільно вибраного напрямку  $\varphi_0 \equiv \Phi_0 \pmod{2\pi}$ ,  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ ,  $\Phi_0 \in \mathbb{R}$  визначаються формулою

$$f_n(\varphi_0) = \mathbf{M}\{\exp in[\Psi(\omega) - \varphi_0]\} = a_n(\varphi_0) + i\beta_n(\varphi_0) = \rho_n(\varphi_0)e^{i\mu_n(\varphi_0)}. \quad (7.52)$$

В цьому випадку мають місце наступні співвідношення:

$$f_n(\varphi_0) = f_n(0)e^{-in\varphi_0}, \quad \rho_n(\varphi_0) = \rho_n(0),$$

$$\mu_n(\varphi_0) \equiv (\mu_n(0) - n\varphi_0) \pmod{2\pi},$$

$$a_n(\varphi_0) = a_n(0)\cos n\varphi_0 + \beta_n(0)\sin n\varphi_0;$$

$$b_n(\varphi_0) = -a_n(0)\sin n\varphi_0 + \beta_n(0)\cos n\varphi_0.$$



Таким чином визначені тригонометричні моменти відносно довільного напрямку з полярним кутом  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ .

**Центральні тригонометричні моменти.** Такі моменти визначаються як тригонометричні моменти при  $\rho_1(\varphi) > 0$  відносно напрямку з полярним кутом  $\mu_1$ .

Центральні тригонометричні моменти визначаються формулами

$$\begin{aligned} f_n(\mu_1) &= f_n(0)e^{-in\mu_1(0)}, \\ a_n(\mu_1) &= \rho_n(0)\cos(\mu_n(0) - n\mu_1(0)) \\ b_n(\mu_1) &= \rho_n(0)\sin(\mu_n(0) - n\mu_1(0)). \end{aligned} \quad (7.53)$$

Для  $n = 1$  маємо

$$a_1(\mu_1) = \rho_1(0), \quad b_1(\mu_1) = 0.$$

**Кругове середнє значення випадкового кута.** Синонімом назви такої характеристики випадкового кута є *круговий середній напрямок*, або *круговий середній кут*, які по суті визначають найбільш ймовірне значення випадкового кута.

Круговим середнім значенням випадкового кута  $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$  називається полярний кут

$$\mu_1(0) = \text{Arg}f_1(0) = \text{Arg}M\{\exp i\Psi(\omega)\} = \text{Arg}(\rho_1(0)e^{i\mu_1(0)}) \quad (7.54)$$

за умови, що  $M\{\exp i\Psi(\omega)\} \neq 0$ . Якщо ця умова не виконується, то кругове середнє значення  $\alpha_1$  в напівінтервалі  $[0, 2\pi)$  не визначається однозначно.

**Кругове середнє відхилення.** Кругове середнє відхилення  $\delta(v)$  випадкового кута  $\psi(\omega)$  відносно фіксованого кута  $v$  визначається як математичне сподівання випадкового кута

$$\min\{\psi'(\omega), 2\pi - \psi'(\omega)\}, \quad (7.55)$$

де  $\psi'(\omega) \equiv (\psi(\omega) - v) \pmod{2\pi}$ , тобто  $\delta(v)$  як величина

$$\delta(v) = \int_0^\pi \theta dF(\theta + v) + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - \theta) dF(\theta + v). \quad (7.56)$$

**Кругова дисперсія.** Величина  $\upsilon = 1 - \rho_1(0) = 1 - |f_1(0)|$  називається *круговою дисперсією* випадкового кута  $\Psi(\omega)$ . Така величина вводиться як характеристика відхилення випадкового кута  $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$  від фіксованого кута  $\varphi' \in [0, 2\pi)$

$$\upsilon(\varphi') = M\{1 - \cos(\psi(\omega) - \varphi')\} = 1 - \text{Re}M\{\exp i[\psi(\omega) - \varphi']\}. \quad (7.57)$$

У випадку  $\rho_1(0) > 0$  маємо

$$\upsilon(\varphi') = 1 - \rho_1(0)\cos(\varphi' - \mu_1(0)) = 1 - \rho_1(0) + 2\rho_1(0)\left(\sin \frac{\varphi' - \mu_1(0)}{2}\right)^2. \quad (7.58)$$

Останній вираз приймає мінімальне значення, коли  $\varphi' = \mu_1(0)$ . Таким чином, кругова дисперсія випадкового кута  $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$  приймає мінімальне значення яке дорівнює величині  $\nu(\alpha_1) = 1 - \rho_1(0)$  для  $\varphi' = \mu_1(0)$ , тобто коли за напрямком  $\varphi'$  прийнято круговий середній напрямок випадкового кута  $\psi(\omega)$ . Множина значень кругової дисперсії належить інтервалу  $[0,1)$ .

**Кругова медіана.** Круговою медіаною неперервного розподілу на колі  $G(x')$ ,  $x' \in [0, 2\pi)$  випадкового кута  $\psi(\omega)$  є значення кута  $\theta_m \in [0, 2\pi)$ , як одного з рішень рівняння

$$Q(\theta_m) = F(\theta_m + \pi) - F(\theta_m) - 0,5 = \int_{\theta_m}^{\theta_m + \pi} p(\theta) d\theta - 0,5 = 0, \quad (7.59)$$

і для якого значення  $Q(\theta_m - 0,5\pi)$  максимальне [7.121]. У (7.59) позначено  $F(\theta_m)$  - значення функції розподілу випадкового кута в точці  $\theta_m$ .

Розглянемо основні властивості кругової медіани. Для одновершинних розподілів медіана завжди визначається однозначно. Одновершинні неперервні розподіли на колі відрізняються тим, що в інтервалі  $[0, 2\pi)$  існують такі кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , що під час руху точки по одиничному колу від  $\varphi_2$  до  $\varphi_1$  в обох напрямках функція  $p(x') = \frac{dF(x')}{dx}$  є монотонно неспадною функцією. Для даного випадку має місце наступне твердження.

**Твердження 7.1.** Якщо неперервний розподіл на колі зі щільністю розподілу ймовірності  $p(\theta)$  одновершинний і виконується умова

$$p(x') \neq p(x' + \pi), \quad x' \in [0, 2\pi), \quad (7.60)$$

то кругова медіана у напівінтервалі  $[0, 2\pi)$  визначається однозначно.

Інша важлива властивість медіани випадкового кута стосується його кругового середнього відхилення. Відомо [7.12], що у випадку одновершинного розподілу кругове середнє відхилення досягає мінімуму в точці  $\theta_m$ .

**Мода.** Визначення *моди* для випадкових кутів можна сформулювати наступним чином. Якщо щільність розподілу ймовірності випадкових кутів неперервна і одновершинна, і в інтервалі  $[0, 2\pi)$  існують такі значення кутів  $\theta_1$  і  $\theta_2$ , що зі зміною кута  $\theta$  від  $\theta_1$  до  $\theta_2$  по колу в кожному з двох можливих напрямків похідна  $\frac{dF(\theta)}{d\theta}$  поводить себе як монотонно неспадна функція, то значення  $\theta_2$  називається *модою* розподілу, а  $\theta_1$  – *антимодою*.

Якщо щільність розподілу ймовірностей випадкового кута одновершинна і симетрична, то круговий середній напрям, мода і медіана співпадають (за

модулем  $2\pi$ ), а уявні частини центральних тригонометричних моментів дорівнюють нулю:

$$b_u(\nu) = M[\sin(u(\psi - \nu))] = 0, \quad u = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.61)$$

Ця властивість має винятково важливе значення для статистичної фазометрії, оскільки найчастіше розподіли ймовірності випадкових фазових зсувів задовольняють ці умови. Тому з'являється можливість обрахунку різних характеристик випадкових кутів.

**Асиметрія.** Для оцінки асиметрії закону розподілу ймовірності вводиться коефіцієнт  $g_1$  асиметрії, який ґрунтується на властивості (7.56)

$$g_1 = \frac{b_3(\mu_1)}{\nu^{3/2}}. \quad (7.62)$$

Коефіцієнт  $g_1$  характеризує асиметрію закон розподілу ймовірності випадкового кута відносно напрямку,  $\theta = \mu_1$  і дорівнює нулеві для симетричних розподілів ймовірності.

**Ексцес.** Згладжуваність кривих розподілу ймовірності випадкових кутів в околі їх моди характеризує коефіцієнт ексцесу

$$g_2 = \frac{\alpha_2(\mu_1) - (1 - \nu)^4}{\nu^2}. \quad (7.63)$$

Коефіцієнт  $g_2$  порівнює криві всіх законів розподілів ймовірності випадкових кутів з намотаним гауссівським розподілом, для якого цей коефіцієнт дорівнює нулю (коефіцієнт ексцесу близький до нуля і для розподілу Мізеса, який апроксимує намотаний гауссівський).

**Результуюча довжина вектора.** Величину  $\rho = \rho_1 = |f_1|$  називатимемо *результуючою довжиною вектора*, який уявляє собою математичне сподівання випадкового вектора  $(\cos(\psi), \sin(\psi))$ , що відповідає характеристичній функції. Значення  $\rho$  використовується для характеристики розкиду значень випадкового фазового зсуву відносно певного значення  $\nu$ .

**Кругове стандартне відхилення.** Характеристична функція (7.20) дозволяє встановити зв'язок між дисперсією  $\sigma$  випадкової величини і круговою дисперсією випадкового фазового зсуву  $\nu$  для намотаного гауссівського розподілу. Дійсно, для  $n = 1$  маємо  $\exp(-0,5\sigma^2) = \rho_1 = 1 - \nu$ , звідки отримуємо

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1 - \nu)}, \quad \sigma \in [0, \infty). \quad (7.64)$$

Значення  $\sigma$  також можна використати як міру розсіювання випадкових кутів (в певному сенсі вона нагадує середньоквадратичне відхилення і, як правило виражається в радіанах, а не у відносних одиницях довжини вектора, що має місце для  $\nu$ ). Ця величина дістала назву *кругового стандартного відхилення* [7.12].

Для кращого розуміння особливостей статистичної обробки результатів фазових вимірювань проведемо порівняльний аналіз властивостей випадкових величин і випадкових кутів та їх ймовірнісних мір. Основні результати аналізу зведено в табл. 7.2.

**Таблиця 7.2 Означення та основні статистичні характеристики випадкових величин і випадкових кутів**

Характеристика	Випадкова величина	Випадковий кут
1	2	3
Випадкові величина, кут	<p>Дійсною випадковою величиною називається функція <math>\xi(\omega)</math> з областю визначення <math>\Omega = \{\omega\}</math> та областю значень <math>X \subset R</math> така, що для довільного <math>x \in X</math> множина тих <math>\omega \in \Omega</math>, для яких <math>\xi(\omega) &lt; x</math> є подією <math>A</math> з множини випадкових подій <math>\mathfrak{Z}</math>, яка задана на фіксованому ймовірнісному просторі <math>(\Omega, \mathfrak{Z}, P)</math>.</p>	<p>Дійсним випадковим кутом є функція <math>\Psi(\omega)</math> з областю визначення <math>\Omega = \{\omega\}</math> та областю значень <math>\Theta \subset R</math> така, що для довільного <math>\theta \in \Theta</math> дробова частина кута</p> $\psi(\omega) = \Psi(\omega) - \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right] 2\pi \equiv \Psi(\omega) \bmod 2\pi,$ <p>є випадковою величиною.</p>
Функція розподілу ймовірностей	<p>Функція розподілу ймовірностей <math>F(x)</math>, <math>x \in R</math>, випадкової величини <math>\xi(\omega)</math> визначається виразом</p> $F(x) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\},$ $-\infty < x < \infty.$ <p><b>Властивості <math>F(x)</math>:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) монотонність (якщо <math>x_1 &lt; x_2</math>, то <math>F(x_1) \leq F(x_2)</math>);</li> <li>2) неперервність зліва (<math>\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0)</math>);</li> </ol> $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0;$ $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$	<p>Функція розподілу ймовірностей <math>F(\theta)</math> випадкового кута <math>\Psi(\omega)</math> визначається як</p> $F(\theta) = G(\theta') + \left[ \frac{\theta}{2\pi} \right] + C, \quad -\infty < \theta < \infty, \quad 0 \leq \theta' < 2\pi,$ <p>де <math>G(\theta')</math> – функція розподілу випадкової величини <math>\psi(\omega)</math>, <math>\theta'</math> – дробова частина <math>\theta</math>, <math>C</math> – довільна постійна.</p> <p><b>Властивості <math>F(\theta)</math>:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) монотонність (якщо <math>\theta_1 &lt; \theta_2</math>), то <math>F(\theta_1) \leq F(\theta_2)</math>);</li> <li>2) <math>G(\theta')</math> неперервна справа (<math>\lim_{\theta' \downarrow \theta_0} G(\theta') = G(\theta_0)</math>), тому <math>G(2\pi) = 1</math>;</li> <li>3) <math>F(\theta + 2\pi n) - F(\theta) = n</math>; <math>n = 0, 1, 2, \dots</math>;</li> </ol> $F(-\infty) = \lim_{\theta \rightarrow -\infty} F(\theta) = 0; \quad F(\infty) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} F(\theta) \rightarrow \infty.$

1	2	3
Щільність розподілу ймовірностей	<p>Якщо існує така функція <math>p(x)</math>, що за будь-яких <math>x \in R</math> виконується співвідношення</p> $F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy,$ <p>то <math>p(x)</math> називається щільністю розподілу ймовірностей.</p> <p><b>Властивості <math>p(x)</math>:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>p(x) \geq 0</math>;</li> <li><math>\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1</math>;</li> <li>за будь-яких <math>a</math> і <math>b</math></li> </ol> $P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) dx.$	<p>Якщо існує така функція <math>p(\theta)</math>, <math>\theta \in [0, 2\pi)</math>, що за будь-яких <math>\theta</math> виконується співвідношення</p> $F(\theta_2) - F(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta, \quad (\theta_2 - \theta_1) \in [0, 2\pi)$ <p>то <math>p(\theta)</math> називається щільністю розподілу ймовірностей на колі.</p> <p><b>Властивості <math>p(\theta)</math>:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>p(\theta) \geq 0</math>; 2) <math>p(\theta + 2\pi) = p(\theta)</math>; 3) <math>\int_{\theta_1}^{\theta_1 + 2\pi} p(\theta) d\theta = 1</math>;</li> <li>для будь-яких <math>\theta_1, \theta_2</math></li> </ol> $P(\theta_1 < \Psi \leq \theta_2) = \begin{cases} 0, & \theta_2 \leq \theta_1, \\ F(\theta_2) - F(\theta_1), & \theta_1 < \theta_2 \leq \theta_1 + 2\pi, \\ 1, & \theta_2 > \theta_1 + 2\pi. \end{cases}$ <ol style="list-style-type: none"> <li><math>p(\theta)</math> періодична функція на <math>R</math> з періодом <math>2\pi</math>.</li> </ol>
Характеристична функція	<p>Характеристичною функцією випадкової величини <math>\xi(\omega)</math> називається математичне сподівання випадкової функції <math>\exp(iu\xi)</math>, тобто</p> $f(u) = Me^{iu\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) dF(x), \quad u \in (-\infty, \infty)$	<p>Характеристичною функцією випадкового кута <math>\Psi(\omega)</math> (послідовність тригонометричних моментів відносно нульового напрямку) називається математичне сподівання функції <math>\exp(j\rho\Psi)</math>:</p> $f_n = Me^{in\Psi} = \int_0^{2\pi} \exp(in\theta') G(\theta') = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \exp(in\theta) dF(\theta) = \rho_n \exp(i\mu_n),$ <p>де <math>k</math> – довільне ціле число; <math>n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots</math></p>
Квантілі законів розподілу	<p>Розв'язок рівняння <math>F(\alpha_\gamma) = \gamma</math>, де <math>\gamma</math> – задана ймовірність (<math>0 &lt; \gamma &lt; 1</math>) відносно <math>\alpha_\gamma \in (-\infty, \infty)</math> називається квантилем розподілу <math>F(x)</math> рівня <math>\gamma</math>, де</p> $\gamma = \int_{-\infty}^{\alpha_\gamma} p(x) dx.$	<p>Розв'язок рівняння <math>G(\theta'_\gamma) = \gamma</math>, де <math>\gamma</math> – задана ймовірність (<math>0 &lt; \gamma &lt; 1</math>) відносно <math>\theta'_\gamma \in [0, 2\pi)</math> називається квантилем розподілу <math>F(\theta)</math> рівня <math>\gamma</math>, де</p> $\gamma = \int_0^{\theta'_\gamma} p(\theta) d\theta$
Перший початковий момент	<p>Математичним сподіванням випадкової величини <math>\xi(\omega)</math> з функцією розподілу <math>F(x)</math> називається число, визначене інтегралом Стілтьєса</p> $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$	<p>Круговим середнім значенням випадкового кута <math>\Psi(\omega)</math> з функцією розподілу <math>G(\theta')</math>, для якого <math>f_1 = Me^{i\Psi} \neq 0</math>, називається кут</p> $\mu_1 = \text{Arg} f_1.$
Модуль тригон. моменту $\tau_1$	-	<p>Результуючою довжиною вектора, який являє собою математичне сподівання випадкового вектора <math>(\cos \Psi, \sin \Psi)</math>, є величина <math>\rho =  f_1 </math>.</p>

1	2	3
Розкид значень випадкової величини і	Дисперсією випадкової величини $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$ називається математичне сподівання квадрата відхилення значення $\xi(\omega)$ від її математичного сподівання $M\xi$ : $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF(x).$	Круговою дисперсією випадкового кута $\Psi(\omega)$ з функцією розподілу $G(\theta')$ , називається величина $\nu = 1 - \rho = 1 -  f_1 ,$ яка характеризує відхилення значення випадкового кута від його середнього значення.
Нерівність Чебишева	$P\{ \xi - M\xi  \geq g\sqrt{D\xi}\} \leq \frac{1}{g^2}$	$P\left\{\left \sin \frac{\Psi - \mu_1}{2}\right  > \varepsilon\right\} < \frac{\nu}{2\varepsilon^2}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad 0 < \frac{\nu}{2\varepsilon^2} < 1.$
Медіана	Медіаною неперервного розподілу $F(x)$ випадкової величини $\xi(\omega)$ називається таке значення $x = Me$ , для якого однаково ймовірно, чи виявиться випадкова величина більшою чи меншою $Me$ , тобто $P(\xi < Me) = P(\xi > Me).$	Круговою медіаною неперервного розподілу на колі $G(\theta')$ випадкового кута $\psi(\omega)$ називається те значення кута $\mu_m$ , яке є одним з рішень рівняння $Q(\mu_m) = F(\mu_m + \pi) - F(\mu_m) - 0,5 = \int_{\mu_m}^{\mu_m + \pi} p(\theta) d\theta - 0,5 = 0,$ і для якого значення $Q(\mu_m - 0,5\pi)$ максимальне.
Мода	Модю називається те значення $Mod$ випадкової величини $\xi(\omega)$ , для якого щільність розподілу ймовірності $p(x = Mod)$ має максимальне значення.	Модю називається те значення $Mod$ випадкового кута $\psi(\omega)$ , для якого щільність розподілу ймовірності $p(\theta' = Mod)$ має максимальне значення.

### 7.5. Випадковий вектор з незалежними гауссівськими компонентами в полярній системі координат

Продовжимо дослідження більш складних статистичних моделей випадкових кутів. Наведемо результати аналізу двовимірного вектора випадкових кутів

$$\zeta_2(\omega) = (\xi(\omega), \eta(\omega)), \omega \in \Omega$$

на площині  $xOy$ , базуючись на результатах роботи [7.11].

На площині  $xOy$  з декартовою системою координат  $(x, y)$  заданий випадковий вектор  $\zeta_2(\omega)$  з випадковими координатами  $(\xi(\omega), \eta(\omega))$ . Випадковий вектор  $\zeta_2(\omega)$  має відповідно координати  $x(\omega) = \{0, \xi(\omega)\}$  і  $y(\omega) = \{0, \eta(\omega)\}$ . Застосувавши до випадкових величин  $(\xi(\omega), \eta(\omega))$  нелінійні перетворення виду

$$|\zeta_2(\omega)| = \sqrt{\xi^2(\omega) + \eta^2(\omega)}, \quad \omega \in \Omega; \quad (7.65)$$

$$\text{Arg } \zeta_2(\omega) = \psi(\omega) = \text{arctg} \frac{\eta(\omega)}{\xi(\omega)} + \frac{\pi}{2} \{2 - \text{sign} [\eta(\omega)](1 - \text{sign} [\xi(\omega)])\}, \quad 0 \leq \psi < 2\pi \quad (7.66)$$

переходимо від декартової системи координат  $(x, y)$  до системи полярних координат  $(\rho, \theta)$ , в якій випадковий вектор  $\zeta_2(\omega)$  характеризується модулем  $|\zeta(\omega)|$  та аргументом  $\psi(\omega)$ . При оберненому перетворенні маємо

$$\begin{aligned}\xi(\omega) &= |\zeta_2(\omega)| \cos \psi(\omega); \\ \eta(\omega) &= |\zeta_2(\omega)| \sin \psi(\omega).\end{aligned}\tag{7.67}$$

Розглянемо наступну задачу. Нехай задана двовимірна функція щільності розподілу ймовірностей випадкових декартових координат  $p_{2,д}(x, y)$  і необхідно визначити сумісну функцію щільності розподілу ймовірностей полярних координат  $p_{2,п}(\rho, \theta)$ . Оскільки якобіан перетворення (7.67) від змінних  $x, y$  до змінних  $\rho, \theta$  має вигляд

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho,\tag{7.68}$$

то маємо

$$p_{2,п}(\rho, \theta) = \rho p_{2,д}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \quad \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi).\tag{7.69}$$

Для незалежних  $\xi(\omega)$  та  $\eta(\omega)$  отримуємо

$$p_{2,п}(\rho, \theta) = \rho p_{\xi}(\rho \cos \theta) p_{\eta}(\rho \sin \theta).\tag{7.70}$$

З виразу (7.70) можна визначити одновимірні функції щільності розподілу ймовірностей випадкових модуля  $|\zeta_n(\omega)|$  і аргументу  $\psi(\omega)$  випадкового вектора  $\zeta_2(\omega)$

$$p_{|\zeta|}(\rho) = \rho \int_0^{2\pi} p_{2,д}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta, \quad \rho > 0;\tag{7.71}$$

$$p_{\psi}(\theta) = \int_0^{\infty} \rho p_{2,д}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho, \quad \theta \in [0, 2\pi).\tag{7.72}$$

Формули (7.71) і (7.72) можна узагальнити на випадок  $n$ -вимірного вектора  $|\zeta_n(\omega)|$  (систему з  $n$  парами випадкових координат  $(x_j(\omega), y_j(\omega))$ ,  $j = \overline{1, n}$  в  $2n$ -вимірному просторі з координатами  $(x_1, y_1, \dots, x_j, y_j, \dots, x_n, y_n)$ ), який характеризується  $2n$ -вимірною функцією щільності розподілу ймовірностей  $p_{2n,д}(x_1, y_1, \dots, x_j, y_j, \dots, x_n, y_n)$ . Перехід до модулів і аргументів  $n$ -вимірного вектора  $\zeta_n(\omega)$  в системі координат  $(\rho_1, \theta_1, \dots, \rho_j, \theta_j, \dots, \rho_n, \theta_n)$  відбувається перетворенням виду (7.67) відповідних координат

$$\begin{aligned}\xi_j(\omega) &= \zeta_j(\omega) \cos \psi_j(\omega), \\ \eta_j(\omega) &= |\zeta_j(\omega)| \sin \psi_j(\omega), \quad j = \overline{1, n},\end{aligned}\tag{7.73}$$

де  $\xi_j(\omega), \eta_j(\omega)$  – проекції  $n$ -вимірного вектора  $\zeta_n(\omega)$  на осі  $Ox_j, Oy_j$ ;  $\zeta_j, \psi_j$  – відповідно модуль і аргумент проекції  $n$ -вимірного вектора  $\zeta_n(\omega)$  на площину  $x_j Oy_j$ .

Якобіан перетворення (7.73) має вигляд

$$\frac{\partial(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)}{\partial(\rho_1, \theta_1, \dots, \rho_n, \theta_n)} = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n.\tag{7.74}$$

Перехід від  $2n$ -вимірної функції щільності розподілу ймовірностей випадкових декартових координат  $n$ -вимірного вектора  $\zeta_n(\omega)$  до  $2n$ -вимірної функції щільності розподілу ймовірностей випадкових полярних координат – модулів і аргументів, виконується за формулою

$$\begin{aligned}p_{2n, \Pi}(\rho_1, \theta_1, \dots, \rho_n, \theta_n) &= \rho_1 \dots \rho_n p_{2n, \text{Д}}(\rho_1 \cos \theta_1, \rho_1 \sin \theta_1, \dots, \rho_n \cos \theta_n, \rho_n \sin \theta_n), \\ \rho_j &> 0, \quad \theta_j \in [0, 2\pi), \quad j = \overline{1, n}.\end{aligned}\tag{7.75}$$

З виразу (7.75) можна отримати  $n$ -вимірні функції щільності розподілу ймовірностей модулів і фаз випадкових  $n$ -вимірних векторів:

$$p_n(\rho_1, \dots, \rho_n) = \rho_1 \dots \rho_n \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} p_{2n, \Pi}(\rho_1 \cos \theta_1, \dots, \rho_n \sin \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n, \quad \rho_j > 0;\tag{7.76}$$

$$p_n(\theta_1, \dots, \theta_n) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \rho_1 \dots \rho_n p_{2n, \Pi}(\rho_1 \cos \theta_1, \dots, \rho_n \sin \theta_n) d\rho_1 \dots d\rho_n, \quad \theta_j \in [0, 2\pi).\tag{7.77}$$

На практиці часто трапляються задачі вимірювань, в яких досліджуваний двовимірний випадковий вектор має незалежні координати, розподілені за гауссівськими законами з параметрами  $(a, \sigma)$  і  $(b, \sigma)$ , де  $a, b$  і  $\sigma$  – відповідні параметри розподілів. Розглянемо цей випадок детальніше.

**Розподіл ймовірності модуля випадкового вектора.** З урахуванням (7.70) маємо

$$p_{2, \Pi}(\rho, \theta) = \rho \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(\rho \cos \theta - a)^2 + (\rho \sin \theta - b)^2}{2\sigma^2}\right],\tag{7.78}$$

що дозволяє знайти одновимірні функції щільності розподілу ймовірності модуля і аргументу випадкового вектора  $\zeta_2(\omega)$ . Для функції щільності розподілу ймовірності модуля випадкового вектора  $|\zeta_2(\omega)|$  маємо



$$p_{|\zeta_2|}(\rho) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{\rho^2 + a^2 + b^2}{2\sigma^2}\right] \times \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{\rho\sqrt{a^2 + b^2}}{\sigma^2} \cos(\theta - \theta_0)\right] d\theta, \quad \rho > 0, \quad (7.79)$$

де

$$\theta_0 = \arctg \frac{b}{a} + \frac{\pi}{2} \{2 - \text{sign}(b)[1 - \text{sign}(a)]\}. \quad (7.80)$$

Інтеграл (7.79) шляхом заміни  $u = \theta - \theta_0$ ,  $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$  зводиться до модифікованої функції Бесселя першого роду нульового порядку від аргументу  $\alpha\rho/\sigma^2$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_0}^{2\pi - \theta_0} \exp\left[-i \frac{i\alpha\rho}{\sigma^2} \cos u\right] du = I_0\left(\frac{\alpha\rho}{\sigma^2}\right), \quad (7.81)$$

де  $I_0(\cdot)$  – модифіковані функції Бесселя першого роду нульового порядку.

З урахуванням (7.81) щільність розподілу ймовірності (7.79) набуває вигляду

$$p_\zeta(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\rho^2 + \alpha^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{\alpha\rho}{\sigma^2}\right). \quad (7.82)$$

Щільність розподілу ймовірностей (7.82) називається узагальненим розподілом Релея, який дозволяє оцінити ймовірність перебування модуля випадкового вектора, координати якого розподілені за гауссівським законом, в заданому інтервалі значень. Графіки щільності ймовірності узагальненого розподілу Релея для різних значень параметрів  $\alpha/\sigma$  показано на рис. 7.10.

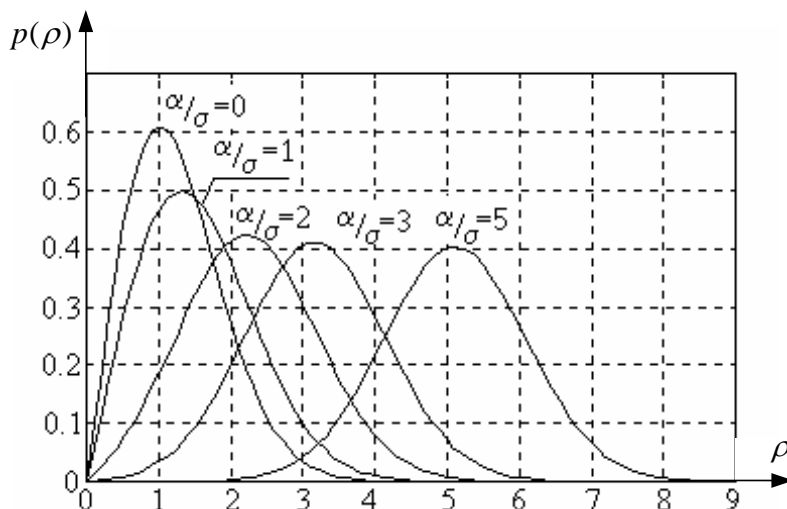


Рис. 7.10. Графіки щільності розподілу ймовірності узагальненого розподілу Релея для різних значень  $\alpha/\sigma$

З наведених графіків видно, що зі збільшенням відношення  $\alpha/\sigma$  щільність розподілу ймовірності узагальненого розподілу Релея наближається до щільності розподілу ймовірності гауссівського розподілу.

Наведемо початкові моменти випадкових величин, які розподілені за узагальненим розподілом ймовірностей Релея:

$$\mathbf{M}\zeta_2(\omega) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left( \frac{\alpha^2}{4\sigma^2} \right) + \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} I_1 \left( \frac{\alpha^2}{4\sigma^2} \right) \right] \exp \left( -\frac{\alpha^2}{4\sigma^2} \right); \quad (7.83)$$

$$\mathbf{M}\zeta_2^2(\omega) = 2\sigma^2 + \alpha^2; \quad (7.84)$$

$$\mathbf{M}\zeta_2^3(\omega) = 3\sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\sigma^2} + \frac{\alpha^4}{6\sigma^4} \right) I_0 \left( \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \right) + \left( \frac{2\alpha^2}{3\sigma^2} + \frac{\alpha^4}{6\sigma^4} \right) I_1 \left( \frac{\alpha^2}{4\sigma^2} \right) \right] \exp \left( -\frac{\alpha^2}{4\sigma^2} \right), \quad (7.85)$$

де  $I_0(\cdot)$ ,  $I_1(\cdot)$  – модифіковані функції Бесселя першого роду відповідно нульового та першого порядку.

Розподіл (7.82) асиметричний. Ступінь асиметрії цього закону характеризує безрозмірний коефіцієнт асиметрії, який визначається за загальною формулою

$$k = \frac{\mathbf{M}(\zeta - \mathbf{M}\zeta)^3}{\sqrt{(\mathbf{M}(\zeta - \mathbf{M}\zeta)^2)^3}} = \frac{\mathbf{M}\zeta^3 - 3\mathbf{M}\zeta\mathbf{M}\zeta^2 + 2(\mathbf{M}\zeta)^3}{\sqrt{(\mathbf{M}\zeta^2 - (\mathbf{M}\zeta)^2)^3}} = k. \quad (7.86)$$

Наведемо числові значення  $k$  для узагальненого розподілу Релея: якщо  $\alpha/\sigma=0$  то маємо  $k \approx 0,63$ , а якщо  $\alpha/\sigma=5$ , то  $k \approx 0,07$ . Цей приклад характеризує суттєві зміни значень коефіцієнта асиметрії цього розподілу для різних значень  $\alpha/\sigma$ .

**Розподіл ймовірності аргументу випадкового вектора.** Відповідно до загальної формули (7.72) одновимірна функція щільності розподілу ймовірностей аргументу вектора  $|\zeta_2(\omega)|$  з незалежними гауссівськими координатами визначається формулою

$$p_\Psi(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \rho \exp \left( -\frac{(\rho \cos \theta - a)^2 + (\rho \sin \theta - b)^2}{2\sigma^2} \right) d\rho, \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (7.87)$$

Виконавши необхідні перетворення і скориставшись введеними вище позначеннями величин  $\alpha$  і  $\theta_0$ , формула (7.87) має остаточний вигляд

$$p_\Psi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \exp \left( -\frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \right) + \frac{\alpha \cos(\theta - \theta_0)}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{\alpha^2 \sin^2(\theta - \theta_0)}{2\sigma^2} \right) \int_{-\alpha \cos(\theta - \theta_0)}^\infty \exp \left( -\frac{\rho^2}{2\sigma^2} \right) d\rho, \quad (7.88)$$

де  $(\theta - \theta_0) \in [0, 2\pi)$ .

Графіки функції  $p_{\Psi}(\theta)$  для різних значень параметрів  $\theta_0$  та  $\alpha/\sigma$  наведені на рис.7.11. Для нульових компонентів вектора  $\alpha=0$  і  $\theta_0=0$  розподіл  $p_{\Psi}(\theta)$  стає рівномірним зі щільністю  $p_{\Psi}=1/2\pi$ . Для  $\alpha>0$  розподіл  $p_{\Psi}(\theta)$  має максимум в точці  $\theta=\theta_0$ . Зміщення  $\theta_0$  приводить до зміщення максимуму розподілу. Зі збільшенням відношення  $\alpha/\sigma$  збільшується значення щільності розподілу ймовірностей для  $\theta=\theta_0$ , яке в цій точці дорівнює

$$p_{\Psi}(\theta=\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right)+\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2\pi}}F\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)\geq\frac{1}{2\pi}, \quad (7.89)$$

де  $F(x)$  – функція Лапласа,

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x\exp\left(-\frac{(u-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right)du=F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right). \quad (7.90)$$

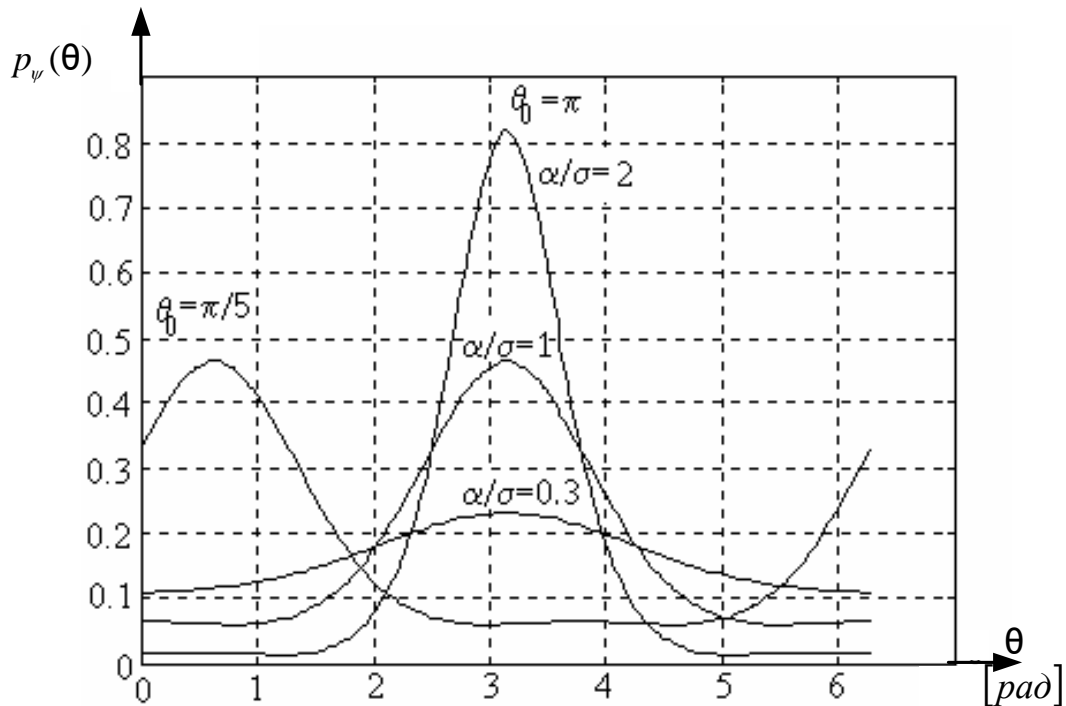


Рис. 7.11. Графіки щільності розподілу ймовірності  $p_{\Psi}(\theta)$  (7.88) аргументу випадкового вектора  $\zeta_2(\omega)$  з незалежними гауссівськими координатами

З наведених на рис. 7.11 графіків видно, що розподіл  $p_{\Psi}(\theta)$  для  $\theta_0 = \pi$  є парною функцією.

Для невеликих значень кутів  $(\theta - \theta_0) \ll 2\pi$  для розподілу  $p_{\Psi}(\theta)$  має місце наступне наближення

$$p_{\Psi}(\theta) \sim \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\alpha^2(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (7.91)$$

тобто має гауссівську щільність розподілу ймовірностей із середнім значенням  $\theta_0$  і дисперсією  $\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2$ .

На базі результатів комп'ютерного моделювання було показано, що розподіл  $p_{\Psi}(\theta)$  в широкому діапазоні значень  $\frac{\sigma}{\alpha} \in (0,04, \infty)$  рад задовільно апроксимується розподілом випадкових кутів Мізеса, для якого щільність ймовірності визначається формулою (7.22).

Цей розподіл порівняно з  $p_{\Psi}(\theta)$  має простішу аналітичну форму і, таким чином, дозволяє отримати оцінки для визначення його параметрів на основі використання більш простих формул для обчислень. Це обумовлює доцільність переходу до цього розподілу під час розгляду статистичних задач фазометрії. Ще одна корисна властивість розподілу  $p_M(\theta/\mu, k)$  полягає в тому, що найбільш правдоподібною оцінкою для теоретичного середнього напрямку  $\mu$  на колі є вибірковий круговий середній напрям.

Для апроксимації розподілу  $p_{\Psi}(\theta)$  розподілом  $p_M(\theta/\mu, k)$  необхідно покласти  $\theta_0 = \mu$ , а значення  $k$  вибрати з графіка на рис. 7.12 для заданих  $\alpha/\sigma$ .

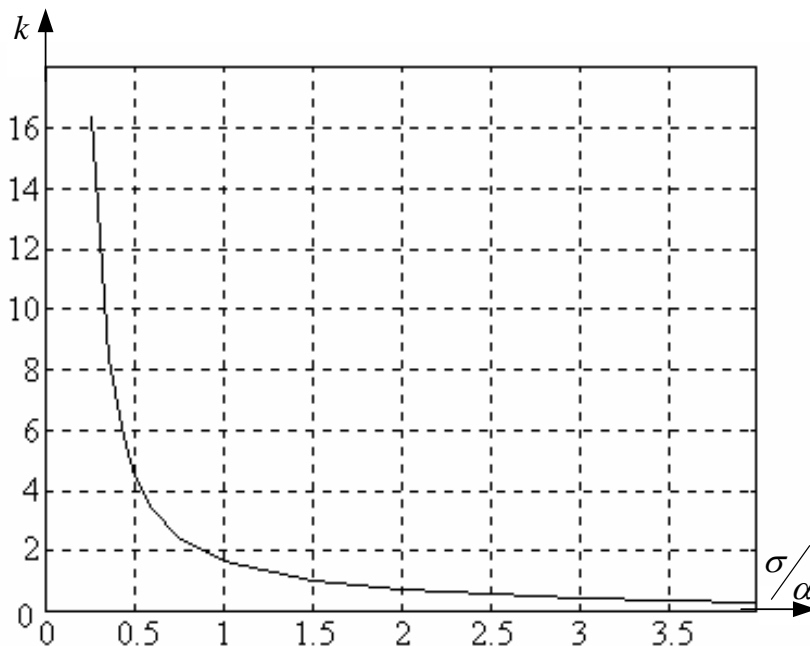


Рис. 7.12. Графік залежності  $k = f(\sigma, \alpha)$

Наближене представлення функції  $k = f(s)$ , де  $s = \frac{\alpha}{\sigma}$ , першими восьми членами степеневого ряду має вигляд

$$k(s) \approx 12,31 \cdot s^{-8} - 163,00 \cdot s^{-7} + 874,37 \cdot s^{-6} - 2480,22 \cdot s^{-5} + 4076,78 \cdot s^{-4} - 3997,31 \cdot s^{-3} + 2308,28 \cdot s^{-2} - 733,73s^{-1} + 104,20 \quad (7.92)$$

Приклади апроксимації функцій (7.88) функціями (7.28) для  $\theta_0 = \mu = 0,2\pi$  і різних значень  $k$  показано на рис. 7.13.

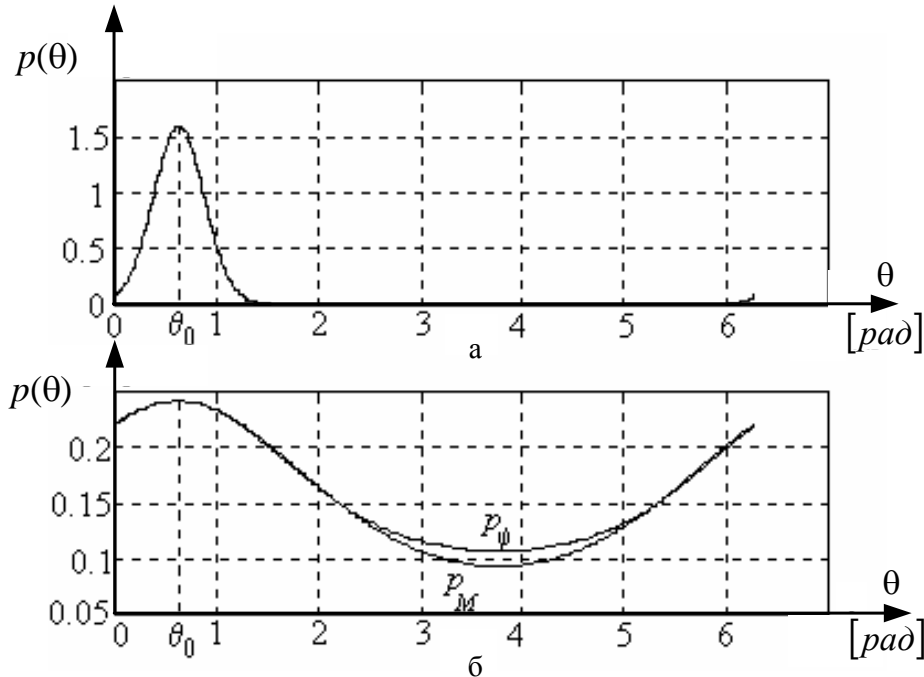


Рис. 7.13. Графіки щільностей розподілів ймовірності  $p_\psi$  та Мізеса  $p_M$  для  $\theta_0 = \mu = 0,2\pi$  і параметрів:  $a - \sigma/\alpha = 0,25$ ,  $k = 16,3$ ;  $b - \sigma/\alpha = 3$ ,  $k = 0,47$

Похибка апроксимації функцій  $p_\psi$  та  $p_M$  є симетричною відносно кута  $\theta_0$  і має найбільші значення в околі антимоди розподілів, тобто в околі значення  $\theta = (\theta_0 + \pi) \bmod 2\pi$ . Тому така апроксимація не приводить до зміщення оцінок  $\theta_0$ , а лише у незначній степені збільшує оцінку дисперсії кутів.

Для розподілених на колі випадкових кутів характеристики кругового середнього кута і кругової дисперсії можна визначити на базі використання характеристичної функції випадкового кута, як це показано у роботі [7.12].

## 7.6. Статистична модель різниці фазових характеристик випадкових вузькосмугових сигналів

Дослідження реальних фізичних процесів і полів потребує обробки сигналів складної структури. До таких сигналів належать вузькосмугові випадкові сигнали. Модель вузькосмугових сигналів є більш наближеною до реальних сигналів статистичної фазометрії і охоплює широке коло практичних задач. Проте існуючий науково-методичний апарат фазометрії не повною мірою відповідає вимогам до точності вимірювань фази таких сигналів, і особливо у випадку низьких співвідношень сигнал/завада. Крім того, спрощеність існуючих моделей фазових характеристик сигналів не дозволяє в повному обсязі виконати дослідження і аналіз фазовимірювальних систем в умовах дії завад.

Більш глибоке теоретичне осмислення випадкової природи фазових

характеристик сигналів статистичної фазометрії потребує розробки моделі, яка більшою мірою відображає складні реальні процеси. Наведемо результати досліджень ймовірнісної моделі різниці фазових характеристик випадкових вузькосмугових сигналів.

**Статистична модель фазових зсувів гармонічних сигналів.** Розглянемо дану задачу в наступній постановці для випадку дискретних вимірювань, як частинний випадок різниці фазових характеристик сигналів

*Постановка задачі.* Нехай на інтервалі спостереження  $[0, T_c]$  задано ґратку

$$S = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \quad (7.93)$$

де  $n$  – обсяг ґратки, множина елементів якої впорядкована і для неї виконується нерівність  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T_c$ .

У більшості випадків елементи ґратки  $S$  розміщені рівномірно і утворюють арифметичну прогресію  $t_j = t_1 + (j-1)\Delta t$ ,  $j = \overline{1, n}$ , де  $\Delta t$  – крок ґратки.

На ґратці  $S$  задано дві функції:

$$\begin{aligned} u_1(t_j) &= U_1 \cos(2\pi f t_j + \varphi), \quad t_k \in S, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \\ u_2(t_j) &= U_2 \cos(2\pi f t_j) \end{aligned} \quad (7.94)$$

які є зображенням відповідних аналогових сигналів з дискретним аргументом (8.93). Множина  $S$  є областю визначення функцій (7.94), а множина всіх значень функцій  $\{u_1(t_j), u_2(t_j), j = \overline{1, n}\}$  – областю їх значень. Функції (7.94) належать до лінійного нормованого функціонального простору  $L_n$ , тобто  $u_1(t_j), u_2(t_j) \in L_n$ .

Для елементів простору  $L_n$  виконується операція скалярного добутку функцій

$$(u_m, u_l) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_m(t_k) u_l(t_k) h(t_k), \quad (7.95)$$

де  $m, l$  – номери елементів простору  $L_n$ ;  $h(t_j)$  – вагова функція ( $h(t_j) \geq 0$ ). Також задається норма кожного елемента простору  $L_n$ :

$$\|u_m\| = \sqrt{(u_m, u_m)}. \quad (7.96)$$

У просторі  $L_n$  функцій дійсного аргументу існує оператор зсуву

$$A_{\Delta t} u_m(t_j) = u_m(t_j + \Delta t) = u_m(t_{j+1}). \quad (7.97)$$

Послідовно застосовуючи оператор зсуву (7.97)  $q$  разів, маємо

$$A_{\Delta t} \dots A_{\Delta t} u_m(t_j) = A_{q\Delta t} u_m(t_j) = u_m(t_j + q\Delta t) = u_m(t_j + \tau), \quad (7.98)$$

(q)

де  $\{\tau = q\Delta t, q \in \overline{0, \infty}\}$  – довільний зсув сигналу в часі на заданій дискретній множині.

Створення квадратурних сигналів потребує виконання умови:  $\frac{T}{\Delta t} = 4s$ , де  $s \in N$ . В цьому разі синусоїдні послідовності  $u_1(t_j)$ ,  $u_2(t_k)$  є періодичними з періодом  $4s\Delta t$  при всіх  $t_j \in T$ , наприклад,  $u_{1,2}(t_j) = u_{1,2}(t_j + 4\Delta t)$  при  $s = 1$ .

Розглянемо нормований скалярний добуток сигналів (7.94) із ваговою функцією

$$h(t_j) = g(t_j - a)g(b - t_j) = \begin{cases} 1, & t_j \in [a, b), \quad a < b, \quad a \in [0, T_c - b + a), \\ 0, & t_j \notin [a, b), \quad b \in (b - a, T_c]; \end{cases} \quad (7.99)$$

де  $g(t_j)$  – одинична східчаста функція:

$$g(t_j) = \begin{cases} 0, & t_j < 0; \\ 1, & t_j \geq 0. \end{cases} \quad (7.100)$$

Функції (7.100) для неперервного аргументу відома як функція Хевісайда. Маємо:

$$C = \frac{(u_1(t_j), u_2(t_j))}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_k)\|} = \frac{U_1 U_2}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_j)\|} \sum_{j=1}^n \cos(2\pi f t_j + \varphi) \times \\ \times \cos 2\pi f t_j g(t_j - a)g(b - t_j) = \cos \varphi, \quad (7.101)$$

де норми функцій  $u_1(t_j)$ ,  $u_2(t_j)$  визначаються як

$$\|u_1(t_j)\| = \sqrt{\frac{\Delta t}{b-a} (u_1(t_j), u_1(t_j))} = \frac{U_1}{\sqrt{2}}; \quad \|u_2(t_j)\| = \sqrt{\frac{\Delta t}{b-a} (u_2(t_j), u_2(t_j))} = \frac{U_2}{\sqrt{2}}. \quad (7.102)$$

Застосуємо до функції  $u_2(t_j)$  оператор зсуву  $\mathbf{A}_{\Delta t}$  і розглянемо нормований скалярний добуток цієї функції з  $u_1(t_j)$ :

$$S = \frac{(u_1(t_j), u_2(t_j + 3g\Delta t))}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_j)\|} = \frac{U_1 U_2}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_j)\|} \sum_{j=1}^n \cos(2\pi f t_j + \varphi) \sin 2\pi f t_j g(t_j - a)g(b - t_j) = \sin \varphi. \quad (7.103)$$

Пару чисел  $C$  (7.101) і  $S$  (7.102) можна розглядати як координати одиничного вектора  $\mathbf{z}$ , що починається в точці  $O$  і описує одиничне коло в декартовій системі координат  $xOy$ .

За наявності шумів і завад, які мають місце під час проходження сигналів (7.94) через канали обробки (аналого-цифровий перетворювач, фільтри тощо), отримані за алгоритмами (7.101), (7.103) значення  $S_{\text{ш}}$ ,  $C_{\text{ш}}$  можуть відрізнитись від істинних

значень  $S, C$ , а побудовані на площині  $xOy$  з координатами  $(S_{\text{ш}}, C_{\text{ш}})$  точки в загальному випадку не належать одиничному колу, оскільки  $|\mathbf{z}_{\text{ш}}| = \sqrt{S_{\text{ш}}^2 + C_{\text{ш}}^2} \neq 1$ . Для зведення результатів експерименту до одиничного кола виконаємо нормування згідно з формулами

$$\hat{C} = \frac{C_{\text{ш}}}{\sqrt{C_{\text{ш}}^2 + S_{\text{ш}}^2}}; \quad \hat{S} = \frac{S_{\text{ш}}}{\sqrt{C_{\text{ш}}^2 + S_{\text{ш}}^2}}. \quad (7.104)$$

Отже, встановлено однозначну відповідність між положенням у просторі вектора  $\mathbf{z}_{\text{ш}}$  і фазовим зсувом  $\varphi$  між сигналами (7.94), що для зазначеного випадку дозволяє використовувати ймовірнісну модель випадкових кутів на площині.

Параметри сигналу  $u_1(t_j)$  визначають як:

$$\hat{\varphi} = \mathbf{L}[S_{\text{ш}}, C_{\text{ш}}] = \arctg \frac{S_{\text{ш}}}{C_{\text{ш}}} + \frac{\pi}{2} \{2 - [\text{sign}(S_{\text{ш}})] \cdot [1 + \text{sign}(C_{\text{ш}})]\}, \varphi \in [0, 2\pi), \quad (7.105)$$

$$U_1 = \sqrt{2} \|u_1(t_j)\|. \quad (7.106)$$

Щодо обґрунтування вибору законів розподілу ймовірності фазових зсувів сигналів можна зауважити наступне. У випадку формування фазоманіпульованих сигналів в системах передачі інформації фазові зсуви підпорядковуються ґратковому розподілу (7.20). Цей розподіл, по суті, є зосередженим у вершинах вписаного в одиничне коло правильного  $l$ -кутника.

Під час виконання фазових вимірювань, в яких реалізується перетворення лінійної випадкової величини  $\xi(\omega)$  з областю визначення  $x \in (-\infty, \infty)$  у випадковий фазовий зсув сигналів  $\psi(\omega) = K\xi(\omega) \pmod{2\pi}$  з областю визначення  $\theta \in [0, 2\pi)$ , де  $K$  – коефіцієнт перетворення, для ймовірнісного опису випадкових фазових зсувів доцільно застосовувати закони розподілів ймовірностей з сім'ї намотаних [7.1; 7.12], які відповідають даному перетворенню. Їх загальні властивості розглядалися в підрозділі 7.2. У багатьох випадках розподіл випадкових фазових зсувів задовільно апроксимується намотаним гауссівським розподілом ймовірності. Цим припущенням можна скористатися з огляду на той факт, що випадковий характер  $\psi(\omega)$  зумовлюється дією значної кількості незалежних дестабілізуючих факторів. Згідно з центральною граничною теоремою на колі [7.12] закон розподілу суми багатьох випадкових незалежних кутів прямує до намотаного гауссівського, який задовільно апроксимується розподілом Мізеса.

**Статистична модель різниці фазових характеристик випадкових вузькосмугових процесів.** Формування і передача інформаційного сигналу в фазових ІВС супроводжується впливом завад типу білого шуму. З урахуванням того, що вхідними ланцюгами ІВС є лінійні ланки з обмеженою смугою



пропускання  $\Delta f \ll f_0$ , можна вважати, що на вході ІВС разом з інформативним сигналом наявна завада у вигляді вузькосмугового випадкового процесу. В фазометрії [7.4; 7.14; 7.17], як правило, значення  $f_0$  відоме або може бути визначено як частота опорного, детермінованого сигналу. Вузькосмуговий стаціонарний дійсний випадковий процес можна навести у вигляді

$$\xi(\omega, t) = A_\xi(\omega, t) \cos \Phi_\xi(\omega, t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (7.107)$$

де  $A_\xi(\omega, t)$ ,  $\Phi_\xi(\omega, t)$  – відповідно амплітудна і фазова характеристики процесу  $\xi(\omega, t)$ .

Дослідимо ймовірнісну модель різниці фазових характеристик вузькосмугових процесів, використання якої відповідає реальним умовам проведення фазовимірювального експерименту. З цією метою розглянемо наступну задачу.

На скінченному інтервалі часу  $[0, T_{\tilde{n}}]$  досліджуються процеси

$$\begin{aligned} \eta(\omega, t) &= u(t) + \xi(\omega, t), \\ u_0(t) &= U_0 \cos(2\pi f_0 t), \quad t \in [0, T_c] \end{aligned} \quad (7.108)$$

де  $f_0$ ,  $T_c$  – частота та інтервал спостереження сигналу,

Процес  $\eta(\omega, t)$  є випадковим процесом і визначається як адитивна суміш інформаційного сигналу

$$u(t) = U \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = U_c \cos(2\pi f_0 t) - U_s \sin(2\pi f_0 t), \quad U > 0, \quad t \in T_c \quad (7.109)$$

та стаціонарного випадкового гауссівського процесу  $\xi(\omega, t)$  у виді (7.107) з характеристиками  $\mathbf{M}\xi(\omega, t) = 0$ , і  $\mathbf{D}\xi(\omega, t) = \sigma^2$ , який є відгуком вузькосмугової лінійної системи з резонансною частотою  $f_0$  на білий шум. У формулі (7.109)  $U_c, U_s$  – квадратурні компоненти сигналу,  $U_c = U \cos \varphi$ ,  $U_s = U \sin \varphi$ ,  $U = \sqrt{U_c^2 + U_s^2}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  – початкова фаза, пов'язана з  $U_c, U_s$  співвідношенням  $\varphi = \mathbf{L}[U_s, U_c]$ .

Випадковий процес  $\xi(\omega, t)$  належить до класу процесів другого порядку, тобто  $\mathbf{M}\xi^2(\omega, t) < \infty$ ,  $\forall t \in T_c$ , що дозволяє застосувати до нього перетворення Гільберта.

Випадковий процес  $\eta(\omega, t)$  має фазову характеристику  $\Phi_\eta(\omega, t)$ .

Необхідно побудувати ймовірнісну модель різниці фазових характеристик  $\Delta\varphi(\omega, t) \in [0, 2\pi)$  процесів (7.108) як  $\Delta\varphi(\omega, t) = [\Phi_\eta(\omega, t) - \Phi_0(t)] \bmod 2\pi$ , де  $\Phi_0(t) = 2\pi f_0 t$  – фаза опорного сигналу  $u_0(t)$ .

Дослідимо процес  $\eta(\omega, t)$ , який задано виразом (7.108). Випадкова

компонента  $\eta(\omega, t)$  – процес  $\xi(\omega, t)$ , визначається виразом (7.107), в якому функції  $A_\xi(\omega, t)$ ,  $\Phi_\xi(\omega, t)$  однозначно визначаються за допомогою перетворення Гільберта у відповідності з виразами (6.46), (6.47).

У співпадаючі моменти часу випадкові процеси  $\xi(\omega, t)$  та  $\xi_I(\omega, t)$  некорельовані, що впливає з аналізу їх скалярного добутку

$$\mathbf{M}\{\xi(\omega, t) \cdot \xi_H(\omega, t)\} = R_{\xi\xi_H}(0) = 0. \quad (7.110)$$

Оскільки процеси  $\xi(\omega, t)$  та  $\xi_H(\omega, t)$  за умови задачі є гауссівськими, то з їх некорельованості випливає і їх статистична незалежність.

У разі проходження процесу  $\xi(\omega, t)$  через вузькосмугову лінійну систему з центральною частотою  $f_0$  його фазову характеристику можна подати у виді

$$\Psi_\xi(\omega, t) = 2\pi f_0 t + \psi(\omega, t), \quad (7.111)$$

а сам процес  $\xi(\omega, t)$ :

$$\xi(\omega, t) = \xi_c(\omega, t) \cos(2\pi f_0 t) - \xi_s(\omega, t) \sin(2\pi f_0 t), \quad (7.112)$$

де  $\xi_c(\omega, t)$  і  $\xi_s(\omega, t)$  – дійсні незалежні стаціонарні гауссівські випадкові процеси з нульовими математичними сподіваннями і дисперсією  $\sigma^2$ :

$$\begin{aligned} \xi_c(\omega, t) &= A(\omega, t) \cos \varphi(\omega, t); \\ \xi_s(\omega, t) &= A(\omega, t) \sin \varphi(\omega, t). \end{aligned} \quad (7.113)$$

Таким чином, з урахуванням (7.109) і (7.111) вимірювальний процес має вигляд

$$\eta(\omega, t) = [U_c + \xi_c(\omega, t)] \cos(2\pi f_0 t) - [U_s + \xi_s(\omega, t)] \sin(2\pi f_0 t). \quad (7.114)$$

Побудуємо гільберт-образ випадкового процесу  $\eta(\omega, t)$

$$\eta_H(\omega, t) = [U_s + \xi_s(\omega, t)] \cos(2\pi f_0 t) + [U_c + \xi_c(\omega, t)] \sin(2\pi f_0 t). \quad (7.115)$$

Для здійснення переходу від випадкових процесів до випадкових величин розглянемо множини значень процесів (7.114), (7.115) у дискретні моменти часу  $t_j = jT$ ,  $j = \overline{0, T_c/T}$ , які можна визначити за характерними точками, наприклад, максимумами опорного гармонічного сигналу  $u_0(t)$ . З урахуванням того, що випадковий процес  $\xi(\omega, t)$  за умовами задачі є стаціонарним, то і його складові  $\xi_c(\omega, t)$  і  $\xi_s(\omega, t)$  також стаціонарні процеси. Тому вибіркові значення  $\xi_c(\omega, t_j)$  і  $\xi_s(\omega, t_j)$ , отримані у фіксовані моменти часу  $t_j$ , можна розглядати як випадкові величини. Тоді для моменту часу  $t_j$  маємо випадкову величину

$$\eta_j(\omega) = U_c + \xi_{c,j}(\omega); \quad \eta_{H,j}(\omega) = U_s + \xi_{s,j}(\omega). \quad (7.116)$$

Отримані у співпадаючі моменти часу пари миттєвих значень випадкових процесів  $\eta(\omega, t)$  і  $\eta_H(\omega, t)$  утворюють випадкові вектори  $\eta(\omega) = (\eta_j(\omega), \eta_{H,j}(\omega), j = \overline{0, T_c/T})$ , які відображаються на площині в декартовій системі координат  $xOy$  відрізками прямих ліній. Вектори починаються в центрі системи координат і закінчуються в точках з координатами  $(\eta_j(\omega), \eta_{H,j}(\omega))$ . На рис. 7.14 показано реалізацію  $\rho_j$  випадкового вектора  $\eta$  і позначено окіл радіуса  $3\sigma$ , якому з ймовірністю 0,997 належать всі точки з координатами  $(\eta_j(\omega), \eta_{H,j}(\omega))$  для початкової фази  $\varphi_j = \mathbf{L}[U_s, U_c]$ .

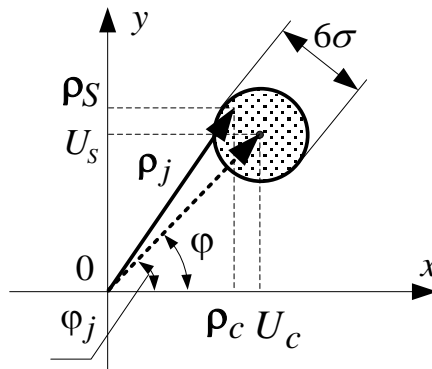


Рис. 7.14. Графічне зображення реалізації випадкового вектора  $\eta(\omega)$  на площині  $xOy$

Кут  $\varphi_j = \arg[\rho_j]$  визначає напрям вектора  $\rho_j$  у просторі  $xOy$ . Він відраховується від осі  $Oy$  в напрямі проти ходу годинникової стрілки (можна побудувати і симетричну систему підрахунку кутів за годинниковою стрілкою).

Якщо змінювати значення  $\varphi$  в інтервалі  $[0, 2\pi)$ , то кут  $\psi_j(\omega) = \arg[\eta_j(\omega)]$  прийматиме всі значення в інтервалі  $[0, 2\pi)$ , а  $3\sigma$ -окіл утворить кільце з внутрішнім радіусом  $U - 3\sigma$ , зовнішнім радіусом  $U + 3\sigma$  і середнім радіусом  $U$ , тобто кільце товщиною  $6\sigma$ , як зображено на рис. 7.15.

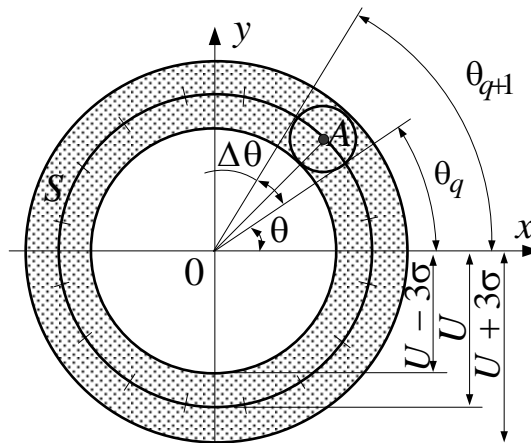


Рис. 7.15. Графічна побудова ймовірнісної моделі аргументу випадкового вектора

Середній радіус  $U$  має зміст математичного сподівання модуля

випадкового вектора  $\eta(\omega)$ . Площа кільця становить  $S = 12\pi U\sigma$ . Кінці випадкових векторів  $\eta_j(\omega)$  можуть займати довільне положення в межах площі кільця. Ці вектори характеризуються двома компонентами, отже, і ймовірнісну модель треба розглядати і для кутів, і для модулів випадкових векторів (або квадратурних компонент векторів).

Таким чином, визначаючи статистичну модель різниці фазових характеристик сигналів, необхідно розглядати сукупність двох випадкових величин – випадкових модуля і кута випадкового вектора.

**Статистична модель кута випадкового вектора.** Розділимо кільце на скінченну кількість  $l$  однакових за площею частин. З цією метою спочатку розділимо коло середнього радіуса  $R$  на скінченну кількість  $l$  рівних дуг точками кола  $\frac{\pi}{l}(2q+1)$ ,  $q = \overline{0, (l-1)}$ , почавши відлік  $q$  від осі  $Oy$  в напрямі проти годинникової стрілки (на рис. 7.15 літерою  $A$  позначено одну з точок розбиття). Оскільки вузькосмуговий випадковий процес (7.114) допускає діапазон зміни значень обвідної в межах  $\pm 3\sigma$ , то немає сенсу виконувати розбиття кола на дуги значно менші ніж  $6\sigma$ . Тому кількість інтервалів розбиття виберемо як найближче ціле до значення  $\frac{\pi R}{\sigma}$  число. Вказані точки утворюють скінченне розбиття  $D_\theta$  кола радіуса  $U$ .

Якщо з'єднати початок координат з точками розбиття кола, то утворяться центральні кути величиною  $\Delta\theta$ . Цим кутам відповідає розбиття кільця на  $l$  однакових частин площею  $s = 6\Delta\theta U\sigma$ .

Зафіксуємо елементарну подію  $\omega_q$ , при цьому має місце така сукупність умов: для довільних дійсних  $\theta_q$  та  $\theta_{q+1}$  таких, що  $0 \leq \theta_{q+1} - \theta_q < 2\pi$ , в інтервалі  $[\theta_q, \theta_{q+1})$  знайдеться число  $\theta$ , порівняне за модулем  $2\pi$  зі значенням  $\psi(\omega)$ . Це твердження можна записати як

$$\omega_q = \{E\psi(\omega) : \psi(\omega) \equiv \theta \pmod{2\pi}, \theta \in [\theta_q, \theta_{q+1})\}, \quad q = \overline{1, l-1}, \quad (7.117)$$

де  $E_{\psi(\omega)}$  - область значень  $\psi(\omega)$ .

Таким чином, континууму значень напрямів  $\arg[\eta(\omega)]$  в інтервалі  $[0, 2\pi)$  поставлено у відповідність скінченну множину елементарних подій  $\Omega = \{\omega_q, q = \overline{0, l-1}\}$ , яку отримано розбиттям  $D_\theta$  кільця на скінченне число  $l$  однакових його частин. Операції з усіма підмножинами  $\Omega$  утворюють алгебру  $F = \beta(D_\theta)$ .

Для завершення побудови моделі потрібно задати ймовірності  $P_q$  подій  $\omega_q$  з простору  $\Omega$ . З урахуванням циклічної природи кутів визначимо ймовірності таким чином

$$P_q = \begin{cases} P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\} & \text{для } \theta_{q+1} > \theta_q, \\ P\{0 \leq \psi < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\} + P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi < 2\pi\} & \text{для } \theta_{q+1} < \theta_q. \end{cases} \quad (7.118)$$

Для ймовірностей (7.118) виконується умова нормування

$$\sum_{q=0}^{l-1} P_q = 1. \quad (7.119)$$

Ймовірність довільної події  $B \in \mathbf{F}$  у загальному вигляді визначається як

$$P(B) = \sum_{\{i: \omega_q \in B\}} P(\omega_q). \quad (7.120)$$

Для обчислення ймовірностей (7.118) необхідно обґрунтувати вибір функції, що породжує ймовірнісну міру. Якщо щільність розподілу ймовірності випадкових кутів  $p(\theta)$  задано, ймовірність (7.118) обраховується за формулами (7.14), (7.151).

Ймовірнісний простір  $\{\Omega, \mathbf{F}, P\}$ , де  $P = P(B), B \in \mathbf{F}$  – ймовірність події  $B$ , задає область визначення моделі кутових спостережень сигналів під час статистичного вимірювального експерименту.

На множині  $\Omega$  побудуємо ймовірнісну міру  $s(\omega_q)$ , яка дорівнює довжині дуги середнього радіуса –  $s(\omega_q) = \frac{2\pi}{l} qU$ ,  $q = \overline{1, (l-1)}$ . Отже,  $s(\omega_q)$ ,  $q = \overline{0, (l-1)}$  є функцією від розбиття  $D_\theta$ . Таким чином, множина подій  $\Omega$  відображається на числову множину  $x(\omega) = \{s(\omega_q), q = \overline{0, (l-1)}\}$ ,  $x(\omega) \in X$ . Підмножини  $x(X)$  утворюють алгебру  $\mathbf{B}$ .

Для обчислення ймовірності  $P(A \in \mathbf{B})$  довільних подій  $A$  необхідно обґрунтувати вибір щільності розподілу кутів. Оскільки випадковий вектор  $\eta(\omega)$  розглядається як вектор з незалежними гауссівськими квадратурними компонентами, розподіл фази такого вектора має щільність розподілу ймовірності (7.88) [7.11], і який задовільно апроксимується намотаним гауссівським законом розподілу ймовірності або розподілом Мізеса (7.28).

Розглянемо ймовірності  $P(A \in \mathbf{B})$  довільних подій  $A$  (рис. 7.16) для розподілу щільності ймовірності Мізеса  $p_M\left(\frac{\theta}{\varphi, k}\right)$ . Із формул (7.14), (7.15) неважко знайти ймовірності  $P(A \in \mathbf{B})$ . Наприклад, для розподілу Мізеса з параметрами  $k = 2$ ,  $\varphi = 0,5\pi$  ймовірностям  $P(2 \leq \psi < 3)$  та  $P(0 \leq \psi < 1) + P(6 < \psi < 2\pi)$  на рис. 7.16 відповідають площі заштрихованих частин графіка.

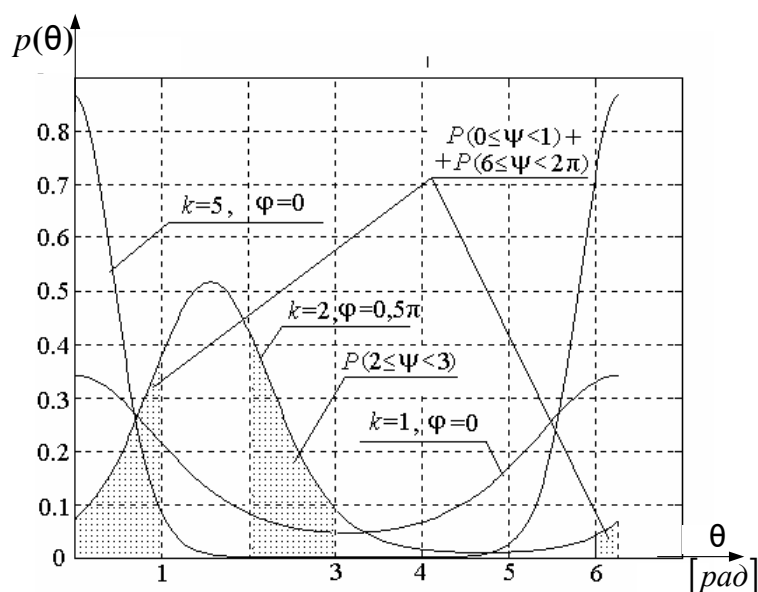


Рис. 7.16. Графіки щільності розподілу ймовірності Мізеса для різних значень параметрів  $k$  і  $\mu$

Отриманий ймовірнісний простір  $\{X, B, P_\Psi\}$ , де  $P_\Psi = \{P(A), A \in B\}$ , визначає область значень випадкового кута  $\psi(\omega)$ .

**Ймовірнісна модель модуля випадкового вектора.** Усі випадкові вектори мають модулі, що належать інтервалу  $|\rho_j(\omega)| \in (U + 3\sigma, U - 3\sigma)$ , тобто закінчуються в площині кільця, зображеного на рис. 7.15. Побудуємо систему  $(m - 1)$  концентричних кіл з радіусами  $\rho_g = U + 3\sigma \left( \frac{2g}{m} - 1 \right)$ ,  $g = \overline{1, (m-1)}$ .

Суміжні кола разом з внутрішнім і зовнішнім колами утворюють систему  $m$  кругових кілець товщиною  $2\Delta\rho = \frac{6\sigma}{m}$  і середнім радіусом

$\rho_{g, \text{cp}} = U + 3\sigma \left( \frac{2g+1}{m} - 1 \right)$ ,  $g = \overline{1, (m-1)}$ . Два такі суміжні концентричні кола зображено на рис. 7.17.

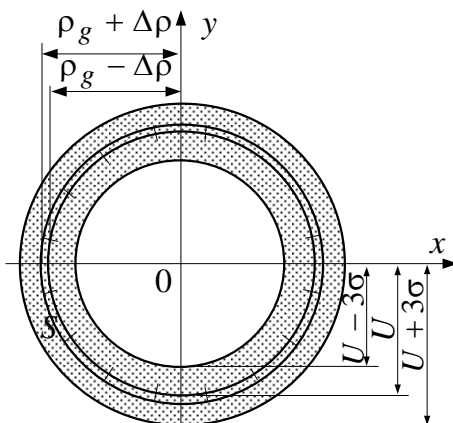


Рис.7.17. Розбиття кільця системою концентричних кіл

Виділимо елементарну подію  $\omega_g$ , яка настає внаслідок реалізації такої сукупності умов: для довільних дійсних  $\rho_g$  та  $\rho_{g+1}$  таких, що  $\rho_{g+1} \in [U - 3\sigma, U + 3\sigma)$ ,  $g = \overline{0, (m-1)}$ , в інтервалі  $[\rho_g, \rho_{g+1})$  знайдеться число  $\rho$ , яке дорівнює довжині вектора  $\eta(\omega)$ . Це твердження можна записати як

$$\omega_g = \{E\eta : \eta(\omega) = \rho, \rho \in [\rho_g, \rho_{g+1})\}, \quad g = \overline{0, (m-1)}. \quad (7.121)$$

Таким чином, континууму значень модулів  $|\eta(\omega)|$  в інтервалі  $[U - 3\sigma, U + 3\sigma)$  поставлено у відповідність скінченну множину елементарних подій  $\Omega_\rho = \{\omega_g, g = \overline{0, (m-1)}\}$ , яку отримано розбиттям  $D_\rho$  кільця товщиною  $b\sigma$  на скінченне число  $m$  кілець однакової товщини  $b\sigma/m$ . Усі можливі об'єднання  $\omega_g$  разом з порожньою множиною  $\square$  утворюють алгебру  $\mathfrak{F}_\rho = \beta(D_\rho)$ .

Для завершення побудови моделі лишилось задати ймовірності  $P_g$  подій  $\omega_g$  з простору  $\Omega_\rho$ . Ймовірності елементарних подій визначаються таким чином:

$$P_g = P[\rho_g \leq |\bar{\eta}(\omega)| < \rho_{g+1}], \quad g = \overline{0, (m-1)}. \quad (7.122)$$

Ймовірність довільної події  $B_\rho \in \mathfrak{F}_\rho$  у загальному вигляді визначається як

$$P(B) = \sum_{\{j: \omega_g \in B_\rho\}} P(\omega_g). \quad (7.123)$$

Для ймовірностей (7.122) виконується умова нормування (7.119).

Для обчислення ймовірностей (7.122) необхідно ввести функцію, яка породжує ймовірнісну міру. Якщо щільність ймовірності  $p_\rho(x)$  модуля випадкового вектора відома, ймовірність (7.122) обраховується як

$$P_\rho(\rho_g \leq |\bar{\eta}(\omega)| < \rho_{g+1}) = \int_{\rho_g}^{\rho_{g+1}} p_\rho(x) dx. \quad (7.124)$$

Ймовірнісний простір  $\{\Omega_\rho, \mathfrak{F}_\rho, P_\rho\}$ , де  $P_\rho = P(B_\rho)$ ,  $B_\rho \in \mathfrak{F}_\rho$  – ймовірність події  $B_\rho$ , задає область значень моделі для модуля випадкового вектора у статистичному вимірювальному експерименті.

На множині  $\Omega_\rho$  побудуємо ймовірнісну міру  $\rho(\omega_g)$ , яка визначається величиною середнього радіуса –  $\rho_{g, \text{ср}} = U + 3\sigma \left( \frac{2g+1}{m} - 1 \right)$ ,  $g = \overline{1, (m-1)}$ . Отже,  $\rho(\omega_g)$ ,  $g = \overline{0, (l-1)}$  є функцією розбиття  $D_\rho$ . Таким чином, множина подій  $\Omega_\rho$

відображається на числову множину  $x(\omega) = \{p(\omega_g), g = \overline{0, (l-1)}\}$ ,  $x(\omega) \in X$ .

Підмножини  $X$  утворюють алгебру  $B_\rho$ .

Для отримання ймовірності  $P(A \in B_\rho)$  довільних подій  $A$  необхідно обґрунтувати вибір щільності розподілу ймовірностей модулів випадкового вектора. Оскільки випадковий вектор  $\eta_j(\omega)$  розглядається як вектор з незалежними гауссівськими квадратурними компонентами, розподіл модуля вектора має щільність розподілу ймовірності узагальненого розподілу Релея (7.82).

Отримані ймовірнісні простори  $\{X, B, P_\phi\}$  та  $\{X, B_\rho, P_\rho\}$  визначають ймовірнісну модель для вимірюванні різниці фазових характеристик вузькосмугових випадкових процесів.

Таким чином, запропонована ймовірнісна модель являє собою сукупність двох випадкових величин – модуля і фази випадкового вектора, однозначно зв'язаних з амплітудною і фазовою характеристиками досліджуваного випадкового вузькосмугового процесу. Розроблені ймовірнісні моделі фазових характеристик сигналів є невід'ємною частиною теорії фазометрії, яку необхідно враховувати в теоретичних та практичних дослідженнях, якщо прагнути адекватно дослідити природу циклічних явищ і процесів. Наведена геометрична інтерпретація моделі допомагає обґрунтувати аналітичний опис моделі.

### 7.7. Кореляційний аналіз фазових характеристик циклічних випадкових процесів

Для вирішення задач фазометрії має практичний інтерес як визначення автокореляційної, так і визначення взаємокореляційної функцій фазових характеристик циклічних випадкових процесів [7.15]. Їх взаємокореляційна функція найчастіше визначається відносно фази гармонічного сигналу виду  $U_0 \cos(2\pi f_0 t)$  і має певний фізичний зміст – її максимум визначає затримку одного процесу відносно іншого в межах інтервалу часу  $[0, T_0)$ , де  $T_0 = f_0^{-1}$ .

Загальні питання вимірювання кореляційних функцій випадкових процесів та випадкових фазових характеристик сигналів розглядалися в [7.14]. Проте в цій роботі було зосереджено увагу здебільшого на спрощення апаратурної реалізації математичних операцій при обчисленні кореляційних функцій, загальні принципи побудови та структури кореляторів, в яких вибірккові значення фазових характеристик здебільшого формуються за допомогою фазово-часових перетворювачів.

В роботі [7.15] також розглянуто різні методи визначення кореляційних функцій випадкових процесів стосовно визначення кореляційних функцій



фазової характеристики. Серед них є наступні методи: перетворення Фур'є, апроксимації кореляційної функції сумою членів її розкладу у ряд, перемноження, підсумовування (віднімання) та піднесення у квадрат тощо. У більшості відомих кореляторів передбачається, що відліки фазових характеристик формуються за допомогою допоміжного перетворення типу "фаза – часовий інтервал", або за допомогою аналогових фазових детекторів. Під час виконання таких перетворень формується один відлік за час не менший  $T_0$ . Отже у статистичному сенсі оцінюється одне значення фазової характеристики за один період сигналу  $T_0$ .

Такий підхід потребує для реалізації багато часу і має суттєві обмеження при дослідженні, наприклад, нестационарних випадкових фазових характеристик сигналів.

Під час застосування перетворення Гільберта маємо можливість визначати за період досліджуваного сигналу не одне, а множину миттєвих значень фазової характеристики сигналу і за допомогою статистичної обробки отримати оцінки фазового зсуву, отже кореляційної (або взаємокореляційної, відносно фазової характеристики іншого процесу) характеристики. Такий підхід розглянуто в роботі [7.8],

Розглянемо особливості оцінки кореляційної функції випадкової фазової характеристики сигналу на основі застосування дискретного перетворення Гільберта.

**Постановка задачі.** Досліджується реалізація вузькосмугового випадкового процесу  $u(t)$ ,  $t \in T_c$  виду (6.42), де  $T_c$  - час спостереження. На інтервалі спостереження  $[0, T_c]$  задано еквідистантну ґратку часу

$$S = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \quad (7.125)$$

множина елементів якої впорядкована і для неї виконується нерівність  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T_c$ . Елементи ґратки  $S$  розміщені рівномірно і утворюють арифметичну прогресію  $t_j = t_1 + (j-1)T_d$ ,  $j \in [1, n]$ , де  $T_d$  - крок ґратки (період дискретизації).

На ґратці  $S$  задано послідовність значень реалізації процесу

$$u(t_j) = u[j] = U(t_j) \cos(2\pi f_0 t_j + \phi(t_j)), \quad t_j \in S, \quad \phi(t_j) \in [0, 2\pi), \quad (7.126)$$

яка є по суті вкладеним у  $u(t)$  сигналом з дискретним аргументом (7.125). Значення частоти  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  відоме. Значення  $\phi[j] = \phi(t_j)$  є вибірковими значеннями

стаціонарного випадкового процесу  $\psi(\omega, t) = \Psi(\omega, t) - 2\pi f_0 t$ . На інтервалі аналізу

$[0, T_c]$  маємо не менше  $k = \left\lceil \frac{T_c}{T_0} \right\rceil \gg 1$  періодів сигналу (7.126).

Необхідно визначити статистичну оцінку нормованої кореляційної функції початкової фази сигналу  $r_\varphi(\tau) \in [-1, 1]$  для затримки  $\tau \in (-0.5T_c, 0.5T_c)$ .

*Розв'язок.* Загальна ідея запропонованого підходу до розв'язання поставленого завдання полягає у визначенні кореляційної функції дробових частин випадкових фазових характеристик сигналу, однозначне визначення яких, за відомих значень процесу  $\xi(\omega, t)$ , здійснюється за допомогою перетворення Гільберта [7.6].

Розглянемо розв'язок задачі у загальному виді. Застосуємо до процесу  $u(t)$  перетворення Гільберта і отримаємо гільберт-образ вихідного випадкового процесу

$$\xi_H(\omega, t) = \mathbf{H}[\xi(\omega, t)], \quad (7.127)$$

Визначимо фазову характеристику випадкового процесу  $u(t)$  як

$$\Psi(\omega, t) = \mathbf{L}[\xi(\omega, t), \xi_H(\omega, t)] + \mathbf{K}[\xi(\omega, t), \xi_H(\omega, t)], \quad (7.128)$$

Маючи фазову характеристику (7.128) можна визначити оцінку центральної частоти процесу  $u(t)$  на інтервалі спостереження  $T_c$  як відношення набігу фази процесу за час  $T_c$  до величини  $2\pi T_c$

$$\hat{f}_0(\omega) = \frac{\Delta\Psi(\omega, t)}{2\pi T_c} = \frac{\Psi(\omega, t_{II} + T_c) - \Psi(\omega, t_{II})}{2\pi T_c}. \quad (7.129)$$

Випадковий процес  $\Psi(\omega, t)$ , описаний формулою (7.128), є нестационарним. Перехід від процесу  $\Psi(\omega, t)$  до стаціонарного процесу  $\psi(\omega, t)$  виконаємо наступним чином: виключимо з  $\Psi(\omega, t)$  залежну від часу лінійну складову  $\Delta\Psi(\omega, t) \frac{t}{T_c}$

$$\psi(\omega, t) = \Psi(\omega, t) - \Delta\Psi(\omega, t) \frac{t}{T_c}. \quad (7.130)$$

Після центрування випадкового стаціонарного процесу (7.130), отримуємо

$$\overset{\circ}{\psi}(\omega, t) = \psi(\omega, t) - \mathbf{M}\psi(\omega, t), \quad (7.131)$$

Тепер визначимо нормовану автокореляційну функцію процесу (7.131) як

$$r_\varphi(\tau) = \frac{\mathbf{M} \left[ \overset{\circ}{\psi}(\omega, t) \overset{\circ}{\psi}(\omega, t + \tau) \right]}{\mathbf{D} \left[ \overset{\circ}{\psi}(\omega, t) \right]}, \quad (7.132)$$

Застосуємо вказаний підхід до реалізації випадкового процесу  $u[j]$  (7.126),

вважаючи, що для  $\overset{\circ}{\psi}(\omega, t)$  має місце ергодична гіпотеза відносно перших двох моментних функцій. За викладеною в п.6.2 методикою застосуємо до вибірки

(7.126) дискретне перетворення Гільберта, і визначивши гільберт-образ  $u_H[j]$  обчислимо дискретну фазову характеристику вибірки та її середню частоту

$$\Phi[j] = \mathbf{L}[u[j], u_H[j]] + \mathbf{K}[u[j], u_H[j]]. \quad (7.133)$$

$$\hat{f} = \frac{\Phi[n] - \Phi[1]}{2\pi T_c}. \quad (7.134)$$

Використовуючи формули (7.130), (7.131) вилучимо лінійну складову фазової характеристики і отримаємо миттєві значення початкової фази, після чого виконаємо їх центрування

$$\phi[j] = \Phi[j] - 2\pi\hat{f}T_d, \quad (7.135)$$

$$\phi^{\circ}[j] = \phi[j] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \phi[j]. \quad (7.136)$$

Визначення автокореляційної функції безпосередньо за формулою (7.132) має певні труднощі. В багатьох випадках [7.15], застосовуючи гіпотезу про ергодичність вибірки  $\phi^{\circ}[j]$  і довівши ергодичність випадкового процесу  $\psi(\omega, t)$ , можна значно спростити процедуру визначення статистичних оцінок. В цьому випадку оцінки автокореляційної та нормованої автокореляційної функцій випадкової початкової фази можна визначити за однією реалізацією випадкового процесу згідно з відомими формулами

$$R_{\phi}(l) = \frac{1}{n-l} \sum_{j=1}^{n-l} \phi^{\circ}[j] \phi^{\circ}[j+l-1], \quad l = 1, 2, \dots, n/2, \quad (7.137)$$

$$r_{\phi}(l) = (n-1) \frac{R_{\phi}(l)}{\sum_{j=1}^n \left( \phi^{\circ}[j] \right)^2}. \quad (7.138)$$

Точність статистичних оцінок кореляційної функції залежить від об'єму  $n$  аналізованої вибірки  $\phi^{\circ}[j]$ . Використання дискретного перетворення Гільберта дозволяє сформулювати декілька статистично незалежних відліків фази сигналу за його період, за рахунок чого можна значно скоротити час аналізу з одночасним збереженням точності оцінок кореляційної функції.

Розглянута методика використана в наступному прикладі визначення кореляційної функції адитивної суміші гармонічного сигналу та гауссівської завади.

*Приклад 7.1.* Сформуємо вибіркові значення адитивної суміші гармонічного сигналу та гауссівської завади у відповідності з виразом

$$u[j] = U \cos(2\pi f T_d j + \varphi_{\Pi}) + \beta y[j], \quad (7.139)$$

де  $u[j]$  - вибіркові значення реалізації гауссівської завади з нульовим математичним сподіванням та середньоквадратичним відхиленням  $\sigma = 1$  В,  $\beta$  - дійсний коефіцієнт,  $\beta > 0$ . Задамо наступні значення параметрів:  $U = 1$  В,  $f = 100$  Гц,  $T_d = 10^{-4}$  с,  $\varphi_{\Pi} = 0.5\pi$ ,  $j = \overline{1, 901}$ ,  $T_c = 0.09$  с,  $\beta = 0.3$ . Відношення сигнал завада для цього випадку дорівнює  $\chi = \frac{U^2}{\beta^2 \sigma^2} = 11, (1)$ . На інтервалі

аналізу укладається  $k = 9$  періодів гармонічного сигналу частотою 100 Гц.

На рис. 7.18,а представлені графіки послідовності розрахованого за формулою (7.139) вхідного сигналу (крива 1) і його Гільберт-образу  $u_H[j]$  (крива 2). На рис. 7.18,б наведено графік ФХС за модулем  $2\pi$ , тобто  $\Phi'[j] = \Phi[j] \bmod 2\pi = L(u[j], u_H[j])$ , а на рис. 7.18,в - значення отриманої за формулою (7.133) фази  $\Phi[j]$ . На рис. 7.18,г наведено графік центрованих значень  $\overset{\circ}{\varphi}[j]$ .

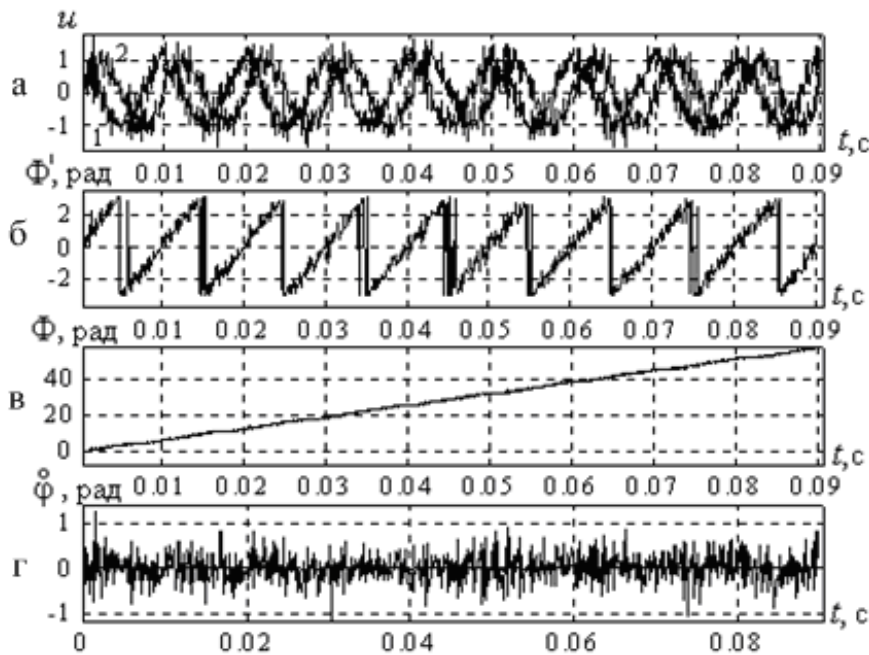


Рис. 7.18. Графіки послідовностей  $u[j]$  та  $u_H[j]$  (а),  $\Phi'[j]$  (б),  $\Phi[j]$  (в) і  $\overset{\circ}{\varphi}$  (г)

За отриманою множиною  $\left\{ \overset{\circ}{\varphi}[j], j = \overline{1, n} \right\}$  розраховано значення статистичної оцінки дисперсії початкового фазового зсуву, яке склало  $\sigma_{\varphi} \approx 0.16$  рад, та статистична оцінка нормованої кореляційної функції  $r_{\varphi}(\tau)$ ,  $\tau = lT_d$ , графік якої представлено на рис. 7.19.

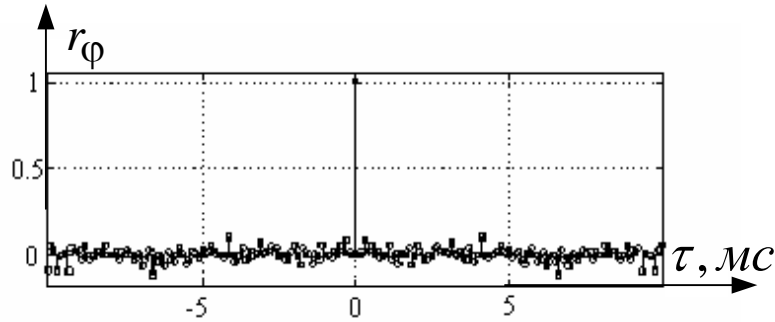


Рис. 7.19. Графік функції  $r_\varphi(\tau)$

Для коректного обчислення  $r_\varphi(\tau)$  було враховано наступне. Обмеження в часі  $T_c$  приводить до значних спотворень у визначенні оцінок  $\Phi[j]$  на початку і у кінці часу аналізу  $T_c$ . Тому доцільно визначати  $r_\varphi(\tau)$  по центральній частині

вибірки  $\overset{\circ}{\varphi}[j]$ , тобто для  $j = \overline{m, n-m}$ , де  $m$  - кількість відкинутих значень. В цьому випадку формули (7.137), (7.138) приймають наступний вигляд

$$R_\varphi(l) = \frac{1}{n-2m-l} \sum_{j=m}^{n-m-l} \overset{\circ}{\varphi}[j] \overset{\circ}{\varphi}[j+l-1], \quad (7.140)$$

$$l = 1, 2, \dots, \frac{n-2m}{2},$$

$$r_\varphi(l) = (n-2m-1) \frac{R_\varphi(l)}{\sum_{j=m}^{n-m} \left( \overset{\circ}{\varphi}[j] \right)^2}. \quad (7.141)$$

З аналізу графіка статистичної оцінки кореляційної функції, на рис. 7.19 видно, що фазовий шум слабо корельований. Крім того результати моделювання підтвердили можливість отримання статистичної оцінки кореляційної функції дробової частини фазової характеристики сигналів за обмеженою в часі вибіркою – в даному випадку оцінка  $r_\varphi(\tau)$  виконана за дев'ять періодів досліджуваного сигналу.

Аналогічним шляхом обчислюється і статистична оцінка взаємнокореляційної функції фазових характеристик двох різних процесів з однаковою центральною частотою. В цьому випадку у формулах (7.137) та (7.140) підсумовуються добутки миттєвих значень фазових зсувів двох досліджуваних процесів.

Розглянутий метод кореляційного аналізу фазових характеристик випадкових процесів може бути використаний при теоретичних і експериментальних дослідженнях циклічних випадкових процесів з метою отримання їх статистичних характеристик, дослідженні фазових шумів джерел періодичних сигналів, дослідженні та обґрунтуванні нових способів статистичної обробки результатів фазових вимірювань.

### 7.8. Підсумки до розділу

Матеріали сьомого розділу присвячені результатам досліджень статистичних моделей випадкових кутів та їх основним характеристикам.

Для ймовірнісної моделі випадкових кутів на площині наведені означення двох випадкових кутів:

- випадкового кута на  $[0, 2\pi)$ ;
- випадкового кута на  $R$ .

Випадковий кут на  $[0, 2\pi)$  розглядається як дробова частина випадкового кута на  $R$ . Відповідно випадковий кут на  $R$  має цілу і дробову частину.

Визначені основні характеристики введених випадкових кутів, у першу чергу, функції розподілу, щільності розподілу ймовірностей та характеристичні функції і наведені їх основні властивості.

Наведені результати порівняльного аналізу законів розподілу ймовірностей випадкової величини, заданої на  $R$ , і випадкових кутів дають можливість визначити їх спільні і відмінні властивості. Так, закони розподілу ймовірностей випадкового кута, заданого на  $[0, 2\pi)$ , мають властивості, які співпадають з властивостями таких законів випадкової величини. При цьому потрібно враховувати різні області визначення законів розподілу, а саме для випадкового кута – напівінтервал  $[0, 2\pi)$ , а для випадкової величини – числова вісь  $R$ . Суттєві відмінності властивостей законів розподілу ймовірностей від відповідних законів випадкової величини має випадковий кут, заданий на  $R$ . Функція розподілу ймовірностей такого кута  $F(x) \in (-\infty, \infty)$ , відповідно щільність розподілу і характеристична функція є періодичними функціями на  $R$  чи мають періодичну складову з періодом  $2\pi$ .

Досліджені так звані намотані закони розподілу ймовірностей випадкових кутів, які використовуються при вимірюваннях фазових характеристик випадкових сигналів та статистичній обробці результатів фазових вимірювань. Розглянуті намотаний гауссівський розподіл, розподіл Мізеса, намотаний розподіл Коші та інші закони розподілу.

Показано, що намотаний гауссівський розподіл і розподіл Мізеса можна взаємно апроксимувати один другим за відповідного вибору їх параметрів.

Відмінність законів розподілу ймовірностей випадкових кутів обумовлюють і відповідні визначення їх числових характеристик. Так, числові характеристики випадкового кута на  $[0, 2\pi)$ , а це – кругове середнє, кругова дисперсія, тригонометричні моменти, кругова медіана і кругова мода, визначені на колі із скінченним радіусом.

Для кращого розуміння особливостей статистичної обробки результатів фазових вимірювань основні результати порівняльного аналізу законів розподілу ймовірностей і числових характеристик випадкової величини і випадкового кута, зведені у таблицю.

Наведені результати досліджень двовимірного вектора випадкових кутів з незалежними гауссівськими компонентами в полярній системі координат. Показано, що щільність розподілу ймовірності модуля випадкового вектора описується узагальненим розподілом Релея, а щільність розподілу ймовірності аргументу випадкового вектора – розподілом Мізеса.

Проведені дослідження ймовірнісних моделей фазового зсуву гармонічних сигналів і фазових характеристик випадкових вузькосмугових сигналів. Показано, що для таких випадків результати фазових вимірювань описуються намотаним гауссівським законом або законом Мізеса.

Наведені результати кореляційного аналізу фазових характеристик циклічних випадкових процесів.

Ряд результатів по статистичним моделям випадкових кутів та їх основних характеристиках наведено у роботах [7.1 – 7.17].

## Розділ 8

### ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ ДАНИХ ФАЗОВИХ ВИМІРЮВАНЬ

Матеріали розділу об'єднують результати задач моделювання та статистичної обробки даних фазових вимірювань. Розглянута методологія проведення комп'ютерного вимірювального експерименту, наведено його означення і основні етапи його проведення для задач кутових і фазових вимірювань на основі використання методу статистичних випробувань (Монте-Карло). Досліджено моделювання векторів випадкових кутів із заданими розподілами ймовірності.

Визначені основні характеристики статистичної фазометрії – статистичні оцінки характеристик випадкових фазових характеристик сигналів, як вибіркові кругові середні, дисперсія та інші. Наведені статистичні точкові та інтервальні оцінки фазових зсувів сигналів. Результати статистичної обробки результатів нерівноточних фазових вимірювань отримані для конкретних прикладів. Обґрунтована постановка і отриманий розв'язок задачі використання концепції невизначеності для статистичної обробки даних фазових вимірювань.

#### 8.1. Проблематика моделювання задач кутових і фазових вимірювань

Вирішення кутових і фазових вимірювань з використанням сучасних технологій моделювання є одним з найбільш перспективних та ефективних напрямів досліджень. Дослідженням такого напрямку присвячено значну кількість наукових публікацій. У даній роботі ряд положень теорії вимірювань застосовано при проведенні моделювання, у першу чергу комп'ютерних вимірювальних експериментів з кутами і різницями фазових характеристик сигналів.

Відомо [8.30; 8.31], що в основу моделювання того чи іншого процесу, явища, системи (раніше і далі для таких об'єктів використовується загальний термін "емпірична система") покладений принцип подібності – відповідність емпіричної системи і її моделі згідно певним правилам, критеріям. Теоретичні положення моделювання, які утворюють у цілому теорію моделювання, беруть свій початок у працях відомих вчених І. Ньютона, Л. Ейлера, О. Л. Коші, О. Рейнольдса, В. Л. Кірпічева та інших.

З точки зору фізичної природи моделюючих емпіричних систем серед основних видів подібності визначають:

◆ *фізичну*, для однакової або еквівалентної фізичної природи емпіричної системи і її моделі, наприклад, електрична модель може задовольняти умовам подібності механічній емпіричній системі;



◆ *математична*, при якій має місце подібність, а в більшості випадків – співпадання математичних моделей, при цьому фізична природа емпіричних систем, як правило, різна.

З точки зору відповідності моделі емпіричній системі серед видів подібності виділяють:

- ◆ повну (у певній мірі ідеальну);
- ◆ наближену (більш реальну).

Згідно теорії моделювання всі види подібності повинні задовольняти трьома теоремами [8.37], а саме:

- ◆ перша теорема формулює властивості подібних систем;
- ◆ друга теорема ( $\pi$ -теорема) визначає критерії подібності;
- ◆ третя теорема визначає необхідні і достатні умови подібності емпіричних систем їх моделям, наприклад, для фізичних параметрів, початкових, граничних та краєвих умов, початкового стану та взаємозв'язків з іншими системами.

Природно, що кожна конкретна задача моделювання реалізує в тій чи іншій мірі основні положення теорії моделювання.

Відносно областей використання основних методів моделювання фізичного і математичного моделювання відмітимо наступне. У зв'язку з широким застосуванням методів цифрової обробки сигналів, обчислювальних методів та засобів обчислювальної техніки метод математичного моделювання став беззаперечним лідером майже по всім показникам ефективності процесу моделювання емпіричних систем. В якості прикладів таких показників можна навести наступні: швидкодія проведення комп'ютерних експериментів; значний діапазон моделювання різних варіантів задач обчислення, характеристик і параметрів досліджуваних сигналів, діючих завад; суттєва економія фінансових витрат та інше.

У ряді випадків проведення натурального експерименту для задач статистичної фазометрії або вимагає значних фінансових витрат, або взагалі є неможливим. Тому математичне моделювання вважається по суті базовим методом проведення досліджень.

Можна назвати два основних фактори, що суттєво вплинули на створення сучасних інформаційних технологій в галузі вимірювань:

- ◆ розробка потужного теоретичного базису математичного моделювання, обчислювальних методів, методів цифрової обробки сигналів;
- ◆ стрімкий розвиток засобів обчислювальної техніки.

Все це обумовлює необхідність подальшого розвитку методології проведення вимірювальних експериментів на базі використання методу математичного моделювання, а саме шляхом проведення комп'ютерних вимірювальних експериментів. Останній термін потребує певного пояснення і обґрунтування. У наукових працях з математичного моделювання, наприклад, у роботах Самарського О.А. та інших [8.31], вводиться термін "обчислювальний

експеримент" (російською мовою "вычислительный эксперимент"), вживається також термін "інженерний експеримент" [8.30] і наведені вагомні результати використання таких експериментів при вирішенні науково-технічних проблем у різних галузях науки і техніки, економіки, соціальної сфери.

У розділі 2 було наведено означення *вимірювального експерименту*, тому введення наступного означення продовжує реалізацію логічно запропонованої методології в теорії вимірювань і дає певну конкретизацію вимірювальних експериментів при моделюванні широкого кола задач вимірювань, включаючи задачі кутових і фазових вимірювань.

**Означення 8.1.** *Комп'ютерний вимірювальний експеримент є реалізацією поєднання теорії і практики процесу вимірювань, проведення якого базується на використанні:*

- ◆ *теоретичних основ математичного моделювання, обчислювальних методів, методів цифрової обробки сигналів;*
- ◆ *алгоритмів і програмного забезпечення розв'язку задач вимірювань;*
- ◆ *сучасних засобів обчислювальної техніки, як основних модулів інформаційно-вимірювальних та діагностичних систем з метою отримання результату вимірювань і його характеристик точності.*

Сама постановка задачі математичного моделювання породжує чіткий план дій. Послідовність таких дій для моделювання задач вимірювання кутових і фазових характеристик можна умовно проілюструвати наступною схемою, наведеною на рис. 8.1.

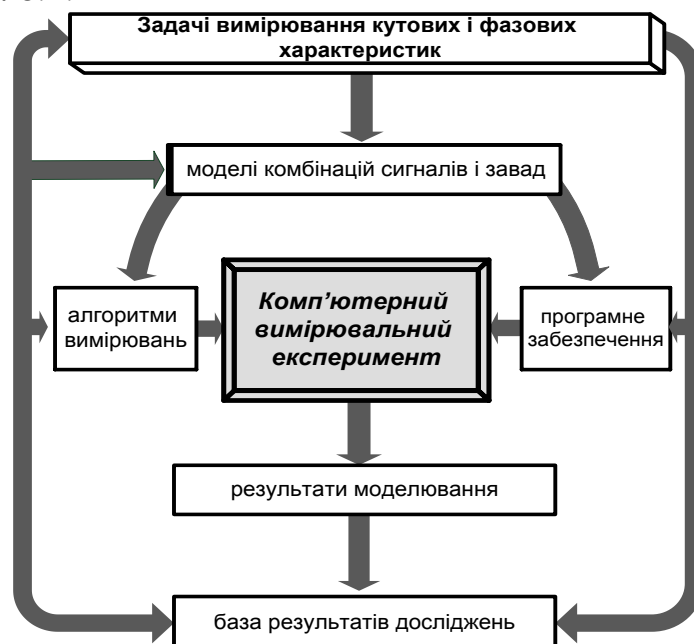


Рис.8.1. Схематичне зображення процесу комп'ютерного вимірювального експерименту

Природно, що моделювання задач кутових вимірювань і статистичної фазометрії має свої характерні властивості і специфіку. Але в їх основі можна виділити і багато спільного, що дозволяє застосувати єдину методологію проведення компютерного вимірювального експерименту з випадковими

кутами та випадковими фазовими характеристиками сигналів (ФХС). Розглянемо єдність фазових і кутових вимірювань на прикладі аналізу вузькосмугових випадкових сигналів, модель яких розглядалась в підрозділі 3.4.

Для таких сигналів фазова характеристика  $\Phi(\omega, t)$  є функцією випадкового аргументу  $\omega \in \Omega$  і  $t \in (-\infty, \infty)$ , а їх енергія концентрується в околі певної частоти  $f_0$ . Тому  $\Phi(\omega, t)$  можна представити сумою детермінованої лінійної і випадкової функцій

$$\Phi(\omega, t) = 2\pi f_0 t + \varphi_{\Pi} + \psi(\omega), \quad (8.1)$$

де  $\varphi_{\Pi}$  - початкова фаза сигналу, тобто значення детермінованої компоненти ФХС у момент часу  $t = 0$ . Детермінована компонента у (8.1) -  $2\pi f_0 t + \varphi_{\Pi}$  є лінійним трендом, значення якого можуть бути більшими за величину  $2\pi$ . Друга складова -  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$  описується випадковою величиною.

У фазометрії, як правило, значення  $f_0$  задається за допомогою опорного гармонічного сигналу, для якого фаза представляється лінійною функцією виду

$$\Phi_0(t) = 2\pi f_0 t + \varphi_0, \quad (8.2)$$

де  $\varphi_0$  - початкова фаза.

Різниця ФХС (8.1) та (8.2) визначається згідно

$$\Phi(\omega, t) - \Phi_0(t) = \psi(\omega). \quad (8.3)$$

В іншому випадку – при аналізі фазомодульованих сигналів ФХС можна представити у більш загальному виді

$$\Phi(\omega, t) = 2\pi f_0 t + \varphi_{\text{нл}}(t) + \psi(\omega)$$

де  $\varphi_{\text{нл}}(t) \in [0, 2\pi)$  - нелінійна детермінована функція, яка описує закон модуляції фази, а  $\psi(\omega)$  - випадковий процес, який обумовлений дією зовнішніх завад, шумами вимірювального каналу тощо. В цьому випадку різниця ФХС має вигляд

$$\Phi(\omega, t) - \Phi_0(t) = \varphi_{\text{нл}}(t) + \psi(\omega) - \varphi_0. \quad (8.4)$$

За відсутності опорного сигналу значення  $f_0$  може бути визначено методом лінійної регресії, який дозволяє знайти пряму лінію, яка максимально відповідає ряду упорядкованих пар  $(\Phi(\omega, t), t)$ . Рівняння регресії в загальному випадку має вигляд:

$$\Phi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi_{\Pi}.$$

Випадкові різниці ФХС (8.3) чи (8.4) мають область визначення та особливості, які притаманні випадковим кутам, отже до них можна застосувати методологію статистичних кутових досліджень. Наведені формули використовуються при проведенні комп'ютерних моделюючих експериментів кутових і фазових вимірювань.

З метою більш глибокого обґрунтування терміна "*комп'ютерний вимірювальний експеримент*", виділимо основні етапи його виконання. Відомо, що будь-яке виділення тих чи інших етапів комплексного процесу моделювання має до певної міри умовний характер, але у цілому має і конструктивний зміст – висвітлює основну сутність логічних (технологічних) операцій процесу моделювання.

Вибираючи ту чи іншу ймовірнісну модель, розглядають три об'єкти: *емпіричну систему*, тобто *фізичний процес* або *систему*, що є джерелом формування вимірювальних сигналів, які потрібно описати; *саму випадкову функцію*, використовувану для їх опису; *задачу*, яку, власне, необхідно розв'язати для вибраної ймовірнісної моделі.

Описуючи фізичний процес або систему кутових і фазових вимірювань потрібно враховувати їх характеристики та особливості, які є істотними при розв'язуванні задачі з необхідними для практики характеристиками точності. Відмітимо, що три зазначених об'єкти тісно взаємопов'язані. Один і той же фізичний процес або систему можна описувати по-різному, якщо потрібно розв'язати другу задачу. Так, наприклад, якщо змінились вимоги характеристик точності результату вимірювань, то інколи необхідно вибрати іншу ймовірнісну модель.

**Вибір стратегії процесу моделювання.** Це етап обґрунтування постановки задачі моделювання. Для нашого випадку – це задачі кутових і фазових вимірювань. При цьому необхідно враховувати як можливості відповідного розділу прикладної математики, в тому числі теорії випадкових процесів, математичної статистики, так і можливості обчислювальної технічної системи.

**Моделі сигналів і завад.** Розробка математичних моделей сигналів і завад у задачах кутових і фазових вимірювань проводиться, як фахівцями предметної області – спеціалістами в області кутових і фазових вимірювань, так і математиками. Про важливість і значимість цього етапу процесу моделювання йдеться у значній кількості публікацій, в тому числі і в [8.26; 8.30; 8.31; 8.37]. На цьому етапі використовуються результати розділів 2, 3, 6 і 7 даної роботи.

**Обчислювальний алгоритм.** Згідно означення [8.30], *обчислювальний алгоритм* або *алгоритм* - це чітка послідовність правил виконання обчислювального процесу, що приводить до розв'язання задачі вимірювання після скінченного числа операцій.

Як правило, формули обчислень певного набору даних утворюють так звані *цикли*, які багато разів повторюються у загальному обчислювальному процесі. Такі цикли утворюють складну ієрархічну структуру, яка включає так звані *внутрішні*, *проміжні* та *зовнішні цикли*. При цьому ієрархічна структура може змінюватись в процесі обчислень у залежності від результатів обчислень. У більшості випадків для конкретної задачі можна вибрати значну кількість обчислювальних алгоритмів. По суті це питання досліджується у рамках теорії числових методів – розділу обчислювальної математики, який став інтенсивно

розвиватись синхронно з розвитком засобів обчислювальної техніки. Тому визначення критерію оцінки якості обчислювального алгоритму, є актуальною проблемою, вирішення якої також лежить в області вимірювань. На цьому етапі використовуються результати розділів 4 – 7 даної роботи.

**Створення програмного забезпечення.** Це важливий етап реалізації обчислювального алгоритму на ЕОМ. Програмне забезпечення є складним комплексним господарством, яке включає: мови програмування, операційні системи, транслятори, бібліотеки стандартних підпрограм та інше. Сучасне програмування є самостійною наукою зі своїми принципами, методами, підходами і у певній мірі є наукою творчого мистецтва програмування.

**Виконання процесу моделювання.** Під час реалізації комп'ютерного вимірювального експерименту виконується необхідна попередня операція – його *тестування*. Всі об'єкти такого експерименту, а це математична модель, обчислювальний алгоритм, програмне забезпечення, беруть участь в експерименті з метою перевірки надійності вимірювань, тобто коли результат вимірювального експерименту є відомим. Такий результат, як правило, задається постановкою тестової задачі. Невідомими, можливо до деякої міри прогнозованими постановкою тестової задачі, є характеристики точності комп'ютерного вимірювального експерименту. Тільки після проведення кропітких тестових експериментів приступають до прогнозу обчислювального процесу – за допомогою математичного моделювання отримати прогнозовані результати кутових і фазових вимірювань в умовах, які раніше експериментально не були отримані або в умовах, коли такі експерименти взагалі неможливі.

**Аналіз результатів моделювання.** Це заключний етап такого експерименту, в процесі якого виконується обробка результатів обчислення, їх всебічний аналіз і нарешті формування висновків, які, як правило, бувають двох типів:

- ◆ результати досліджень передаються для використання;
- ◆ обґрунтовується необхідність постановки нових задач і проведення додаткових досліджень процесу моделювання.

Розглянемо далі ряд питань проведення комп'ютерного вимірювального експерименту.

**Основний метод моделювання** – це *метод статистичних випробувань*, який також має назву *метода Монте-Карло*. Суть цього методу полягає у розв'язку значної кількості задач, в тому числі задач кутових вимірювань і статистичної фазометрії, обчислювальними методами (методами цифрової обробки сигналів) на основі моделювання послідовності псевдовипадкових величин [8.11; 8.37], а точніше реалізацій випадкових величин, векторів, процесів і полів.

Широке коло розв'язуваних задач і різноманітність вимог, щодо особливостей їх розв'язку, зумовлюють потребу мати значний асортимент ймовірнісних моделей. Для їх практичного використання необхідні розвинені

методи моделювання на ЕОМ випадкових функцій — випадкових величин, векторів, процесів і полів.

Особливість їх моделювання на ЕОМ полягає в тому, що за допомогою спеціальних алгоритмів синтезується ансамбль реалізацій, статистичні характеристики яких наближаються до необхідних.

Моделювання випадкових функцій на ЕОМ підпорядковане двом основним принципам [8.12].

1. Має забезпечуватися схожість між випадковою функцією-оригіналом і його цифровою моделлю-копією, яка полягає в збігу (близькості) їх ймовірнісних законів розподілу або числових характеристик.

2. Усяка випадкова функція визначається ("конструюється") як деяка функція від найпростіших, так званих базових, випадкових величин. У більшості випадків результат отримують як наслідок проведення на ЕОМ найпростішого випадкового експерименту, який полягає у визначенні числового значення процесу кидання навімання точки в інтервал  $[0,1]$ . Тоді, базовою випадковою величиною є випадкова величина  $\xi(\omega)$ , яка рівномірно розподілена на інтервалі  $[0,1]$ , тобто  $\xi(\omega) \in [0,1]$ .

**Задачі моделювання.** Використання комп'ютерного вимірювального експерименту для задач кутових і фазових вимірювань дає можливість отримати розв'язання широкого кола таких задач. Принципово суттєвим моментом при вибраному методі моделювання є можливість розв'язання статистичних задач вимірювань, оцінювання випадкових похибок, їх визначення на основі використання "потужного" статистичного матеріалу (змодельованих статистичних даних вимірювань), що говорить про перспективність і ефективність застосування даного методу моделювання для розв'язання задач вимірювань.

Використовуючи класифікацію задач, яка наведена у підрозділі 2.1, відмітимо наступне:

1. Під час проведення комп'ютерного вимірювального експерименту, в основному, формулюються постановки *прямих апостеріорних* задач вимірювань кутових і фазових характеристик інформаційних сигналів в умовах дії завад.

2. Широкий діапазон вибору заданих характеристик досліджуваних сигналів і завад дозволяє моделювати різні комбінації їх реалізацій і таким чином отримувати статистичні дані вимірювань значного об'єму.

3. Використання комп'ютерного вимірюваного експерименту дає можливість обчислити не тільки статистичні оцінки результатів вимірювань, а і статистичні оцінки похибок їх визначення. Реалізація такої можливості пов'язана з самою постановкою задачі моделювання, в якій результат вимірювань задається на відповідному параметричному просторі числових даних моделювання. Базуючись на цьому факті, саму задачу моделювання

можна вважати до певної міри *апостеріорною*, тому що перед проведення експерименту є прогнозованим її результат.

4. На завершальному етапі комп'ютерного вимірювального експерименту проводиться порівняльний аналіз результатів моделювання з результатами теоретичних досліджень з метою:

- ◆ узгодження результатів вимірювань теоретичних і імітаційних досліджень;
- ◆ прийняття рішень за результатами досліджень (про адекватність застосованих алгоритмів обробки кутових даних);
- ◆ планування подальших перспективних задач імітаційних досліджень.

Необхідно відмітити, що специфіка задач кутових і фазових вимірювань під час моделювання, у першу чергу, проявляється при обґрунтуванні моделей сигналів і завод. Природно, що в залежності від конкретної постановки задачі моделювання використовується та чи інша математична модель інформаційного сигналу і завади. Наведемо перелік лише основних математичних моделей:

- ◆ детерміновані періодичні функції;
- ◆ детерміновані інформаційні сигнали з кутовою модуляцією і гармонійною несучою;
- ◆ стаціонарні випадкові процеси;
- ◆ періодичні випадкові процеси;
- ◆ вузькосмугові випадкові процеси;
- ◆ нестаціонарні випадкові процеси імпульсного характеру.

Види законів розподілу ймовірностей заданих випадкових процесів для більшості задач моделювання є типовими для статистичних кутових і фазових вимірювань - це рівномірний, Мізеса, Гаусса, Пуассона, Релея, лог-гауссівський, сім'я намотаних законів та інші.

Таким чином, для статистичних характеристик інформаційних сигналів, як детермінованих, так і випадкових, властива циклічність у фізичному і періодичність у математичному розуміннях.

В якості завади використовуються стаціонарні випадкові процеси з різними законами ймовірностей.

**Оператори перетворень сигналів.** На ряду з традиційними операторами цифрової обробки сигналів, у першу чергу дискретними лінійними операторами фільтрації, дискретного перетворення Фур'є [8.5], в процесі моделювання задач кутових і фазових вимірювань широко використовується оператор дискретного перетворення Гільберта [8.15].

**Статистичні характеристики сигналів.** Характеристики інформаційних сигналів у задачах моделювання кутових і фазових вимірювань детально описані у попередніх підрозділах, у більшій мірі у підрозділах 6.2 – 6.6 та 7.1 – 7.7.

Результатами комп'ютерного вимірювального експерименту є статистичні оцінки відповідних ймовірнісних характеристик кутових і фазових величин.

**Характеристики точності результатів моделювання.** В якості характеристик точності, як правило, використовуються статистичні оцінки дисперсії результатів моделювання. Використання інших характеристик точності результатів комп'ютерного вимірювального експерименту для задач кутових і фазових вимірювань потребує додаткових досліджень, наприклад, з урахуванням положень так званої “концепції невизначеності вимірювань”.

## 8.2 Моделювання векторів випадкових кутів із заданими розподілами ймовірності

Моделювання як метод дослідження функціонування систем широко використовують в інформаційно-вимірювальній техніці. Одним з етапів моделювання є підготовка даних вимірювань для числового експерименту. Значну кількість літературних джерел присвячено питанням моделювання розподілених на прямій випадкових величин [8.33; 8.34]. Водночас існує значна множина задач, зв'язаних з дослідженням і обробкою розподілених на колі випадкових кутів. До таких задач належать і задачі оцінки різниці фазових характеристик випадкових сигналів та оцінки випадкових кутів на площині.

Випадкові кути підпорядковуються специфічним законам розподілу які наведені в підрозділі 7.2. Існують пакети прикладного програмного забезпечення [8.10] з потужними засобами статистичної обробки, але вони не містять процедур, які б дозволяли генерувати випадкові кути з такими розподілами.

Розглянемо задачу моделювання одновимірного вектора вибірових значень випадкових кутів із заданим розподілом ймовірностей [8.4; 8.18]. Нехай задано щільність розподілу ймовірностей  $p(\theta)$  (або функція розподілу ймовірностей  $F(\theta)$ ) неперервного випадкового кута з областю визначення  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Необхідно сформувати масив вибірових значень цього випадкового кута об'ємом  $L \times M$ .

Типовим методом моделювання неперервних випадкових величин є метод оберненої функції [8.33]. Його суть полягає в тому, що неперервну випадкову величину  $\xi(\omega)$  з функцією розподілу ймовірностей  $F(x)$ , яка задана на інтервалі  $x \in (-\infty, \infty)$ , визначають функціональним перетворенням

$$\xi(\omega) = F^{-1}(\eta(\omega)), \quad (8.5)$$

іншої випадкової величини  $\eta(\omega)$ , яка має рівномірний розподіл ймовірності в області значень  $\eta(\omega) \in [0, 1]$ . В формулі (8.5) позначено  $F^{-1}(\cdot)$  – обернена  $F(\cdot)$  функція. Вважається, що  $F^{-1}(\cdot)$  існує.



Відомо, що закони розподілу ймовірностей в задачах фазових та кутових вимірювань, як правило, описуються складними функціями, для яких знаходження аналітичного виразу оберненої функції  $F^{-1}(\alpha)$  є непростою задачею. Тому весь процес генерування вибірок кутових даних доцільно виконувати шляхом комп'ютерного моделювання. Одна з можливих методик такого генерування масивів випадкових кутів передбачає виконання наступних етапів.

1. Формування вихідних даних: задання параметрів розподілу ймовірності, розміром  $L \times M$  масиву значень реалізацій випадкових кутів, кількість  $P$  точок апроксимації заданої функції розподілу ймовірностей.

2. Представлення функції розподілу ймовірності скінченною множиною дискретних значень кутів  $\{\theta_j, j = \overline{0, P}\}$  та значень функції розподілу  $\{F(\theta_j), j = \overline{0, P}\}$ .

3. Отримання множини значень оберненої функції  $\theta = F^{-1}(y)$ , де  $y \in [0, 1]$  - область значень функції  $F(\theta)$ .

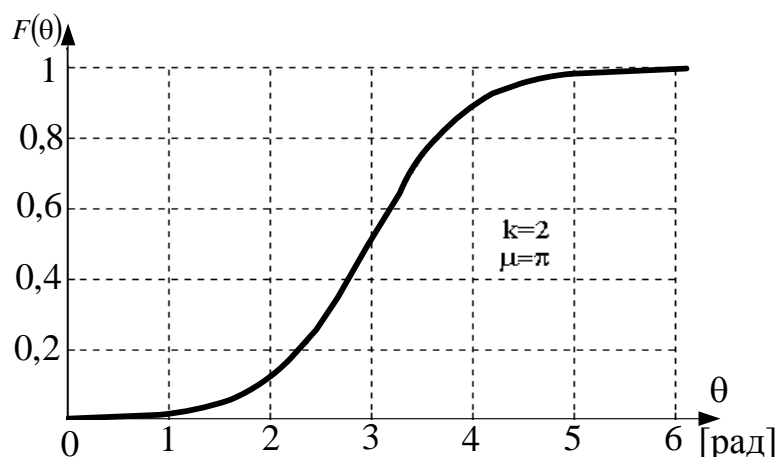
4. Формування масиву вибірових значень (реалізацій) рівномірно розподіленої випадкової величини розміром  $L \times M$ .

5. Обчислення вектора вибірових значень випадкових кутів з розподілом  $F(\theta)$  заданого розміру  $L \times M$ .

6. Побудова гістограми і перевірка узгодженості законів теоретичного та експериментального розподілів ймовірностей.

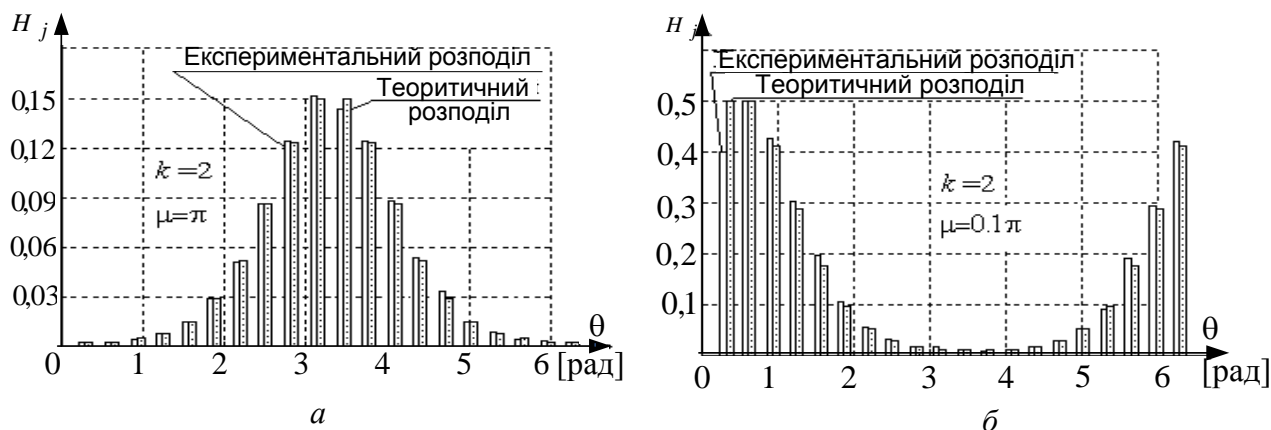
Генерування вектора значень випадкового кута реалізовано в системі MatLAB, яка набула значного поширення для розв'язання прикладних науково-технічних задач. Для здійснення моделювання найбільш складним є етап (3) апроксимації оберненої функції. Апроксимувальні поліноми невисоких порядків не забезпечують достатньої точності наближення до заданої функції розподілу. Поліноми вищих порядків мають характер коливань своїх значень (пульсацій), тому їх застосування для апроксимації  $F^{-1}(\alpha)$  може привести до утворення випадкових кутів з багатомодальними законами розподілу і, як наслідок, до неприпустимих помилок моделювання. Тому доцільно виконати апроксимацію сплайновими функціями [8.10]. У системі MatLAB існує зручна процедура **spline**, що реалізує інтерполяцію кубічними сплайнами.

*Приклад 8.1.* Розглянемо моделювання реалізацій випадкового кута з розподілом ймовірностей Мізеса (3.67) для параметрів  $k=2$  і  $\mu = \pi$  об'єму  $1 \times 10000$ . Графіки результатів розрахунків функції розподілу ймовірностей Мізеса наведені на рис. 8.2.

Рис. 8.2. Графік функції розподілу ймовірностей Мізеса з параметрами  $k=2$  і  $\mu = \pi$ 

Точність апроксимації сплайнами функції  $F^{-1}(\alpha)$  істотно залежить від значення  $k$  та кількості  $P$  точок апроксимації. Так, наприклад, якщо  $P=80$ , то задовільні результати апроксимації зберігаються до значень  $k=9\dots 10$ . Збільшення  $k$  приводить до росту крутості функції і, таким чином, вимагає збільшення числа  $P$ .

На рис. 8.3 а,б представлено графіки гістограм статистики випадкового кута з розподілом Мізеса і параметрами відповідно  $k=2$ ,  $\mu = \pi$  та  $k=2$ ,  $\mu = 0,1\pi$  для  $L=1$ ,  $M=10000$ .

Рис. 8.3. Гістограми статистики випадкового кута об'єму  $M=10000$  з розподілом Мізеса і параметрами відповідно  $k=2$ ,  $\mu = \pi$  (а) та  $k=2$ ,  $\mu = 0,1\pi$  (б)

Кількість  $l$  інтервалів гістограми доцільно обрати рівною

$$l = \left[ 2 \log_2 \frac{M}{4} \right]. \quad (8.6)$$

За рівномірного розбиття області визначення гістограми з кроком  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{l} = \frac{\pi}{\log_2 M - 2}$  маємо границі інтервалів гістограми  $\frac{2\pi}{l} j$ ,  $j = \overline{0, l}$ .

Значення гістограми за експериментальними даними обраховуються як

$$H_j = \frac{M_j}{M}, \quad (8.7)$$

де  $M_j$  – кількість значень реалізацій випадкового кута, в  $j$ -му інтервалі гістограми. З аналізу графіка гістограми і теоретичного розподілу, які наведені на рис. 8.3, слідує, що гістограма має основні властивості щільності розподілу ймовірності теоретичного розподілу, до якого теоретично збігається при  $M \rightarrow \infty$  і  $\Delta\theta \rightarrow 0$ .

Значення графіку теоретичного розподілу зі щільністю ймовірності  $p(\theta)$ , який наведений на рис. 8.3 обраховується як  $H_j^T = \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\Delta\theta(j-1)}^{\Delta\theta j} p(\theta) d\theta, \quad j = \overline{1, l}$ .

Порівняльний гістограмний аналіз результатів, які графічно наведені на рис. 8.3, свідчить про те, що наближення змодельованого (експериментального) та теоретичного розподілів, яке досягається у випадках моделювання випадкового кута з  $\mu = \pi$  можна вважати коректним (найбільш наближеним). Тому генерування вибірки випадкового кута із заданим середнім кутом доцільно виконувати в два етапи: на першому формувати вектор вибіркових значень кутів  $\Theta = \{\theta_i, i = \overline{1, M}\}$  для розподілу з заданим параметром концентрації  $k$  та круговим середнім  $\mu_c = \pi$ ; на другому етапі виконувати зміщення кутів з метою отримання необхідного значення  $\mu \in [0, 2\pi)$

$$\Theta' = \{(\theta_i - \pi + \mu) \bmod 2\pi, i = \overline{1, M}\}. \quad (8.8)$$

Для генерування вибірки випадкових кутів (статистики) важливим є питання якості, тобто питання перевірки змодельованого і заданого закону розподілу ймовірності. Цю задачу вирішують за допомогою статистичних критеріїв згоди [8.13]. З урахуванням того, що і тип розподілу, і його параметри відомі, доцільно застосувати критерій Колмогорова. За цим критерієм розбіжність теоретичного і експериментального розподілів оцінюється максимальним значенням модуля різниці  $D$  між значеннями експериментальної  $F(\theta_j)$  і теоретичної  $F^T(\theta_j)$  функцій розподілу ймовірності випадкових кутів на всіх  $l$  інтервалах гістограми

$$D = \max_j |F(\theta_j) - F^T(\theta_j)|. \quad (8.9)$$

Цей критерій ґрунтується на встановленій Колмогоровим закономірності: для довільної функції розподілу ймовірності  $F(x)$  випадкової величини  $\xi(\omega)$  за необмеженого зростання числа  $M$  незалежних спостережень ймовірність нерівності

$$D\sqrt{M} \geq \lambda \quad (8.10)$$

прямує до границі

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2\lambda^2), \quad (8.11)$$

де значення  $\lambda \in [0,1]$  задається умовами експерименту.

Результати розрахунків  $F(\theta_j)$  і  $F^T(\theta_j)$  для даних прикладу 8.1 графічно показані на рис. 8.4, а на рис. 8.5 наведений графік ймовірності  $P(\lambda)$ , значення якої розраховані за формулою (8.11).

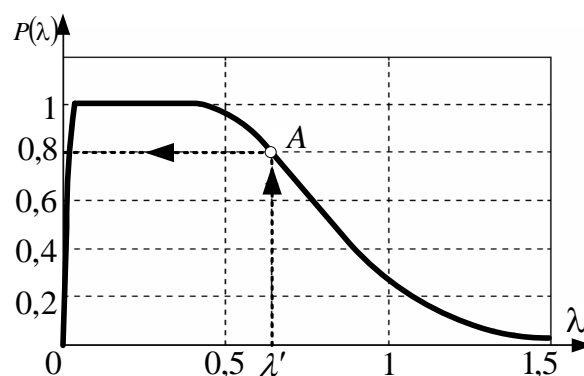
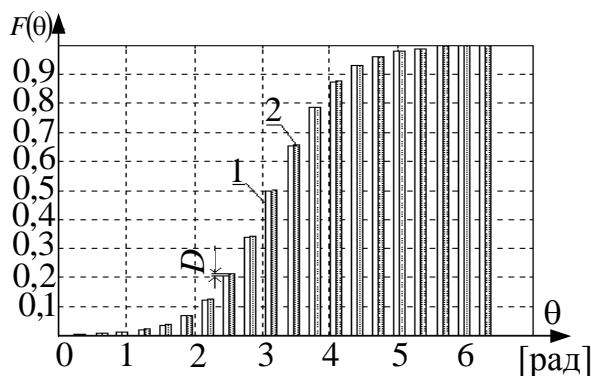


Рис. 8.4. Графіки функцій  $F(\theta_j)$  (1) і  $F^T(\theta_j)$  (2)      Рис. 8.5. Графік ймовірності  $P(\lambda)$  (3.80)

Як приклад, на рис. 8.5 позначено точку  $A$ , яка відповідає отриманому для прикладу 8.1 значенню  $\lambda = 0,638$  ( $P(0,638) \approx 0,81$ ).

Критерій Колмогорова передбачає виконання наступних процедур:

- 1) розрахунок  $F(\theta_j)$  і  $F^T(\theta_j)$  і визначення параметра  $D$  за формулою (8.9);
- 2) вибір величини  $\lambda$  згідно нерівності (8.10);
- 3) визначення за графіком рис. 8.5 ймовірності  $P(\lambda)$  – події, яка полягає в тому, що  $|F(\theta_j) - F^T(\theta_j)| < D$ .

Якщо ймовірність  $P(\lambda) < 1 - \alpha$ , де  $\alpha$  - заданий рівень значимості статистичної гіпотези відносно досліджуваного закону розподілу ймовірностей, то гіпотезу відкидають як необґрунтовану.

Результати моделювання свідчать, що запропонований спосіб формування вибірових значень розподілених на колі випадкових кутів забезпечує досягнення високої ймовірності за критерієм Колмогорова  $P(\lambda) \in [0,8 \dots 0,95]$  в широкому діапазоні зміни параметрів розподілів.

*Приклад 8.2.* Розглянемо генерування вектора випадкового кута з намотаним гауссівським розподілом щільності ймовірності і параметрами:  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0,5\pi$  об'єму  $1 \times M$ ,  $M = 10000$ . Графіки прямої і оберненої функцій розподілу ймовірності намотаного гауссівського закону для обраних параметрів показано, відповідно, на рис. 8.6 а,б, а гістограма для змодельованої статистики кута – на рис. 8.7.

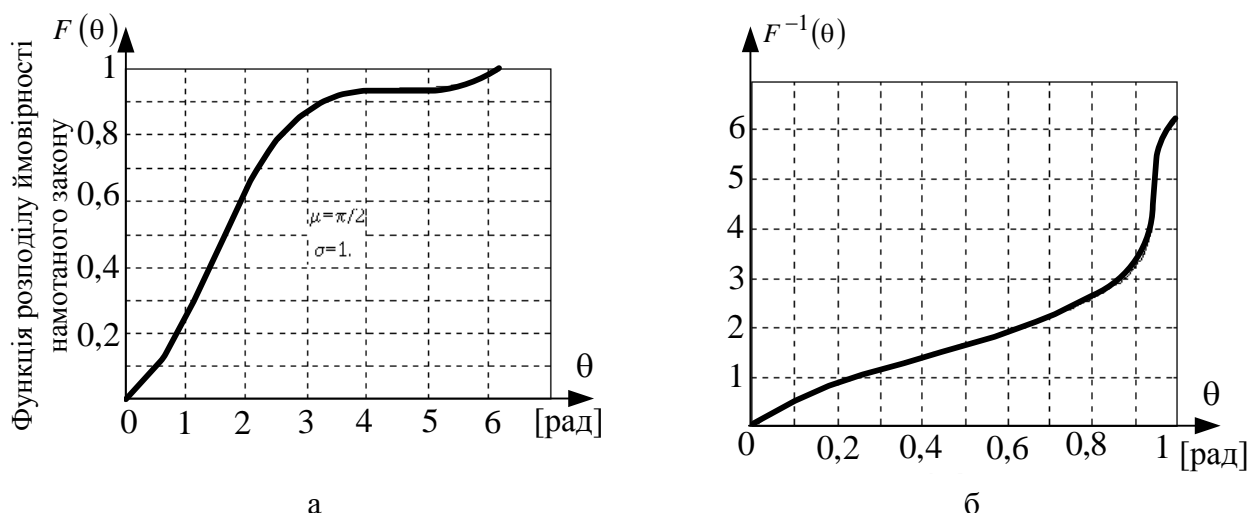


Рис. 8.6. Прямая (а) і обернена (б) функції розподілу ймовірності намотаного гауссівського закону з параметрами  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0,5\pi$ .

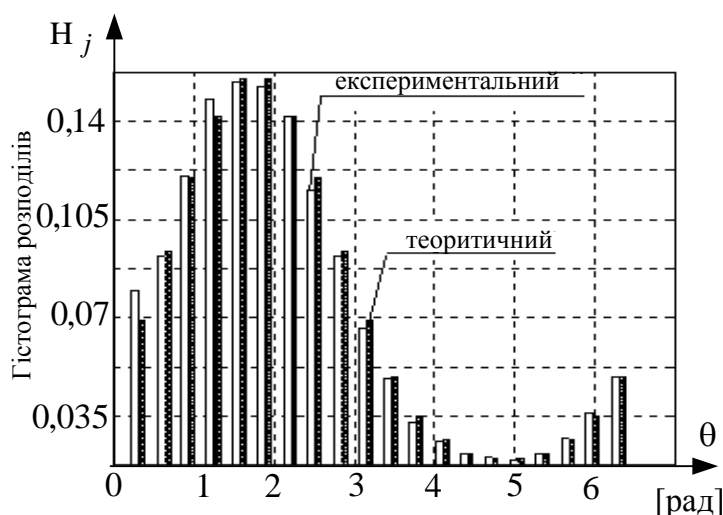


Рис. 8.7. Теоретичний розподіл та експериментальна гістограма статистики випадкового кута ( $M = 10000$ ) з намотаним гауссівським розподілом з параметрами  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0,5\pi$

Наведені на рис. 8.7 гістограми та перевірка за критерієм Колмогорова свідчать про коректність розрахунків і задовільне співпадіння теоретичного і змодельованого експериментального розподілів змодельованої вибірки кутів.

### 8.3. Вибіркові кругові характеристики розподілів різниці фазових характеристик сигналів

Результати фазових і кутових вимірювань з урахуванням дії завад носять випадковий характер, а методи їх обробки повинні ґрунтуватись на статистичних методах кутових спостережень. У теорії і практиці вимірювань добре відомі і широко застосовуються числові статистичні характеристики для аналізу розподілених на прямій випадкових величин [8.5; 8.12; 8.22; 8.25; 8.38] з розподілами Гаусса, Коші, Релея тощо [8.34]. Однак використання цих

розподілів у задачах статистичної обробки результатів фазових вимірювань [8.8; 8.28; 8.35] має певні обмеження.

Інший, більш теоретично обґрунтований шлях вирішення цього питання пов'язаний із застосуванням в статистичній фазометрії характеристик, які використовуються під час обробки результатів аналізу випадкових кутів [8.23]. Основними з вибірових характеристики випадкових кутів є *вибіркове кругове середнє* (ВКС) і *вибіркова кругова дисперсія* (ВКД) [8.3; 8.14]. Оскільки кути як об'єкти геометрії і різниці ФХС як об'єкти радіотехніки, мають однакові області визначення, можна вважати природним ввести аналогічні вибірові характеристик і для фазових вимірювань.

**Вибіркове кругове середнє різниці ФХС.** Нехай за результатами вимірювання різниці ФХС  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ ,  $\omega \in \Omega$  одним зі способів дискретної фазометрії маємо множину реалізацій  $\{\varphi_j, j = \overline{1, M}\}$ , тобто статистику або вибірку об'єму  $M$ .

Обґрунтуємо вибірові характеристики для усередненої різниці ФХС та її дисперсії. Результат окремого фазового вимірювання  $\varphi_j$  можна зобразити відповідним плоским кутом  $\varphi_j$ , який відповідає на колі одиничного радіуса  $r = 1$  дузі довжиною  $l_j$  між додатньою напіввіссю абсцис та вектором  $\overline{OP_j}$  (рис. 8.8,а). Вектор  $\overline{OP_j}$  має декартові  $[\cos \varphi_j, \sin \varphi_j]$  і полярні  $(1, \varphi_j)$  координати.

Вимірювання виконуються з певним кроком  $\frac{2\pi}{m}$ . Дискретному характеру результатів фазових вимірювань відповідає розбиття кола на  $m$  клас-інтервалів. Тому точки  $P_j$  – це середини клас-інтервалів.

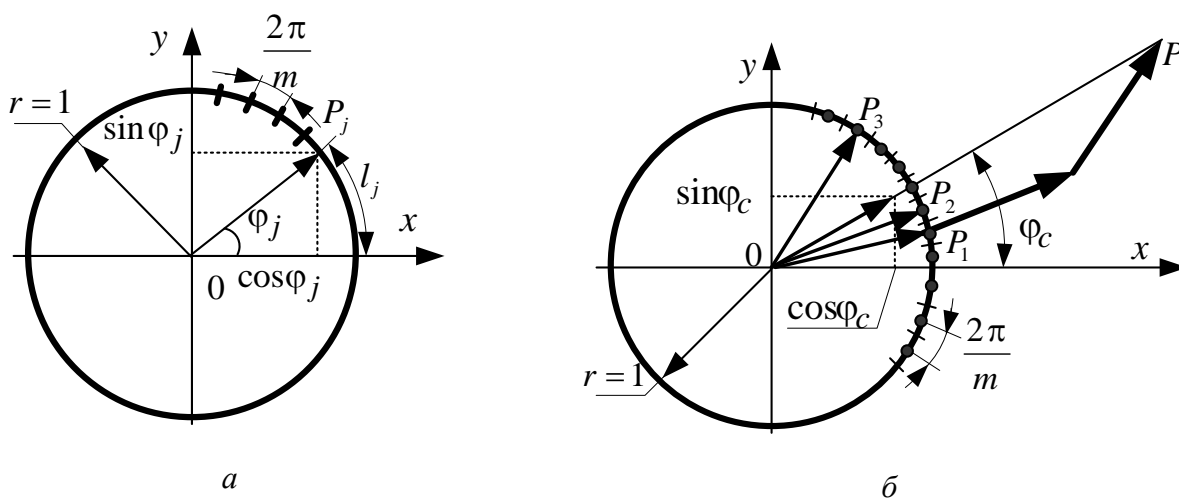


Рис. 8.8. Графічне зображення на колі результату одного вимірювання (а) та усереднення вибірки різниці ФХС об'єму  $M = 3$  (б)

Будь-яка конструктивна характеристика  $L$  кругового середнього, за якою обробляються результати фазових вимірювань, повинна задовольняти умову адитивності

$$\{L(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v)\}(\bmod 2\pi) \equiv \{L(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\}(\bmod 2\pi), v \in [0, 2\pi), \quad (8.12)$$

тобто для довільного кута  $v$  дробові частини (за модулем  $2\pi$ ) чисел  $\{L(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\}$  та  $L(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v)$  збігаються. Інакше кажучи, різниця ФХС, що задається характеристикою  $L(\varphi_1, \dots, \varphi_M)$ , повинна адитивно залежати від початкового кута  $v$ . Цій вимозі задовольняє оцінка у вигляді *вибіркової кругової середньої різниці ФХС*.

Для множини  $\{\varphi_j, j = \overline{1, M}\}$  визначимо поняття *вибіркової кругової середньої різниці ФХС* як напрямок суми всіх одиничних векторів  $\overline{OP}_1, \dots, \overline{OP}_M$ .

На рис. 8.8,б розглянуто випадок  $M = 3$ . Сумарний вектор  $\overline{OP} = \sum_{j=1}^3 \overline{OP}_j$  має

декартові координати  $\left( \sum_{j=1}^3 \cos \varphi_j, \sum_{j=1}^3 \sin \varphi_j \right)$  і характеризується вибірковою

круговим середнім  $\varphi_c$ . Фізичний зміст  $\varphi_c$  з точки зору механіки можна пояснити наступним чином. Усі одиничні вектори закінчуються точками  $P_j$  одиничного кола. Якщо всім цим точкам приписати однакову "масу"  $1/M$ , то координати "центра мас" цієї системи визначатимуться як

$$C = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos \varphi_j, \quad S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin \varphi_j. \quad (8.13)$$

Перерахунок координат вектора  $\mathbf{r}$  з декартової системи в полярну виконується відповідно до формул

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{C^2 + S^2}, \quad (8.14)$$

$$C = r \cos \varphi_c, \quad S = r \sin \varphi_c. \quad (8.15)$$

Величину  $r$  називають *вибірковою результуючою довжиною* (ВРД) вектора  $\mathbf{r}$ .

Отже, вектори  $\mathbf{r}$  та  $\overline{OP}$  розташовані у просторі під однаковим кутом  $\varphi_c$  до осі  $Ox$ . Значення  $\varphi_c$  можна обчислити як

$$\varphi_c = \mathbf{L}[S, C] = \arctg \frac{S}{C} + \frac{\pi}{2} \{2 - (\text{sign} S)(1 + \text{sign} C)\}. \quad (8.16)$$

Слід зауважити, що при  $r = 0$  значення  $\varphi_c$  в інтервалі  $[0, 2\pi)$  однозначно не визначається.

Покажемо, що при  $r > 0$  вибіркоче кругове середнє (ВКС) значення різниці ФХС  $\varphi_c$  задовільняє вимогу (8.12), а значення  $r$  не залежить від початку

відліку кутів. Дійсно, якщо кожний з векторів  $\overline{OP}_j$  (рис. 8.8,б) повернути у просторі на кут  $v \in [0, 2\pi)$ , то при цьому не зміниться значення  $r$ , а приведе лише до повороту вектора  $\mathbf{r}$  у просторі на такий же кут  $v$ . Після повороту вектора  $\mathbf{r}$  нові координати кінця вектора будуть визначатись наступним чином:

$$\overline{C} = r \cos(\varphi_c - v), \quad \overline{S} = r \sin(\varphi_c - v). \quad (8.17)$$

Неважко пересвідчитись, що

$$\overline{C} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos(\varphi_j - v) = r \cos(\varphi_c - v), \quad \overline{S} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin(\varphi_j - v) = r \sin(\varphi_c - v), \quad (8.18)$$

тобто

$$\varphi_c(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v) \equiv \{\varphi_c(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\} \pmod{2\pi}, \quad (8.19)$$

$$r(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v) = r(\varphi_1, \dots, \varphi_M), \quad (8.20)$$

що, власне, доводить властивість адитивності ВКС різниці ФХС.

Якщо покласти  $v = \varphi_c$ , то з урахуванням (8.18) отримаємо рівняння

$$\sum_{j=1}^M \sin(\varphi_j - \varphi_c) = 0, \quad (8.21)$$

яке можна використати для перевірки правильності визначення  $\varphi_c$ .

**Вибіркова кругова дисперсія різниці ФХС.** Розглянемо характеристику розсіювання випадкових кутів. Визначимо відхилення в просторі напрямку вектора  $\overline{OP}_j$  від довільного напрямку, що задається кутом  $v$ , як

$$\Delta\varphi_j = \min \left\{ (\varphi_j - v)', 2\pi - (\varphi_j - v)' \right\} = \pi - \left| \pi - (\varphi_j - v) \right|, \quad \Delta\varphi_j \geq 0, \quad (8.22)$$

де  $(\varphi_j - v)'$  – залишок (дробова частина) визначеного за модулем  $2\pi$  кута  $(\varphi_j - v)$ ,

$$(\varphi_j - v)' = (\varphi_j - v) - \left[ \frac{\varphi_j - v}{2\pi} \right] 2\pi. \quad (8.23)$$

Зручною формою подання міри характеристики розсіювання є функція  $f(\Delta\varphi) = 1 - \cos\Delta\varphi = 2\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$  кута відхилення  $\Delta\varphi$ , оскільки вона є додатною і монотонною на відрізку  $[0, \pi]$ . Тому величину

$$V(v) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M [1 - \cos(\varphi_j - v)] = \frac{2}{M} \sum_{j=1}^M \sin^2 \frac{\varphi_j - v}{2} \quad (8.24)$$

прийнято як вибіркову характеристику розсіювання множини різниці ФХС  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M\}$  відносно напрямку  $v$ . З виразу (8.24) з урахуванням (8.21) випливає, що вибіркова характеристика розсіювання відносно ВКС  $\varphi_c$  дорівнює



$$V(\varphi_c) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \{1 - \cos(\varphi_j - \varphi_c)\} = 1 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos(\varphi_j - \varphi_c) = 1 - r. \quad (8.25)$$

Величину  $V(\varphi_c) \in [0, 1]$  назвемо *вибірковою круговою дисперсією (ВКД) вибірки (статистики) різниці ФХС*  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M\}$ . З урахуванням рівняння (8.20) можна зробити висновок про інваріантність  $V(\varphi_c)$  відносно початку відліку кутів.

Із виразу (8.24) обґрунтуємо вибіркову характеристику розсіювання відносно довільного напрямку  $\nu$ :

$$V(\nu) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \{1 - \cos(\varphi_j - \nu)\} = V(\varphi_c) + 2r \sin^2 \frac{\varphi_c - \nu}{2}. \quad (8.26)$$

З аналізу виразу (8.26) слідує, що вибір  $\nu = \varphi_c$  мінімізує характеристику кругового розсіювання, останній доданок характеризує збільшення характеристики розсіювання у разі відхилення  $\nu$  від  $\varphi_c$ .

У загальному випадку при обчисленні ВРД  $r$  (отже, і значення ВКД  $V$ ) за групованими в клас-інтервали даними, отримуємо зміщену в напрямі менших значень оцінку  $r$  [8.23]. З метою зменшення цієї методичної похибки необхідно застосувати до  $r$  поправку типу *поправки Шенпарда*:  $r_g = r c_g$ , де  $c_g = \pi / m \sin \frac{\pi}{m}$ . Графік залежності  $c_g(m)$  зображено на рис. 8.9. З аналізу цього графіка слідує, що вже при  $m > 40$  поправка не перевищує значення  $c_g(40) \approx 1.001$ , отже нею можна знехтувати (далі індексом 'g' будуть позначені груповані в клас-інтервали дані для  $m < 40$ ).

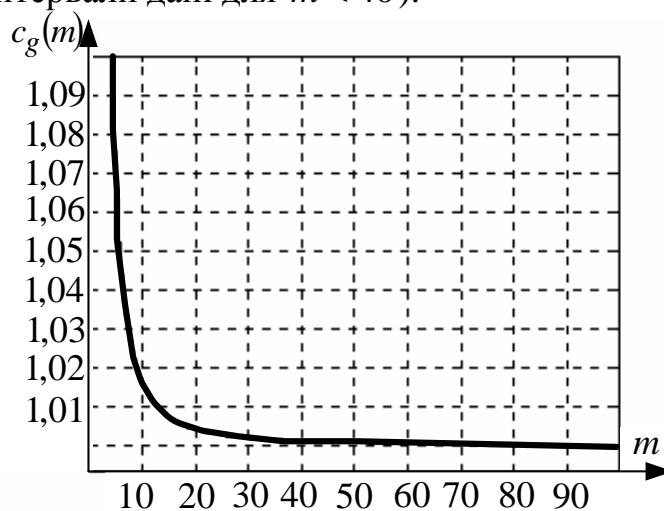


Рис. 8.9. Графік залежності  $c_g(m)$

Характеристика  $V(\varphi_c)$  має певну незручність для практичного застосування, оскільки  $V(\varphi_c)$  і  $\varphi_c$  визначаються в різних одиницях

вимірювання: перша в одиницях вимірювання довжини (в метрах, або у частках радіуса одиничного кола), а друга в одиницях вимірювання фазових зсувів (в радіанах). Однак значення  $r$  можна перевести у девіацію різниці ФХС  $\Delta\varphi$ . Для довільного симетричного відносно  $\varphi_c$  закону розподілу ймовірності  $\Delta\varphi$ , результуючий вектор  $r$  можна подати сумою двох однакових векторів, розміщених на площині під кутами  $(\varphi_c + \Delta\varphi)$  і  $(\varphi_c - \Delta\varphi)$ , як це графічно наведено на рис. 8.10. Тоді величину  $\Delta\varphi$  можна подати функцією вигляду  $\Delta\varphi = f(r)$ .

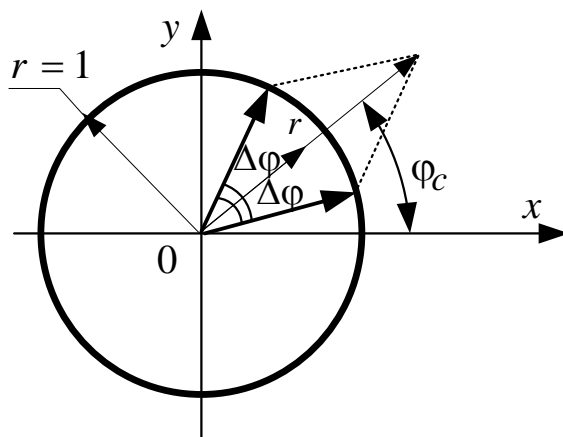


Рис. 8.10. Ілюстрація графічного представлення перетворення значень  $r$  в  $\Delta\varphi$

Для пошуку аналітичного виразу цієї функції розв'яжемо рівняння (8.13) з урахуванням (8.15) відносно  $\Delta\varphi$  ( $M = 2$ )

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot [\cos(\varphi_c + \Delta\varphi) + \cos(\varphi_c - \Delta\varphi)] &= r \cos(\varphi_c), \\ 0,5 \cdot [\sin(\varphi_c + \Delta\varphi) + \sin(\varphi_c - \Delta\varphi)] &= r \sin(\varphi_c). \end{aligned}$$

Результат розв'язку є наступним:

$$\Delta\varphi = \arccos(r). \quad (8.27)$$

Область визначення функції (8.27) обмежена інтервалом  $r \in (0, 1]$ , а область значень –  $\Delta\varphi \in [0, 0,5\pi)$ .

*Приклад 8.3.* Розглянемо застосування запропонованих вибірових характеристик для комп'ютерного моделювання задач фазових вимірювань. Для моделювання приймемо, що випадкова різниця ФХС підпорядкована розподілу Мізеса з параметрами:  $k=5$ ,  $\mu = 0$ ;  $\pm \frac{\pi}{10}$ ;  $\mp \frac{\pi}{4}$ ;  $\pm \frac{\pi}{2}$ ;  $\pm \frac{3}{4}\pi$ ;  $\pi$ .

Моделювання виконувалось в 2 етапи. На першому готувались вихідні дані – масив об'єм  $1 \times M$ , з  $M=10000$ . Підготовка даних виконувалась за викладеною в підрозділі 8.2 методикою.

Гістограму побудованого для значень  $k=5$ ,  $\mu = 0,1\pi$  вектора випадкових різниць ФХС показано на рис. 8.11. Для побудови гістограми інтервал  $[0, 2\pi)$  поділявся на 30 однакових інтервалів. Наведені на рис. 8.11 дані свідчать про коректність розрахунків і задовільний збіг теоретичного розподілу з

побудованою гістограмою.

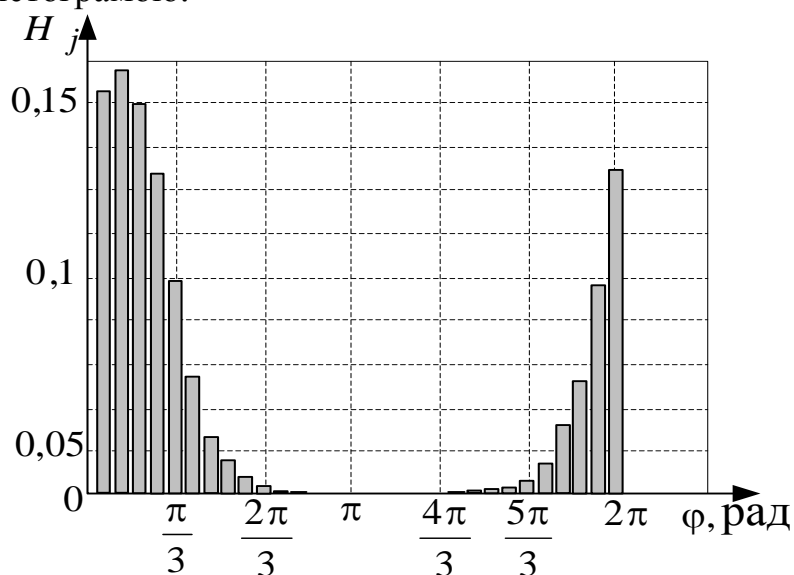


Рис. 8.11. Гістограму вектора випадкових фазових зсувів сигналів з розподілом Мізеса і параметрами  $k=5$ ,  $\mu = 0,1\pi$

Результати розрахунків вибіркових характеристик  $\varphi_c$ ,  $r$ ,  $\Delta\varphi$  для різних значень  $\mu$  наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1. Дані розрахунків прикладу 8.1

Кругова середня різниця ФХС $\mu$ , рад	Вибіркове кругове середнє різниці ФХС $\varphi_c$ , рад	Вибіркова результуюча довжина $r$	Девіація кута $\Delta\varphi$ , рад
0,3142	0,3094	0,8618	0,5320
0,7854	0,7857	0,8598	0,5359
1,5708	1,5632	0,8667	0,5223
2,3562	2,3525	0,8642	0,5272
3,1416	3,1435	0,8648	0,5261
3,9270	3,9235	0,8602	0,5351
4,7124	4,7158	0,8623	0,5311
5,4978	5,5005	0,8633	0,5289
5,9690	5,9683	0,8617	0,5321

З аналізу даних табл. 8.1 випливає, що вибіркова результуюча довжина (ВРД)  $r$  залежить тільки від параметра концентрації  $k$  і не залежить від середнього фазового зсуву  $\mu$ . Незначний розкид значень  $r$  в околі його середнього значення  $0,863^{+0,004}_{-0,003}$  викликано похибками обчислень при комп'ютерному моделюванні.

Результати моделювання підтверджують, що ВКС  $\varphi_c$ , ВРД  $r$  та девіація різниці ФХС  $\Delta\varphi$  обчислюються у всьому діапазоні зміни різниці ФХС на основі обґрунтованих вище формул.

Отримане співвідношення (8.27) є наближеним. Для деяких розподілів ймовірності існує можливість встановити більш точне співвідношення між параметрами розсіювання та ВКД  $V$ . Така можливість існує, наприклад, для намотаного гауссівського розподілу ймовірності.

*Інші статистичні характеристики.* Розглянемо характеристичні функції для  $p = 1$  намотаного гауссівського розподілу ймовірності та розподілу Мізеса у виді

$$f_1(\sigma) = \exp(-0,5\sigma^2); \quad (8.28)$$

$$f_1'(V) = r = 1 - V. \quad (8.29)$$

Для даних законів розподілів ймовірності, які мають однакові характеристики розсіювання, виконується умова  $f_1(\sigma) = f_1'(V)$ . З цієї рівності маємо

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1 - V)}. \quad (8.30)$$

У статистичному аналізі випадкових кутів цей параметр дістав назву *кругового стандартного відхилення* (КСВ) [8.14; 8.23]. В певному сенсі цей параметр нагадує середнє квадратичне відхилення випадкової величини і виражається в радіанах (або градусах). Зручність подання розсіювання таким параметром пояснює його застосування і до інших законів розподілів ймовірності випадкових кутів. На рис. 8.12 наведено графіки функцій  $\sigma(V)$  (8.30) та  $\Delta\varphi(V)$  (8.27). З графіків видно, що в інтервалі  $V \in (0, 0,3)$  розбіжність між даними функціями не перевищує 10%.

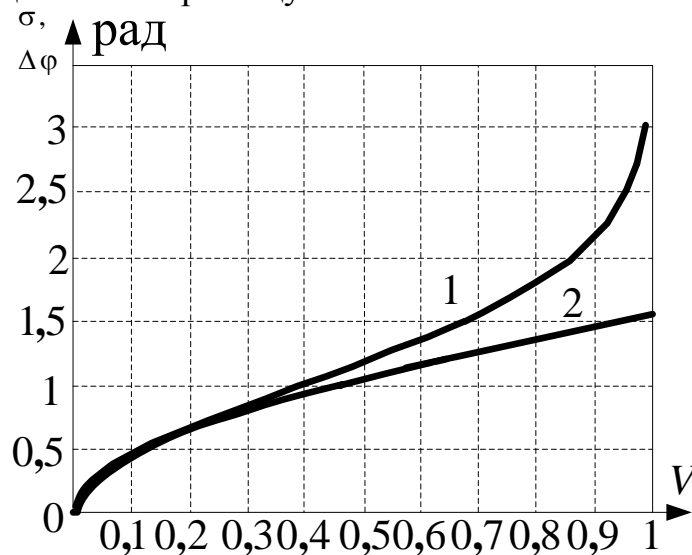


Рис. 8.12. Графіки функцій  $\sigma(V)$  (1) та  $\Delta\varphi(V)$  (2)

Крім розглянутих вище основних вибірових кругових характеристик – ВКС, ВДВ, ВКД, ВСВ, в задачах статистичного аналізу даних в дискретній фазометрії можуть бути використані інші статистичні характеристики, серед яких, в першу чергу, можна назвати вибірові медіану та моду, круговий розмах, характеристики асиметрії та ексцесу [8.3,8.23]. Кругові вибірові характеристики випадкових дискретних різниць ФХС систематизовано в табл.8.2.

Таблиця 8.2. Статистичні оцінки характеристик випадкових фазових зсувів сигналів для статистики об'єму  $M$

№	Найменування статистичної характеристики	Скорочення	Розмірність	Позначення	Зміст формули визначення
1	2	3	4	5	6
1	Вибіркове кругове середнє статистики різниць ФХС	ВКС	рад	$\varphi_c$	$\varphi_c = \{ \arctg \frac{S}{D} + \frac{\pi}{2} \{ 2 - (\text{sign } S) \times [1 + \text{sign } C] \} \} \text{ mod } 2\pi;$ $C = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos \varphi_j; \quad S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin \varphi_j$
2	Вибіркова довжина результуючого вектора	ВДВ	-	$r$	$r = \sqrt{C^2 + S^2}$
3	Вибіркова кругова дисперсія статистики різниць ФХС	ВКД	-	$V$	$V = 1 - r$
4	Кругове стандартне відхилення статистики різниць ФХС	КСВ	рад	$\sigma$	$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1 - V)} = \sqrt{-2 \ln r};$ $V = 1 - \exp(-0,5\sigma^2)$
5	Вибіркова кругова медіана статистики різниць ФХС	ВКМ	рад	$M$	Куту відповідає точка кола $P$ , діаметр $PQ$ ділить значення статистики навпіл, в околі $P$ маємо максимальну концентрацію значень
6	Вибіркова мода статистики різниць ФХС	ВМ	рад	Mode	Куту відповідає точка кола, в околі якої спостерігається максимальна концентрація значень статистики
7	Вибірковий круговий розмах статистики різниць ФХС	ВКР	рад	$W$	Довжина найменшої дуги статистики, що визначається з варіаційного ряду $T_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j, j = 1, \dots, M - 1;$ $T_M = 2\pi - \varphi_M + \varphi_1;$ $W = 2\pi - \max\{T_1, \dots, T_M\}$

1	2	3	4	5	6
8	Вибірковий тригонометричний момент порядку $u$ відносно напрямку $\alpha$ ( $u$ - ціле число)		-	$T_u(\alpha)$	$T_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{iu(\theta_j - \alpha)} = a_u(\alpha) + ib_u(\alpha) = r_u(\alpha) e^{im_u(\alpha)}; \quad u = 0, 1, 2, \dots$ $a_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos[u(\varphi_j - \alpha)] =$ $= a_u(0) \cos(u\alpha) + b_u(0) \sin(u\alpha);$ $b_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin[u(\varphi_j - \alpha)] =$ $= -a_u(0) \sin(u\alpha) + b_u(0) \cos(u\alpha);$ $r_u(\alpha) = \sqrt{a_u^2(\alpha) + b_u^2(\alpha)} =$ $= \sqrt{a_u^2(0) + b_u^2(0)} = r_u(0);$ $m_u(\alpha) = m_u(0) - u\alpha.$
9	Вибіркова характеристика асиметрії статистики різниць ФХС	ВХА	-	$g_1$	$g_1 = \frac{b_3(m)}{V^{3/2}} = \frac{r_2 \sin[m_2(0) - 2m]}{V^{3/2}}.$
10	Вибіркова характеристика ексцесу статистики різниць ФХС	ВХЕ	-	$g_2$	$g_2 = \frac{a_4(m) - (1-V)^4}{V^2} =$ $= \frac{r_2 \cos m_2(0) - 2n - (1-V)^4}{V^2}.$

\* Тут і далі передбачається, що різниці ФХС мають незмінне в часі математичне сподівання (тобто однакові середні прирости в часі).

#### 8.4. Статистичні точкові оцінки випадкових різниць ФХС

Розглянемо спочатку статистичні точкові оцінки різниць ФХС по даних вимірювання. Для їх визначення використаємо результати роботи [8.23].

**Схема вимірювального експерименту.** Обґрунтуємо схему проведення вимірювального експерименту з кутами (різницями ФХС). Розглянемо неперервну випадкову величину  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ ,  $\omega \in \Omega$  зі щільністю розподілу ймовірностей Мізеса  $p_M\left(\frac{\theta}{\mu, k}\right)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  як математичну модель спостережень випадкових різниць ФХС.

Для проведення серії  $M$  незалежних вимірювань за однаковими умовами маємо модель статистичного вимірювального експерименту у вигляді випадкового вектора

$$\boldsymbol{\psi}(\omega) = (\psi_1(\omega), \dots, \psi_M(\omega)), \quad \omega \in \Omega \quad (8.31)$$

з  $M$  незалежними і однаково розподіленими випадковими кутами. У математичній статистиці такий вектор розглядається як випадкова вибірка обсягом  $M$ .

Для випадкового вектора  $\boldsymbol{\psi}(\omega)$  маємо сумісний розподіл щільності ймовірності

$$p_M\left(\theta_1, \dots, \theta_M / \mu, k\right) = \prod_{i=1}^M p_M\left(\theta_i / \mu, k\right), \quad \theta_i \in [0, 2\pi). \quad (8.32)$$

Для дискретних кутових вимірювань розглядається параметрична сім'я вкладених в  $\boldsymbol{\psi}(\omega)$  випадкових кутів зі скінченною множиною значень, що утворюється після розбиття неперервного інтервалу  $[0, 2\pi)$  на  $m$  рівномірних підінтервалів (секторів) розміром  $\frac{2\pi}{m}$ . Попаданню значення  $\psi(\omega)$  у  $j$ -й сектор,

тобто випадковій події  $\frac{2\pi}{m}\left(j - \frac{1}{2}\right) \leq \psi(m) < \frac{2\pi}{m}\left(j + \frac{1}{2}\right)$ , ставиться у відповідність

(приписується) тільки одне значення кута –  $\theta(j) = \frac{2\pi}{m}j$ ,  $j = \overline{0, (m-1)}$ . Таким

чином, замість первинної неперервної випадкової величини  $\boldsymbol{\psi}(\omega)$  маємо дискретну випадкову величину  $\boldsymbol{\psi}_d(\omega) \in \left\{0, \dots, \frac{2\pi}{m}j, \dots, \frac{2\pi}{m}(m-1)\right\}$  з ймовірностями

$$P_j = P\left\{\frac{2\pi}{m}\left(j - \frac{1}{2}\right) \leq \psi(m) < \frac{2\pi}{m}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right\} = \int_{\frac{2\pi}{m}(j-0.5)}^{\frac{2\pi}{m}(j+0.5)} p_M\left(\frac{\theta}{\mu, k}\right) d\theta. \quad (8.33)$$

Проведення серії  $M$  незалежних вимірювань за однакових умов породжує випадковий вектор (8.31) з областю значень

$$\Theta_d = \left\{(\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_M) : \theta_i = \frac{2\pi}{m}j, \quad j = \overline{0, (m-1)}\right\}. \quad (8.34)$$

Розбиття неперервного інтервалу  $[0, 2\pi)$  на  $m$  секторів потенційно задає точність кутових вимірювань. Нижче розглядаються лише дискретні вимірювання, тому для спрощення виразів індекс “д” в позначенні випадкових векторів не наводиться.

Необхідно визначити оцінки параметрів розподілу  $p_M\left(\frac{\theta}{\mu, k}\right)$  за критерієм максимуму правдоподібності.

**Найбільш правдоподібна оцінка параметра  $\mu$  (різниці ФХС).** Враховуючи (8.32) та (7.22) представимо логарифм функції правдоподібності, яка уявляє сумісний розподіл щільності ймовірності (8.32), виразом

$$\ln L(\mu, k) = -M \ln 2\pi - M \ln I_0(k) + k \sum_{i=1}^M \cos(\theta_i - \mu). \quad (8.35)$$

Диференціюванням (8.35) по  $\mu$  отримаємо

$$\frac{\partial \ln L(\mu, k)}{\partial \mu} = k \sum_{i=1}^M \sin(\theta_i - \mu). \quad (8.36)$$

Прирівнявши нулю похідну (8.36) отримаємо

$$\cos \mu \sum_{i=1}^M \sin \theta_i = \sin \mu \sum_{i=1}^M \cos \theta_i. \quad (8.37)$$

Отже найбільш правдоподібною оцінкою параметра  $\mu$  є середнє кругове значення, яке в інтервалі  $[0, 2\pi)$  визначається за формулою (8.16).

**Найбільш правдоподібна оцінка параметра  $k$  (розсіювання).** Диференціюванням (8.35) по  $k$  отримаємо

$$\frac{\partial \ln L(\mu, k)}{\partial k} = -M \frac{I_0'(k)}{I_0(k)} + \sum_{i=1}^M \cos(\theta_i - \mu). \quad (8.38)$$

З теорії функцій Бесселя відомо, що  $I_0'(k) = I_1(k)$ . Врахувавши це, а також прирівнявши похідну (8.38) нулю отримаємо

$$\frac{I_1(k)}{I_0(k)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \cos(\theta_i - \mu) = r = \sqrt{C^2 + S^2}. \quad (8.39)$$

Графік залежності  $r = f(k)$  наведено на рис. 8.13. Цей графік співпадає з приведеною в [8.23] такою залежністю у вигляді таблиці.



Рис. 8.13. Графік залежності  $r = f(k)$



Для наближених аналітичних розрахунків цій же роботі рекомендовані наступні вирази:

для близьких до нуля значень ( $r < 0.45$ )

$$k \approx \frac{1}{6}r(12 + 6r^2 + 5r^4), \quad (8.40)$$

для значень близьких до одиниці ( $r > 0.8$ )

$$k = \frac{1}{2(1-r) - (1-r)^2 - (1-r)^3}. \quad (8.41)$$

Для значних об'ємів статистики  $M$  ( $M > 10000$ ) отримані оцінки  $\mu$  та  $k$  розподілені за гауссівськими розподілами ймовірності з дисперсіями відповідно [8.23]

$$\sigma^2(\mu) = \frac{I_0(k)}{MkI_1(k)}, \quad (8.42)$$

$$\sigma^2(k) = \frac{k}{M \left( k - k \left( \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \right)^2 - \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \right)}. \quad (8.43)$$

З аналізу (8.42) слідує, що дисперсія оцінки середнього кута залежить не тільки від об'єму статистики  $M$ , але й від параметру  $k$  концентрвції розподілу ймовірності Мізеса – з ростом  $k$  значення  $\sigma^2(\mu)$  зменшується. Крім того в роботі [8.23] показано, що для малих значень  $k$  маємо наближення  $\sigma^2(\mu) \approx \frac{2}{Mk^2}$ , в той

час як для великих значень  $k$  маємо  $\sigma^2(\mu) \approx \frac{1}{Mk}$ . Така залежність дисперсії оцінки середнього кута від параметра концентрації  $k$  є природною: при малих  $k$  розподіл ймовірності Мізеса наближається до рівномірного, отже середнє значення випадкового кута оцінюється з низькою точністю.

## 8.5. Статистичні інтервальні оцінки різниці ФХС з гауссівським намотаним розподілом ймовірності

Розглянемо особливості застосування статистичних методів обробки кутових величин у фазовимірювальному експерименті і запропоновані в працях [8.19; 8.20] методики метрологічної оцінки результатів кутових спостережень, за умов наявності/відсутності апріорних відомостей про їх закони розподілу ймовірностей.

Визначення показників якості (довірчої ймовірності та довірчого інтервалу) та розробка методики проведення статистичного аналізу результатів кутових вимірювань виконується таким чином.

Проводиться серія із  $M$  незалежних вимірювань випадкової величини  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$  зі щільністю розподілу ймовірностей  $p(x)$ . Вимірювання проводиться за незмінних умов. Відбувається рівномірне квантування значень кутів з кроком  $\frac{2\pi}{m}$ . Результатом вимірювань є вибірка (статистика) значень кута  $\{\varphi_i, i = \overline{1, M}\}$  об'єму  $M$ , яка розглядається як реалізація випадкового вектора  $\Psi(\omega) = (\psi_1(\omega), \dots, \psi_M(\omega))$  з  $M$  незалежними випадковими компонентами. Необхідно обчислити статистичні параметри середнього значення статистики, а також визначити параметри якості результату у вигляді довірчої ймовірності та довірчого інтервалу, що у сукупності є результатом статистичної обробки відповідної статистики.

Для оцінки ВКС статистики розсіювання кутів скористаємося такими характеристиками як ВКС та ВКД, які детально розглядались в підрозділі 8.4.

Проілюструємо застосування характеристик ВКС та ВКД у задачах кутових (фазових) вимірювань рядом прикладів.

*Приклад 8.4.* Для випадкової різниці ФХС  $\psi(\omega)$ , яка має намотаний гауссівський закон розподілу ймовірності значень з параметрами:  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0,5\pi$  задається вибірка (статистика) значень різниці ФХС (кута) об'ємом  $M = 10000$ . Для отриманої статистики розрахуємо значення вибіркових кутових середнього, дисперсії та стандартного відхилення.

Виконаємо генерування значень кута методом оберненої функції за викладеною в [8.4] та підрозділі 8.2 методикою. Перші 100 ( $M' = 100$ ) реалізацій кута наведено в табл. 8.3.

**Таблиця 8.3. Результати генерування реалізацій випадкового кута з намотаним гауссівським законом розподілу ймовірності**

№	$\varphi_i$	№	$\varphi_i$	№	$\varphi_i$	№	$\varphi_i$	№	$\varphi_i$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
1	3.4696	21	5.9295	41	3.1598	61	2.0819	81	2.9086
2	1.9766	22	1.6034	42	2.2346	62	0.3085	82	2.0651
3	0.6104	23	1.5623	43	1.2327	63	2.8270	83	2.3815
4	0.1437	24	0.7495	44	0.5723	64	1.1211	84	2.0802
5	1.2718	25	0.7369	45	1.9731	65	1.3443	85	2.0246
6	2.1725	26	0.9106	46	1.6277	66	2.3228	86	1.4168
7	2.3693	27	2.5676	47	2.6744	67	1.7719	87	1.9867
8	1.0780	28	3.4477	48	3.5766	68	0.2342	88	1.9164
9	1.5416	29	3.2433	49	2.0942	69	0.7855	89	3.5771
10	3.0048	30	6.0785	50	3.4766	70	2.3876	90	2.6703
11	5.8776	31	2.3857	51	0.3448	71	1.5325	91	2.0576
12	2.2714	32	2.7073	52	2.9323	72	5.5778	92	3.5380

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	2.3607	33	1.1987	53	1.5276	73	0.9192	93	2.2925
14	1.2744	34	6.0318	53	0.6217	74	1.9777	94	2.6546
15	1.1501	35	1.0464	55	0.8426	75	1.7993	95	1.3688
16	2.2632	36	1.0460	56	2.4173	76	1.5668	96	0.8209
17	2.4925	37	2.8130	57	1.4158	77	1.4307	97	2.4914
18	0.4850	38	6.2273	58	1.7216	78	0.7659	98	0.8912
19	1.5876	39	2.3422	59	1.3449	79	2.7634	99	0.6091
20	1.7842	40	2.6624	60	1.3576	80	0.9542	100	0.8216

Виконані за формулами (8.27), (6.36) розрахунки дають значення:

$$C = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \cos \varphi_i \approx 0,0879, \quad S = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \sin \varphi_i \approx 0,5964,$$

$$\varphi_c = \mathbf{L}(S, C) \approx 1.7172 \text{ рад.}$$

Перевірка умови (8.34) дає величину  $\sum_i \sin(\varphi_i - \varphi_c) \approx 10^{-14}$ , що

підтверджує правильність визначення  $\varphi_c$ . Розрахунки характеристик ВДВ, ВКД та КСВ заданої статистики дають наступні результати:

$$r = \sqrt{C^2 + S^2} = \sqrt{(-0,0879)^2 + 0,5964^2} \approx 0,6028,$$

$$V = 1 - r \approx 1 - 0,6028 \approx 0,3972,$$

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln r} \approx \sqrt{-2 \ln 0,6028} \approx 1,0061 \text{ рад.}$$

Приклад 8.4 ілюструє обчислення ВКС  $\varphi_c$  та ВКД  $\sigma$  одиничного результату. Дисперсія усередненого (на колі) результату повинна бути значно меншою за дисперсію одиничного результату. Визначимо ВКД  $V_c$  для ВКС  $\varphi_c$ .

Вибіркове кругове середнє є випадковою величиною, розподіленою за певним законом. Відомо, що в силу властивості відтворюваності арифметичне середнє  $M$  незалежних випадкових величин з гауссівським законом розподілу ймовірності  $(\mu, \sigma)$  є випадковою величиною з тим же типом закону розподілу і параметрами  $(\mu, \sigma_c)$ , де  $\sigma_c = \sigma/\sqrt{M}$  [8.23]. Перевіримо, чи зберігається ця властивість для усереднення на колі. Оскільки точний аналітичний розв'язок такої задачі знайти важко, виконаємо перевірку методом комп'ютерного моделювання.

Приклад 8.5. Скористаємось вихідними даними прикладу 8.4. Розіб'ємо статистику  $\varphi_i, i = \overline{1, 10000}$  на  $n_r = 100$  груп кожна обсягом  $\frac{M}{n_r} = 100$ . Для кожної  $q$ -ї групи розрахуємо  $\varphi_{c,q}$ . Для отриманої множини  $\{\varphi_{c,q}, q = \overline{1, n_r}\}$  виконаємо розрахунки, аналогічно розрахункам прикладу 8.4:

$$C_{\Gamma} = \frac{1}{n_{\Gamma}} \sum_{q=1}^{n_{\Gamma}} \cos \varphi_{c,q} = \frac{1}{100} \sum_{q=1}^{100} \cos \varphi_{c,q} = 0,5438;$$

$$S_{\Gamma} = \frac{1}{n_{\Gamma}} \sum_{q=1}^{n_{\Gamma}} \sin \varphi_{c,q} = \frac{1}{100} \sum_{q=1}^{100} \sin \varphi_{c,q} = 99,4685;$$

$$\varphi_{c,\Gamma} = \mathbf{L}(S_{\Gamma}, C_{\Gamma}) = 1,5653 \text{ рад};$$

$$r_{\Gamma} = \sqrt{C_{\Gamma}^2 + S_{\Gamma}^2} = 0,9947;$$

$$\sigma_{\Gamma} = \sqrt{-2 \ln(r_{\Gamma})} = 0,1031 \text{ рад}.$$

Отже, для вихідної послідовності маємо КСВ  $\sigma = 1$  рад, а для ВКС  $\varphi_c$  –  $\sigma \approx 0,10$  рад, тобто маємо

$$\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{M}}. \quad (8.44)$$

Таким чином, результатами моделювання підтверджено, що у разі усереднення на колі  $M$  статистично незалежних результатів вимірювання випадкового кута значення КСВ вибіркового середнього зменшується в  $\sqrt{M}$  разів.

Цей результат можна розповсюдити на характеристики  $r$  і  $V$ . З урахуванням (8.43), (8.44) маємо

$$\ln(1 - V) = M \ln(1 - V_c), \quad (8.45)$$

звідки отримаємо

$$V_c = 1 - \sqrt[M]{1 - V}, \quad (8.46)$$

$$r_{cp} = \sqrt[M]{r}. \quad (8.47)$$

З метою оцінки довірчого інтервалу для  $\varphi_c$  розглянемо значення кута

$\varphi_i = \varphi_i - \mu + \pi$ ,  $i = \overline{1, n}$ , зведених до центру інтервалу  $[0, 2\pi)$ . Через незалежність вибіркової кругової дисперсії від початкового напрямку цей кут підпорядкований намотаному гауссівському розподілу ймовірності з параметрами  $(\pi, \sigma)$ . Після усереднення на колі розподіл випадкового кута

$\alpha = \varphi_c - \mu + \pi$ , який характеризує розкид значень  $\varphi_c$  навколо заданого значення кута  $\mu$ , також підпорядкований намотаному гауссівському закону, який з урахуванням (4.52) має параметри  $(\pi, \sigma_c)$ . Для  $n > 100$  маємо  $\sigma_c \ll \sigma$ , що дозволяє апроксимувати намотаний гауссівський закон розподілу гауссівським розподілом з тими ж параметрами  $(\pi, \sigma)$  і визначити довірчий

інтервал через інтеграл Лапласа за стандартною методикою, прийнятою для обробки лінійних величин.

*Приклад 8.6.* Для даних прикладу 8.4 необхідно знайти довірчий інтервал  $\alpha_{\text{дов}}$  для ймовірності  $P_{\text{дов}} = 0,95$  і подати результати статистичної обробки кутів.

З таблиць функції Лапласа [8.12] маємо  $\frac{\alpha}{\hat{\sigma}} = 1,97$ , звідки  $\alpha_{\text{дов}} = 0.197 \approx 0.20$  рад. Отже, остаточно маємо результат:

нижня границя –  $\varphi_{\text{н}} = (\varphi - \alpha_{\text{дов}}) \bmod 2\pi \approx 1,72 - 0,20 \approx 1,52$  рад;

верхня границя –  $\varphi_{\text{в}} = (\varphi_{\text{с}} + \alpha_{\text{дов}}) \bmod 2\pi \approx 1,72 + 0,20 \approx 1,92$  рад;

довірча ймовірність –  $P_{\text{дов}} = 0,95$ .

Визначений інтервал містить дійсне значення  $\mu = 0.5\pi \approx 1,5708$  рад.

У випадку формування інтервальної оцінки кута за повною вибіркою ( $M = 10000$ ) слід прийняти ВКС рівним  $\varphi_{\text{с}} = 1,5653$  рад (приклад 8.4), а КСВ

визначити як  $\frac{\sigma}{\sqrt{M}} \approx \frac{1,0061}{100} \approx 0,010$  рад. Маємо результат:

нижня границя –  $\varphi_{\text{н}} \approx 1,57 - 0,01 \approx 1,56$  рад;

верхня границя –  $\varphi_{\text{в}} \approx 1,57 + 0,01 \approx 1,58$  рад;

довірча ймовірність –  $P_{\text{дов}} = 0,95$ .

Отримані результати дозволяють запропонувати методику статистичної обробки кутових вимірювань, яка містить такі етапи.

1. Розрахунок сум  $C$  та  $S$  за формулами (4.31).

2. Розрахунок вибіркового кругового середнього  $\varphi_{\text{с}} = \mathbf{L}[S, C]$  (8.16).

3. Перевірка виконання умови (8.21) для підтвердження правильності визначення  $\varphi_{\text{с}}$ .

4. Визначення ВКД  $V = 1 - r$  одного кутового вимірювання за формулами (8.25). У разі потреби значення ВРД  $r$  коригують поправкою  $c_g$ .

5. Розрахунок кругового стандартного відхилення  $\sigma$  (8.30).

6. Визначення кругового стандартного відхилення  $\sigma$  (8.44) кругового середнього вибірки об'ємом  $M$ .

7. Вибір рівня значущості (довірчої ймовірності)  $P_{\text{дов}}$ .

8. Розрахунок границі  $\alpha_{\text{дов}}$  довірчого інтервалу за обраною ймовірністю  $P_{\text{дов}}$  і функцією Лапласа.

9. Формування результату обробки:

нижня границя довірчого інтервалу –  $(\varphi_{\text{с}} - \alpha_{\text{дов}}) \bmod 2\pi$ ;

верхня границя довірчого інтервалу –  $(\varphi_{\text{с}} + \alpha_{\text{дов}}) \bmod 2\pi$ ;

довірча ймовірність –  $P_{\text{дов}}$ .

За результатами виконаного аналізу можна зробити такі висновки.

Одержано інтервальні оцінки випадкової різниці ФХС при їх усередненні на колі. Оцінки отримано з використанням характеристик ВКС, ВКД та КСВ.

Під час усереднення на колі суми  $n$  статистично незалежних випадкових кутів КСВ усередненого кута (різниці ФХС) зменшується в  $\sqrt{M}$  разів, що підтверджено результатами моделювання. Це дозволяє обґрунтувати використання для оцінки довірчих інтервалів кутових величин відомої методики розрахунку довірчих інтервалів лінійних випадкових величин, яка для гауссівського розподілу ймовірності базується на використанні інтеграла Лапласа.

### 8.6. Статистичні інтервальні оцінки різниці ФХС для довільних законів розподілу ймовірності

В значній частині випадків, за умов обмежених статистик кутів, експериментально перевірити гіпотезу щодо належності закону розподілу випадкового кута до гауссівського, неможливо, а логічні обґрунтування цієї гіпотези непереконливі і сумнівні. Розглянемо особливості статистичного аналізу результатів вимірювання випадкових кутів і метрологічної оцінки результатів кутових вимірювань за відсутності апріорних відомостей про їх закони розподілів ймовірностей.

За умов апріорної невизначеності закону розподілу досліджуваного кута задача визначення характеристик точності та визначення результату вимірювання формулюється в наступній постановці [8.20]. Проводиться серія з  $M$  незалежних вимірювань випадкової кутової величини  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$  з невідомим законом розподілу ймовірностей. Вимірювання виконуються за незмінних умов. Під час вимірювання відбувається рівномірне квантування значень кутів з кроком  $\frac{2\pi}{m}$ . Результатом вимірювань є вибірка  $\{\varphi_i, i = \overline{1, M}\}$  об'єму  $M$ , яка розглядається як реалізація випадкового вектора (8.8) з  $M$  незалежними випадковими компонентами.

Необхідно обчислити статистичну оцінку ВКС кута, визначити параметри якості – довірчу ймовірність та довірчий інтервал, що у сукупності складають результат обробки.

Практика аналізу задач статистичної фазометрії підтвержує, що реальні закони розподілу випадкових кутів можуть відрізнятися від гауссівського. Крім того, в реальних вимірюваннях маємо обмежені об'єми статистик, що не дає можливості провести гістограмний аналіз і пересвідчитись у належності розподілу до того чи іншого закону.

За умов невідомого розподілу ймовірності вимірюваних різниць ФХС і наявності статистик обмежених об'ємів, оцінку довірчого інтервалу  $\alpha_{\text{дов}}$  і довірчої ймовірності  $P_{\text{дов}}$  можна визначити на основі використання аналога нерівності Чебишева на колі [8.23]:

$$P\left\{\left|\sin \frac{\psi(\omega) - \mu_1}{2}\right| > \varepsilon\right\} < \frac{\nu}{2\varepsilon^2}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad 0 < \frac{\nu}{2\varepsilon^2} < 1, \quad (8.48)$$

де  $\nu$  – кругова дисперсія випадкового кута  $\psi(\omega)$ ,  $0 \leq \nu \leq 1$ ,  $\mu_1$  – кругове середнє значення кута, яке обраховується з тригонометричного моменту першого порядку відносно нульового напрямку тобто  $\mu_1 = \arg(\hat{\tau}_1)$ . Нерівність (8.48) виконується при  $|\hat{\tau}_1| > 0$ . Її можна інтерпретувати таким чином: ймовірність події  $\left|\sin \frac{\psi(\omega) - \mu_1}{2}\right| > \varepsilon$  не перевищує величину  $\frac{\nu}{2\varepsilon^2}$  за довільної функції розподілу випадкового кута  $\psi(\omega)$ .

Для формування  $\alpha_{\text{дов}}$  зручнішою є інша форма цієї нерівності:

$$P\left\{\left|(\psi(\omega) - \mu_1 + \pi) \bmod 2\pi - \pi\right| > 2 \arcsin\left(\varepsilon_1 \sqrt{\frac{\nu}{2}}\right)\right\} < \frac{1}{\varepsilon_1^2}, \quad 0 < \varepsilon_1 < \sqrt{\frac{2}{\nu}}. \quad (8.49)$$

Із формули (8.49) згідно з [8.20] маємо

$$\alpha_{\text{дов}}(\nu) = 2 \arcsin\left(\varepsilon_1 \sqrt{\frac{\nu}{2}}\right), \quad (8.50)$$

Ймовірності  $P(\cdot)$  в (8.49) відповідає ймовірність  $1 - P_{\text{дов}}$ . Зміст параметрів  $\alpha_{\text{дов}}$  та  $P_{\text{дов}}$  на прикладі заданої щільності розподілу ймовірності кутів  $p(\theta)$  ілюструє рис. 8.14.

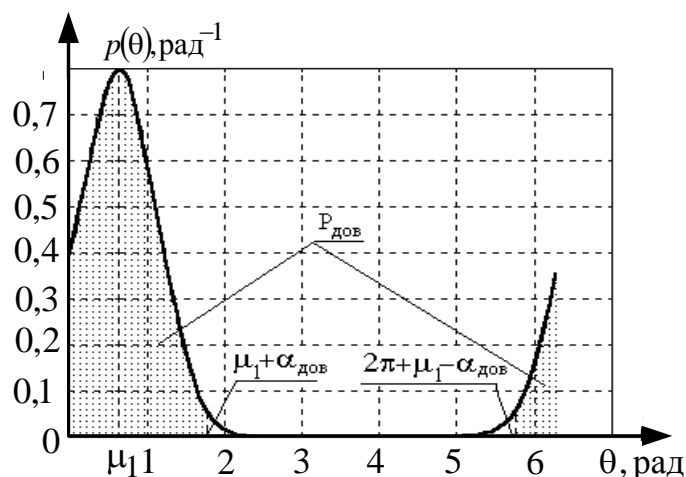


Рис. 8.14. Графік щільності розподілу ймовірності кутів  $p(\theta)$  з визначеними параметрами

$\Delta\varphi_{\text{дов}}$  та  $P_{\text{дов}}$

Інтервал довжиною  $2\alpha_{\text{дов}}$  з центром в точці  $\theta = \mu_1$  охоплює ту частину розподілу, в якій зосереджено основну частину (з ймовірністю  $P_{\text{дов}}$ ) можливих значень випадкового кута. Якщо в (8.50) підставити граничне значення  $\varepsilon_1 = (1 - P_{\text{дов}})^{-0.5}$ , отримаємо залежність

$$\alpha_{\text{дов}}(\nu) = 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{\nu}{2(1 - P_{\text{дов}})}} \right). \quad (8.51)$$

Графіки функції (8.51) для різних значень  $P_{\text{дов}}$  показано на рис. 8.15.

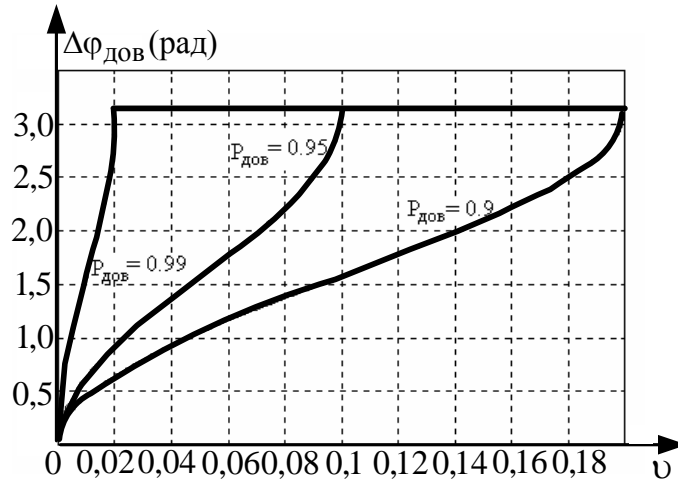


Рис. 8.15. Графік функцій  $\Delta\varphi_{\text{дов}} = f(\nu)$  для  $P_{\text{дов}} = 0,9; 0,95; 0,99$

Залишилось нез’ясованим питання: як знайти статистичні оцінки  $\mu_1$  та  $\nu$  - тобто як перейти від теорії до практики вимірювань? Необхідні оцінки значень  $\mu_1$  та  $\nu$  для визначення  $\alpha_{\text{дов}}$  та  $P_{\text{дов}}$  можна отримати з вибірки  $\{\varphi_j, j = \overline{1, M}\}$  як ВКС  $\varphi_c$  і ВКД  $V \in [0, 1]$ , формулами для визначення яких наведеними у таблиці 8.2.

У випадку, коли довжина результуючого вектора обчислюється за результатами групованих в клас-сектори кутових даних, необхідно застосовувати поправку на групування даних типу поправки Шеппарда  $c_g$ , тобто визначають довжину результуючого вектора як  $r_g = r c_g$  [8.23]. Для множини кутів  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_M\}$  та кута  $\varphi_c$  у випадку групованих даних маємо

$$V_g = 1 - r_g. \quad (8.52)$$

$$V_{c.g} = 1 - M \sqrt{r_g}. \quad (8.53)$$

Нерівність (8.49) з використанням вибірових характеристик  $\varphi_c$  та  $V_{c.g}$  можна представити наступним чином

$$P \left\{ \left| (\psi - \varphi_c + \pi) \bmod 2\pi - \pi \right| > 2 \arcsin \left( \varepsilon_1 \sqrt{\frac{V_{c.g}}{2}} \right) \right\} < \frac{1}{\varepsilon_1^2}, \quad 0 < \varepsilon_1 < \sqrt{\frac{2}{V_{c.g}}}. \quad (8.54)$$

На основі нерівності (8.54), користуючись експериментальними даними, можна оцінити  $\alpha_{\text{дов}}$  та  $P_{\text{дов}}$ . Послідовність операцій обчислень значень  $\varphi_c$  та  $\alpha_{\text{дов}}$  наведена на рис. 8.16.



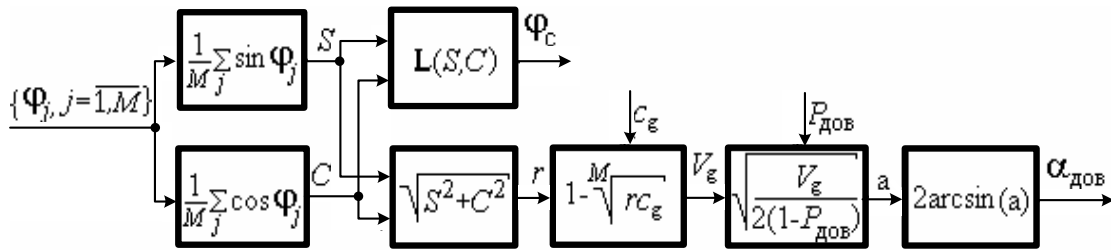


Рис. 8.16. Послідовність обчислень значень  $\varphi_c$  і  $\alpha_{\text{дов}}$

Однією з задач статистичної фазометрії є обґрунтування довірчої ймовірності  $P_{\text{дов}}$  при оцінці характеристик точності фазових вимірювань. У праці [8.27] наведено рекомендації щодо вибору  $P_{\text{дов}}$  для обробки результатів вимірювання випадкових величин. Використаємо наведену схему обґрунтування  $P_{\text{дов}}$  для кутових вимірювань. Розглянемо графічне подання результатів вимірювань випадкового кута точками на одиничному колі (рис. 8.17).

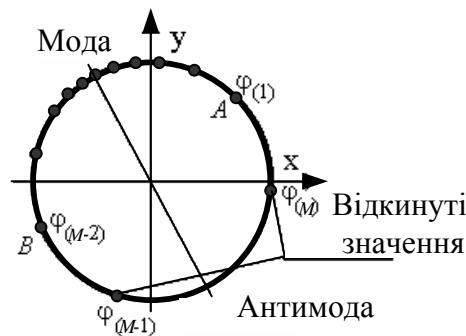


Рис. 8.17. Ілюстрація характеристик кутових вимірювань на одиничному колі

Припустимо, що отримано статистику випадкового кута об'єму  $M$ . Представимо її у вигляді варіаційного ряду:  $0 \leq \varphi_{(1)} < \varphi_{(2)} < \dots < \varphi_{(i)} < \dots < \varphi_{(M)} < 2\pi$ . Будемо вважати, що значення варіаційного ряду розділяють область значень випадкового кута на  $M$  напівінтервалів різної величини, але з однаковою ймовірністю  $1/M$  попадання значень випадкового кута у ці підінтервали. Тоді кожне зі значень  $\varphi_{(i)}$  можна прийняти як оцінку  $\left(\frac{i}{M}\right) \cdot 100\%$ -ної квантилі.

На рис. 8.17 маємо  $M = 13$ , а ймовірність попадання значень випадкового кута у ці підінтервали –  $1/13$ . Вибірковий круговий розмах для представленої на рисунку статистики визначається як:  $W = 2\pi - \varphi_{(M)} + \varphi_{(n-1)}$ .

Оскільки всі напівінтервали містять хочаб одне значення кута (різниця ФХС), довірча ймовірність для напівінтервалу  $[0, 2\pi)$  дорівнює  $P_{\text{дов}} = 1$ . Але такий результат є беззмисовним. Більш важливим є визначення довірчого інтервалу значно меншого за  $2\pi$  і відповідної довірчої ймовірності. Практичне

визначення довірчого інтервалу зводиться до того, що відкидаються найбільш “ненадійні” відліки, тобто такі, які найбільш віддалені від центру концентрації (моди або медіани розподілу). Підсумовуючи результати розгляду питання визначення довірчого інтервалу випадкової кутної величини дамо наступне означення.

**Означення 8.2.** *Довірчим інтервалом статистики випадкового кута є довжина найменшої дуги кола одиничного радіуса, що включає найбільш достовірні значення цієї статистики.*

Отже при визначенні довірчого інтервалу з отриманої статистики слід вилучати малоймовірні відліки – певну кількість  $n_B$  ненадійних відліків. Тоді для довірчої ймовірності маємо:

$$P_{\text{дов}} < \frac{M - n_B}{M}. \quad (8.55)$$

Якщо в представленій на рис.8.17 статистиці вважати малоймовірними два найближчих до антимоди значення, тобто  $\varphi(M-1)$  та  $\varphi(M)$ , то довірчий інтервал буде визначатись половиною дуги  $\cup AB$  з довірчою ймовірністю  $P_{\text{дов}} = 11/13$ .

Слід відзначити, що достовірність оцінки довірчого інтервалу за заданої  $P_{\text{дов}}$  зростає зі збільшенням  $M$ . Тому оцінки  $\alpha_{\text{дов}}$  для великих значень  $P_{\text{дов}}$  визначаються для великих об’ємів  $M$ .

Для малих значень  $M$  фактична довірна ймовірність може виявитись набагато меншою. Тому для підвищення достовірності визначення довірчих інтервалу та ймовірності можна вважати напівінтервал в околі антимоди таким, що не містить відліків кута. Для такої умови маємо

$$P_{\text{дов}} < \frac{M - n_B - 1}{M}. \quad (8.56)$$

Дані для верхньої межі  $P_{\text{дов}}$  при  $n_B = 2$ , яка може бути теоретично досягнута для вибірки кутів об’єму  $M$  у відповідності до (8.56), наведено в табл. 8.4.

**Таблиця 8.4. Рекомендована верхня межа  $P_{\text{дов}}$  для різних значень  $M$**

$P_{\text{дов}}$	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995	0,997
$n$	15	30	60	150	300	600	1000

Дані таблиці 8.4 співпадають з даними  $P_{\text{дов}}$  та  $M$ , отриманими в [8.27] для випадку обробки випадкових величин. Наведені в таблиці дані встановлюють верхню межу  $P_{\text{дов}}$  для заданого об’єму статистики. Наприклад, для  $M = 60$  значення ймовірності  $P_{\text{дов}}$  не може перевищувати 0,95.

Ще одна особливість визначення  $\alpha_{\text{дов}}$  на колі пов’язана з тим, що в межах інтервалу  $[0, 2\pi)$  розподіли можуть мати скінченні, не нульові, значення щільності розподілу ймовірності в околі антимоди. Тому навіть за помітного

групування кутів в околі моди для значних  $P_{\text{дов}}$  довірчий інтервал прямує до своєї межі, тобто  $2\alpha_{\text{дов}} \rightarrow 2\pi$ . Це твердження ілюструє рис. 8.18.

На рис. 8.18 зображено графіки щільності намотаних гауссівських законів розподілу ймовірності випадкових кутів зі значенням параметрів  $\mu = \pi$  і  $\sigma = 0,5; 1,0; 1,5$ . Цим законам розподілу за умови незмінного значення  $P_{\text{дов}}$  відповідають довірчі інтервали  $2\alpha_{\text{дов.1}}, 2\alpha_{\text{дов.2}}, 2\alpha_{\text{дов.3}}$ , які зі збільшенням  $\sigma$  займають все більшу частину інтервалу  $[0, 2\pi)$ .

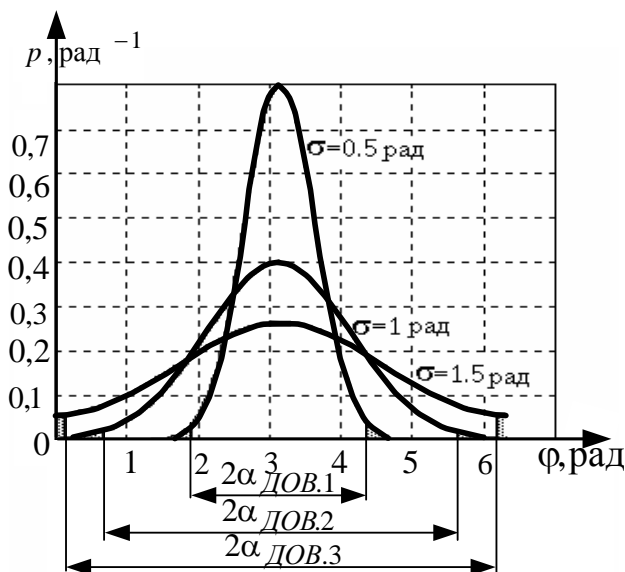


Рис. 8.18. Графіки щільностей розподілу ймовірності, що ілюструють процес визначення довірчих інтервалів

Отримані результати дозволяють запропонувати методику обробки кутових спостережень за апріорно невідомого закону розподілу ймовірності кутів.

1. Розрахунок сум  $C$  та  $S$  за формулами (8.13).
2. Розрахунок вибіркового кругового середнього  $\varphi_c = L[S, C]$  (8.16).
3. Перевірка виконання умови (8.21), що підтверджує коректність визначення  $\varphi_c$ .
4. Визначення ВКД  $V_g$  для групованих даних (8.52).
5. Вибір рівня значущості (довірчої ймовірності)  $P_{\text{дов}}$  за даними табл. 8.4.
6. Розрахунок границі  $\alpha_{\text{дов}}$  довірчого інтервалу для обраної ймовірності  $P_{\text{дов}}$  за формулою (8.51), прийнявши  $\upsilon = V_g$ .
7. Формування результату обробки:
  - нижня границя довірчого інтервалу —  $(\varphi_c - \alpha_{\text{дов}}) \bmod 2\pi$ ;
  - верхня границя довірчого інтервалу —  $(\varphi_c + \alpha_{\text{дов}}) \bmod 2\pi$ ;
  - довірна ймовірність —  $P_{\text{дов}}$ .

Наведена методика узгоджується, з урахуванням особливостей випадкових кутів, з методикою статистичної обробки результатів вимірювань випадкових величин.

Запропоновану методику визначення довірчих інтервалів при оцінці результатів кутових (фазових) вимірювань розглянемо на конкретному прикладі.

*Приклад 8.7.* Для даних прикладу 8.4, для яких раніше отримано значення  $r = 0,6028$ ;  $V = 0,005$ , розрахунок довірчого інтервалу за формулою (8.51) для довірчої ймовірності  $P_{\text{дов}} = 0,95$  дає наступний результат:  $\alpha_{\text{дов}} \approx 0,45$  рад.

Довірчий інтервал для тих самих вхідних даних за умови заданого виду розподілу ймовірності випадкового кута (наприклад, намотаного гауссівського розподілу) дорівнює  $\alpha_{\text{дов}} = 1,96\sigma$  [8.27]) тобто

$$\alpha_{\text{дов}} = 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{M'}} = 1,96 \frac{1}{\sqrt{100}} \approx 0,2 \text{ рад.}$$

Отже, в умовах апріорно невідомого закону розподілу ймовірностей розрахунки  $\alpha_{\text{дов}}$  за наведеною методикою дають дещо завищені значення, які не можуть бути скориговані без додаткових відомостей про закон розподілу ймовірностей.

Таким чином, довірчі інтервали та довірчі ймовірності результатів кутових та фазових спостережень в умовах апріорно невідомого розподілу ймовірності випадкових кутів можуть бути визначені з нерівності Чебишева виду (8.49) для випадкових кутових величин. Отримані результати покладено в основу запропонованої методики обробки спостережень кутових та фазових вимірювань.

### 8.8. Використання концепції невизначеності для статистичної обробки даних і подання результатів фазових вимірювань

Концепція невизначеності як показника якості вимірювань розроблена для випадкових величин [8.1; 8.12; 8.36].

В ряді випадків результати вимірювань випадкових кутів та різниць ФХС сигналів також повинні супроводжуватись показниками точності у вигляді невизначеності. Це питання досліджувалось в роботі [8.21] в наступній постановці.

**Постановка задачі.** Проводиться серія із  $M$  незалежних вимірювань випадкового кута  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$  зі щільністю розподілу ймовірностей  $p(\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Вимірювання проводиться за незмінних умов. При

вимірюванні відбувається рівномірне квантування значень кута з кроком  $\frac{2\pi}{m}$ .

Результатом вимірювань є статистика  $\{\varphi_i, i = \overline{1, M}\}$ ,  $\varphi_i \in [0, 2\pi)$ , об'єму  $M$ , яка

розглядається як реалізація випадкового вектора  $\Psi(\omega) = (\psi_1(\omega), \dots, \psi_M(\omega))$  з  $M$  незалежними випадковими кутами  $\psi_i \in [0, 2\pi)$ ,  $\omega \in \Omega$  ( $\omega$  - елементарна подія з простору подій  $\Omega$ ).

Необхідно обчислити результат вимірювання, визначити стандартну та розширену невизначеність результату за типом А та подати результат вимірювання у встановленій формі за умови, що систематична складова похибки вимірювання відсутня.

**Розв'язок.** Як було показано вище, для фазових вимірюваннях найкращими оцінками найбільш імовірного значення випадкової різниці ФХС та її розкиду, отриманих за результатами  $M$  незалежних вимірювань, є відповідно його вибіркоче кругове середнє та вибіркоче кругова дисперсія. Ці характеристики отримують під час векторного підсумовування експериментальних даних на одиничному колі. Представлення значень різниць ФХС векторами є більш природним і зручним з огляду на подальшу обробку результатів вимірювань, оскільки вектор містить інформацію і про значення кута, і про його розсіювання.

Вибіркове кругове середнє значення різниці ФХС в інтервалі  $[0, 2\pi)$  та вибіркоче дисперсія визначаються відповідно за формулами (8.16) та (8.25). Кругове стандартне відхилення  $\sigma$  (в радіанах) пов'язано з  $V$  наведеним раніше співвідношенням  $\sigma = \sqrt{-2\ln(1-V)} = \sqrt{-2\ln r}$ , з урахуванням якого стандартна невизначеність типу А результату вимірювання визначається як

$$u = \sigma = \sqrt{-2\ln(1-V)}. \quad (8.57)$$

Стандартна невизначеність типу А для середнього кута  $\varphi_c$  становить

$$u = \sigma_c = \sqrt{-2\ln(1-V_c)}, \quad (8.58)$$

де значення  $V_c$  визначається за формулою (8.46).

Розширена невизначеність отримується в загальному вигляді як  $U = Ku_c$ , де  $K$  - фактор покриття, який відповідає рівню довіри (довірчій ймовірності)  $P_{\text{дов}}$  і визначається за певним розподілом ймовірності випадкового кута.

Методика розрахунку та представлення результату вимірювання випадкової різниці ФХС включає наступні етапи.

1. Розрахунок сум  $C$  та  $S$  за формулами (8.13).
2. Розрахунок вибіркового кругового середнього  $\varphi_c$  згідно (8.16).
3. Перевірка правильності визначення  $\varphi_c$  за виконанням умови:  $\sum_i \sin(\varphi_i - \varphi_c) = 0$  (8.21).

4. Визначення вибіркової кругової дисперсії  $V_c$  та стандартної невизначеності  $u_c$  згідно (8.58). Для  $M < 30 \dots 50$  з метою зменшення методичних похибок рекомендується визначати  $r$  з урахуванням поправок на групування даних типу поправок Шеппарда.

5. Вибір рівня довіри  $P_{\text{дов}}$  та фактора покриття  $K$  за наведеною в підрозділі 8.6 методикою.

6. Розрахунок розширеної невизначеності  $U$  для обраної ймовірності  $P_{\text{дов}}$ .

7. Подання результатів кутових вимірювань: для обраного рівня довіри  $P_{\text{дов}}$  більша частина значень кутів належить інтервалу

$$(\varphi_c - U) \bmod 2\pi \leq \varphi \leq (\varphi_c + U) \bmod 2\pi, \quad (8.59)$$

Таким чином, стандартна та розширена невизначеності результатів фазових вимірювань визначаються на основі характеристик вибіркового кругового середнього, вибіркової кругової дисперсії та кругового стандартного відхилення. Отримані результати зі статистичної обробки вимірювань можуть бути використані під час обробки експериментальних даних вимірювання різниць ФХС в умовах дії завад або інших кутових величин зі значною дисперсією та поданні результату вимірювання в термінах концепції невизначеності.

Невизначеність результату за типом  $B$  обчислюється за апіорними даними і стосується, в основному, оцінки складової невизначеності, що пов'язана з класом точності засобів фазових (чи кутових) вимірювань. Оскільки інструментальні похибки вимірювань значно менші за значення  $2\pi$ , їх розподіл ймовірності повністю зосереджений на напівінтервалі  $[-\pi, \pi)$  і наближається до гауссівського розподілу. Том цей тип невизначеності може бути обрахований так само, як і у випадку статистичної обробки результатів вимірювань випадкових величин.

### 8.9. Підсумки до розділу

При дослідженні задач моделювання та статистичної обробки даних фазових вимірювань отримані наступні результати.

Проблематика моделювання задач кутових і фазових вимірювань розглянута на конкретних прикладах проведення комп'ютерного вимірювального експерименту. Визначена у короткому викладі методологія комп'ютерного вимірювального експерименту, наведено означення комп'ютерного вимірювального експерименту і визначені основні етапи його проведення: вибір стратегії процесу моделювання; розробка математичних моделей сигналів і завад; розробка обчислювальних алгоритмів; створення програмного забезпечення; виконання процесу моделювання; аналіз результатів моделювання. Характерною властивістю комп'ютерного вимірювального експерименту є обчислення результату і характеристик точності моделювання.

Відмічається, що основний метод моделювання – це метод статистичних випробувань, який має також назву метода Монте-Карло. Суть цього методу полягає у розв'язку значної кількості задач кутових вимірювань і статистичної фазометрії обчислювальними методами (методами цифрової обробки сигналів)

на основі моделювання послідовності псевдовипадкових величин – реалізацій випадкових величин, векторів, процесів і полів.

Моделювання випадкових функцій на ЕОМ при проведенні комп'ютерного вимірювального експерименту підпорядковане двом основним принципам.

1. Має забезпечуватись схожість між випадковою функцією-оригіналом і його цифровою моделлю-копією, яка полягає в збігу (близькості) їх ймовірнісних законів розподілу або числових характеристик.

2. Усяка випадкова функція визначається ("конструюється") як деяка функція від найпростіших, так званих базових випадкових величин. У більшості випадків результат отримують як наслідок проведення на ЕОМ найпростішого статистичного експерименту, який полягає у визначенні числового значення з інтервалу  $[0,1]$ , що відбирається навмання. Тоді, базовою випадковою величиною є випадкова величина  $\xi(\omega)$ , яка рівномірно розподілена на інтервалі  $[0,1]$ , тобто  $\xi(\omega) \in [0,1]$ .

Наведені результати конкретних прикладів моделювання векторів випадкових кутів із законами розподілу Мізеса і намотаного гауссівського.

У матеріалах по статистичній обробці даних фазових вимірювань наведені визначення вибірових кругових характеристик. Це наступні характеристики: вибіркоче кругове середнє; вибіркоче результуюча довжина вектора; вибіркоче кругова дисперсія; кругове стандартне відхилення досліджуваних різниць ФХС.

Отримано статистичні точкові та інтервальні оцінки різниць ФХС для намотаного гауссівського розподілу ймовірності випадкових кутів шляхом проведення комп'ютерного вимірювального експерименту.

Наведена методика проведення комп'ютерного вимірювального експерименту для обчислення статистичних інтервальних оцінок різниць ФХС для заданих законів розподілу ймовірності.

Отримані результати статистичної обробки результатів нерівноточних фазових вимірювань для наступних випадків:

- визначення статистичної оцінки кумулятивних фазових зсувів (КФЗ) сигналів;
- визначення статистичної оцінки різниці ФХС для довільного закону розподілу ймовірності;
- визначення статистичної оцінки різниці ФХС з розподілом щільності ймовірності Мізеса.

Обґрунтовано постановку і розв'язок задачі оцінки результатів вимірювань випадкових кутів і різниць ФХС на основі використання концепції невизначеності.

Ряд результатів з розв'язку задач моделювання та статистичної обробки даних фазових вимірювань наведено у роботах [8.1 – 8.38].

*Когда перенимать с умом,  
тогда не чудо и пользы от того сыскать*  
И.А. Крылов

## **Розділ 9**

### **ПРИКЛАДИ ПЕРСПЕКТИВНИХ ФАЗОВИХ СТАТИСТИЧНИХ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ**

Даний розділ завершає наукову працю по статистичній фазометрії. Основна мета розділу – сформулювати пропозиції по розширенню функціональних можливостей діючих та обґрунтувати принципи дії і структури, перспективних фазових інформаційно-вимірювальних систем.

Слід відмітити, що вимірювання фазових характеристик сигналів у поєднанні зі статистичними методами обробки сигналів значно розширює області застосування статистичної фазометрії і сприяє його більш широкому використанню в наукових експериментах, сфері технологічного забезпечення виробництва. Крім того при створенні інформаційно-вимірювальних систем також сприяє застосуванню методів цифрової обробки сигналів і використання стандартних пакетів програмного забезпечення, наприклад, LabVIEW, Matlab, що забезпечує можливість оперативної адаптації характеристик ІВС до умов поставленого вимірювального експерименту.

У розділі розглядаються приклади використання отриманих теоретичних результатів по статистичній обробці результатів фазових вимірювань у поєднанні з можливостями сучасних інформаційних технологій [9.8, 9.9, 9.14, 9.15, 9.20, 9.22] для побудови фазових інформаційно-вимірювальних систем як загального призначення, які орієнтовані на дослідження фазових характеристик сигналів, так і спеціалізованих, які призначені для роботи з відповідними фазовими системами. Розглянуто систему передачі інформації підвищеної конфіденційністю з кодуванням інформації на основі числової системи залишкових класів та використанням шумоподібних сигналів. Застосування фазових характеристик сигналів дозволило отримати оригінальні технічні розв'язки таких задач, як виділення сигналів на фоні завад, розділення зондуючих і відбитих сигналів під час їх інтерференції в ультразвуковій дефектоскопії тощо.

Враховуючи специфіку матеріалу розділу спочатку нагадаємо основні скорочення, які будуть використані у тексті: інформаційно-вимірювальна система (ІВС), фазова характеристика сигналу (ФХС), аналогово-цифровий перетворювач (АЦП), цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП), персональний комп'ютер (ПК), дискретне перетворення Гільберта (ДПГ), числова система залишкових класів (СЗК)

#### **9.1. Фазова ІВС з ортогональною обробкою сигналів**

У цій системі використано метод дискретної ортогональної обробки сигналів, результати застосування якого наведені у розділах 4, 5, а також у роботі



[9.28]. Розглянемо структуру фазовимірювальної системи для вимірювання фазових зсувів сигналів  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \in (-2\pi, 2\pi)$  між гармонічними сигналами вигляду

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_1 \cos(2\pi ft + \varphi_1), \\ u_{2C}(t) &= U_2 \cos(2\pi ft + \varphi_2), \quad t \in [0, T_c) < \infty, \end{aligned} \quad (9.1)$$

де  $U_1, U_2$  – амплітуди сигналів;  $f$  – частота (період  $T = f^{-1}$ ),  $f \in [f_H, f_B]$ ;  $f_H, f_B$  – межі частотного діапазону;  $t$  – поточний час спостереження;  $\varphi_1, \varphi_2$  – початкові фази сигналів,  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ ;  $T_c$  – скінченний час спостереження сигналів.

Для сигналів  $u_{2C}$  (9.1) і  $u_{2S}(t) = U_2 \sin(2\pi ft + \varphi_2)$  на інтервалах часу  $0,5T$  виконується умова ортогональності, тобто

$$\int_t^{t+0,5T} u_{2C}(\tau) u_{2S}(\tau) \mu(\tau) d\tau = 0 \quad (9.2)$$

при значенні вагової функції  $\mu(\tau) = 1$ .

Структуру автоматизованої системи вимірювання фазових характеристик сигналів (ФХС) за методом дискретної ортогональної обробки наведено на рис.9.1.

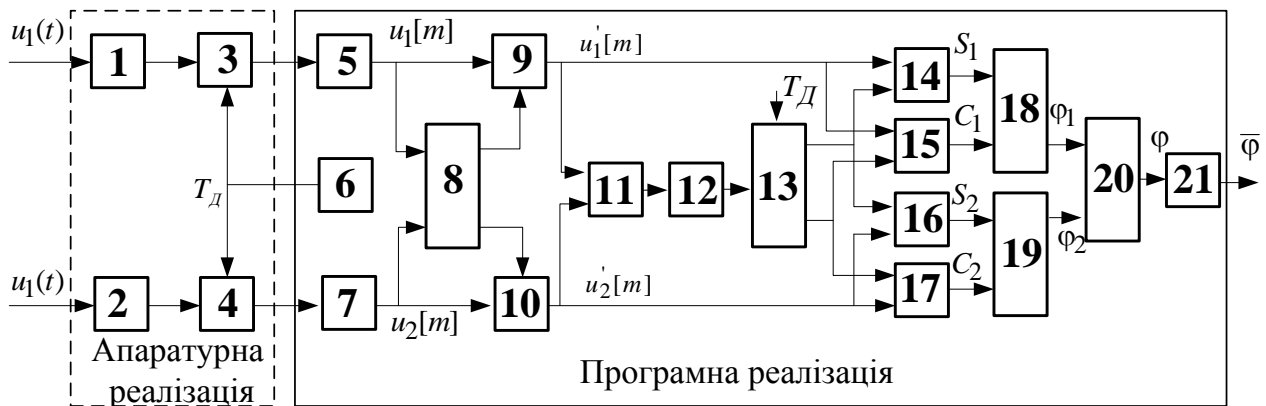


Рис. 9.1. Структура автоматизованої фазовимірювальної системи з дискретною ортогональною обробкою сигналів: 1, 2 – вхідні пристрої; 3, 4 – АЦП; 5, 7 – оперативні запам’ятовувальні пристрої; 6 – генератор сигналів дискретизації; 8 – блоки попереднього аналізу спектра сигналів; 9, 10 – цифрові фільтри; 11 – блок визначення періоду; 12 – блок адаптації обсягу вибірки; 13 – формувач копії сигналу; 14–17 – обчислювачі квадратурних компонент; 18, 19 – обчислювачі функції  $\arctg$ ; 20 – блок формування поточних значень зсуву фаз сигналів; 21 – блок усереднення

Відмінною ознакою такої системи є використання некогерентного опорного сигналу.

Вхідні пристрої 1, 2 узгоджують вхідні ланцюги системи з джерелами сигналів. АЦП 3, 4 формують вибірки вхідних сигналів

$$u_1[j] = \{u_1(jT_d), j \in \overline{1, M}\}, u_2[j] = \{u_2(jT_d), j \in \overline{1, M}\}, \quad (9.3)$$

де  $M = T_c F_d$  – обсяг вибірки;  $F_d$  – частота дискретизації сигналів, яка задовольняє теорему відліків:  $F_d > 2f_B$  (зазвичай  $F_d > 10f_B$ ),  $T_d$  – період дискретизації.

Блоки 1–4 реалізуються у вигляді окремої плати введення–виведення аналогових сигналів, яка конструктивно розміщується на материнській платі персонального комп’ютера (ПК). Вибірку даних формує пристрій 6. Послідовності відліків вхідних сигналів  $u_1[j]$ ,  $u_2[j]$  надходять, відповідно, на оперативні запам’ятовувальні пристрої 5, 7, розраховані на обсяги вибірок  $M$ . Пристрій 8 здійснює попередній спектральний аналіз і управляє зміною параметрів цифрових фільтрів 9, 10 [9.2], які вилучають із сигналів у разі наявності зосереджені у частотній області завади, оскільки фазові системи з ортогональною обробкою чутливі до завад такого типу. У роботі [9.28] запропоновано проводити вагову обробку сигналів для зменшення впливу завад такого типу. Дія гауссівської завади призводить до збільшення випадкової складової похибки вимірювань. Результат дії такої складової похибки дає можливість зменшити застосування адаптивних цифрових фільтрів. Уведення в структуру системи цифрових фільтрів дозволяє вирішити й інші завдання побудови ІВС – прецизійне вимірювання фазових характеристик полігармонічних сигналів, сигналів зі значним рівнем нелінійних спотворень тощо.

З метою зменшення методичної похибки, обумовленої неkratністю часу інтегрування періоду сигналу, в структуру рис. 9.1 введено блоки 11, 12, які узгоджують об’єм вибірки сигналів з його періодом. Простим способом узгодження часу інтегрування з періодом сигналу без зміни частоти дискретизації є коригування об’єму вибірки, який обирається з умови

$$M_{Ad} = [0,5lTF_d] = \left[ \frac{lM}{2\alpha} \right] < M, \quad (9.4)$$

Процес адаптації об’єму вибірки, яка відповідає інтервалу ортогональності сигналів (9.1), виконується за рахунок зменшення обсягу  $M$ . Найменші втрати обсягу вибірки мають місце при  $l = [2\alpha]$ . З урахуванням цього подамо формулу (9.4) як

$$M_{Ad} = \left[ \frac{[2\alpha]M}{2\alpha} \right]. \quad (9.5)$$

Отримане значення  $M_{Ad}$  може відрізнятись від точного значення  $M_{A.T} = \frac{[2\alpha]M}{2\alpha}$  на величину  $\pm 0,5$ . Це значення визначає залишкову похибку оцінки інтервалу інтегрування, отже, і залишкову похибку визначення фазового зсуву. Наприклад, якщо  $M = 1000$ , для всіх  $\alpha > 1$  маємо значення фазової похибки  $|\Delta\varphi| < 0,03$  рад.

Формування вибірок квадратурних компонент опорного сигналу

здійснюється блоком 13 згідно виразів

$$u_s[j] = \sin(jT_d), \quad u_c[j] = \cos(jT_d), \quad j \in \overline{1, M_{\text{ад}}}. \quad (9.6)$$

При обчисленні квадратурних компонент блоками 14–17 системи виконуються арифметичні операції перемноження та підсумовування і формують квадратурні складові сигналів:

для першого каналу

$$S_1 = \sum_{j=1}^{M_{\text{ад}}} u_1[j] u_s[j], \quad C_1 = \sum_{j=1}^{M_{\text{ад}}} u_1[j] u_c[j], \quad (9.7)$$

для другого каналу

$$S_2 = \sum_{j=1}^{M_{\text{ад}}} u_2[j] u_s[j], \quad C_2 = \sum_{j=1}^{M_{\text{ад}}} u_2[j] u_c[j]. \quad (9.8)$$

Квадратурні компоненти (9.7), (9.8), відповідно до загальної формули (6.37) використовуються окремо для визначення значень  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , отже, і їх різниці

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathbf{L}(S_1, C_1) - \mathbf{L}(S_2, C_2). \quad (9.9)$$

Початкові фази  $\varphi_1, \varphi_2$  вхідних сигналів відносно синтезованих опорних сигналів з нульовими початковими фазами визначають обчислювачі функцій арктангенса 18, 19. Поточні значення різниці фазових зсувів  $\varphi$  сигналів формується блоком 20 системи.

Цей метод, оснований на використанні некогерентного опорного сигналу, має певні переваги у порівнянні з іншими. По-перше, оскільки кожне зі значень  $\varphi_1, \varphi_2$  однозначно визначається в інтервалі  $[0, 2\pi)$ , то відповідно, і значення  $\varphi$  однозначно визначається в інтервалі  $(-2\pi, 2\pi)$ , тобто у розширеному вдвічі інтервалі. По-друге, немає потреби у виконанні в інтервалі частот  $[f_n, f_v]$  прецизійного зсуву одного з сигналів (9.1) на кут  $90^\circ$ , що має місце у відомих способах реалізації вимірювання фазових зсувів на основі ортогональної обробки сигналів [9.20, 9.28]. Створення прецизійного фазообертача в широкій частотній смузі є досить складним технічним завданням. Наявність такої операції призводить до виникнення додаткових похибок вимірювання. По-третє, система з некогерентними опорними сигналами зберігатиме працездатність за наявності адитивних шумових складових в обох вимірювальних сигналах.

В умовах дії завад поточні значення різниць фазових зсувів мають суттєву випадкову похибку, яка в даній ІВС зменшується за рахунок усереднення. Для об'єму  $M_y$  усереднених фазових зсувів сигналів, які утворюють вектор з компонентами  $(\varphi_g \in (-2\pi, 2\pi), g = \overline{1, M_y})$ , операції усереднення і отримання

результату в інтервалі  $(-2\pi, 2\pi)$  виконується відповідно до алгоритму усереднення на колі (див. розділ 4) як  $\bar{\varphi} = \mathbf{L}(\bar{S}, \bar{C})$ , де

$$\bar{S} = \frac{1}{M_y} \sum_{g=1}^{M_y} \sin \frac{\varphi_g}{2}, \quad \bar{C} = \frac{1}{M_y} \sum_{g=1}^{M_y} \cos \frac{\varphi_g}{2}. \quad (9.10)$$

Усереднення поточних значень виконується у пристрої усереднення 21 системи.

Алгоритми обробки сигналів у ІВС, структура якої наведена на рис. 9.1 та інтерфейс користувача виконано в системі LabVIEW. Зовнішній вигляд інтерфейсу показано на рис. 9.2, а структура алгоритму обробки сигналів на рис.9.3.

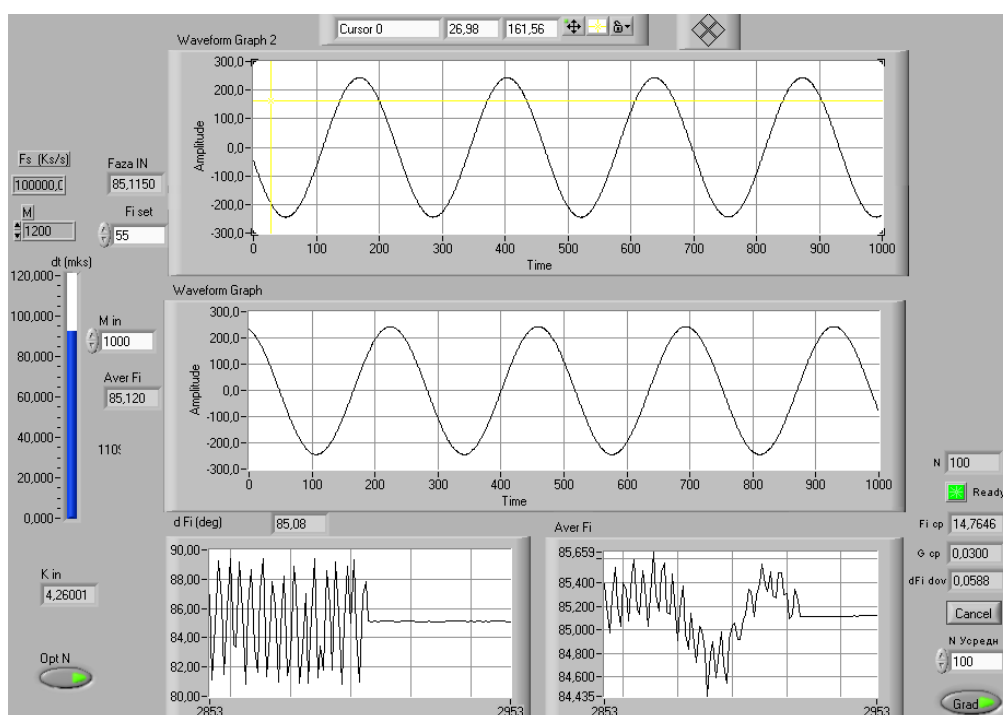


Рис. 9.2. Інтерфейс автоматизованої фазової ІВС, створений в системі LabVIEW

Інтерактивний інтерфейс ІВС являє собою графічне зображення передньої панелі фізичного приладу і дозволяє імітувати роботу всіх органів керування, індикаторів та пристроїв відображення інформації. Інтерфейс має чотири вікна, на яких зображено входні сигнали (перше і друге вікна), похибка вимірювання фазового зсуву без усереднення (третє вікно) і з усередненням при  $M_y = 100$  (четверте вікно) для випадку вимірювання фазового зсуву  $\varphi = 85,10^\circ$ . Значення похибок вимірювання фазового зсуву у третьому і четвертому вікнах наведено для випадків:

- 3 - коли адаптація обсягу вибірки відсутня (початок графіків);
- 4 - і з адаптацією (прикінцева частина графіків), які наведені на рис. 9.2.

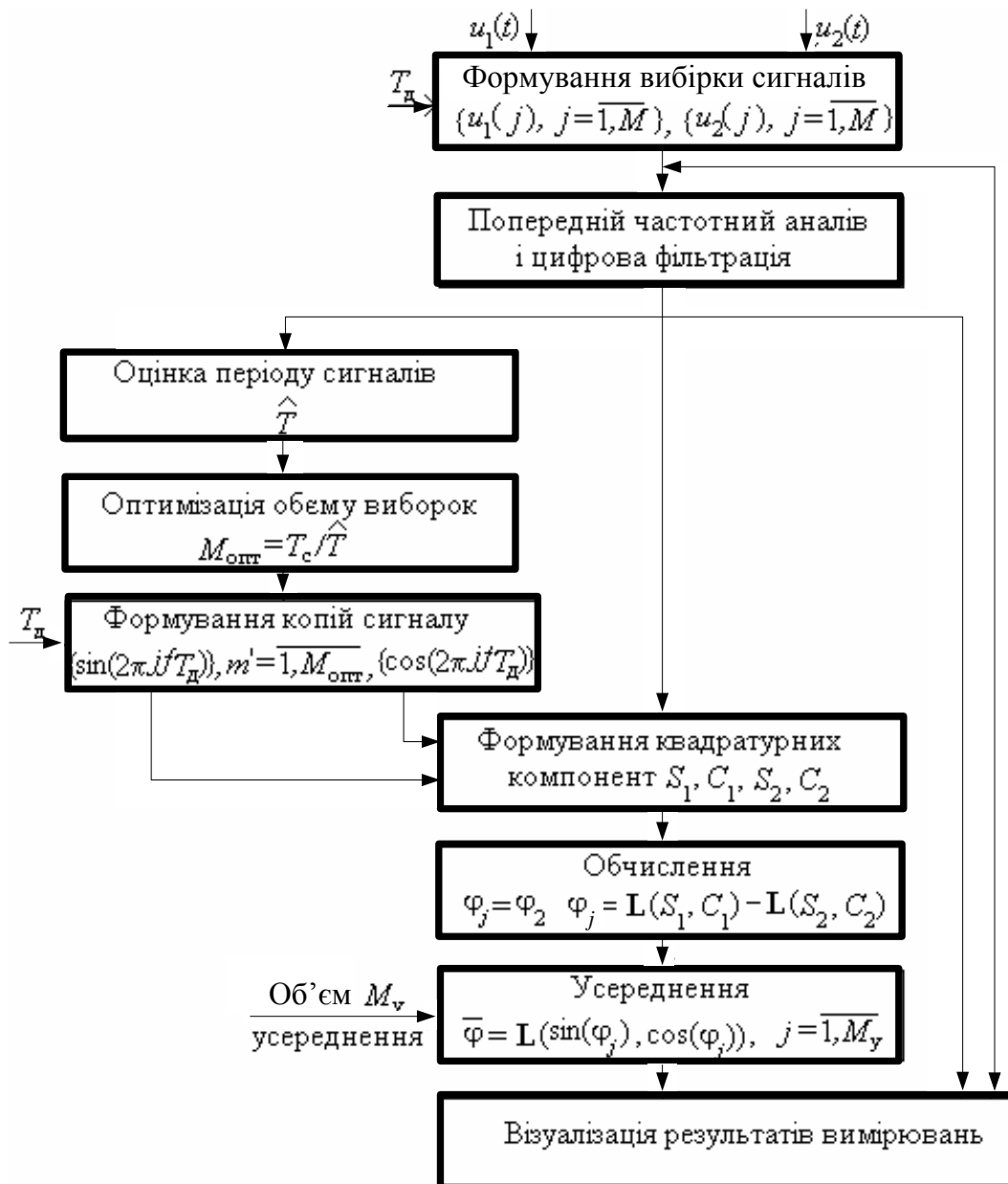


Рис. 9.3. Алгоритм роботи фазової ІВС з ортогональною обробкою сигналів

В системі використано програмний пакет LabVIEW, розроблений фірмою National Instruments (США) – світовим лідером в галузі розробки програмного й апаратного забезпечення ІВС [9.9]. Пакет LabVIEW має широкую бібліотеку програмних модулів для генерації та обробки сигналів і надає розробнику зручний інструмент побудови вимірювальних приладів, дозволяє поєднати первинні вимірювальні перетворювачі, АЦП та ЦАП, програмні засоби, які здатні реалізувати функції різноманітних вимірювальних приладів в єдину ІВС.

Введення аналогових сигналів у ПК здійснювалось за допомогою плати введення–виведення серії 1800 фірми ICCP DAS (шина PCI,  $F_d < 330$  кГц, комутатор на 8 каналів, 12-розрядний АЦП), що дозволяє виконувати вимірювання в діапазоні  $f \in [10, 30000]$  Гц. Система LabVIEW в комплексі з

платою введення-виведення та ПК дозволяє розробляти в стислі терміни складні ІВС із заданими характеристиками і властивостями.

В розглянутій реалізації ІВС частотний діапазон системи обмежений лише швидкодією плати введення-виведення. Її заміна на більш високочастотну не потребує модернізації програми. Крім того, слід зауважити, що сучасні швидкісні АЦП, які встановлюються на платах введення-виведення, мають пристрої вибірки та зберігання, що дозволяє у разі потреби реалізувати стробоскопічний режим роботи системи, за рахунок чого суттєво розширюється частотний діапазон системи.

Основні складові похибки вимірювання пов'язані з дискретизацією, квантуванням та вибором інтервалу інтегрування ( інтервалу ортогональності). Перші дві складові розглядались в роботах [9.7; 9.24; 9.28]. Розглянемо детально похибку, що виникає внаслідок неточного визначення інтервалу ортогональності досліджуваних сигналів по часу.

Ортогональний метод [9.28] передбачає розклад одного з сигналів (9.1), наприклад, першого, на інтервалі ортогональності  $(t, t + 0,5T)$  в системі ортогональних функцій іншого сигналу  $(u_{2C}(t), u_{2S}(t))$ :

$$S(\varphi_1, \varphi_2) = -U_2 \int_t^{t+0,5T} u_1(\tau) \sin(2\pi f\tau + \varphi_2) d\tau, \quad (9.11)$$

$$C(\varphi_1, \varphi_2) = U_2 \int_t^{t+0,5T} u_1(\tau) \cos(2\pi f\tau + \varphi_2) d\tau. \quad (9.12)$$

Визначивши ці складові можна отримати фазовий зсув сигналів за формулою

$$\varphi = \mathbf{L}[S, C] = \arctg \frac{S}{C} + \frac{\pi}{2} \{2 - \text{sign } S(1 + \text{sign } C)\}. \quad (9.13)$$

Обчислення ортогональних компонент за формулами (9.11), (9.12) в смузі частот  $f \in [f_H, f_B]$  викликає певні складнощі, оскільки обчислення інтегралів має виконуватись на інтервалах ортогональності, тобто на часових інтервалах, кратних половині періоду сигналу, який в загальному випадку не відомий. Для часу інтегрування  $T_c \neq 0,5Tk$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , умова ортогональності (9.2) порушується і виникає систематична похибка вимірювання фазових зсувів сигналів. Покладемо  $\varphi_2 = 0$  і позначимо час інтегрування через  $T_c = \alpha T$ , де  $\alpha > 0,5$  – дійсне число. Тоді вирази (9.11), (9.12) матимуть вигляд

$$S'(\alpha, \varphi_1) = \frac{U_1 U_2}{2} \left( \sin(\varphi_1) - \sin(2\pi\alpha + \varphi_1) \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha} \right); \quad (9.14)$$

$$C'(\alpha, \varphi_1) = \frac{U_1 U_2}{2} \left( \cos(\varphi_1) + \cos(2\pi\alpha + \varphi_1) \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha} \right). \quad (9.15)$$

Похибка визначення фазових зсувів, обумовлена відхиленням інтервалу інтегрування від інтервалу ортогональності (некратність часу інтегрування

періоду сигналу), обраховується згідно

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\alpha, \varphi_1) &= \mathbf{L}(S'(\alpha, \varphi_1), C'(\alpha, \varphi_1)) - \mathbf{L}(S, C) = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi_1 - \sin(2\pi\alpha + \varphi_1) \cdot \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}}{\cos \varphi_1 - \cos(2\pi\alpha + \varphi_1) \cdot \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}} - \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

У формулі (9.16) складову  $\mathbf{L}(S, C)$  отримано для  $T_c = 0,5T$ . Залежність  $\Delta\varphi = f(\alpha, \varphi_1)$  для різних значень кута  $\varphi_1$  графічно показано на рис. 9.4а,б,в. З графіка на рис. 9.4 видно, що похибка  $\Delta\varphi$  може набувати великих значень. Наприклад, якщо  $\alpha = 2,25$ , тобто якщо  $T_c = 2,25T$ , максимальне значення похибки дорівнює  $\Delta\varphi \approx \pm 4^\circ$ .

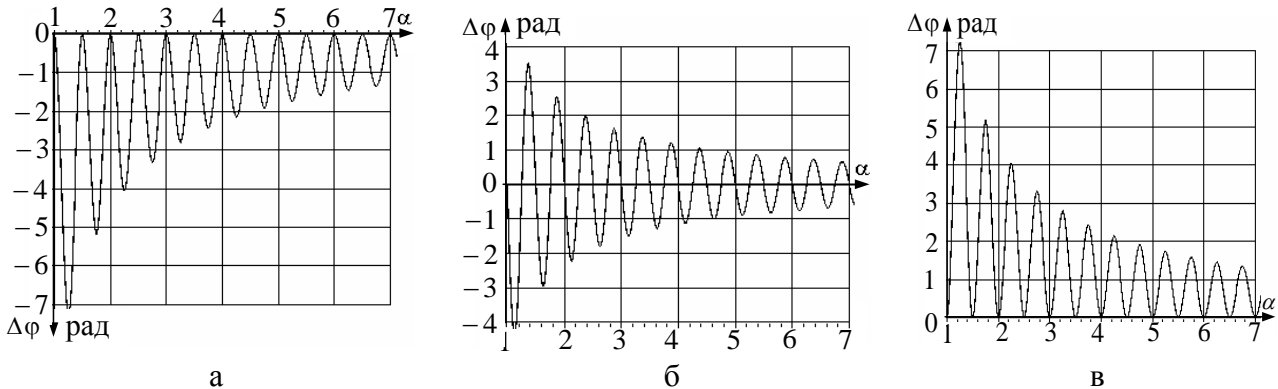


Рис. 9.4. Графіки залежності  $\Delta\varphi = f(\alpha)$  для різних значень фазових зсувів:

а –  $\varphi_1 = 0^\circ$ ; б –  $\varphi_1 = 45^\circ$ ; в –  $\varphi_1 = 90^\circ$

Узагальнюючи аналіз цієї складової похибки визначення фазових зсувів  $\Delta\varphi$ , можна зробити такі висновки:

- похибка визначення  $\Delta\varphi$  фазових зсувів дорівнює  $0^\circ$  для значень

$$\alpha = 0,5l, \quad (9.17)$$

де  $l \in N$ , з чого випливає, що інтервал інтегрування має бути  $0,5T$   $n, n \in N$ ;

- незначне відхилення  $\alpha$  від значень  $0,5l$  приводить до появи значних похибок  $\Delta\varphi$ , наприклад, зміна значення  $\alpha=2$  на 1% приводить до похибки  $\Delta\varphi \approx 1^\circ$ ;

- похибка  $\Delta\varphi$  набуває максимальних значень в околі значень  $\alpha = 0,5(l + 0,5)$ ;

- максимальні значення похибки  $\Delta\varphi$  зменшуються обернено пропорційно значенню  $\alpha$ ;

- значення похибки  $\Delta\varphi$  змінюються періодично (з періодом  $\pi$ ) починаючи від значення початкової фази сигналу  $\varphi_1$ .

Таким чином, виконуючи прецизійні вимірювання фазових зсувів сигналів,

не обхідно якомога точніше задавати тривалість часу спостереження сигналів, яка повинна бути кратною половині періоду сигналу. Ця вимога стає більш жорсткою у разі зменшення часу спостереження  $T_c$  і його наближення до значень  $(0.5...2)T$ , оскільки однакові абсолютні похибки при визначенні  $T_c$  приводять в цій області до значно більших фазових похибок  $\Delta\varphi$ . В ІВС на рис. 9.1 оцінка періоду  $T$  та адаптація часу інтегрування з  $T_c$  до  $T_{Ад}$  (визначення обсягу вибірки сигналу  $M_{Ад}$ ) виконується в блоках 11, 12 системи.

**Ітераційна корекція похибки вимірювання фазових зсувів сигналів, зумовленої відхиленням інтервалу інтегрування від інтервалу ортогональності.** Для вимірювання фазових зсувів між гармонічними сигналами на основі ортогонального методу існує інший ефективний шлях зменшення похибки  $\Delta\varphi(\alpha, \varphi)$ , який ґрунтується на застосуванні структурних методів корекції результатів вимірювань [9.27].

Структурні методи корекції поділяються на методи зрівноважуваного перетворення та методи корекції похибки  $\Delta\varphi$ . Перші передбачають наявність зворотного зв'язку, при проведенні процесу вимірювань, який охоплює коригований пристрій. Методи корекції похибки  $\Delta\varphi$  передбачають визначення значення похибки з подальшим її зменшенням. До останніх методів належать ітераційні методи корекції похибок.

Відомі два основні методи ітераційної корекції: мультиплікативний та адитивний. Мультиплікативна корекція значення фазового зсуву сигналів  $\varphi$  виконується відповідно із загальним алгоритмом

$$\varphi(j) = \varphi(0) \frac{\varphi(j-1)}{Q(\varphi(j-1))}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.18)$$

де  $j$  – номер ітерації;  $\varphi(0)$  – результат вимірювання,  $\varphi(0) = \varphi + \Delta\varphi\{\alpha, \varphi_1\}$ ;  $\varphi(j)$  – отриманий в  $j$ -му такті ітерації результат;  $Q(\cdot)$  – функція перетворення каналу вимірювання. У зв'язку з тим, що функція  $Q(\cdot)$  може набувати нульових значень, мультиплікативна корекція має обмежене застосування.

Розглянемо алгоритм адитивної корекції  $\varphi$ , яка виконується за такою формулою

$$\varphi(j) = \varphi(0) - \{Q(\varphi(j-1)) - \varphi(j-1)\} = \varphi(0) - \Delta\varphi(j-1), \quad (9.19)$$

де  $\Delta\varphi(j-1)$  – інструментальна похибка каналу вимірювання в  $(j-1)$ -му такті ітерації.

Загальну структурну схему процесу ітераційної корекції  $\varphi$  наведена на рис. 9.5.



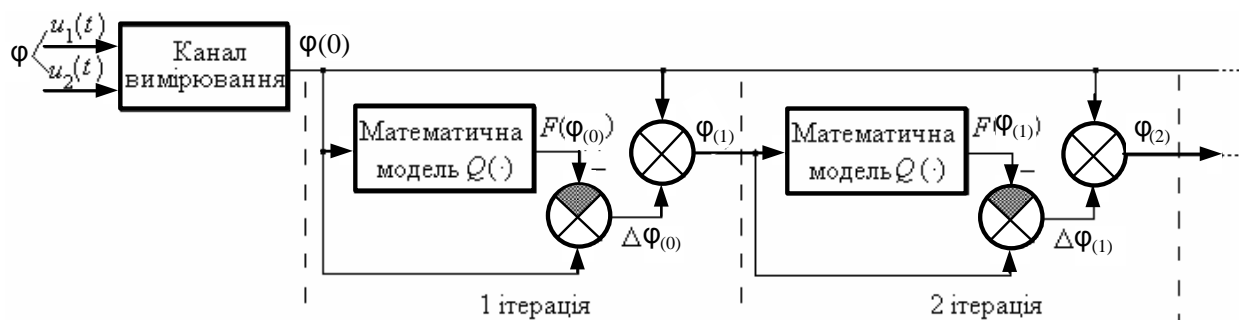


Рис. 9.5. Структура процесу ітераційної корекції перших двох ітерацій

З метою аналізу виразу (9.16) виконаємо такі перетворення. Позначимо  $\Delta_S(\alpha, \varphi) = \sin(2\pi\alpha + \varphi) \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}$ ,  $\Delta_C(\alpha, \varphi) = \cos(2\pi\alpha + \varphi) \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}$  і запишемо рівняння (9.16) у вигляді

$$\Delta\varphi(\alpha, \varphi) = \arctg \frac{\sin \varphi - \Delta_S}{\cos \varphi - \Delta_C} - \arctg \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}. \quad (9.20)$$

Розкладемо перший доданок формули (9.20) в ряд Тейлора в точці  $\Delta_S(\alpha, \varphi) = 0$ ,  $\Delta_C(\alpha, \varphi) = 0$ . Обмежившись двома першими членами ряду і виконавши нескладні перетворення, отримаємо

$$\Delta\varphi(\alpha, \varphi) \approx -\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha} \sin(2\pi\alpha + 2\varphi). \quad (9.21)$$

Аналіз (9.21) показав, що похибка апроксимації  $\Delta\varphi(\alpha, \varphi)$  не перевищує 10%, що цілком задовільно для практичного застосування.

Виконуючи послідовно декілька тактів ітерації, в кожному наступному такті за значення  $\varphi$  в рівнянні (9.21) необхідно прийняти скоригований в попередньому такті ітерації результат. З урахуванням цього та формули (9.21) вираз (9.19) набуває вигляду

$$\varphi_{(j)}(\alpha, \varphi) \approx \varphi + \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha} \sin(2\pi\alpha + 2\varphi_{(j-1)}). \quad (9.22)$$

Якщо вважати, що результат першого вимірювання  $\varphi$  має похибку  $\Delta\varphi(\alpha, \varphi)$  (9.21), тобто становить

$$\varphi_{(0)}(\alpha, \varphi) = \varphi + \Delta\varphi(\alpha, \varphi) \approx \varphi - \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha} \sin(2\pi\alpha + 2\varphi), \quad \text{формулу (9.22) можна}$$

привести до вигляду

$$\varphi_{(j)}(\alpha, \varphi) \approx \varphi + 2 \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha} \cos(2\pi\alpha + \varphi + \varphi_{(j-1)}) \sin(\varphi_{(j-1)} - \varphi). \quad (9.23)$$

Враховуючи малість значення  $(\varphi_{(j-1)} - \varphi)$ , похибку  $\Delta\varphi_{(j)}(\alpha, \varphi)$  в  $j$ -й ітерації можна наближено подати як

$$\Delta\varphi_{(j)}(\alpha, \varphi) \approx (\varphi_{(j-1)} - \varphi) \frac{\sin(2\pi\alpha)}{\pi\alpha} \cos(2\pi\alpha + \varphi + \varphi_{(j-1)}). \quad (9.24)$$

З теорії ітераційної корекції похибок вимірювань відомо, що ітераційний процес збігається, якщо для швидкості збіжності  $V_3$  виконується нерівність

$$V_3 = \left| \frac{\Delta\varphi(j)}{\Delta\varphi(j-1)} \right| < 1. \quad (9.25)$$

Умова (9.25) вказує на те, що похибка  $\Delta\varphi$  в кожній наступній ітерації буде меншою за попередню і  $\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta\varphi(j) = 0$ . Для ітераційного процесу корекції  $\varphi$ , що розглядається, швидкість збіжності визначається як

$$\left| \frac{\Delta\varphi(j)(\alpha, \varphi)}{\Delta\varphi(j-1)(\alpha, \varphi)} \right| \approx \left| \frac{\sin(2\pi\alpha)}{\pi\alpha} \cos(2\pi\alpha + \varphi + \varphi(j-1)) \right| < 1. \quad (9.26)$$

Проаналізуємо формулу (9.26). Розглянемо випадок, коли чисельник (9.26) дорівнює одиниці, а коефіцієнт  $\alpha$  в знаменнику з умови найбільшої можливої похибки  $\Delta\varphi(\alpha, \varphi)$  (див. рис. 9.4) дорівнює 1,25. Для таких вихідних даних маємо  $\left| \frac{\Delta\varphi(j)(\alpha, \varphi)}{\Delta\varphi(j-1)(\alpha, \varphi)} \right| = \frac{1}{1,25 \cdot \pi} \approx 0,255$ , що свідчить про задовільну збіжність ітераційного процесу корекції  $\varphi$ . Таким чином, в кожній наступній ітерації  $\varphi$  похибка  $\Delta\varphi$  зменшуватиметься не менше ніж в  $\sim 4$  рази.

З формули (9.26) слідує, що найменша швидкість збіжності  $V_3$  процесу корекції  $\varphi$  має місце в околі значень фазового зсуву  $\varphi = 45^\circ$ . Для цього кута та значення  $\alpha = 1,25$  розраховані похибки  $\Delta\varphi$  до корекції і після одного такту ітерації корекції. Графіки цих похибок  $\Delta\varphi$  зображено відповідно на рис. 9.6 а,б.

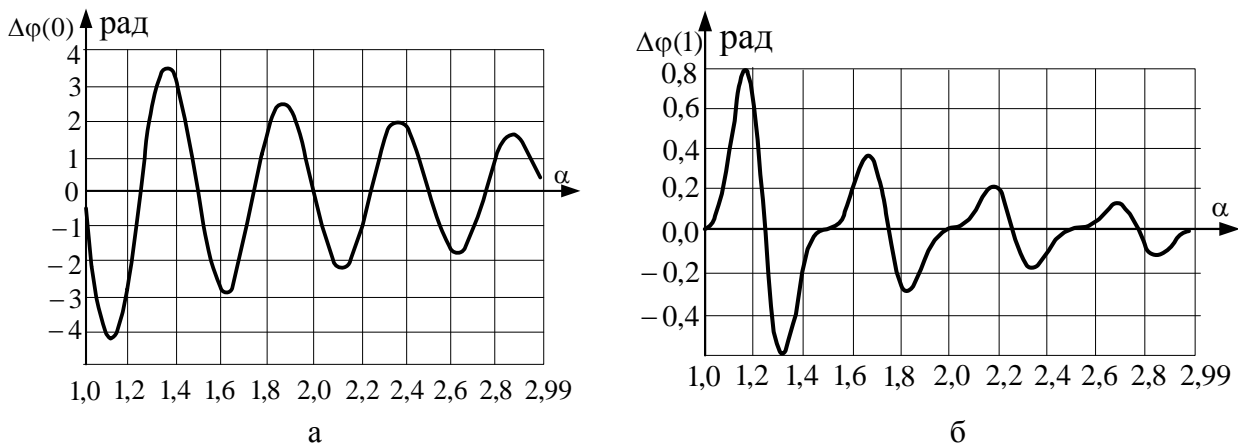


Рис. 9.6. Графіки похибки  $\Delta\varphi(\alpha, \varphi)$ , зумовленої відхиленням інтервалу інтегрування від інтервалу ортогональності для  $\varphi = 45^\circ$  до (а) і після (б) першого такту ітерації

З графіків видно, що зі збільшенням  $\alpha$  швидкість збіжності  $V_3$  збільшується. Результати моделювання свідчать, що для довільних значень  $\varphi \in [0, 2\pi)$  достатньо двох–трьох ітерацій для зменшення похибки  $\Delta\varphi$  до малої величини (порядку  $0,1^\circ \dots 0,02^\circ$ ).

Виконаний аналіз ітераційної корекції похибки  $\Delta\varphi$  дає можливість оцінити ефективність застосування ітераційного методу корекції похибки  $\Delta\varphi$  від неточного визначення інтервалу ортогональності (інтегрування), що дозволяє спростити структуру ІВС (рис. 9.1) шляхом вилучення із структури ІВС блоків 11 – визначення періоду та 12 – адаптації обсягу вибірки.

## 9.2. Фазова ІВС на основі ковзного дискретного перетворення Гільберта

Теоретичні питання, пов'язані з використанням ковзного дискретного перетворення Гільберта (ДПГ), досліджено в розділі 6. Розглянемо застосування запропонованого методу на прикладі наступної ІВС.

На рис. 9.7 показано структуру фазової ІВС, яка реалізує запропонований метод вимірювання фазових зсувів сигналів з подвійним ковзним вікном.

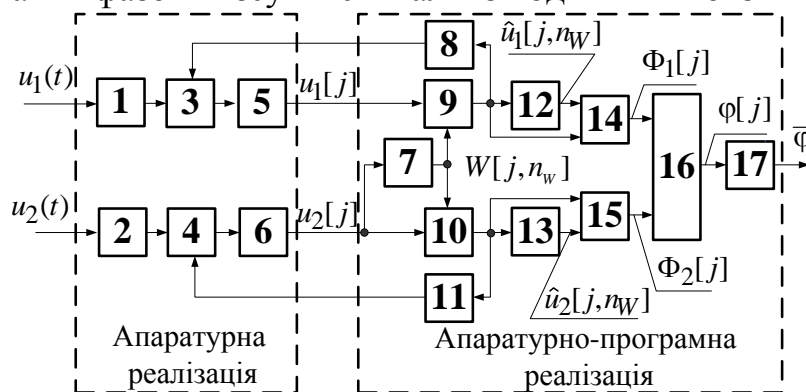


Рис. 9.7. Структура фазової ІВС на основі ковзного ДПГ

Структура на рис. 9.7 орієнтована на використання персонального комп'ютера (ПК) для обчислювальних операцій, керування процесом вимірювання та відображення результатів. Структура на рис. 9.7 дає уявлення про розподіл функцій між апаратною і програмною частинами ІВС. На рис. 6.6 позначено: 1, 2 – вхідні пристрої; 3,4 – підсилювачі з регульованим коефіцієнтом підсилення; 5, 6 – АЦП та інтерфейс; 7 – блок визначення періоду сигналу; 8,11 – аналізатори амплітуди; 9, 10 – оперативні запам'ятовуючі пристрої; 12, 13 – перетворювачі Гільберта; 14, 15 – обчислювачі функції арктангенса; 16 – блок формування значень фазового зсуву сигналів; 17 – пристрій усереднення.

На входи системи поступають сигнали

$$\begin{aligned} u_1(\omega, t) &= U_1 \cos(2\pi ft + \varphi_1) + x(\omega, t), \omega \in \Omega; \\ u_2(t) &= U_2 \cos(2\pi ft + \varphi_2), t \in T_c, \end{aligned} \quad (9.27)$$

де  $U_1, U_2$  – амплітуди гармонічних сигналів;  $f$  – частота;  $t$  – поточний час спостереження; на інтервалі  $[0, T_c)$   $\varphi_1, \varphi_2$  – початкові фази,  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ ;  $x(\omega, t)$  – реалізація стаціонарного випадкового процесу  $\xi(\omega, t)$  білого шуму з гауссівським розподілом ймовірності та математичним сподіванням  $\mathbf{M}\{\xi(\omega, t)\} = 0$ .

На основі використання пристроїв 1, 2 ІВС проводиться узгодження параметрів і характеристик джерел вимірювальних сигналів з вимірювальними каналами ІВС, за допомогою пристроїв 3, 4 погоджують динамічні діапазони вхідних сигналів з діапазонами перетворення АЦП 5, 6. В АЦП досліджувані сигнали синхронно дискретизуються з періодом дискретизації  $T_d$  і відповідно квантуються по рівню, в результаті чого маємо дві послідовності вибірок:

$$\{u_1[j] = k_1 u_1(jT_d), j = 1, 2, 3, \dots\}, \quad \{u_2[j] = k_2 u_2(jT_d), j = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (9.28)$$

де  $k_1, k_2$  – коефіцієнти передачі відповідно блоків 1 і 3 та 2 і 4 ІВС.

Пристрої 1 – 6 реалізовано у вигляді окремої плати введення–виведення аналогових сигналів, яка конструктивно розміщується на материнській платі ПК. Відліки вхідних сигналів  $u_1[j], u_2[j]$  надходять відповідно на оперативні запам'ятовувальні пристрої 9, 10, вибірка формується у пристрої 7, де визначається також періоду сигналу, на основі якого забезпечується формування вікна  $B[j, n_B]$  з тривалістю  $T_B = n_B T_d = kT$ , де  $k = 1, 2, 3, \dots$ :

$$B_1[j, n_B] = G[j] - G[j - n_B], \quad (9.29)$$

де  $n_B$  – тривалість вікна (кількість вибірок сигналу у вікні);  $G[j]$  – дискретна ступенева функція

$$G[j] = \begin{cases} 0 & j < 0; \\ 0,5 & j = 0; \\ 1 & j > 0. \end{cases} \quad (9.30)$$

Аналізатори амплітуди 8, 11 виробляють керуючі сигнали для підсилювачів 3, 4 ІВС. Перетворювачі Гільберта 12, 13 формують спряжені за Гільбертом послідовності  $u_{H1}[j, n_B]$  та  $u_{H2}[j, n_w]$ . Обчислювачі функції арктангенса 14, 15 обчислюють відповідно до (6.38) дробові частини ФХС:  $\Phi_1'[j] = (\Phi_1[j]) \bmod 2\pi = \mathbf{L}[u_1[j], u_{H1}[j]]$ ,  $\Phi_2'[j] = (\Phi_2[j]) \bmod 2\pi = \mathbf{L}[u_2[j], u_{H2}[j]]$ . Як достовірний результат враховуються лише значення  $\Phi_1[j]$  та  $\Phi_2[j]$  із середньої частини часового вікна  $B_1$ . Поточні значення різниці цих ФХС визначає віднімач 16, а усереднення на колі здійснює пристрій усереднення 17.

Апаратна частина та інтерфейс ІВС ідентичні системі, структура якої наведена на рис. 9.1.

Для перевірки способу було виконано комп'ютерне моделювання функціонування такої ІВС в умовах дії завад і обмеженого часу обробки сигналів.

*Приклад 9.1.* Розглянемо вимірювання різниці ФХС (9.27) з параметрами: частота  $f = 200$  Гц, амплітуда сигналів  $U_1 = U_2 = 1$ В, період дискретизації  $T_d = 10^{-4}$  с, на часовому інтервалі  $t \in (0, 0,15)$ с, тривалість вікна  $n_w T_d = 0,02$ с,

фазовий зсув між сигналами  $\varphi = 1$  рад, дисперсія шуму  $\sigma_1^2 = 1B^2$ .

Графіки сигналів без завади та за наявності завади зображено, відповідно, на рис. 9.8 і рис. 9.9.

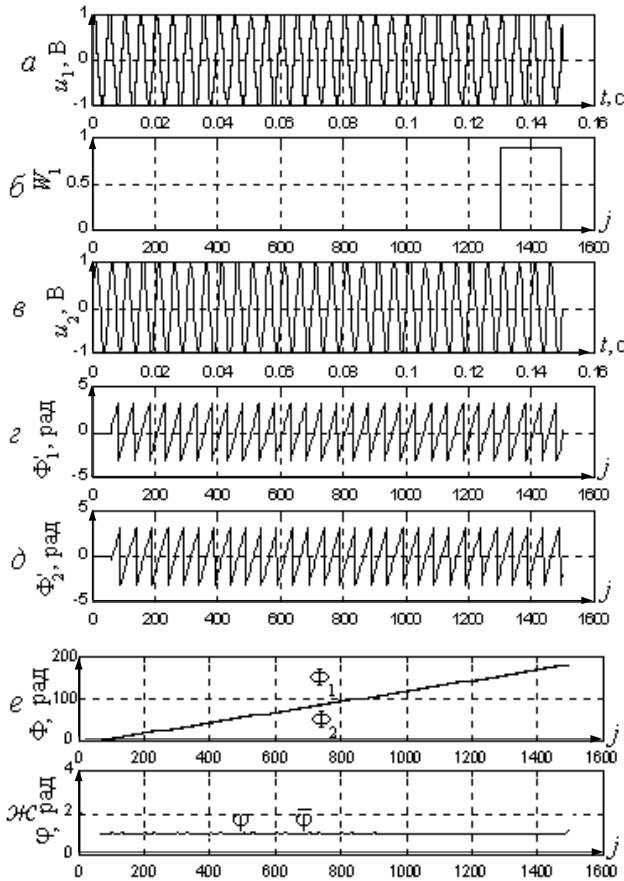


Рис. 9.8. Графіки сигналів без завади та результати їх обробки

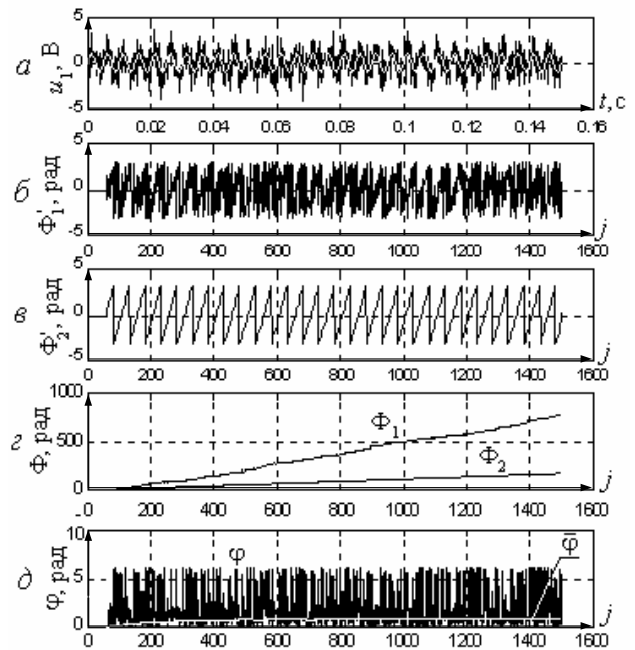


Рис. 9.9. Графіки сигналів за наявності завади та результати їх обробки

На рис. 9.8 показано:  $a$  – вхідний сигнал  $u_1(t)$ ;  $б$  – часове вікно  $B_1[j]$ ;  $в$  – вхідний сигнал  $u_2(t)$  за відсутності шумової складової;  $г, д$  – відповідно дробові частини ФХС  $\Phi_1'[j], \Phi_2'[j]$  послідовностей  $u_1[j], u_2[j]$ ;  $е$  – ФХС  $\Phi_1[j], \Phi_2[j]$ ;  $ж$  – поточні значення фазового зсуву  $\varphi[j]$  і усереднені значення фазового зсуву  $\bar{\varphi}[j]$  (див. формули(9.10)) залежно від об'єму  $M$  усереднення.

За відсутності завади різниця ФХС лишається незмінною впродовж всього часу спостереження сигналів (рис. 9.8,е). Усереднення не приводить до відчутного покращення результату вимірювання.

На рис. 9.9 показано:  $a$  – вхідний сигнал  $u_1(t)$  з шумовою складовою;  $б, в$  – відповідно значення дробових частин ФХС  $\Phi_1'[j], \Phi_2'[j]$ ;  $г$  – фазові характеристики  $\Phi_1[j], \Phi_2[j]$ ;  $д$  – поточні значення різниці дробових частин ФХС  $\varphi[j]$  і їх усереднені значення  $\bar{\varphi}[j]$  залежно від об'єму  $M$  усереднення.

Як видно з графіка рис. 9.9, б, визначення  $\Phi_1'[j]$  супроводжується суттєвим

впливом завад, що приводить до стрибків ФХС  $\Phi_1[j]$  (рис. 9.9, г) на величину  $2\pi$ , отже і до шумоподібної характеристики  $\phi[j]$ , значення якої змінюються у всьому інтервалі  $[0, 2\pi)$ . Проте і за таких складних умов роботи (відношення сигнал/завада дорівнює одиниці) усереднення відліків різниці ФХС на колі виявляється ефективним шляхом отримання оцінки фазового зсуву сигналів. Починаючи з обсягу усереднення 1200 абсолютна похибка не перевищує 0,1 рад.

Таким чином, застосування часових вікон, тривалість яких узгоджена з періодом досліджуваних сигналів, дозволяє реалізувати ковзний режим обчислення ФХС в умовах дії завад. Ковзний режим перетворення особливо важливий у випадку, коли момент початку сигналу невідомий, або коли обробку необхідно виконувати неперервно впродовж тривалого інтервалу часу. Такий спосіб дозволяє отримати оцінки фазових зсувів сигналів в темпі надходження даних без суттєвого збільшення похибок вимірювання. Крім того, спосіб має природний паралелізм обчислень зручний для їх розпаралелювання, що дає можливість досліджувати динамічні процеси в реальному часі.

Розглянутий спосіб ковзного ДПГ може бути застосований в задачах вимірювання фазових зсувів між двома гармонічними сигналами в разі “зашумлення” обох сигналів. Стійке визначення фазових зсувів сигналів спостерігалось для співвідношення сигнал/завада, навіть меншого за одиницю.

Найбільш прості порти, що застосовуються для введення аналогових сигналів у ПК, мають одноканальну структуру, тобто мають один АЦП і комутатор для підключення декількох сигналів. Приклад структури системи, яка орієнтована на використання таких портів, зображено на рис. 9.10.

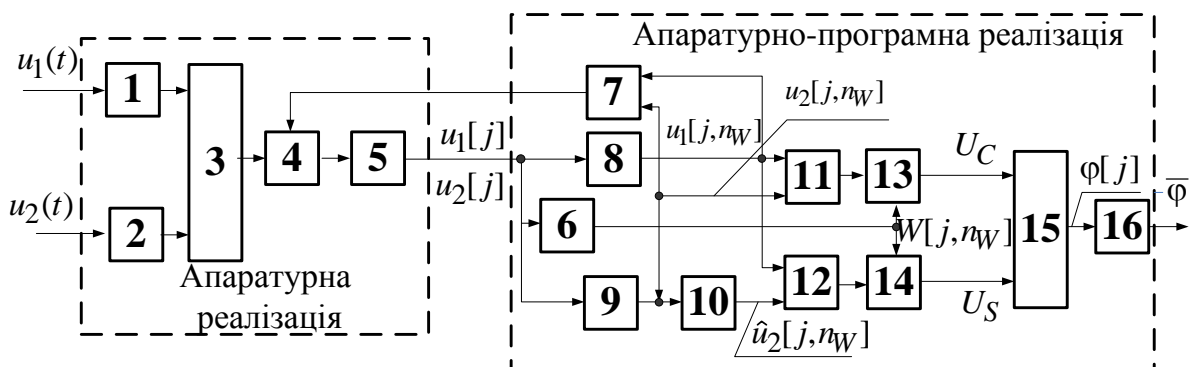


Рис. 9.10. Структура фазової ІВС з одноканальним портом: 1, 2 – вхідні пристрої; 3 – комутатор; 4 – підсилювач з регульованим коефіцієнтом підсилення; 5 – АЦП та інтерфейс; 6 – визначник періоду; 7 – аналізатор амплітуди; 8, 9 – оперативні запам’ятовувальні пристрої; 10 – перетворювач Гільберта; 11, 12 – помножувачі; 13, 14 – суматори; 15 – обчислювач функції арктангенса; 16 – пристрій усереднення

Наведена на рис. 9.10 схема реалізує ортогональний спосіб вимірювання фазових зсувів сигналів, але формування квадратурних сигналів здійснюється за допомогою перетворювача Гільберта 10 з одного з досліджуваних сигналів -  $u_2(t)$ .

У цьому випадку у разі несинхронного формування відліків вхідних сигналів (наприклад, парні сигнали дискретизації застосовують для отримання вибірок  $u_1[j]$ , а непарні – для  $u_2[j]$ ) утворюється систематична похибка визначення фазових зсувів  $\Delta\varphi_c = 2\pi f T_d$ , яка може бути врахована при остаточному формуванні результату вимірювання.

Для кожної вибірки  $u_1[j]W[j, n_w]$  обсягу  $n_w$  обчислюється дискретний комплекснозначний сигнал  $\dot{z}[j, n_w] = u_2[j, n_w] + iu_{2H}[j, n_w]$ . Величини  $U_S, U_C$  по аналогії згідно (9.31) обраховуються як

$$U_S[j, n_w] = \frac{1}{n_w} \sum_{n=j}^{j+n_w} u_1[n, n_w] \cdot u_{2H}[n, n_w],$$

$$U_C[j, n_w] = \frac{1}{n_w} \sum_{n=j}^{j+n_w} u_1[n, n_w] \cdot u_2[n, n_w], \quad (9.31)$$

а фазовий зсув між цими послідовностями визначається по формулі

$$\varphi[j, n_w] = \mathbf{L}[U_S[j, n_w], U_C[j, n_w]]. \quad (9.32)$$

Як приклад, що ілюструє роботу ІВС за схемою на рис. 9.10, розглянемо задачу вимірювання фазових зсувів гармонічних складових сигналів (9.27) з параметрами: частотою  $f = 200$  Гц, амплітудами сигналів  $U_1 = U_2 = 1$  В, періодом дискретизації  $T_d = 10^{-4}$  с, часом спостереження  $u_1(t), t \in (0,3, 1,1)$  с, тривалістю вікна  $n_w T_d = 0,02$  с, фазовим зсувом між гармонічними складовими сигналів  $\varphi = 2,5$  рад, дисперсією шуму  $\sigma^2 = 1$  В<sup>2</sup>. Епюри сигналів без шуму та за наявності шуму наведено відповідно на рис. 9.11 і рис. 9.12.

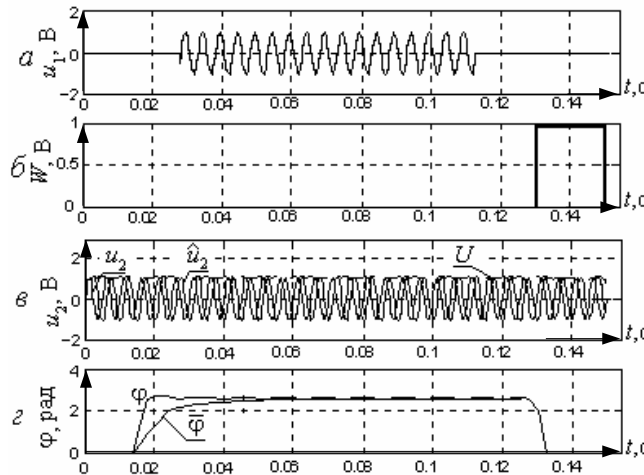


Рис. 9.11. Графіки вхідних кусково-гармонічних сигналів  $u_1(t), u_2(t)$  (а, в), вікна  $W(t)$  для  $t_w = 0,11$ с (б) та результатів розрахунку поточного  $\varphi(t)$  й усередненого на інтервалі  $[0, t_y]$  значень фазового зсуву  $\bar{\varphi}(t)$  (г)

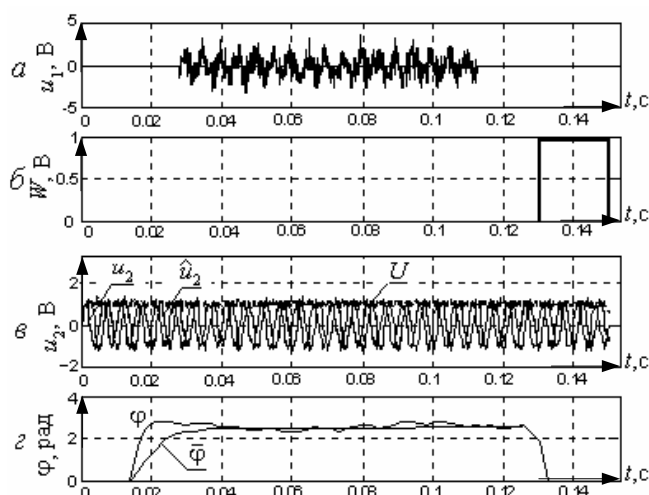


Рис. 9.12. Графіки вхідних кусково-гармонічних сигналів  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  з гауссівською завадою (а, в), вікна  $W(t)$  для  $t_w = 0,11$ с (б) та поточного  $\varphi(t)$  і усередненого на інтервалі  $[0, t_y]$  значень фазового зсуву  $\bar{\varphi}(t)$  (г)

Аналізуючи графіки на рис. 9.11, 9.12 можна зробити такий висновок. Якщо за відсутності шуму усереднення майже не впливає на точність результату, то за наявності гауссівської завади усереднення на колі дозволяє суттєво підвищити точність вимірювання: без усереднення абсолютна похибка вимірювання фазових зсувів зосереджена в інтервалі  $\sim \pm 0,3$  рад; при виконанні усереднення за розглянутою раніше методикою для часу усереднення  $t_y > 0,04$ с абсолютна похибка вимірювання фазових зсувів не перевищує 0,01 рад.

### 9.3. Виявлення радіоімпульсного сигналу фазовою ІВС

Задача виявлення радіоімпульсу на фоні адитивної завади і визначення в часі моменту його приходу є класичною в теорії виявлення сигналів, має відомі розв'язки і часто розглядається в радіолокації, неруйнівному контролі, зв'язку тощо [9.2; 9.18; 9.22; 9.29]. Традиційні методи розв'язання такої задачі полягають у застосуванні методів фільтрації та кореляційної обробки сигналів, при цьому, як правило, вимагається наявність копії сигналу. В цих методах, в основному, використовується інформація про амплітудно і фазово-частотні характеристики сигналів, а початкова фаза сигналу розглядається як неінформативний параметр. В той же час таку задачу можна розв'язати і на основі використання апріорної інформації про статистичні характеристики ФХС (без урахування апріорної інформації про його амплітуду) та визначення кругової дисперсії дробових частин ФХС [9.20]. Розглянемо більш детально таку задачу.

*Постановка задачі.* Нехай необхідно виявити радіоімпульсний сигнал



$$u_1(t) = \begin{cases} U_1 \cos(2\pi ft + \varphi_1), & t \in [t_1, t_2] \\ 0, & t \notin [t_1, t_2] \end{cases} \quad (9.33)$$

оцінити моменти часу  $t_1, t_2$ , в умовах дії адитивної завади  $\xi(\omega, t)$ .

Частота  $f$  сигналу заповнення радіоімпульсу є відомою. Стосовно решти параметрів сигналу відомо наступне :  $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ ,  $U_1 > 0$ . Сигнал (9.33) має прямокутну обвідну і спостерігається на фоні адитивної гауссівської завади  $\xi(\omega, t)$  з дисперсією  $\sigma^2$ . Модель досліджуваного сигналу можна представити у виді

$$\eta(\omega, t) = u_1(t) + \xi(\omega, t). \quad (9.34)$$

Реалізація  $u(t)$  процесу (9.34) дискретизується з періодом  $T_d \ll f^{-1}$ .

*Розв'язок.* Процес первинної обробки сигналу складається з наступних етапів:

- формування дискретної вибірки сигналу  $\{u[j] = u(jT_d), j = 1, 2, 3, \dots\}$ ;
- розрахунок гільберт-образу отриманої дискретної вибірки з використанням ковзного ДПГ

$$u_H[j, n_1] = \mathbf{H}_d \{u[j]B[j, n_1]\}, \quad (9.35)$$

де  $n_1$  – тривалість вікна (кількість вибірок у вікні);

- визначення дробових частин ФХС  $\varphi[j]$ ;
- порівняння дробових частин ФХС досліджуваного сигналу та гармонічного сигналу частотою  $f$  та визначення різниці між ними

$$\delta\varphi[j] = \varphi_1[j] - \varphi_0[j] = \varphi_1[j] - (2\pi f j T_d) \bmod 2\pi; \quad (9.36)$$

Інформаційним параметром, який дозволяє прийняти рішення про наявність радіоімпульсу є кругова дисперсія певної множини значень  $\delta\varphi[j]$  (9.36), або зв'язане з нею значення довжини результуючого вектора  $\mathbf{r}[j]$ , тобто модуля  $|\mathbf{r}[j]|$ . Це значення отримують як результат статистичної (вторинної) обробки значень  $\delta\varphi[j]$ . З метою визначення  $|\mathbf{r}[j]|$  виконується ковзне усереднення на колі отриманих значень  $\delta\varphi[j]$  з обсягом усереднення  $n_2$  ( $n_2$  прийнято парним) і розрахунок довжини результуючого вектора для відповідного часового вікна тривалістю  $n_2$  відліків:

$$\left| \mathbf{r} \left[ j + \frac{n_2}{2} \right] \right| = \sqrt{C^2[j, n_2] + S^2[j, n_2]}, \quad (9.37)$$

$$S[j, n_2] = \frac{1}{n_2} \sum_{g=j}^{j+n_2} \sin(\delta\varphi[g]), \quad C[j, n_2] = \frac{1}{n_2} \sum_{g=j}^{j+n_2} \cos(\delta\varphi[g]), \quad g \in [1, j - n_2). \quad (9.38)$$

Ознакою наявності сигналу є збільшення значення  $|\bar{R}[j, n_2]|$ . Оскільки наявність радіоімпульсу визначається за круговою дисперсією, то результат не залежить від початкової фази копії.

Розглянемо задачу виявлення радіоімпульсного сигналу на прикладі.

*Приклад 9.2.* Нехай для сигналу виду (9.34) маємо:  $U_1 = 1$  В,  $f = 100$  Гц,  $\sigma = 0,1$  В,  $t \in [0, 0,17]$  с,  $t_1 = 65$  мс,  $t_2 = 95$  мс, отже, радіоімпульс містить три періоди високочастотного гармонічного сигналу. Період дискретизації становить  $T_d = 0,1$  мс. Сигнал  $u_1(t)$  та реалізація процесу  $u(\omega, t)$  зображені відповідно на рис. 9.13 а, б.

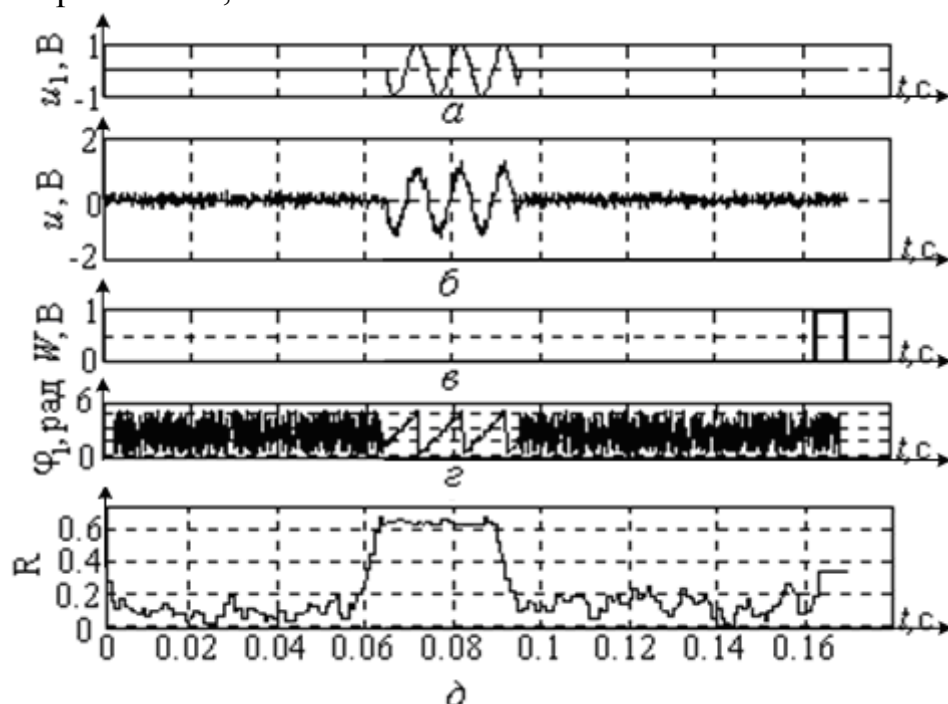


Рис. 9.13. Графіки вхідних сигналів та результатів обчислень прикладу 9.2

Тривалість вікна  $B[j, n_1]$  становить  $n_1 = 70$ . Часове положення вікна у кінцевій точці аналізу зображено на рис. 9.13,в. На епюрі рис. 9.13,г наведено результати розрахунку  $\varphi[j] = \{\Phi[j]\} \bmod 2\pi$ . З рис. 9.13,г видно, що на ділянці існування радіоімпульсу, тобто на інтервалі  $t \in [t_1, t_2]$  дробова частина ФХС має регулярний характер (наближається до ФХС гармонічної складової сигналу), а на інших ділянках – випадковий. Визначення дробових частин різниці ФХС на інтервалі  $[t_1 T_d^{-1}, t_2 T_d^{-1}]$  дає сталу величину, що, власне, дозволяє за оцінкою її кругової дисперсії визначити часове положення радіоімпульсу. Графік  $R[j] = \bar{r}[j]$ , отриманих за формулою (6.38), показано на рис. 9.13, д.

Виконані розрахунки та графік  $R[j]$  свідчить про можливість виявлення радіоімпульсних сигналів за круговою дисперсією різниці ФХС.

Розглянемо задачу виявлення радіоімпульсного сигналу при

співвідношенні сигнал/завада, близькому до одиниці.

*Приклад 9.3.* Використовуючи основні вихідні дані прикладу 9.2, покладемо  $\sigma = 1\text{В}$ . Результати моделювання показано на рис. 9.14. Загальний порядок і зміст епюр відповідає епюрам на рис. 9.13.

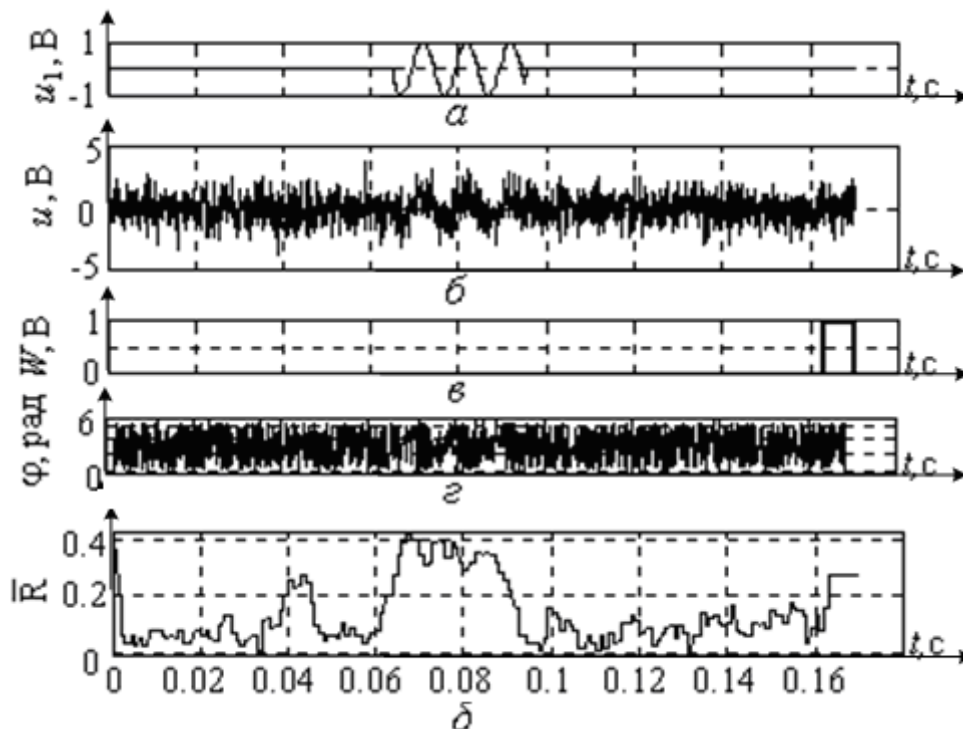


Рис. 9.14. Графіки вхідних сигналів та результатів обчислень прикладу 9.3

Результати моделювання свідчать, що і в цьому випадку зберігається можливість надійно виділити радіоімпульсний сигнал з його адитивної суміші із гауссівською завадою. Ця можливість лишається не дивлячись на те, що на інтервалі  $j \in [t_1 T_d^{-1}, t_2 T_d^{-1}]$  значення  $\delta\phi[j]$  змінюються випадково. Проте існує стійка нерівність

$$V\{\delta\phi[j]\}_{j \in \left(\frac{t_1}{T_d}, \frac{t_2}{T_d}\right)} < V\{\delta\phi[j]\}_{j \notin \left(\frac{t_1}{T_d}, \frac{t_2}{T_d}\right)}, \quad (9.39)$$

яка, власне, дозволяє виявити наявність радіоімпульсу.

Розглянемо можливість застосування запропонованої методики виділення сигналу з його адитивної суміші із завадою для радіоімпульсів з іншою обвідною.

В реальних задачах часто існує необхідність виділення радіоімпульсного сигналу з гауссівською обвідною. Розглянемо наступний приклад для ілюстрації такого випадку.

*Приклад 9.4.* Використовуючи основні вихідні дані прикладу 9.2, покладемо  $\sigma = 0,5 \text{ В}$  і ширину смуги частот сигналу  $\Delta f = 0,4 \text{ Гц}$ . Результати моделювання показавано на рис. 9.15. Загальний порядок і зміст епюр відповідає епюрам на рис. 9.13.

Результати моделювання підтверджують збереження властивості виділення радіоімпульсного сигналу і у випадку адитивної суміші радіоімпульса з гауссівською обвідною та завади.

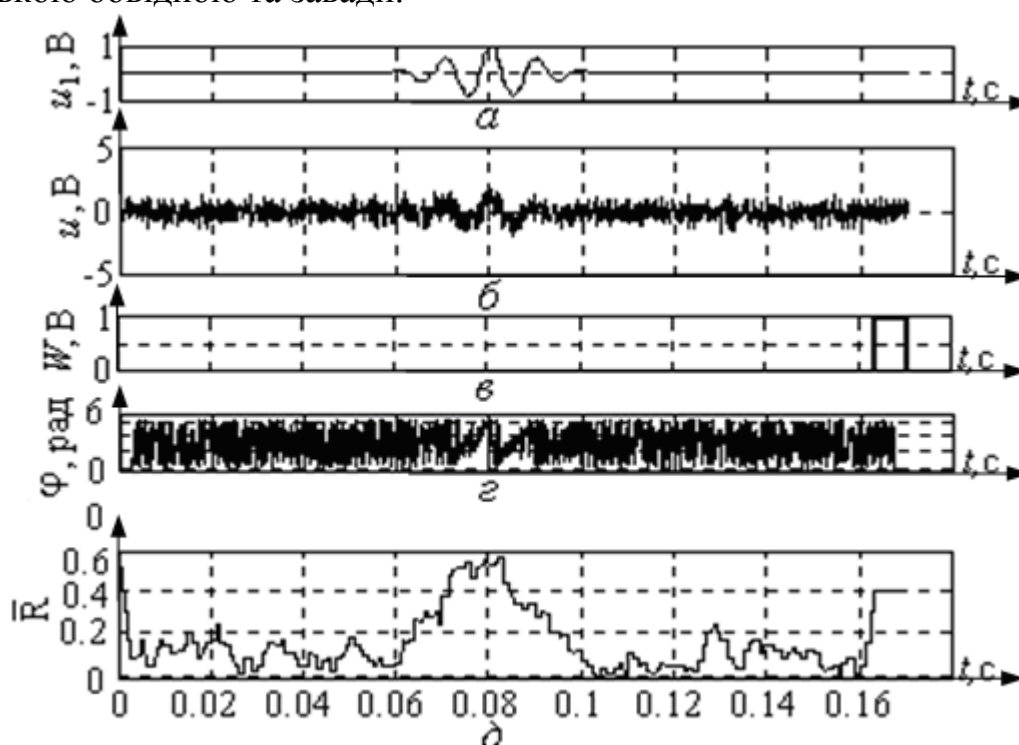


Рис. 9.15. Графіки вхідних сигналів та результатів обчислень прикладу 9.4

Суттєвим для всіх наведених прикладів є те, що вони не потребують знання повної копії сигналу, а використовують лише апріорну інформацію про ФХС копії. Результатами моделювання також підтверджено, що виділення сигналу можливе за умови використання наближеного значення частоти сигналу (використання ФХС некогерентної копії). Такий випадок має місце, наприклад, у радіолокації під час аналізу сигналів, відбитих від рухомого об'єкта, частота яких зміщена відносно частоти сигналу опромінювання на доплерівську частоту  $\Delta f_d$ . В цьому разі зберігається нерівність (9.39) для значного діапазону розстроювання частоти сигналу (до  $\pm 10\%$ ).

Результати моделювання свідчать про те, що застосування додаткової статистичної обробки ФХС досліджуваного сигналу дозволяє вирішувати задачу виявлення радіосигналу на фоні адитивної завади при співвідношенні сигнал/завада близькому до 0,2.

#### 9.4. Фазові ІВС у задачах ультразвукової дефектоскопії

Задача вимірювання геометричних розмірів деталей – одна з традиційних в ультразвуковому неруйнівному контролі. Постійне розширення номенклатури матеріалів і виробів, розробка і широке впровадження в машинобудуванні, аерокосмічній техніці, енергетиці та будівництві нових конструкційних

матеріалів, які характеризуються значним загасанням та розсіюванням ультразвуку, підвищення вимог щодо точності вимірювань і достовірності контролю геометричних розмірів деталей і виробів визначають актуальність цієї задачі і сьогодні. Особливе місце займають задачі визначення товщини об'єктів та виробів при односторонньому доступі, наприклад, товщини стінок балонів, які працюють під високим тиском, ємностей для зберігання агресивних рідин або визначення товщини шарів багатошарових середовищ.

Луна-імпульсний метод ультразвукової товщинометрії полягає у визначенні затримки  $\tau$  на проходження ультразвукового зонduючого радіоімпульсного сигналу через досліджуваний об'єкт контролю [9.14]. Загальновідомо, що за відомої швидкості  $c$  розповсюдження ультразвукової хвилі в двох напрямках між верхньою та нижньою (дном) поверхнею об'єкта контролю з плоскопаралельними гранями та при доступі до ОК з однієї сторони, затримка  $\tau$  однозначно пов'язана з товщиною  $h$  об'єкта контролю:  $h = 0,5c\tau$ . Зазвичай, значення  $\tau$  оцінюють по часовому положенню обвідних зонduючого і донного ультразвукових сигналів.

Вимірювання тонких об'єктів контролю (або оцінка товщини шарів багатошарових об'єктів контролю) таким способом має певні обмеження, пов'язані з наявністю мертвої зони – ділянки об'єкта контролю, в межах якої стає неможливим виділення окремо обвідних донного і зонduючого сигналів внаслідок їх накладання. Це обмеження стає ще більш жорстким під час вимірювання шарів багатошарових середовищ.

В роботі [9.14] запропоновано інший шлях вирішення поставленої задачі на основі аналізу ФХС відбитих від дна об'єктів контролю сигналів. Для такого сигналу ФХС  $\Phi(t)$  визначається через перетворення Гільберта за викладеною в розділі 6 методикою.

Якщо використовується радіоімпульсний зонduючий сигнал з гармонічною несучою частотою  $f$ , фазова характеристика неспотвореного сигналу є лінійною функцією часу -  $\Phi_0(t) = 2\pi ft + \varphi_{\text{п}}$ , де  $\varphi_{\text{п}}$  - початкова фаза сигналу. При суміщенні в часі донного і зонduючого сигналів ФХС сумарного сигналу має стрибок у межах  $\pm\pi$  в околі моменту суміщення [9.30]. Стрибок ФХС оцінюється величиною  $\delta\Phi(t)$ :

$$\delta\Phi(t) = \Phi(t) - \Phi_0(t). \quad (9.40)$$

Викладене вище проілюструємо наступними прикладами моделювання задачі луна-імпульсної товщинометрії.

*Приклад 9.5.* Сформуємо аналізований сигнал наступним чином. Задамо зонduючий сигнал у вигляді радіоімпульсу з експоненціальною обвідною

$$u_1(t) = A_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(2\pi ft), \quad (9.41)$$

де  $\tau$  – постійна часу, а параметри сигналу мають такі числові значення:  $\tau = 0,02$  с,  $f = 100$  Гц,  $t \in [0, 0,17)$  с,  $A_1 = 1$  В. Отримані з періодом дискретизації  $T_d = 100$  мкс вибіркові значення сигналу  $u_1(t)$  зображено на рис. 9.16, а.

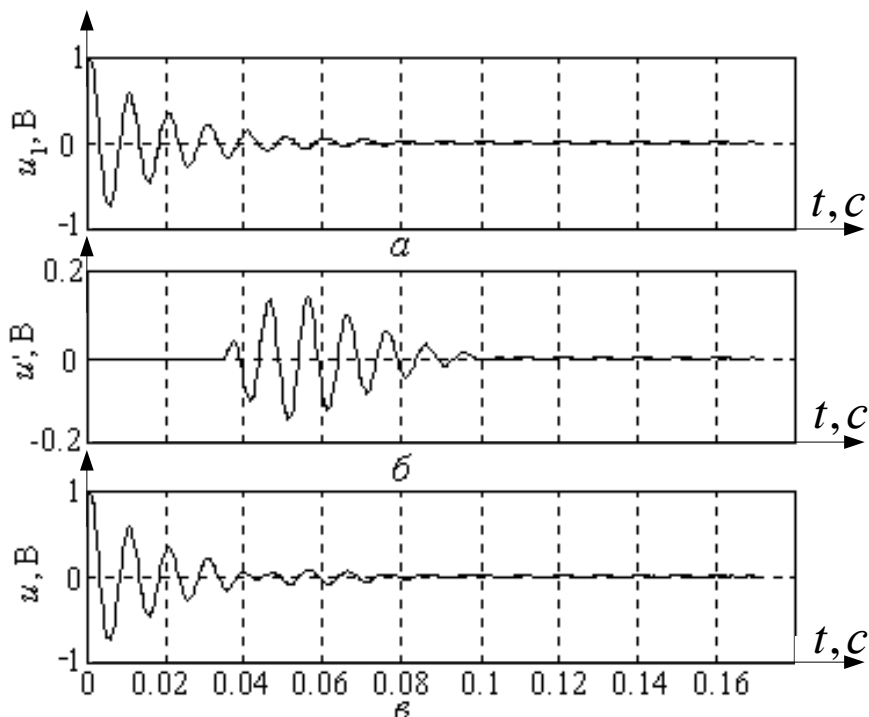


Рис. 9.16. Графіки, що ілюструють формування аналізованого радіоімпульсного сигналу за даними прикладу 9.5

На сигнал  $u_1(t)$  накладається відбитий сигнал  $u'(t)$  (луна-сигнал), який має таку ж частоту заповнення, але іншу обвідну. Момент формування  $u'(t)$  затриманий в часі відносно  $u_1(t)$  на величину  $t_3$ :

$$u'(t) = A' \exp\left(-\frac{t-t_3}{\tau}\right) \cos[2\pi f(t-t_3)] \sin[14\pi(t-t_3)], \quad (9.42)$$

де  $A' = 0,5$  В,  $t_3 = 0,035$  с. Графік вибірки луна-сигналу зображено на рис. 9.16, б.

На рис. 9.16, в зображено суперпозицію зонduючого і луна-сигналу, тобто сигнал  $u(t) = u_1(t) + u'(t)$ . Обвідна суперпозиції зонduючого і луна-сигналу мало відрізняється від обвідної зонduючого, що не дає змогу використовувати її для надійного визначення затримки розповсюдження сигналу в ОК. Для подальшого аналізу становить інтерес фазова характеристика сигналу  $u(t)$ .

Результати обрахунку гільберт-образу  $u_H(t)$  сигналу  $u(t)$  та його обвідної  $U$  показано на рис. 9.17, а. З графіка видно, що ні обвідна, ні гільберт-образ  $u_H(t)$  не дозволяють дати заключення про наявність чи відсутність накладеного луна-сигналу.

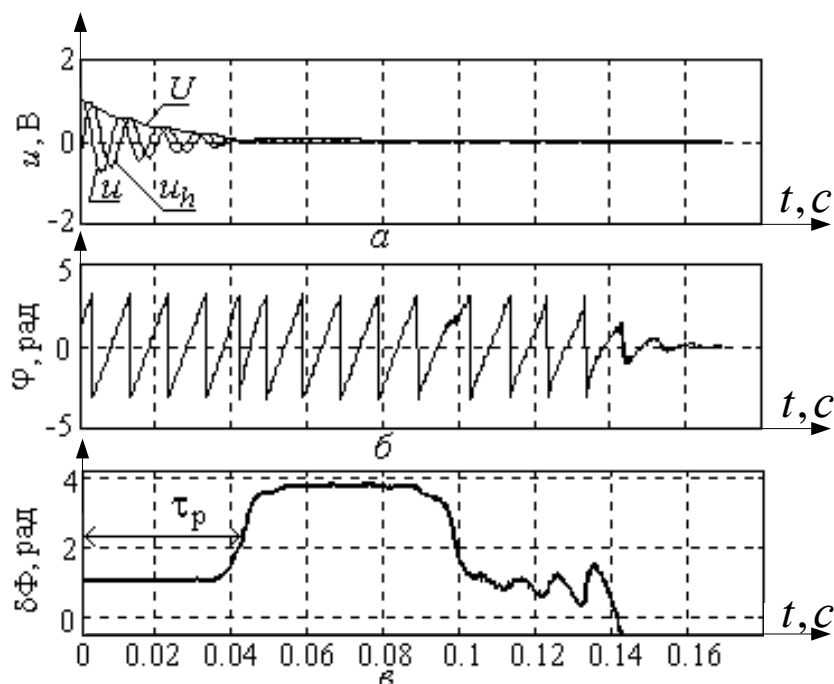


Рис. 9.17. Графіки, що пояснюють обробку сигналу в прикладі 6.5

Проаналізуємо ФХС для  $u(t)$ . На рис. 9.17, б зображено дробову частину ФХС –  $\varphi(t) = \mathbf{L}[u(t), u_n(t)]$ . Оскільки сигнал заповнення синусоїдний, то ФХС в межах існування сигналу без накладеного відбитого сигналу має бути лінійною. Перевіримо цю гіпотезу. З цією метою визначимо різницю  $\delta\Phi(t)$  фазових характеристик досліджуваного сигналу і копії за формулою (9.40). Результати розрахунків показано на рис. 9.17, в. З графіка видно, що на інтервалі  $t \in (0,04, 0,1)$  с ФХС спотворюється і значно відрізняється від лінійної, що вказує на наявність накладеного луна-сигналу (отже гіпотеза про відсутність відбитого сигналу відкидається).

Часове положення стрибка фази відповідає моменту приходу донного імпульса. Таким чином, визначаючи часове положення стрибка функції  $\delta\Phi(t)$  відносно фази зондуєчого сигналу можна визначити  $\tau_p$  - час розповсюдження ультразвукового сигналу в ОК. Невідома товщина ОК розраховується за формулою  $d = 0,5v\tau_p$ .

### 9.5. Фазові системи передачі та захисту інформації на базі СЗК

Характерні ознаки сучасних технічних систем пов'язані зі стрімким зростанням інформаційних потоків, швидкістю та обсягом передавання, різноманітністю якісного змісту інформації та її цінності, розширенням видів носіїв інформації тощо. Інформація як особливий вид товару має вартість, і в більшості випадків значну цінність. Несанкціоноване заволодіння інформацією та її розповсюдження здатне не лише призвести до її суттєвого обезцінювання, але може мати фатальні наслідки. За таких обставин необхідність захисту

інформації від її втрати або пошкодження та несанкціонованого заволодіння нею є актуальною задачею.

Успішне вирішення задач захисту інформації потребує системного застосування різних методів – математичних, програмних, апаратних, організаційних тощо. Вибір потрібної сукупності методів та їх різновидів не в останню чергу визначається носієм, який обрано для передавання інформації. Коливальні фізичні процеси – акустичні, механічні, оптичні, електромагнітні тощо, які відрізняються амплітудними, фазовими і частотними характеристиками використовуються у різних інформаційних системах як носії інформації. Характеристики таких процесів можуть кодуватись з метою маскування факту і змісту передачі інформації. Як правило, прагнуть передати найбільший обсяг інформації за найменшої модифікації характеристик процесів за фізично короткий час.

В колі питань, пов'язаних із захистом інформації, важливе місце належить кодуванню інформації в каналах передачі. До таких кодів висувуються специфічні вимоги здатності виявляти і коригувати помилки, а також підвищений рівень складності декодування. Значній сукупності цих вимог відповідає кодування інформації у числовій системі залишкових класів (СЗК).

**Кодування інформації в СЗК.** Розглянемо наступну задачу. Інформація, що підлягає кодуванню та передачі, представлена послідовністю символів з множини  $\{\alpha_j, j = \overline{1, k}\}$ , які утворюють відомий алфавіт. Елементи  $\alpha_j$  та їх сукупності характеризуються певними умовними та безумовними частотами повторення. Необхідно сформулювати інформаційне повідомлення виду  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l$  довжиною  $l$  символів у СЗК, передати його одержувачу з відтворенням елементами вихідного алфавіту. Передбачається, що при передачі та прийомі повідомлення ключ, яким є система модулів, відомий.

Кожному елементу алфавіта  $\alpha_j$  поставлено у відповідність ціле додатне число, наприклад, його порядковий номер  $j = \overline{1, k}$ , і нехай в позиційній системі числення з основою  $a$  повідомлення (або його частина), що складається з  $l$  символів, представляється числом  $A$ , максимальне значення якого становить  $A_{\max}$ . Задамо модулі СЗК як систему взаємопростих цілих чисел  $n_1, \dots, n_i, \dots, n_m \in N$ , тобто чисел, найбільший загальний подільник яких дорівнює одиниці. Подамо число  $A$  залишками від його ділення на обрані модулі:  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m)$ , де  $\alpha_i = A \pmod{n_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Отже вихідний об'єкт – число  $A$ , трансформується в  $m$  чисел  $\alpha_i < A$ . При цьому руйнуються ймовірнісні співвідношення між елементами вихідного алфавіту та їх комбінаціями, що забезпечує прихованість передачі.

Повідомлення передається одержувачу у вигляді послідовності лишків  $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m$  цього числа  $A$ . Відновити значення  $A$  безпосередньо з величин  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  без спеціальної обробки неможливо. Для визначення числа  $A$



необхідно розв'язати систему порівнянь типу (4.59).

У разі виконання умови (4.33), тобто  $A_{\max} < \prod_{i=1}^m n_i$ , відновлення

повідомлення, за умови відомої системи модулів, має однозначний розв'язок у вигляді (4.34). Модулі СЗК є незмінними константами і розраховуються до передачі і декодування повідомлення. Розглянемо кодування повідомлень в СЗК на наступному прикладі.

*Приклад 9.6.* Нехай необхідно передавати числа з діапазону  $A \in [0, 2^{16}]$ . Виберемо модулі системи:  $n_1 = 38$ ,  $n_2 = 41$ ,  $n_3 = 43$ . Перевіримо умову (4.33):  $A = 38 \cdot 41 \cdot 43 = 66994 > 2^{16} = 65536$ . Розрахунок ортонормованих базисів дає результат:  $B_1 = 58179$ ,  $B_2 = 55556$ ,  $B_3 = 20254$ . Подамо число  $A = 29652$  в СЗК за обраною системою модулів:  $A_{\text{СЗК}} = (12, 9, 25)$ . Таким чином, для передачі заданого числа  $A = 29652$  достатньо передати послідовність чисел 12, 9, 25. Відновлення одержувачем переданого числа відбувається за алгоритмом (4.34):  

$$(12 \cdot 58179 + 9 \cdot 55556 + 25 \cdot 20254) \pmod{66994} = 29652.$$

З метою підвищення прихованості передачі операція подання числа залишками може застосовуватись багатократно, тобто залишки  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  також можна подати залишками в іншій системі модулів  $n'_1, \dots, n'_j, \dots, n'_l$ . Наприклад, подання кожного із залишків прикладу 9.6 в новій СЗК з модулями  $n'_1 = 5$ ,  $n'_2 = 11$  формує нове подання повідомлення:  $A_{\text{СЗК}} = (2, 1, 4, 9, 0, 3)$ .

**Підвищення прихованості передачі інформації з кодуванням у СЗК за рахунок використання шумоподібних кодів.** Використання шумоподібних кодів шляхом зашумлення інформації що передається залишками, дає можливість певною мірою підвищити конфіденційність передачі в системах з фазовою маніпуляцією [9.12]. В цьому випадку декодування повідомлення потребує спеціальних нелінійних методів і алгоритмів статистичної обробки даних. Розглянемо питання відновлення поданої в СЗК інформації в умовах її зашумлення та проаналізуємо збіжність декодування.

Нехай числова інформація, що підлягає кодуванню та передачі, задана цілим додатним числом  $A$  з інтервалу  $A \in [0, A_p)$ . Ключем кодування/декодування повідомлення є система модулів  $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_m)$ . З метою підвищення конфіденційності по відкритому каналу передається адитивна суміш лишків  $\{\alpha_i, i = \overline{1, m}\}$  і випадкових чисел  $\xi(j)$ ,  $j = \overline{1, k}$ , наприклад, з гауссівським розподілом, нульовим математичним сподіванням і середньоквадратичним відхиленням  $\sigma$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1(j) &= (\alpha_1 + \beta \cdot [\xi_1(j)]^+) \bmod n_1, \quad j = \overline{1, k}, \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{\alpha}_m(j) &= (\alpha_m + \beta \cdot [\xi_m(j)]^+) \bmod n_m, \quad j = \overline{1, k}, \end{aligned} \quad (9.44)$$

де  $k$  – обсяг вибірки, для якої лишки числа  $A$  є незмінними, тобто триває передача одного числа  $A$ ;  $\beta$  – коефіцієнт, що визначає середньоквадратичне відхилення.

Передбачається, що модулі системи – взаємопрості числа, а максимальне відновлюване число  $A_{\max} < \prod_{i=1}^m n_i = A_p$ . Необхідно декодувати інформаційне повідомлення, визначити потрібний для відновлення повідомлення мінімальний обсяг вибірки  $k$  і забезпечити відновлення  $A$  для одержувача за умови, що відомий ключ кода.

Для відновлення числа  $A$  необхідно розв’язати систему порівнянь типу (4.56), в якій замість залишків  $\alpha_i$  необхідно підставити їх оцінки  $\hat{\alpha}_i$ .

З метою визначення оцінок  $\hat{\alpha}_i$  розглянемо подання залишків на одиничному колі. На рис. 9.18 показано отримання оцінки  $\hat{\alpha}_i$  на прикладі двох залишків  $\tilde{\alpha}_i(1), \tilde{\alpha}_i(2)$  для модуля  $n_i = 14$  при їх представленні на колі одиничного радіуса  $r = 1$ .

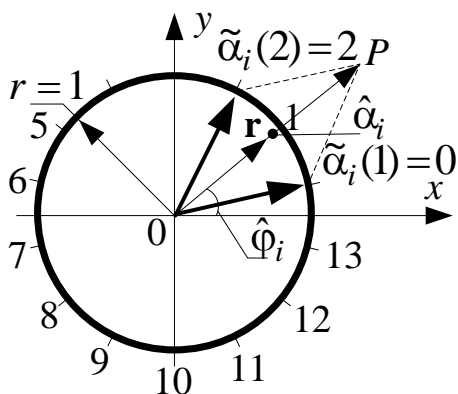


Рис.9.18. Кругова діаграма залишків на одиничному колі

Кожному залишку відповідає вектор, який починається в центрі декартової системи координат  $xOy$  і закінчується в точках кола, які відповідають його розбиттю на  $n_i$  частин. Ці вектори з урахуванням відліку проти ходу годинникової стрілки розміщено відносно вісі  $Oy$  під кутами

$$\tilde{\varphi}_i(j) = \frac{2\pi}{n_i} \tilde{\alpha}_i(j). \quad (9.44)$$

У разі усереднення на колі оцінка середнього напрямку  $\hat{\varphi}_i$  для суми одиничних векторів з кутами  $\tilde{\varphi}_i(1), \dots, \tilde{\varphi}_i(k)$  відповідає куту вектора  $\overline{OP}$ , який утворено векторною сумою цих  $k$  одиничних векторів (на рис. 9.18 – двох

векторів). Цей напрям обчислюється як  $\hat{\varphi}_i = \mathbf{L}[S_i, C_i]$  з аргументами

$$S_i = \sum_{j=1}^k \sin(\tilde{\varphi}_i(j)), \quad C_i = \sum_{j=1}^k \cos(\tilde{\varphi}_i(j)). \quad (9.45)$$

Куту  $\tilde{\varphi}_i$  на одиничному колі відповідає певна точка. Найближчу до цієї точки позначку розбиття кола на  $n_i$  частин приймають за оцінку залишка  $\hat{\alpha}_i$ , що можна визначити виразом

$$\hat{\alpha}_i = \left[ \frac{\hat{\varphi}_i}{2\pi} n_i + 0.5 \right]. \quad (9.46)$$

Система порівнянь (4.56) з оцінками залишків (9.46) має загальний розв'язок (4.34).

Таким чином, повідомлення  $A$  передається одержувачу у вигляді послідовності спотворених лишків  $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_i, \dots, \tilde{\alpha}_m$  числа  $A$ . Відновити число  $A$  безпосередньо з величин  $\tilde{\alpha}_i, i = \overline{1, m}$  без спеціальної обробки неможливо. Ключем до відновлення  $A$  є обрана система модулів, кількість  $k$  і послідовність передачі кожного із лишків, що визначає порядок обробки даних в каналі передачі та прийому.

Загальну структурно-логічну схему обробки даних в каналі передачі з СЗК наведено на рис. 9.19.

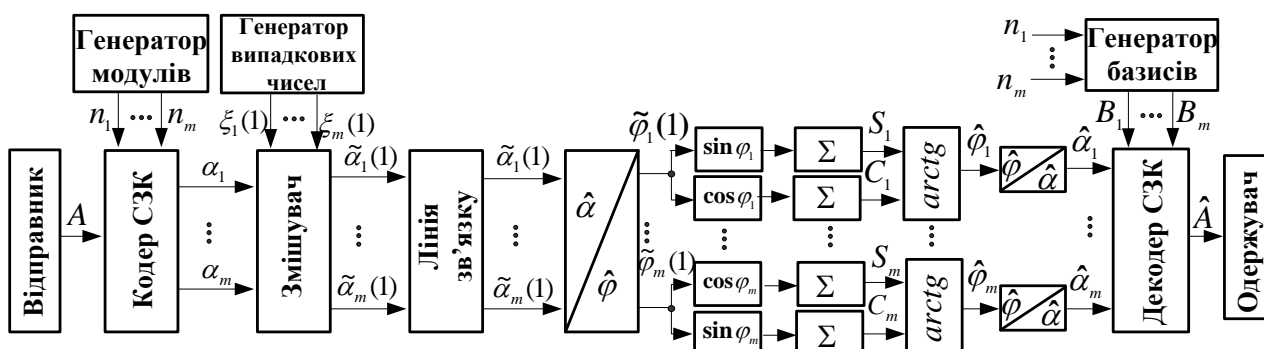


Рис. 9.19. Структурно-логічна схема обробки даних в каналі передачі інформації в СЗК з шумоподібними сигналами

За цією схемою кодер СЗК формує лишки  $\{\alpha_i, i = \overline{1, m}\}$ , де  $\alpha_i = A(\text{mod } n_i)$ , а змішувач виконує спотворення лишків і їх передачу в лінію зв'язку. Лишки передаються по лінії послідовно чи паралельно в часі. Отримані лишки  $\{\tilde{\alpha}_i, i = \overline{1, m}\}$  за формулою (9.44) перетворюються у відповідні кути  $\{\tilde{\varphi}_i, i = \overline{1, m}\}$ , які в свою чергу після нелінійного перетворення  $\sin \varphi_i$  і  $\cos \varphi_i$  накопичуються в суматорах  $\Sigma$  відповідно до (9.45). Отримані суми  $S_i, C_i$  використовуються для обрахунку оцінок усереднених кутів  $\{\hat{\varphi}_i, i = \overline{1, m}\}$ . Останні використовуються для розрахунку оцінок лишків  $\{\hat{\alpha}_i, i = \overline{1, m}\}$  (9.46), які надходять на декодер СЗК, що формує оцінку  $\hat{A}$  переданого повідомлення за виразом (4.31). Необхідні для

виконання останньої операції базиси  $(B_1, \dots, B_i, \dots, B_m)$  формуються генератором базисів.

Суттєвим питанням розробки системи передачі даних з їх зашумленням і поданням у СЗК є вибір параметрів генератора шуму та обсяга усереднення  $k$ . Відповідь на ці питання можна отримати, в основному, шляхом моделювання, оскільки теоретично це зробити досить складно. Розглянемо наступні приклади.

*Приклад 9.7.* Виберемо модулі системи:  $n_1 = 13$ ,  $n_2 = 14$ ,  $n_3 = 15$ . Така система забезпечує передачу та однозначне відновлення чисел з діапазону  $A \in [0, 2730]$ , тобто  $A_p = 2730$ . Виберемо число для передачі  $A = 998 < A_p$ .

Результат розрахунку ортонормованих базисів для системи модулів (13, 14, 15):  $B_1 = 1470$ ,  $B_2 = 2535$ ,  $B_3 = 1456$ . Подання числа  $A = 998$  в СЗК за обраною системою модулів має вигляд  $A = (10, 4, 8)$ . Утворимо адитивні суміші (9.43) цих лишків з випадковими числами  $\xi_i(j)$ , де  $j = \overline{1, 4000}$ , які розподілені за нормальним законом із середньоквадратичним відхиленням (СКВ)  $\sigma \in [0, 1, 5]$ . Формування масивів випадкових чисел виконувалось в системі MatLab за допомогою функції **randn**.

На рис. 9.20 зображено перші 30 значень реалізації випадкового процесу (9.43), для якого випадкові числа розподілені за гауссівським законом з  $\sigma = 3$ , а на рис. 9.21 – гістограма в полярних координатах кутів  $\tilde{\varphi}_1(j)$ ,  $j = \overline{1, 4000}$  для  $\sigma = 4,5$ .

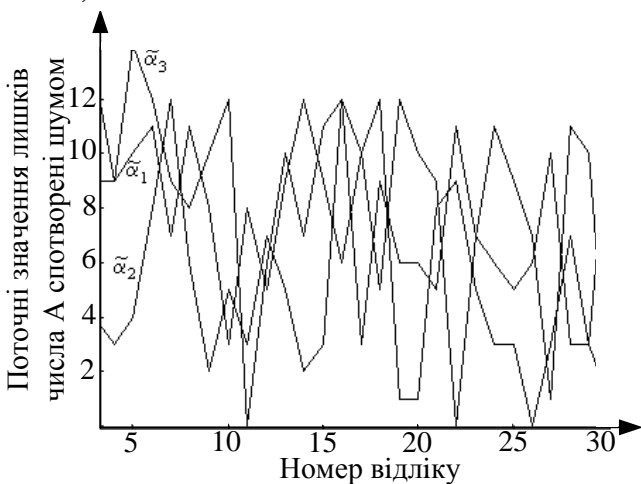


Рис. 9.20. Графік, що ілюструє зміну значень залишків числа  $A$  після їх спотворення псевдовипадковими числами для  $\sigma = 3$

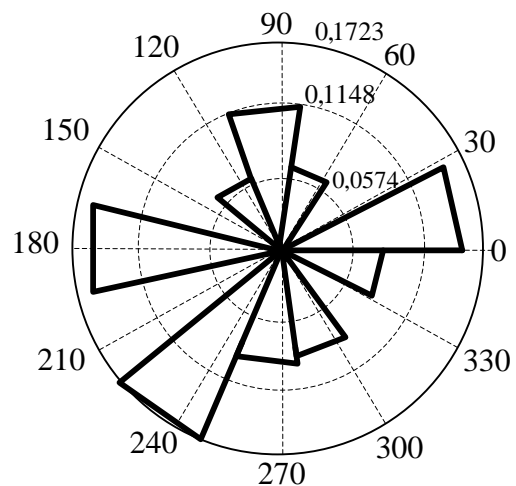


Рис. 9.21. Гістограма в полярних координатах розподілу випадкових кутів  $\tilde{\varphi}_1(j)$  для  $\sigma = 4,5$  і  $j = \overline{1, 4000}$

Різним секторам гістограми відповідають вказані значення ймовірності попадання кута  $\tilde{\varphi}_1(j)$  в певний сектор. З цих рисунків видно, що додавання випадкових чисел до залишків маскує повідомлення, причому останнє не може бути відновлене на основі розрахунку арифметичного середнього.

Відновлення повідомлення можливе за умов відомого ключа (системи модулів) та застосування наведеної вище методики обробки прийнятих лишків. Дослідимо збіжність результатів відновлення повідомлення, для чого розглянемо зміну в часі оцінок лишків, отриманих для різного обсягу вибірки – від 10 до 4000, яка використовується для обрахунку сум (9.45).

Графік, що відображає оцінки залишків для різного обсягу вибірки  $k = \overline{10,450}$  і  $\sigma = 3,5$  зображено на рис. 9.22, а. З рисунка видно, що перехідний процес – процес від початку усереднення на колі до встановлення сталого правильного значення лишку - триваліший для залишків, отриманих за меншими модулями.

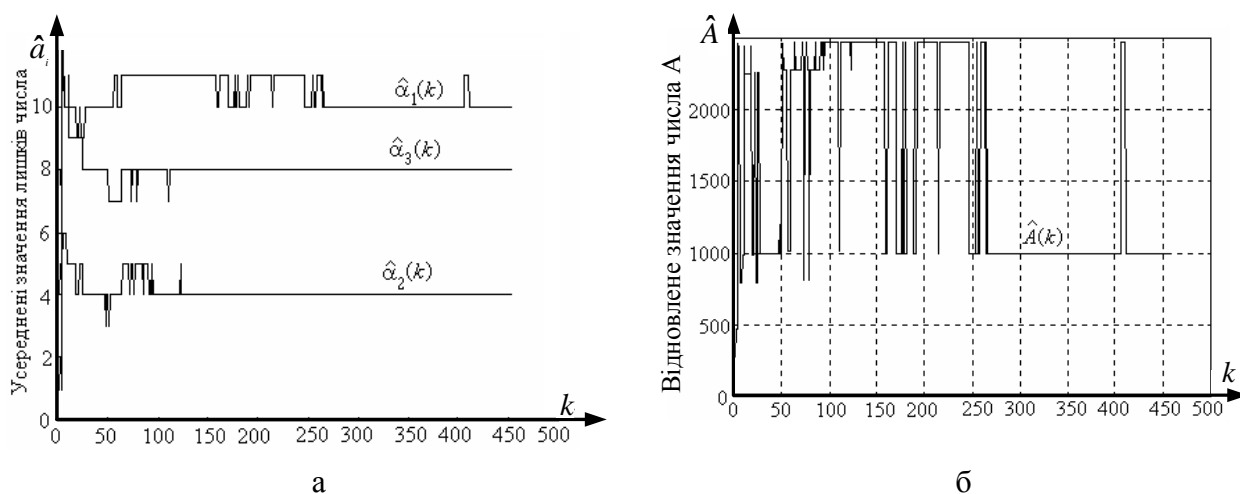


Рис. 9.22. Графіки зміни оцінок залишків  $\hat{\alpha}_i(k)$  (а) та повідомлення  $\hat{A}(k)$  (б) для різних обсягів усереднення  $k$  прикладу 9.7 та  $\sigma = 3,5$

На рис. 9.22, б представлено оцінку всього повідомлення  $\hat{A}(k)$  за відновленими за допомогою усереднення на колі залишками  $\hat{\alpha}_i(k)$  для  $k = \overline{10,450}$  і  $\sigma = 3,5$ . З рис. 9.22 видно, що для розглянутого прикладу тривалість перехідного процесу, тобто час досягнення сталого коду, для якого  $\hat{A}(k_n) = A$ , потребує обсягу накопичення  $k_n = 415$ .

Для побудови системи передачі даних на основі СЗК суттєвим лишається питання вибору параметрів генератора випадкових чисел та обсягів усереднення. З цією метою досліджено зміну середнього значення обсягу вибірки  $k_c$ , яке необхідно для отримання неспотвореного повідомлення залежно від значення  $\sigma$ , а також СКВ цих значень

$$k_c = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p k_i; \quad \sigma(k_c) = \sqrt{\frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (k_i - k_c)^2},$$

де  $k_i$  – обсяг усереднення, необхідний для завершення перехідних процесів в  $i$ -му експерименті. Значення  $k_c$  визначалось за результатами десяти

експериментів, тобто  $p = 10$ . Результати досліджень для двох випадків відновлення повідомлення  $A = 998$  в СЗК з модулями (13, 14, 15) і повідомлення  $A = 113$  в системі з меншими модулями (5, 6, 7) представлено в табл. 9.1.

Таблиця 9.1. Визначення  $k_c$  за вихідними даними прикладу 9.7

$\sigma$		0,5	1	1,5	1,75	2	3	3,5	4	4,5	5
$n_1 = 13,$	$k_c$	4,6	15	30	33	58	162	394	939	2012	3090
$n_2 = 14,$	$\sigma(k_c)$	1,8	16	25	11	20	47	285	296	1229	1582
$n_3 = 15$											
$n_1 = 5,$	$k_c$	3,2	14,1	59,8	342	1072	–	–	–	–	–
$n_2 = 6,$	$\sigma(k_c)$	2,5	10,8	31,7	377	634	–	–	–	–	–
$n_3 = 7$											

Наведені в табл. 9.1 дані можна прокоментувати таким чином. В системі з меншими модулями кут  $\varphi_i = 2\pi/n_i$ , який відповідає суміжним значенням лишків, більший, тому збіжність результатів за малих значень  $\sigma$  досягається швидше. Водночас природно, що зі збільшенням  $\sigma$  для менших значень модулів СЗК швидше зростає  $k_c$ . В обох випадках  $\sigma(k_c)$  стрімко зростає зі збільшенням  $\sigma$ . Графіки залежності  $k_c = f(\sigma)$  для різних модулів зображено на рис. 9.3. Жирними лініями на цьому графіку позначено діапазон  $\pm \sigma(k_c)$ .

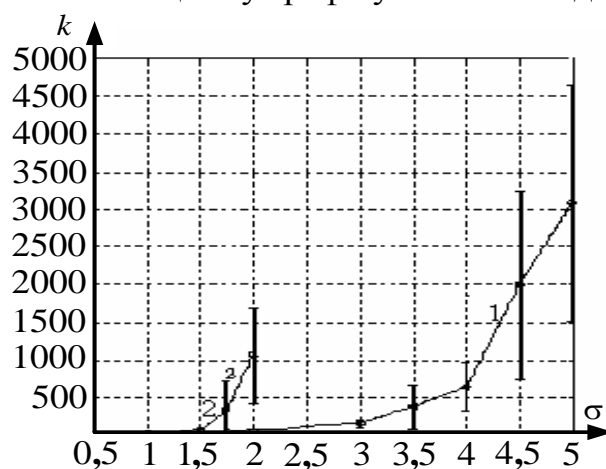


Рис. 9.23. Графік залежності  $k_c = f(\sigma)$  для різних модулів: 1 – для модулів (13, 14, 15); 2 – для модулів (5, 6, 7)

Аналізуючи криві можна зробити висновок про те, що в обох випадках функція  $k_c = f(\sigma)$  має ділянки близькі до лінійних в інтервалі значень СКВ  $\sigma \in (0, 0,25n_c)$ , де  $n_c$  – середнє значення модулів СЗК.

З наведених даних також випливає, що збільшення  $\sigma$  разом з підвищенням потайності передачі суттєво впливає на збільшення необхідного мінімального обсягу вибірки  $k_c$ , отже, на збільшення часу передавання і оброблення даних. Результати моделювання свідчать також про те, що процес обчислення середнього на колі збігається до певного обмеженого діапазону значень СКВ,

який наближено задається нерівністю  $n_c > 3\sigma$ . В той же час з рис. 9.23 видно, що правильні значення повідомлення у разі виконання усереднення можуть траплятись значно раніше за час отримання сталого розв'язку. Ці правильні значення можуть бути виявлені за умови передачі ще одного додаткового  $(m+1)$ -го лишку  $\alpha_{m+1} = A \pmod{n_{m+1}}$ , отриманого за додатковим модулем  $n_{m+1} > n_i$ ,  $i \in [1, m]$ , який є взаємопростим з довільним модулем СЗК  $n_i$ ,  $i \in [1, m]$ .

**Структури каналів передачі інформації з кодуванням у СЗК.** Раніше зазначалось, що кодування в СЗК подібне поданню інформації у фазовому методі. Це робить природним застосування фазової маніпуляції до передачі кодів у СЗК, тобто дозволяє природно узгодити логічний і фізичний рівні систем кодування і передачі інформації. Модуляція фази радіосигналів давно використовується для передавання аналогових і цифрових сигналів у системах зв'язку з підвищеною завадостійкістю [9.5; 9.6; 9.10]. Останнім часом фазові методи передавання, перетворення і обробки інформації знаходять застосування і в системах захисту інформації [9.22; 9.13; 9.19]. Проаналізуємо застосування властивостей СЗК у системах передачі даних з фазовою маніпуляцією на наступному прикладі.

*Приклад 9.8.* Нехай задано числову інформацію, що підлягає кодуванню та передачі, подану цілим додатним числом  $A < A_{\max}$  у СЗК. Закодовану інформацію необхідно передати через лінію зв'язку за допомогою фазової маніпуляції гармонічного коливання  $u_o(t) = U \cos 2\pi ft$ ,  $t \in [0, T_{\Pi})$ , де  $U$ ,  $f$  – відповідно амплітуда і частота сигналу;  $T_{\Pi}$  – час передачі повідомлення. Потрібно сформулювати інформаційне повідомлення і забезпечити його відновлення в приймачі за умови, що під час приймання повідомлення одержувачу відомі: 1) ключ, яким є система модулів СЗК, 2) частота  $f$  сигналу  $u_o(t)$ ,  $t \in [0, T_{\Pi})$ .

Під час кодування СЗК інформаційне повідомлення – число  $A$  – трансформується в  $m$  чисел  $\alpha_i \ll A$ , які використовуються для модуляції фазового зсуву сигнальних посилок згідно з рівнянням (9.44). Розглянемо формування інформаційного фазоманіпульованого сигналу для наступних вихідних даних:  $n_1 = 38$ ,  $n_2 = 41$ ,  $n_3 = 43$ ,  $A_p = 66994$ ,  $A = 29652$ ,  $A_{\text{СЗК}} = (12, 9, 25)$ ,  $B_1 = 58179$ ,  $B_2 = 55556$ ,  $B_3 = 20254$ .

Для передачі повідомлення  $A$  необхідно передати послідовність залишків 12, 9, 25. Залишки  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  передаються по лінії зв'язку послідовно в часі за допомогою фазової маніпуляції гармонічного коливання  $u_o(t)$ ,  $t \in [0, T_{\Pi})$ .

Кожному лишку  $\alpha_i$  відповідає своя початкова фаза  $\varphi_i = 2\pi \frac{\alpha_i}{n_i}$ , яка використовується для модуляції  $u_o(t)$  впродовж часу передачі одного залишку  $T_{\text{л}} = T_{\text{п}}/m$ . Розглянемо сигнал

$$u(t) = \sum_{i=1}^m U_o \cos(2\pi ft - \varphi_i) [H(t - (i-1)T_{\text{л}}) - T_{\text{л}} H(t - iT_{\text{л}})], \quad t \in [0, T_{\text{п}}], \quad (9.47)$$

де  $H(x)$  – функція Хевісайда. Реалізацію сигналу зображена на рис. 9.24.

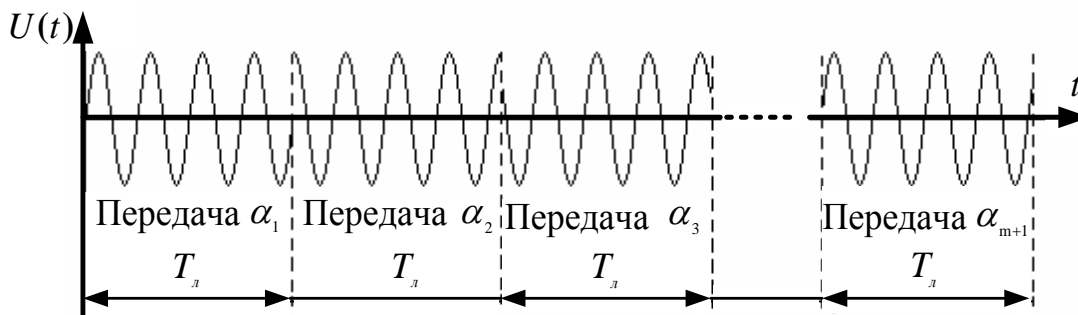


Рис. 9.24. Приклад реалізації інформаційного сигналу

Сигнал (9.47) на кожному інтервалі передачі залишку  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  можна подати двома складовими, отриманими за допомогою амплітудної модуляції косинусної і синусної складових

$$\begin{aligned} u(t) &= U_o \cos(2\pi ft - \varphi_i) = U_o \cos(\varphi_i) \cos(2\pi ft) + U_o \sin(\varphi_i) \sin(2\pi ft) = \\ &= U_c \cos(2\pi ft) + U_s \sin(2\pi ft), \quad t \in [(i-1)T_{\text{л}}, T_{\text{л}}] \end{aligned} \quad (9.48)$$

де  $U_c$ ,  $U_s$  – амплітуди косинусної і синусної компонент.

Графічне зображення сигналів (9.48) подають у вигляді характерної геометричної побудови, яку називають *сигнальним сузір'ям*.

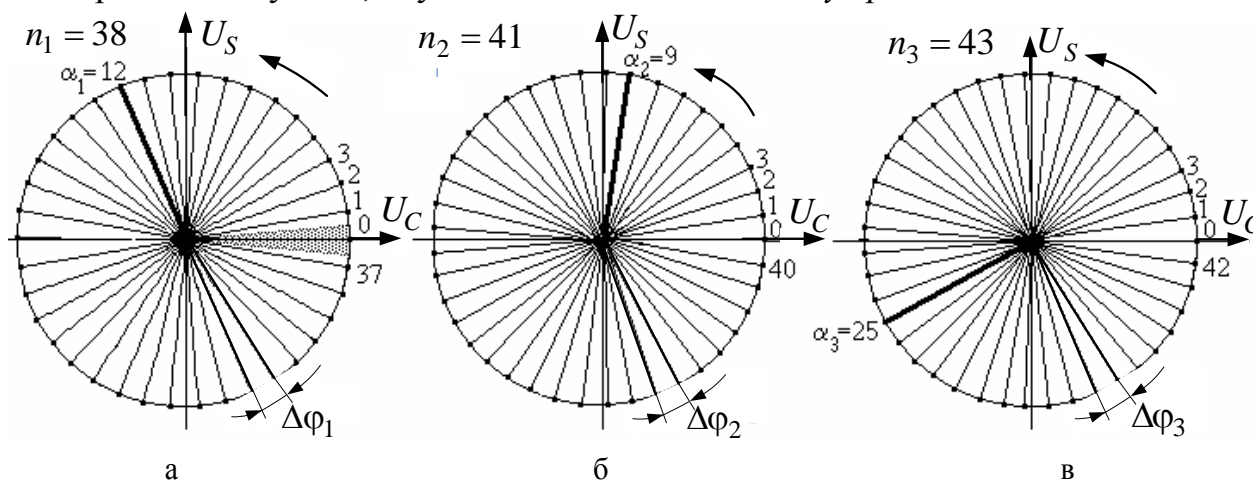


Рис. 9.25. Сигнальні сузір'я фазоманіпульованих сигналів для прикладу 9.9:  
а – сузір'я ФМ-38, б – сузір'я ФМ - 41, в – сузір'я ФМ – 43

Дві ортогональні осі сузір'я символізують два згадані гармонічні коливання (вісь



$x$  – синусне коливання, а вісь  $y$  – косинусне). По осі  $x$  відкладають значення  $U_c$ , а по осі  $y$  –  $-U_s$ . У такому поданні варіантам маніпульованого сигналу відповідають точки графіка. Три сигнальні сузір'я 38-, 41-, 43-позиційних фазоманіпульованих (ФМ-38, ФМ-41, ФМ-43) сигналів показано на рис. 9.25.

На рис. 9.25,а зображено сузір'я для передачі першого залишку  $\alpha_1 = \overline{0,37}$  сигналом ФМ-38, на рис. 9.25,б – другого залишку  $\alpha_2 = \overline{0,40}$  сигналом ФМ-41, а на рис. 9.25,в – третього залишку  $\alpha_3 = \overline{0,42}$  сигналом ФМ-43. На рисунку жирними лініями позначено вектори, які відповідають вказаним залишкам і, відповідно, фазовим зсувам фазомодульованих сигналів даного прикладу.

Характерна ознака кодування СЗК полягає в передачі кожного залишку фазоманіпульованим сигналом відмінної позиційності і з різними кутами  $\Delta\varphi_i$  між суміжними сигналами для кожного  $i$ -го лишку

$$\Delta\varphi_i = \frac{2\pi}{n_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.49)$$

Для даного прикладу маємо значення:  $\Delta\varphi_1 = 0,1653$  рад,  $\Delta\varphi_2 = 0,1532$  рад,  $\Delta\varphi_3 = 0,1461$  рад.

Внаслідок дії в лінії передачі шумів і завад, а також шумів і апаратних похибок приймача, отриманий фазовий зсув відрізняється від сформованого для передачі повідомлення. Як приклад на рис. 9.25,а заштриховано сектор в околі  $\varphi = 0$ , в якому може опинитись значення прийнятого фазового зсуву і належність до якого ідентифікується як передача залишку  $\alpha_1 = 0$ . З метою зменшення ймовірності появи грубих помилок під час передавання повідомлення доцільно виконати зміщення лишків на величину 0,5, визначаючи фазові зсуви як

$$\varphi_i = 2\pi \frac{(\alpha_i + 0,5)}{n_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.50)$$

Таке штучне зміщення зсуває значення переданих фазових зсувів сигналів в області найбільш віддалених від значень, кратних  $2\pi/n_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , які розділяють два суміжні значення залишків.

Оцінки лишків на стороні приймача повідомлення визначають за формулою

$$\hat{\alpha}_i = \left[ \frac{\hat{\varphi}_i}{\Delta\varphi_i} \right]^+ = \left[ \frac{\hat{\varphi}_i}{2\pi n_i} \right]^+, \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.51)$$

де  $\hat{\varphi}_i$  – значення  $i$ -го фазового зсуву сигналів.

Для залишків даного прикладу фазові зсуви становлять:  $\varphi_1 \approx 2,0668$  рад,  $\varphi_2 \approx 1,4559$  рад,  $\varphi_3 \approx 3,7261$  рад.

Структуру каналу послідовного передавання інформації, в якому застосовано кодування в системі залишкових класів, показано на рис. 9.26.

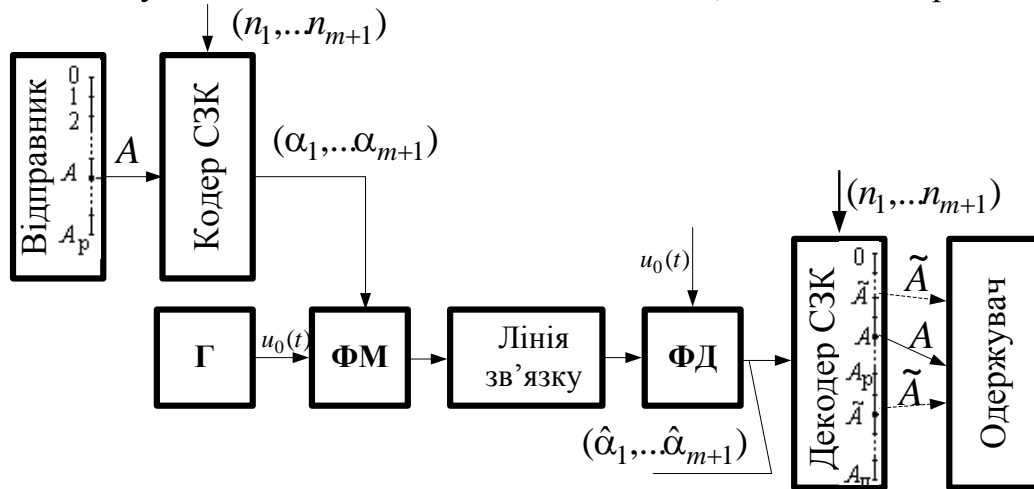


Рис. 9.26. Структура каналу послідовного передавання інформації з кодуванням СЗК

Числове повідомлення  $A$  в кодері СЗК перетворюється на залишки  $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m$ . Ці залишки використовують у фазовому модуляторі ФМ для формування відповідно до алгоритму (10.45) початкових фаз гармонічного сигналу (9.48) генератора Г. Отриманий таким чином інформаційний сигнал передається по лінії зв'язку.

В приймальній частині повідомлення декодується. Передбачається, що в одержувача є опорний сигнал і йому відома система модулів  $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_m)$ . Фазовий детектор ФД забезпечує вимірювання фазових зсувів сигналів  $\{\hat{\phi}_i, i = \overline{1, m}\}$ , які відповідають переданим залишкам, і визначення оцінок залишків за формулою (9.51). Декодер СЗК відновлює повідомлення з отриманої системи залишків  $(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m)$  за алгоритмом (4.35). Для даного прикладу маємо:

$$(12 \cdot 58179 + 9 \cdot 55556 + 25 \cdot 20254) \pmod{66994} = 29652.$$

Використання СЗК для кодування сигналів має властивість, яка дозволяє без додаткових перетворень реалізувати паралельну передачу інформації. Ця властивість зумовлена відсутністю зв'язків між залишками. Структуру каналу паралельної передачі інформації з кодуванням на основі СЗК показано на рис. 9.27.

Паралельна структура каналу відрізняється від послідовної (рис. 9.26) наявністю  $m+1$  фазового модулятора ФМ<sub>1</sub> – ФМ <sub>$m+1$</sub>  та фазового демодулятора ФД<sub>1</sub> – ФД <sub>$m+1$</sub> , а також наявністю генераторів сітки частот ГСЧ1, ГСЧ2. Генератор ГСЧ1 формує гармонічні сигнали з ортогональними частотами  $f_1, \dots, f_{m+1}$ , фаза кожного з яких модулюється відповідним залишком. На стороні приймання ГСЧ2 також генерує гармонічні сигнали з частотами  $f_1, \dots, f_{m+1}$ , які використовуються в демодуляторах для формування оцінок

залишків  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$ .

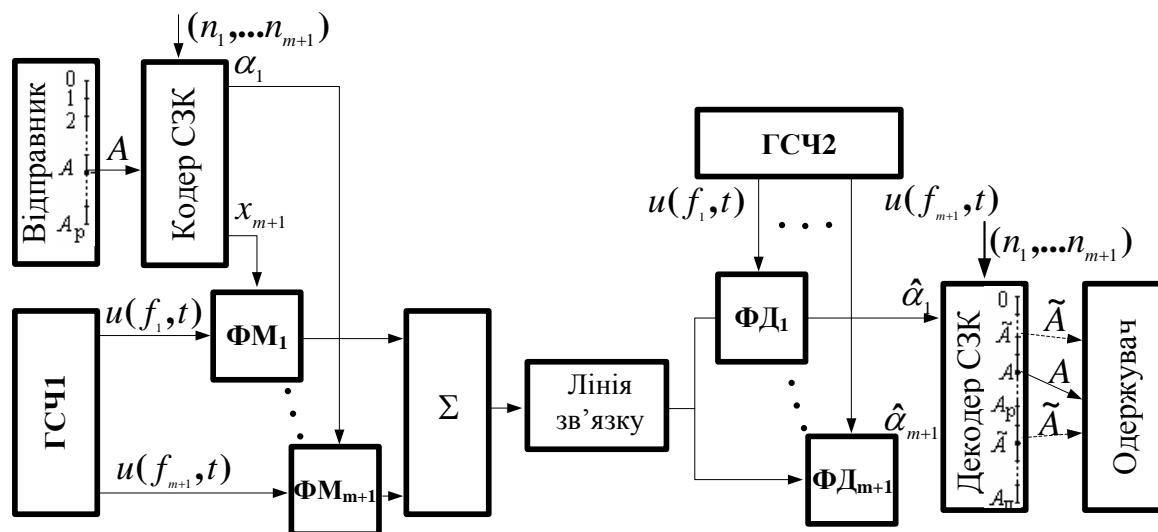


Рис. 9.27. Структура каналу паралельного передавання інформації з кодуванням СЗК

Таким чином, кодування СЗК добре узгоджується з методами передачі даних на основі фазової модуляції, тому запропоновані системи передачі можуть бути розгорнуті на базі вже існуючих ФМ-систем через їх незначне доопрацювання і модернізацію. Для виявлення помилок передачі достатньо ввести надлишковість – доповнити систему модулів додатковим модулем. Передача по каналу зв'язку додаткового залишку дещо уповільнює швидкість передавання інформації, але дозволяє, в разі спотворення повідомлення, відновити передану інформацію без помилок. Швидкість передавання можна значно підвищити за рахунок паралельного одночасного передавання всіх залишків.

## 9.6. Підсумки до розділу

У даному розділі наведені результати досліджень, які дали можливість сформулювати пропозиції по розширенню функціональних можливостей діючих та обґрунтувати принципи дії і структури перспективних фазових інформаційно-вимірювальних систем.

Розглянуто принципи дії фазової ІВС, яка реалізує метод дискретної ортогональної обробки сигналів. Запропоновано модель системи, в якій використано програмний пакет LabVIEW, розроблений фірмою National Instruments (США) – світового лідера в галузі розробки програмного й апаратного забезпечення ІВС. Наведені результати аналізу ітераційної корекції похибки вимірювання фазових зсувів сигналів, зумовленої відхиленням інтервалу інтегрування від інтервалу ортогональності.

Розглянуто принцип дії та структура фазової ІВС на основі використання

методу ковзного дискретного перетворення Гільберта. Теоретичною базою обґрунтування функціонування такої ІВС служать результати розділу 6. Отримані також результати комп'ютерного моделювання для прикладу функціонування такої системи.

Наведені результати задачі виявлення радіоімпульсного сигналу фазовою ІВС на фоні адитивних завад.

Отримані результати розв'язку задачі ультразвукової дефектоскопії – задачі вимірювання геометричних розмірів деталей, яка є традиційною в ультразвуковому неруйнівному контролі на базі використання фазової ІВС. Постійне розширення номенклатури матеріалів і виробів, розробка і широке впровадження в машинобудуванні, аерокосмічній техніці, енергетиці та будівництві нових конструкційних матеріалів, які характеризуються значним загасанням та розсіюванням ультразвуку, підвищення вимог щодо точності вимірювань і достовірності контролю геометричних розмірів деталей і виробів визначають актуальність такої задачі.

У розділі отримані наступні основні результати по обґрунтуванню принципів дії та структур фазових систем передачі та захисту інформації на базі СКЗ. Запропоновано і обґрунтовано використання:

- структур каналів паралельного і послідовного передавання інформації з кодуванням СЗК, які добре узгоджуються з методами передачі даних на основі фазової модуляції і можуть бути розгорнуті на базі існуючих ФМ-систем шляхом їх відповідної модернізації;

- методу захисту при передачі інформації на основі кодування СЗК в сукупності з шумоподібними сигналами і обґрунтованої структури системи формування повідомлень в СЗК з шумоподібними кодами і їх відновлення у приймальному блоці системи, при цьому декодування повідомлень ґрунтується на методах статистичної обробки випадкових кутів;

- кодування інформації СЗК, яке забезпечує надійність і конфіденційність передачі в каналах зв'язку, при цьому конфіденційність підвищується збільшенням робочого діапазону СЗК та каскадним застосуванням СЗК, а швидкість передавання збільшується за рахунок паралельного одночасного передавання всіх залишків;

- результатів комп'ютерного моделювання розглянутих задач фазових вимірювань, кодування та передачі даних в СКЗ.

Отримані у розділі результати досліджень дають можливість обґрунтувати застосування у фазових ІВС новітніх інформаційних технологій на базі ЦОС, що дозволяє покращити метрологічні характеристики ІВС, а саме збільшити динамічний діапазон сигналів, скоротити час вимірювання, зменшити похибки вимірювання фазових зсувів сигналів при співвідношеннях сигнал/завада менше одиниці, розширити область їх застосування та скоротити час проектування систем.

Ряд результатів по прикладах фазових статистичних інформаційно-вимірювальних систем наведено у роботах [9.1 – 9.18].

*Всякое человеческое познание начинается с созерцаний,  
переходит от них к понятиям и заканчивается идеями*  
И. Кант

## Підсумки

У цій науковій праці наведено матеріали, які в цілому формують відповідь на питання: настільки значуща й універсальна галузь вимірювань – статистична фазометрія – для проведення досліджень, створення сучасних інформаційних технологій, розвитку нанотехнологій у різних галузях науки і техніки. Природно, що відповідь на таке питання міститься і в інших наукових публікаціях. Тому, виходячи з базового принципу вимірювань – шляхом порівняльного аналізу, читач зможе визначити цінність отриманих у пропонованій праці результатів досліджень на засадах відомих результатів.

Про це йшлося у вступі, а також про основні положення статистичної фазометрії, реалізації яких і присвячено цю наукову працю:

- доцільно розглядати фазові вимірювання як самостійну, але менш загальну галузь кутових вимірювань, результати досліджень якої мають давню історію у розвитку земної цивілізації;

- кутові й фазові вимірювання у просторі та часі за своєю фізичною природою є статистичними, тобто мають випадковий характер, і це обумовлено дією багатьох випадкових факторів;

- класифікацію впливів випадкових просторових і часових факторів при проведенні кутових і фазових вимірювань параметрів та характеристик досліджуваних природних явищ, процесів, систем різної фізичної природи (емпіричної системи) можна умовно виконати так:

- а) випадкові фактори діють тільки в початковий момент часу спостережень розвитку емпіричної системи, далі її розвиток повністю прогнозований, тобто має детермінований характер (випадкові початкові умови);

- б) на всьому часовому інтервалі спостережень характер емпіричної системи визначається комбінаціями двох компонент, зокрема випадкової та детермінованої (наприклад, адитивної, мультиплікативної суміші детермінованого інформаційного сигналу і випадкової завади);

- в) характер розвитку емпіричної системи у просторі й часі є повністю випадковим (стохастичні емпіричні системи).

Коротко зупинимось на підсумках отриманих результатів досліджень роботи.

Підсумки відображають результати, які наведено у розділах роботи, тому вони певною мірою будуть повторювати зміст розділів. Але у підсумках ці результати об'єднані в єдиний логічно зв'язаний модуль з метою ще раз виділити найбільш вагомий результати статистичної фазометрії.

З матеріалів першого розділу випливає, що кутові вимірювання мають багату тисячолітню історію свого застосування, їх вагомий внесок у розвиток сучасних інформаційних технологій підтверджено численними науковими і технічними досягненнями; подальший розвиток і розширення галузей

використання кутових вимірювань є перспективним і ефективним напрямом досліджень для різних галузей науки і техніки.

Важлива роль кутових вимірювань у розвитку земної цивілізації підтверджується значною кількістю історичних фактів. Це використання результатів кутових вимірювань при спорудженні іригаційних систем, будівель, храмів у стародавньому Єгипті, Вавілоні. Визначення часових інтервалів доби, пори року і всього року підтверджує той факт, що із самого початку створення цивілізації земляни відчували себе не тільки жителями Землі, а й Всесвіту.

Розвиток інструментарію кутових вимірювань обумовлений вимогами практичної діяльності людей. З'являються спочатку сонячні годинники, далі триває робота з їх удосконалення. У матеріалах розділу наведено коротку історичну довідку про розвиток інструментарію кутових вимірювань: від сонячних годинників - гномонів до сучасних високоточних приладів кутових вимірювань, наприклад, характеристику точності у межах  $0,00311 - 0,00511$  кутових секунд має міра відтворення і одиниці плоского кута Німеччини як національний еталон.

Важливу роль кутові вимірювання відіграли у минулому, відіграють і сьогодні у розвитку авіації і космонавтики, мореплавства, астрономії, геодезії, географії та інше.

Вражають результати фізичних експериментів з використанням кутових вимірювань. Так, значення результату древньогрецького вченого Ератосфена (278–196 рр. до н.е.) – 39375 км при вимірюванні довжини дуги земного меридіана лише на 2% відрізняється від визначеного в наш час значення 40075,5 км. Ератосфен також визначив значення кута нахилу екліптики до екватору Землі, яке було уточнено за 22 століття лише на 6 кутових хвилин. Відомий вчений Сходу Ібн Ахмед аль-Біруні на початку XI ст. першим визначив усі шість тригонометричних функцій на колі, а на основі кутових вимірювань визначив кут нахилу екліптики Землі до її екватора, при цьому результат вимірювань становив  $23^{\circ} 34'00''$ , обчислив радіус Землі близько 64900 км. Кутові вимірювання успішно використовували під час проведення фізичних експериментів: М. В. Ломоносов і Р. В. Ріхман у 1752–1954 рр. під час досліджень атмосферних електричних зарядів; М. Кулон у 1785 р. для визначення закону взаємодії точкових електричних зарядів; отримане Г. Кавендішем у 1798 р. значення гравітаційної постійної лише на 0,5% відрізняється від сучасного значення; Л.Фуко у 1851 р. провів знаменитий експеримент з маятником для підтвердження факту обертання Землі навколо своєї вісі. Перелік інших фактів використання кутових вимірювань наведено у матеріалах розділу.

Основні теоретичні положення кутових вимірювань обґрунтовувались у межах геометрії як науки, яка вивчає просторові відношення і форми різних об'єктів. Теорію похибок кутових вимірювань за результатами астрономічних спостережень уперше створив К. Гаусс. У матеріалах розділу відзначено і роль

інших вчених, результати досліджень яких склали вагомий внесок у розвиток кутових вимірювань.

Заслужують на увагу характерні властивості кутових вимірювань. Основна відмінність полягає в тому, що кутові вимірювання на колі в основному проводяться в межах значень кута  $[0, 2\pi)$ , але можна навести занчну кількість вимірювань інших величин – у межах  $R$ . У першому випадку це скінченний інтервал результатів вимірювань, у другому – нескінченний. Особливо така відмінність виявляється під час теоретичних досліджень. Запропоновано й обґрунтовано пропозиції щодо вимірювання кутів не тільки на колі, а й на інших замкнених кривих другого порядку, наприклад, еліпсі. Наведений приклад наочно показує, що методологія обробки даних кутових вимірювань має певні відмінності від традиційної обробки даних лінійних вимірювань.

Характерними властивостями детермінованих кутових вимірювань слід вважати такі:

- всі дані кутових вимірювань відображаються:
  - а) у просторі – на кулі зі скінченим радіусом;
  - б) на площині – на замкненій кривій другого порядку у загальному випадку, для більшості випадків на колі зі скінченим радіусом;
- виконання арифметичних операцій з даними кутових вимірювань за модулем  $2\pi$ .

Наведено основні терміни, визначення та одиниці кутових вимірів, які добре відомі для фахівців кутових вимірювань і широко використовуються на практиці. Відповідний інтерес можуть становити матеріали розділу про нові варіанти визначення міри кутів на площині, які можна певною мірою вважати дискусійними.

Ряд результатів з проблематики кутових вимірювань, розглянуті у першому розділі, наведено у публікаціях [1.1 – 1.41].

Матеріали другого розділу з вибраних питань сучасної концепції вимірювань є адаптованими до теорії статистичних кутових вимірювань, а саме:

а) спочатку коротко розглянуто методологію статистичних вимірювань, яка ґрунтується на узгодженості теоретичних, моделювальних і експериментальних результатів вимірювального експерименту, наведено означення і етапи створення математичної моделі емпіричної системи як одного з основних об'єктів вимірювального експерименту; сам вимірювальний експеримент визначається як реалізація поєднання методології, теорії і практики проведення процесу вимірювань;

б) наведено аксіоматичну концепцію статистичних вимірювань, яка ґрунтується на системі аксіом, використання для загального випадку топологічного простору даних вимірювань, і дає змогу визначити похибку вимірювального експерименту без використання гіпотези про точне (істинне)

значення вимірювальної величини, що в цілому дозволяє зняти певні суперечності в теорії похибок під час вимірювань, включаючи й кутові.

Наведено означення математичної моделі досліджуваного об'єкта — емпіричної системи, і розглянуто основні етапи використання моделі. Це дало змогу обґрунтувати означення і визначити основні характеристики моделі випадкового кута на площині як одного з основних об'єктів статистичних кутових вимірювань.

Матеріали детального ймовірнісного аналізу основних характеристик моделі випадкового кута на площині, законів розподілу ймовірностей дають можливість висвітлити характерні особливості статистичних кутових вимірювань. Так, наприклад, інтегральна функція розподілів ймовірностей послідовності випадкових кутів на  $R - F(x) \in (-\infty, \infty)$ , щільність розподілу ймовірностей  $p(x)$  і характеристична функція  $f(u)$  випадкового кута на  $[0, 2\pi)$  є періодичними функціями з періодом  $2\pi$ .

Для досліджень кутових вимірювань у просторі запропоновано модель двовимірного випадкового вектора, де випадковий кут  $\varphi(\omega_\varphi)$  визначає довготу, а  $\theta(\omega_\theta)$  - широту у сферичній системі координат. Було відзначено, що більш детальні результати кутових вимірювань у просторі можуть бути отримані під час проведення додаткових досліджень.

Ряд результатів з вибраних питань сучасної концепції статистичних вимірювань наведено в працях [2.1 – 2.12].

Загальна характеристика фазометрії є основною темою матеріалів третього розділу. Така тематика дає можливість відзначити успіхи фазометрії не тільки на даний час, а що, на наш погляд, важливо спрогнозувати подальший розвиток фазометрії.

Розглянуто основні терміни та визначення як детермінованої, так і статистичної фазометрії, а також характерні приклади реалізації функціонального перетворення різних фізичних величин з використанням різних явищ та ефектів (ефекту Доплера, резонансу в LC-контурних, вихрових струмів (струмів Фуко), оптичної активності, ефектів Коттона-Мутона, Керра, Погкельса, Саньяка, фото пружності) у фазові характеристики сигналів.

Обґрунтовано класифікацію основних об'єктів детермінованої і статистичної фазометрії – сигналів, фазові характеристики яких є функціональним відображенням досліджуваних фізичних явищ, процесів і величин.

Відзначено, що фазовий вимірювальний експеримент проводиться із застосуванням сигналів і полів різної фізичної природи – акустичних, електричних, магнітних, електромагнітних (в оптичному і радіочастотному діапазонах), які мають властивість циклічності в часі чи просторі. Для збільшення діапазону вимірювання за межі інтервалу  $[0, 2\pi)$ , розширення



функціональних можливостей та збільшення інформативності даних застосовують кумулятивні різночастотні фазові вимірювання.

На основі аналізу задач, пов'язаних з вимірюванням фазових характеристик сигналів, розглянуто дійсний стан і основні задачі сучасної фазометрії. Сучасні уявлення фазометрії на базі гармонічної моделі сигналів суттєво стримують розвиток і обмежують сферу практичних застосувань фазометрії і фазових ІВС. Наявний теоретичний апарат досліджень не повною мірою відповідає сучасним вимогам. Особливість застосування фазового методу для дослідження явищ, що мають більш виражену випадкову природу потребує подальшого розвитку методів статистичної фазометрії, розрахованих на використання сучасних методів ЦОС.

Грунтуючись на результатах досягнень сучасної фазометрії, науково-технічних проблемах подальшого її розвитку, сформульовано такі пропозиції:

- складність сучасних фазовимірювальних задач потребує розроблення і застосування у фазометрії інших, складніших за гармонічні функції, математичних моделей вимірювальних сигналів, які б давали більш адекватне відображення властивостей та характеристик досліджуваних циклічних явищ;

- ураховуючи факт про те, що фазові характеристики належать до розподілених на колі випадкових величин, статистична обробка результатів фазових вимірювань має виконуватись із застосуванням відповідних законів розподілу ймовірності, які узгоджені з періодичністю, що природно виникає при кутових вимірюваннях;

- методи оброблення результатів спостережень випадкових кутів можуть бути поширені на циклічні процеси різної природи, які розвиваються у часі й просторі і ефективно використані у статистичній фазометрії для формування статистичних оцінок фазових характеристик сигналів;

- уведення в фазометрію нових моделей вимірювальних сигналів обумовлює потребу в розширенні й уточненні стосовно них понять «фаза», «фазова характеристика» та «фазовий зсув» сигналів.

Ряд результатів отриманих під час фазових вимірювань розглянутих у третьому розділі, наведено у публікаціях [3.1 – 3.68].

У четвертому розділі наведено матеріали використання основних методів фазометрії. Разом з результатами досліджень відомих традиційних методів детермінованої фазометрії, отриманих переважно для гармонічного сигналу, запропоновано й обґрунтовано для використання нових методів.

Результати детермінованої фазометрії, з одного боку можуть бути використані як тестові, а з другого – вони мають суттєві обмеження щодо їх застосування для розв'язання задач статистичної фазометрії. Це свідчить про необхідність поширення використання статистичних методів фазових вимірювань.

Методи фазометрії можна умовно розділити на два види:

- методи вимірювань фазових характеристик в межах інтервалу  $[0, 2\pi)$ ;

- методи вимірювань, які дають можливість розширити межі вимірювань фазових характеристик з довжиною інтервалу більшою за  $2\pi$  (кумулятивні методи).

Саме як кумулятивні методи запропоновано й обґрунтовано для використання методи кумулятивної різночастотної фазометрії з подальшою сумісною обробкою даних фазових вимірювань.

Обґрунтовано використання кумулятивного різночастотного методу для усунення неоднозначності під час вимірювання кумулятивних фазових зсувів із застосуванням методів теорії чисел. Наведено необхідні та достатні умови, які дають змогу звести усунення неоднозначності до відновлення цілого числа, поданого залишками в числовій СЗК.

Подання результатів кумулятивних різночастотних фазових вимірювань у СЗК дозволяє підвищити ймовірність розв'язання задачі однозначності шляхом проведення додаткових фазових вимірювань на одній чи декількох допоміжних частотах, реалізації контролю однозначності, пошуку помилкових значень залишків (помилкових результатів вимірювань фазових зсувів на окремих частотах) і їх виправлення.

Проблематиці основних методів фазометрії присвячено також наукові праці [4.1– 4.32].

У п'ятому розділі наведено матеріали про технічні засоби фазометрії, використання яких у практичній фазометрії завжди пов'язано з актуальним важливим питанням: якою мірою ці технічні засоби відповідають сучасним вимогам. Природно, що часовий термін використання технічних засобів великий, а ряд розроблених раніше засобів буде застосовуватись і надалі. Тому розгляд принципів вимірювання наявних на сьогодні засобів фазометрії було основним завданням цього розділу.

Наведено результати аналізу функціонування технічних засобів регулювання та вимірювання фазових зсувів гармонічних сигналів та їх основні технічні характеристики, розглянуто різні типи фазообертачів – диференціувальні та інтегрувальні  $RC$ -ланки з використанням фазорізницевих схем, кодового керування з додатковими квадратурними каналами, мостові  $RC$ -ланки, керовані конденсатори, електромагнітні, п'єзоелектричні, акустичні лінії затримки на  $RC$ - або  $LC$ -просторово зосереджених елементах тощо.

Проаналізовано функціонування фазометрів різних типів, кожний з яких реалізовує конкретний метод вимірювання:

- на основі перетворення фазового зсуву в часовий інтервал;
- компенсаційних;
- кореляційних;
- з ортогональною обробкою сигналів;
- кумулятивних.

Виконано аналіз функціонування технічних засобів метрологічного забезпечення фазометрії – калібраторів фазових зсувів сигналів. Розглянуто

основні методи перевірки фазовимірювальної апаратури і наведено перелік нормативних документів, які застосовуються у сучасній фазометрії.

Отримано результати аналізу похибок вимірювань фазових зсувів сигналів з урахуванням конкретних джерел їх формування, а саме:

- взаємозв'язку сигналів двох незалежних каналів фазометра;
- скінченного значення вхідного імпедансу фазометра;
- наявності вищих гармонік у тестовому гармонічному сигналі;
- унесення додаткових фазових зсувів, обумовлених неідентичністю амплітудно-частотних і фазочастотних характеристик каналів фазометра.

Наведено результати аналізу функціонування технічних засобів фазометрії підтверджують факт гарантії їх забезпечення метрологічних характеристик за співвідношення сигнал/завада, значно більших за одиницю.

Ряд результатів досліджень з технічних засобів регулювання, вимірювання та відтворення фазових зсувів гармонічних сигналів наведено в наукових публікаціях [5.1 – 5.28].

Шостий розділ – один з основних розділів роботи. Результати цього розділу підтверджують той факт, що основними лінійними інтегральними операторами перетворень досліджуваних сигналів у статистичній фазометрії є оператори Фур'є та Гільберта.

Спочатку наведено відомі теоретичні інтегральні зображення Гільберта, основні властивості перетворення Гільберта, адаптовані до класу досліджуваних сигналів статистичної фазометрії.

Розглянуто перетворення Гільберта для детермінованих і випадкових сигналів. Систематизовано й досліджено його властивості. Застосування перетворення Гільберта і введеного на його основі комплекснозначного сигналу дозволило однозначно визначити поняття «фазова характеристика» та «різниця фазових характеристик» для широкого класу вузькосмугових сигналів.

Використання дискретної послідовності комплекснозначного сигналу як вкладеної послідовності з дискретним часом сигналу дає змогу визначити амплітудні, фазові і частотні характеристики як функції часу для заданих класів сигналів у вигляді часових рядів зі скінченим обсягом відліків. Це дає можливість застосувати обчислювальні методи під час моделювання і визначення кількісних оцінок параметрів сигналів.

Перетворення Гільберта дозволяє отримувати ряд ( $n > 1$ ) значень фазової характеристики за період досліджуваного сигналу, що дає змогу отримати необхідну статистику для подальшого застосування статистичних методів оброблення сигналу.

Обґрунтовано застосування ковзного перетворення Гільберта з використанням прямокутних часових вікон, що дає можливість використати модель комплекснозначного сигналу і досліджувати амплітудні й фазові характеристики сигналу в реальному часі.

Під час обчислення спряженої за Гільбертом дискретної послідовності на скінченному інтервалі часу виникає методична похибка з такими властивостями:

а) має знакозмінний характер у діапазоні визначення сигналу;

б) має мінімальні значення в середній частині прямокутного вікна, тому доцільно брати результати обчислень спряженого за Гільбертом сигналу і характеристик комплексозначного сигналу в середній частині вікна, тривалість якої на практиці можна рекомендувати обирати  $(0,25 - 0,3)T_B$ ;

в) зменшується, якщо тривалість прямокутного вікна кратна періоду досліджуваного сигналу;

г) зменшується зі збільшенням тривалості прямокутного вікна.

Методичні похибки, спричинені скінченною тривалістю часового вікна, можна суттєво зменшити вибором параметрів вікна, застосуванням як подвійного вікна, так і інших, відмінних від прямокутної форми, типів вікон.

Деякі результати з перетворення Гільберта для розв'язання задач фазометрії наведено у працях [6.1 – 6.22].

Сьомий розділ присвячено детальному дослідженню імовірнісних моделей випадкового кута.

Визначено основні характеристики таких моделей, у першу чергу, функції розподілу, щільностей розподілу ймовірностей та характеристичні функції, а також характерні відмінності їх властивостей від аналогічних законів розподілу ймовірностей випадкової величини  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , заданої на прямій  $R$ . Числові характеристики випадкового кута, а це – кругове середнє, кругова дисперсія, тригонометричні моменти, кругова медіана, кругова мода, визначені на колі зі скінченним радіусом.

Наведено результати порівняльного аналізу статистичних характеристик випадкової величини  $\xi(\omega)$  на прямій  $R$  і випадкового кута  $\varphi(\omega) \in [0, 2\pi)$ , тобто заданого на колі зі скінченним радіусом  $r$ . Саме вказана відмінність характеристик  $\xi(\omega)$  і  $\varphi(\omega)$  дає змогу фахівцям вибрати ту чи іншу модель випадкової величини. Така можливість альтернативного вибору є конструктивною для оброблення даних вимірювань і особливо для фізичної інтерпретації отриманих результатів вимірювань.

Обґрунтовано застосування намотаних законів розподілу ймовірності та розподілу Мізеса для вимірювання фазових характеристик випадкових сигналів та статистичній обробці результатів фазових вимірювань. Проаналізовано намотаний гауссівський розподіл ймовірності та розподіл Мізеса, які задовільно апроксимують один одного за відповідного вибору параметрів розподілів. Ці розподіли рекомендовано до використання у статистичній обробці результатів фазових вимірювань.

Запропоновано й досліджено ймовірнісну модель фазових зсувів гармонічних сигналів, яка є подальшим розвитком моделі випадкових кутів.

Наведено геометричну інтерпретацію результатів фазових вимірювань. У моделі враховано особливості фазових вимірювань, які пов'язані з циклічним характером зміни фазових зсувів сигналів.

Запропоновано й досліджено ймовірнісну модель фазових характеристик вузькосмугових процесів. У моделі враховано особливості фазових вимірювань, які пов'язані з випадковою природою досліджуваних процесів. Модель описує широкий клас сигналів, а результати її дослідження можна застосовувати під час статистичної обробки фазових вимірювань. Розглянуто геометричну інтерпретацію реалізації моделі – її графічне зображення.

Теоретичний розподіл щільності ймовірностей аргумента випадкового вектора, а також початкової фази вузькосмугового процесу задовільно апроксимується розподілом Мізеса. Отримано залежність параметра концентрації розподілу Мізеса від співвідношення сигнал/завада, що дозволяє використовувати цей розподіл для розв'язання багатьох задач статистичної фазометрії.

Обґрунтовано застосування понять кругового середнього, кругової дисперсії, результуючої довжини вектора та кругового стандартного відхилення різниці фазових характеристик випадкових сигналів у статистичній фазометрії.

Наведено зведену таблицю формул для обчислення статистичних оцінок характеристик випадкових сигналів за даним вимірювань.

Результати досліджень випадкового вузькосмугового процесу стосуються безпосередньо задач статистичної фазометрії. Отримані також результати кореляційного аналізу характеристик випадкових процесів, які мають властивість циклічності.

Деякі результати, отримані за статистичними моделями випадкових кутів та їх основними характеристиками наведено у роботах [7.1 – 7.17].

8. Матеріали восьмого розділу висвітлюють такі результати досліджень задач моделювання та статистичної обробки даних фазових вимірювань.

– Визначення комп'ютерного вимірювального експерименту, обґрунтування основних етапів його проведення дало змогу розглядати проблематику моделювання задач кутових і фазових вимірювань на конкретних прикладах. Відзначено, що основними етапами комп'ютерного вимірювального експерименту є: вибір стратегії процесу моделювання; розроблення математичних моделей сигналів і завад; розроблення обчислювальних алгоритмів; створення програмного забезпечення; виконання процесу моделювання; аналіз результатів моделювання. Характерна властивість комп'ютерного вимірювального експерименту – обчислення результату і характеристик точності моделювання.

– Основний метод комп'ютерного вимірювального експерименту – це метод статистичних випробувань, який має також назву методу Монте-Карло. Такий метод дає змогу розв'язувати задачі кутових вимірювань і статистичної

фазометрії обчислювальними методами (методами цифрової обробки сигналів) на основі моделювання послідовності псевдовипадкових величин – реалізацій випадкових величин, векторів, процесів і полів.

– У разі використання методу статистичних випробувань моделювання випадкових функцій на ЕОМ при проведенні комп'ютерного вимірювального експерименту підпорядковане двом основним принципам.

1. Узгодженість випадкової функції-оригіналу і її цифрової моделі-копії забезпечується збігом (близькістю) їх імовірнісних законів розподілу або числових характеристик і підлягає метрологічній перевірці шляхом використання статистичних критеріїв для змодельованих реалізацій випадкової функції.

2. Досліджувана випадкова функція формується за допомогою численних лінійних і нелінійних операторів перетворень – базових (найпростіших) випадкових величин. У більшості випадків результат отримують як наслідок проведення на ЕОМ найпростішого випадкового експерименту, який полягає у визначенні числового значення процесу кидання навімання точки в інтервал  $[0,1]$ . Тоді базовою випадковою величиною є випадкова величина  $\xi(\omega)$ , яка рівномірно розподілена на інтервалі  $[0,1]$ , тобто  $\xi(\omega) \in [0,1]$ .

Розв'язання задач кутових і фазових вимірювань шляхом використання комп'ютерного вимірювального експерименту дає змогу забезпечити:

а) широкий діапазон вибору заданих характеристик досліджуваних сигналів і завод для різних комбінацій їх реалізацій і таким чином отримувати великі масиви статистичних даних вимірювань, формування реалізацій таких моделей інформаційних сигналів та завод: детерміновані періодичні функції; детерміновані інформаційні сигнали з кутовою модуляцією і гармонічною несучою; стаціонарні випадкові процеси; періодичні випадкові процеси; вузькосмугові випадкові процеси; нестаціонарні випадкові процеси імпульсного характеру;

б) обчислення не тільки статистичних оцінок результатів вимірювань, а й статистичних оцінок похибок їх визначення, при цьому результат вимірювань задається на відповідному параметричному просторі числових даних моделювання, а сама задача моделювання може вважатись певною мірою *апостеріорною*, оскільки перед проведенням експерименту спрогнозовано його результат;

в) проведення на завершальному етапі комп'ютерного вимірювального експерименту порівняльного аналізу результатів моделювання з результатами теоретичних досліджень для узгодження результатів вимірювань теоретичних і імітаційних досліджень; прийняття рішень за результатами досліджень (про адекватність застосованих алгоритмів обробки даних); планування подальших перспективних завдань імітаційних досліджень.

Отримано результати проведення комп'ютерного вимірювального експерименту для конкретних прикладів моделювання векторів випадкових кутів, розбіжних за законами Мізеса і намотаним гауссівським.

Для проведення статистичної обробки даних фазових вимірювань наведено визначення вибірових колових характеристик як статистичних оцінок відповідних фазових характеристик сигналів: вибірова результуюча довжина; вибірова колова дисперсія.

Наведено результати комп'ютерного вимірювального експерименту при обчисленні вибірових колових точкових та інтервальних оцінок фазових зсувів сигналів для намотаного гауссівського розподілу ймовірності.

Створено методику проведення комп'ютерного вимірювального експерименту для обчислення статистичних інтервальних оцінок фазових зсувів сигналів для заданих законів розподілу ймовірності випадкових кутів.

Наведено результати комп'ютерного вимірювального експерименту статистичної обробки результатів нерівноточних фазових вимірювань при визначенні: статистичної оцінки КФЗ сигналів; статистичної оцінки різниці фазових характеристик випадкових сигналів для довільного закону розподілу ймовірності, а також з розподілом щільності ймовірності Мізеса.

Використання актуальної і значущої концепції невизначеності для статистичної обробки даних і подання результатів фазових вимірювань показано на прикладі постановки і розв'язання задачі визначення результатів вимірювань випадкових кутів і фазових зсувів сигналів.

Деякі результати розв'язання задач моделювання та статистичної обробки даних фазових вимірювань наведено у працях [8.1 – 8.38].

У завершальному дев'ятому розділі наукової праці сформовано пропозиції щодо розширення функціональних можливостей діючих та обґрунтовано принципи дії і структури перспективних фазових інформаційно-вимірювальних систем, що дало можливість отримати такі результати.

Проаналізовано функціонування фазової ІВС на основі реалізації методу вимірювання різниці фазових характеристик випадкових сигналів з дискретною ортогональною обробкою залежно від тривалості часу інтегрування, отримано аналітичний вираз методичної похибки вимірювання, що дозволяє оцінити ці похибки для різних інтервалів спостереження сигналів і сформувані обґрунтовані рекомендації щодо їх зменшення.

Досліджено модель фазової ІВС із застосуванням технології LabVIEW, яка дозволяє не тільки виконувати технічні вимірювання, але й досліджувати різні режими роботи системи, визначення складових похибки у процесі імітаційного моделювання.

Розглянуто структури каналів паралельного і послідовної передачі інформації з кодуванням СЗК, які добре узгоджуються з методами передавання даних на основі фазової модуляції і можуть бути розгорнуті на базі фазомодульованих систем їх відповідною модернізацією.

Запропоновано метод захищеної передачі інформації на основі кодування СЗК у сукупності з шумоподібними сигналами. Декодування повідомлень ґрунтується на методах статистичної обробки випадкових кутів. Обґрунтовано структуру системи формування повідомлень у СЗК з шумоподібними кодами і їх відновлення у приймальному блоці системи.

Використання кодування інформації СЗК забезпечує надійність і конфіденційність її передачі в каналах зв'язку. Ключем до декодування і відновлення повідомлень є система модулів СЗК. Конфіденційність можна підвищити збільшенням робочого діапазону СЗК та каскадним застосуванням СЗК. Швидкість передачі інформації підвищується за рахунок паралельного одночасного передавання всіх залишків.

Результати комп'ютерного моделювання розглянутих задач фазових вимірювань, кодування та передавання даних обґрунтовують доцільність використання у фазометрії кодування інформації в СЗК.

У цілому результати досліджень дають можливість обґрунтувати застосування у фазових ІВС новітніх інформаційних технологій на базі ЦОС, що дозволяє поліпшити метрологічні характеристики ІВС, а саме: збільшити динамічний діапазон сигналів, скоротити час вимірювання, зменшити похибки вимірювання різниці фазових характеристик випадкових сигналів за співвідношень сигнал/завада менших за одиницю розширити їх застосування та скоротити час проектування систем.

Деякі приклади фазових статистичних інформаційно-вимірювальних систем наведено у працях [9.1 – 9.18].



## Д1. Алгоритми обчислення числа $\pi$

Число  $\pi$  як відношення довжини кола до його діаметра має фундаментальне значення в кутометрії та фазометрії. Це число являє собою нескінченний десятковий дріб [Д1.1]:  $\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ \dots$ . До нашого часу розроблено багато прийомів обчислення числа  $\pi$ . Наведемо деякі з відомих методів.

Д1.1. Перше уявлення числа  $\pi$  у вигляді границі раціональної варіанти [Д1.2]:

$$\pi = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2n \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot (2n+1)}$$

До числа  $\pi$  часто зводять розрахунок границь деяких арифметичних послідовностей. Прикладом може слугувати ряд Лейбніца [Д1.1]:

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right).$$

До числа  $\pi$  зводять суми деяких інших рядів, наприклад [Д1.3]:

$$\pi = 8 \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4m-1)(4m+1)} + \dots \right) \right];$$

або

$$\pi = \sqrt{6 \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \right)}$$

Оригінальний спосіб обчислення числа  $\pi$  із застосуванням методу Монте-Карло наведено у праці [Д1.4]. Його суть така. Проводять експеримент з киданням голки довжиною  $l$  на площину, на якій накреслено ряд паралельних ліній з відстанню  $a > l$  між ними. Визначають імовірність  $p$  події, яка полягає у тому, що голка перетне одну з ліній, якщо всі положення голки при падінні рівноймовірні. Схему експерименту пояснює рис. Д1.1.

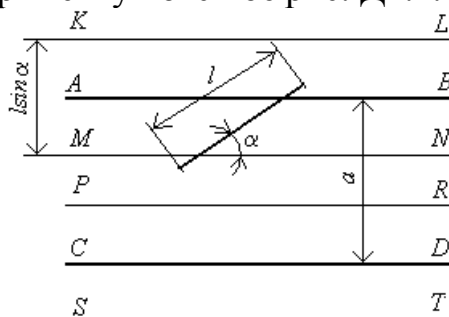


Рис. Д1.1. Визначення числа  $\pi$  за методом Монте-Карло

Припустимо, що голка падає на лінії AB, CD,.. під кутом  $\alpha$ . Перетин голкою цих ліній можливий тоді, коли середина голки розташовуватиметься у смугах KLMN, PRST,.. шириною  $l \sin \alpha$ . Імовірність цієї події дорівнює  $\frac{l \sin \alpha}{a}$ . Імовірність того, що голка впаде під кутом  $\alpha + d\alpha$  до ліній дорівнює

$\frac{d\alpha}{\pi}$ , оскільки кількість усіх випадків різних кутових положень голки пропорційна  $\pi$ . Отже, ймовірність сумісної появи цих двох незалежних подій дорівнює добутку їх імовірностей

$$dp = \frac{l}{\pi a} \sin \alpha d\alpha. \quad (Д1.1)$$

Поширюючи вираз (Д1.1) на всі можливі значення кута  $\alpha$ , отримаємо ймовірність перетину голкою однієї з ліній

$$p = \frac{l}{\pi a} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha = \frac{2l}{\pi a}. \quad (Д1.2)$$

Із формули (Д1.2) остаточно отримуємо

$$\pi = \frac{2l}{ra}. \quad (Д1.3)$$

За даними [4] в результаті такого ймовірнісного експерименту за кількості випробувань до 4000 отримано значення числа  $\pi$  з точністю до п'ятого десяткового розряду.

Для отримання числа  $\pi$  тепер застосовують способи наближеного розрахунку, які забезпечують значно швидше наближення до мети [2]. Один з них використовує відоме подання функції арктангенса рядом

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (Д1.4)$$

Обравши значення  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , для якого  $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$ , отримуємо зручний для обчислення ряд

$$\pi = 2\sqrt{3} \left( 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots \right).$$

Ще зручніша можливість розрахунку числа  $\pi$  — використання формули Мешина (J. Machin) [2]. Покладемо  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ , тоді

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - (\operatorname{tg} \alpha)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

З огляду на близькість отриманого числа до одиниці зрозуміло, що кут  $4\alpha$  близький до величини  $\frac{\pi}{4}$ . Якщо  $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$  матимемо

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}, \quad \text{отже} \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

З останньої формули з урахуванням (Д1.4) маємо

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{5^{11}} \dots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \dots\right). \quad (\text{Д1.5})$$

Останній вираз відомий як формула Мешина. Урахування тільки поданих у виразі (Д1.5) членів ряду достатнє для обчислення числа  $\pi$  з точністю до сьомого десяткового знаку.

## Д2. Програмна реалізація комп'ютерного фазового експерименту в середовищі Matlab

### Д2.1. Програма розрахунку щільності гауссівського розподілу

```
function f=normaln(x,mu,sigma)
% x – вектор значень ВВ
% mu – математичне сподівання
% sigma – стандартне відхилення
% f – вектор значень щільності розподілу
f=1/(sqrt(2*pi)*sigma).*exp(-(x-mu).^2./(2.*sigma.^2));
```

### Д2.2. Програма розрахунку щільності розоділу Мізеса

```
function f=mizes(x,mu,k)
% x – вектор значень фазових зсувів (кутів)
% mu – коловий середній напрям
% k – параметр концентрації ВК в околі mu
% f – вектор значень щільності розподілу
f=1./(2.*pi.*besseli(0,k)).*exp(k.*cos(x-mu))
```

### Д2.3. Програма розрахунку щільності намотаного гауссівського розподілу

```
function f=namotn(x,mu,sigma,k)
% x – вектор значень ВВ
% mu – математичне сподівання
% sigma – стандартне відхилення
% k – кількість фазових циклів
% f – вектор значень щільності розподілу
m=length(x);
for n=1:2*k
    n1=n-1-k;
    f1(n,1:m)=exp(-(mod(x-mu,2*pi)+2.*pi.*n1).^2./(2.*sigma.^2));
end
f=1/(sqrt(2*pi)*sigma).*sum(f1);
```

### Д2.4. Програма моделювання реалізації випадкових кутів з розподілом Мізеса

```
close all hidden; clear all;
N=1000;
k=12
for g=1:k
    l(g)=2*pi*g/k;
    F(g)=quad('mizes1',0,l(g));
end
l1=l-pi/k;
plot(l1,F);grid on
```

```

figure%2
FF=0:.0001:1;
Fo=spline(F,l1,FF);
plot(FF,Fo);grid on
figure
rr=rand(1,N);
Fr=spline(F,l,rr);
y=hist(Fr,k).*k./(2.*pi.*length(rr));
for s=2:k
    dF(s)=(F(s)-F(s-1))*k/(2.*pi);
end
dF(1)=F(1)*k/(2.*pi);
Y=[y;dF];Y=Y';
tt=(1:length(y)).*2.*pi./length(y);
bar(tt,Y,'group');grid on
D=max(abs(y-dF))
%%%%%%
figure
n=-50:1:50;
for t=1:300
    lumbda(t)=(t-1)/200;
    hh=(-1).^n.*exp(-2.*n.^2.*lumbda(t).^2);
    p(t)=1-sum(hh);
end
plot(lumbda,p);hold on
lumb=D.*sqrt(length(rr))
P=1-sum((-1).^n.*exp(-2.*n.^2.*lumb.^2))
plot(lumb,P,'o');grid on

```

**Д2.5. Програма моделювання реалізацій випадкових кутів з намотаним гауссівським розподілом**

```

close all hidden; clear all;
x=0:pi/100:2*pi;
global k mu sigma
k=5;mu=pi/2;sigma=1;
%%%%%%
for g=1:20
    l(g)=pi*g/10;
    F(g)=quad('namotn',0,l(g));
end
l1=l-pi/60;
plot(l1,F);grid on
figure %2

```

```

FF=0:.0001:1;
Fo=spline(F,l1,FF);
plot(FF,Fo);grid on
figure%3
rr=rand(1,10000);
Fr=spline(F,l,rr);
y=hist(Fr,20).*10./(pi.*length(rr));
for s=2:20
    dF(s)=(F(s)-F(s-1))*10/pi;
end
dF(1)=F(1)*10/pi;
Y=[y;dF];Y=Y';
tt=(1:length(y)).*2.*pi./length(y);
bar(tt,Y,'group');grid on
for r=2:20
    y(r)=y(r-1)+y(r);
end
y=y.*pi/10;
D=max(abs(y-F))
%%%%%%
figure%4
n=-200:1:200;
for t=1:300
    lumbda(t)=(t-1)/200;
    hh=(-1).^n.*exp(-2.*n.^2.*lumbda(t).^2);
    p(t)=1-sum(hh);
end
plot(lumbda,p);hold on
lumb=D.*sqrt(length(rr))
P=1-sum((-1).^n.*exp(-2.*n.^2.*lumb.^2))
plot(lumb,P,'o');grid on

```

## Д2.6. Програма моделювання роботи фазометра з перетворенням Гільберта

```

%phazemtr1.m
close all hidden; clear all;
t=0:.002:.1;
phi=-pi/2;
N=length(t);
u1=cos(2*pi*100*t+phi)+.04.*randn(1,N);
u2=cos(2*pi*100*t)+.03.*randn(1,N);
u2h=hilbert(u2);

```

```

O=abs(u2h);
% O – обвідна
subplot(3,1,1);stairs(t,u1);grid on
subplot(3,1,2);stairs(t,u2);hold on;
stairs(t,O,'r');stairs(t,imag(u2h),'g');grid on
C=sum(u1.*u2);S=sum(u1.*-imag(u2h));
fi=atan2(S,C)
% fi – фазовий зсув
subplot(3,1,3);plot(t,fi);grid on
zoom on
Nz=2;%zaschitnji interval
%pogr v nachzle
S1=sum(u1(1:Nz).*u2(1:Nz));
C1=sum(u1(1:Nz).*imag(u2h(1:Nz)));
fi1=atan2(S1,C1)
%pogr v kontse
S2=sum(u1((N-Nz):Nz).*u2((N-Nz):Nz));
C2=sum(u1((N-Nz):Nz).*imag(u2h((N-Nz):Nz)));
fi2=atan2(S1,C1)
%bez pogr
Scp=sum(u1(Nz:(N-Nz)).*u2(Nz:(N-Nz)));
Ccp=sum(u1(Nz:(N-Nz)).*imag(u2h(Nz:(N-Nz))));
ficp=atan2(Scp,Ccp)

```

## Д2.7. Програма моделювання роботи фазометра з ковзним перетворенням Гільберта

```

%phazemtr2.m
close all hidden; clear all;
t=0:.0001:.15;
N=length(t);phi=2.0;
% phi – початковий фазовий зсув
r1=randn(1,N);r2=randn(1,N);
u1=rectpuls(t-.07,.120).*sin(2.*pi.*200.*t+phi)+0.0599*r1;
subplot(4,1,1);stairs(t,u1);grid on
u2=sin(2.*pi.*200.*t)+1.999.*r2;
m=400;
% m – ширина вікна аналізу
Y1=zeros(1,N);YH1=zeros(1,N);A1=zeros(1,N);
fi1=zeros(1,N);st=20;
% st – крок зсуву вікна
sh=20;k=1;
% формування ковзного вікна W
for l=1:st:(N-m)

```

```

W=zeros(1,N);
W(1:(1+m))=0.9;
subplot(4,1,2);plot(t,W);grid on
%%%
u2t=u2(1:(1+m));
u2th=hilbert(u2t);
Y1((1+sh):(1+m))=imag(u2th(sh:m));
O=abs(u2th);
% O – обвідна
A1((1+sh):(1+m))=O(sh:m);
subplot(4,1,3);plot(t,u2,t,Y1,'r',t,A1,'k--');grid on
fi=angle(u2th);fi1((1+sh):(1+m))=fi(sh:m);
% fi – фазовий зсув
pause(.2)
S=sum(u1((1+sh):(1+m-sh)).*-imag(u2th(sh:m-sh)));
C=sum(u1((1+sh):(1+m-sh)).*u2th(sh:m-sh));
k=k+1;
dfi(k)=atan2(S,C)-0.125;% метод погр
subplot(4,1,4);plot(dfi);grid on;hold on
end
zoom on
n1=ones(1,length(dfi));
n=cumsum(n1);
dfis=cumsum(sin(dfi(5:55)))./41;
dfic=cumsum(cos(dfi(5:55)))./41;
dfisr(5:55)=atan2(dfis,dfic);
stairs(dfisr,'r')

```

### Д2.8. Розрахунок передатної функції перетворювача Гільберта

```

close all hidden; clear all;
t=-1:.02:1;
N=4000;
for n=1:N
    f(n)=(n-N/2)*.1;
    x=exp(i.*t.*f(n));
    y=imag(hilbert(real(x)))+i.*imag(hilbert(imag(x)));
    H(n)=y/x;
end
subplot(2,1,1)
plot(f,abs(H));grid on
subplot(2,1,2)
plot(f,angle(H));grid on
figure

```



```

h=real(iff(H));
h=fftshift(h);
h1=h((N/2-100):(N/2+100));
stem(h1);grid on
zoom on
%%%% calculate Hilb. signal in a time region
dt=.02;
tt=-6:dt:6-dt;
signal=exp(i.*tt.*5);
xx=real(signal);
h11=h((N/2-20):(N/2+20));
yv=conv(h11,xx);
figure
subplot(2,1,1)
plot(xx);grid on
subplot(2,1,2)
yv1=yv(22:621);
plot(yv1);grid on;hold on
plot(imag(signal),'r')
figure
er=abs(imag(signal)-yv1);
plot(er);grid on

```

### Д2.9. Програма розрахунку базисів систем залишкових класів

```

function B=sokbaz(P)
% B – вектор базисів СЗК
% P – вектор модулів СЗК
N=length(P);
PP=prod(P);
for l=1:N
    p=P(l);
    d=mod(PP/p,p);
    m=1;
    while mod(m*d,p)~=1
        m=m+1;
    end
    B(l)=m*PP/p;
end
y=mod(sum(B),PP);
if y~=1
    B(1:N)=NaN;
    sprintf('%s','ПОМИЛКА!!!')
end

```

## Список літератури

До розділу 1

- 1.1. *Берёзкина Э.М.* Математика древнего Китая. М.: Наука, 1980.-311 с
- 1.2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. –М.: Наука. Физматлит. –1980. –976 с.
- 1.3. *Брянский Л.Н.* Приборы – долгожители //Контрольно-измерительные приборы и системы.-2004.-№5.-С.35-36.
- 1.4. *Брянский Л.Н.* Непотопляемая дюжина //Контрольно-измерительные приборы и системы.-2006.-№3.-С.27-28.
- 1.5. *Васильев А.С.* Основы метрологии и технические измерения.-М.: Машиностроение, 1980.- 192 с.
- 1.6. *Величко О.М.* Всесвітня історія метрології: від давнини до кінця ХІХ століття.-К.: Основа, 2006.-424 с.
- 1.7. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. –М.: Гл. ред. физ.-мат. литературы изд-ва «Наука», 1981. – 176 с.
- 1.8. *Высокоточные угловые измерения / Д.А. Аникст, К.М. Константинович, И.В. Меськин и др.; Под ред. Ю.Г. Якушенкова.*– М.: Машиностроение, 1987. – 480 с.
- 1.9. *Галахова О.П., Колтик Е.Д. Кравченко С.А.* Основы фазометрии. Л.: Энергия, 1976.-256 с.
- 1.10. *Гафанович Г.Я., Купко В.С., Костриков А.Л.* К разработке рабочего эталона 1-го разряда плоского угла //Міжнародна наук.-техн. Конф. “Метрологія та вимірювальна техніка. Метрологія- 2006”. Наук. Праці конф у 2 томах. – Харків:Нац. Наук. Центр “Інститут метрології”.-2006.- Т.2.-С.78-81.
- 1.11. *Гафанович Г., Костриков А.* Прецизионные средства измерений плоского угла. Метод прямого компандирования // Метрологія та прилади.-2007.- С.52-54.
- 1.12. ДСТУ 3651.0-97. Основні одиниці фізичних величин міжнародної системи одиниць. Основні положення , назви та позначення. – К.:Держстандарт України.-1998. –9 с.
- 1.13. *Киселев М.И., Михелев Д.Ш.* Основы геодезии. –М.: Высш. шк., 2001.- 368с.
- 1.14. *Краткий политехнический словарь.* – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 1136.
- 1.15. *Кузнецов П.Н., Васютинский И.Ю., Ямбаев Х.К.* Геодезическое инструментоведение: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1984. – 364 с.
- 1.16. *Куштин И.Ф., Куштин В.И.* Инженерная геодезия. – Ростов-на-Дону: Изд-во Феникс, 2002.- 416 с.
- 1.17. *Луцик Я.Т., Гук О.П., Лах О.І., Стадник Б.І.* Вимірювання температури: теорія та практика.- Львів : Видавництво “Бескид Біт”, 2006. – 560 с.
- 1.18. *Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений: Пер. с англ. – М.: Главная ред. физ.-мат. лит. изд-ва “Наука”, 1978. – 240 с.
- 1.19. *Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов.* Т.1.-М.: Советская энциклопедия, 1980. –1184 с.

- 1.20. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.2.-М.: Советская энциклопедия, 1979. –1104 с.
- 1.21. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. Т.4– М.: Советская энциклопедия., 1984. – 1216 с.
- 1.22. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. Т.5– М.: Советская энциклопедия., 1984. – 1248 с.
- 1.23. *Млинко Б.Б., Пастух О.А., Фриз М.Є.* Обґрунтування вибору математичної моделі ритмічного світлового сигналу, породженого циклічними змінами пульсового кровонаповнення // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. –2001.-№2.-С.100-103.
- 1.24. *Оглоблин Д.Н., Рейзенкинд И.Я.* Новые маркшейдерские приборы.– М.: Недра, 1967.–191 с.
- 1.25. *Окоси Т. и др.* Волоконно-оптические датчики.–Л.: Энергоатомиздат, 1990.–256 с.
- 1.26. *Орнатский П.П.* Теоретические основы информационно-измерительной техники.-К.: Выща школа, 1976.- 432 с.
- 1.27. *Орнатский П.П.* Автоматические измерения и приборы. – К.: Выща школа, 1980.- 560 с.
- 1.28. Основные термины в области метрологии: Словарь-справочник под ред. Тарбеева Ю.В. – М.: Изд-во стандартов, 1983. – 113 с.
- 1.29. Советский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия. Издание 3, 1985. – 1599 с.
- 1.30. *Суорц Кл. Э.* Необыкновенная физика обыкновенных явлений: Пер. с англ.. В 2-х т. Т.1 – М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1986. –400 с.
- 1.31. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. – К.: Техніка, 2004.- 288 с.
- 1.32. *Федоров Б.Д.* Маркшейдерско-геодезические приборы и инструменты.–М.: Недра, 1971.–288 с.
- 1.33. Физический энциклопедический словарь./Гл. ред. А.М. Прохоров. Ред. Кол. Д.М. Алексеев, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др.-М.: Сов. энциклопедия, 1984.- 944 с.
- 1.34. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.– М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит. Т.1, 1969.-607 с.
- 1.35. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.– М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит. Т.2, 1969.- 799 с.
- 1.36. Электрические измерения. Средства и методы измерений (общий курс) / Под. ред Е.Г. Шрамкова.- М.: Высш. школа, 1972.-520 с.
- 1.37. Элементарный учебник физики под редакцией Г.С. Ландсберга. Том I. Механика. Теплота. Молекулярная физика.–М.: Наука. Гл. ред.физ.-мат.лит., 1968.– 656 с.
- 1.38. Элементарный учебник физики под редакцией Г.С. Ландсберга. Том II. Электричество и магнетизм. –М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 527с.

- 1.39. Энциклопедический словарь / Гл. ред. Б.А. Введенский. – М.: Государственное научное изд-во «Большая советская энциклопедия». Т.1, 1953. – 719с.
- 1.40. Энциклопедический словарь / Гл. ред. Б.А. Введенский. – М.: Государственное научное изд-во «Большая советская энциклопедия». Т.2, 1954. – 719с.
- 1.41. Энциклопедический словарь / Гл. ред. Б.А. Введенский. – М.: Государственное научное изд-во «Большая советская энциклопедия». Т.3, 1955. – 744с.
- 1.42. Энциклопедия элементарной математики. Книга первая. Арифметика //Под ред. П.С. Александрова, А.И. Маркушевича, А.Я. Хинчина.- М., Л.: Госуд. изд. технико-теоретической лит., 1951. – 448 с.  
До розділу 2
- 2.1. Берка К. Измерения. Понятия, теория, проблемы. Пер. с чеш. – М.: Прогресс, 1987. – 320 с.
- 2.2. Мардиа К. Статистический анализ угловых наблюдений / Пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 240 с.
- 2.3. Маренко Б.Г., Щербак Л.М. Нові наукові концепції в теорії вимірювань. Тез. доп. між народ. конф. прис. 150-річчю дня народження І.Пулюя. – Тернопіль, ТПІ, 1995. – 190-193 с.
- 2.4. Марченко Б.Г., Щербак Л.М. Сучасна концепція побудови теорії вимірювань // Доповіді Національної академії наук України. 1999, №10. – 85-88 с.
- 2.5. Марченко Б.Г., Щербак Л.М. Основи теорії вимірювань // Праці Інституту електродинаміки Національної академії наук України. Електроенергетика. – Київ, 1999. – 221-230 с.
- 2.6. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия. Т. 4, 1984. – 1216 с.
- 2.7. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия. Т. 2, 1979. – 1104 с.
- 2.8. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия. Т. 5, 1984. – 1246 с.
- 2.9. Пфанцагль И. Теория измерений / Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 245 с.
- 2.10. Сунпес П., Зирес Дж. Основы теории измерений // Сборник «Психологические измерения» / Пер. с. Англ. – М.: Мир, 1962. – 110 с.
- 2.11. Халмош П. Теория меры / Пер. с англ. – М.: Наука, ИЛ, 1953. – 289 с.
- 2.12. Von Mises R. (Мизес Р.) “Ganzzah ligkeit“ der Atomgenoicht and Verwandte Fragen. Physical. Z. 19. 1918. 490-500 p.

До розділу 3

- 3.1. Анализаторы характеристик радиоэлектронных устройств. /Р.Л. Григорьян, Ю.А. Скрипник, О.К. Шалдыкин. –К.: Техніка, 1981. – 248 с.
- 3.2. Антенны и устройства СВЧ.(Проектирование фазированных антенных решеток) : Учебн. пособие для вузов. Д.И. Воскресенский, Р.А. Грановская,

- Н.С. Давыдов и др./ Под ред. Д.И. Воскресенского.* – М.: Радио и связь, 1981, 432 с.
- 3.3. *Бабак В.П. та ін.* Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.
- 3.4. *Бабак В.П. та ін.* Обробка сигналів: Підручник/ В.П. Бабак, В.С. Хандецький, Е. Шрюфер. – К.: Либідь, 1999. – 496 с.
- 3.5. *Бабак В.П., Куц Ю.В.* Метод однозначного визначення великих фазових зсувів сигналів // Вісник НАУ. – 2003. – №1. – С.3–8.
- 3.6. *Базанов Ю.В., Баранов В.В.* Дифференциально-фазовая идентификация угловой скорости объекта в устройствах электронной гироскопии // Приборостроение, 1999. – №5–6. – С.28–33.
- 3.7. *Белавин О. В.* Основы радионавигации. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Сов. Радио, 1977. – 320 с.
- 3.8. *Бражников Н.П.* Ультразвуковая фазометрия. – М.: Энергия, 1968. – 272 с.
- 3.9. *Ванюрихин А.И., Герчановская В.П.* Электронные поляризационные устройства. – К.: Техніка, 1984. – 160 с.
- 3.10. *Вешкурцев Ю.М.* Статистические анализаторы флуктуаций фазы. –Омск: Изд-во Омск. политехн. ин-та, 1979. – 81 с.
- 3.11. Вимірювання різниці фаз у радіоелектроніці / *Н. Т. Бова, В. А. Гойжесвський, С. М. Маєвський В.В. Молебний.*– К.: Вища шк., 1972.–231 с.
- 3.12. *Вишенчук И.М., Котюк А.Ф., Мизюк П.Я.* Электромеханические и электронные фазометры. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 207 с.
- 3.13. *Галахова О.П., Колтик Е.Д. Кравченко С.А.* Основы фазометрии. Л.: Энергия, 1976.-256 с.
- 3.14. *Глинченко А.С. и др.* Цифровые методы измерения сдвига фаз.- Новосибирск: Наука, 1979.- 288 с.
- 3.15. Глобальна система визначення місцеположення (GPS). Теорія і практика / *Б. Гофманн-Велленгоф, Г. Ліхтенеггер, Д. Коллінз;* Пер. з англ. третього вид. під ред Я.С. Яцківа.-К.: Наук. думка, 1995.-380 с.
- 3.16. *Голубков В.С., Евтихийев Н.Н., Папуловский В.Ф.* Интегральная оптика в информационной технике. М.: Энергоатомиздат, 1985. – 152 с.
- 3.17. *С. Гонсало Альварес Херес, Ю. Хасимото Т. Цутія.* Фазочувствительный ультразвуковой датчик расстояний для робототехнических систем //Автометрия, 2000. –№1. –С.65–77.
- 3.18. *Горлач А.А., Миц М.Я., Чинков В.Н.*- Цифровая обработка сигналов в измерительной технике. – К.: Техніка, 1985. – 151 с.
- 3.19. ГОСТ 16465-70. Сигналы радиотехнические измерительные. Термины и определения. – Введ. с 01.07.71. – М.: Изд-во стандартов, 1987. – 27 с.
- 3.20 *Гужов В.И.* Практические аспекты измерения фазы в интерферометрии // Автометрия, 1995.-№5.-С.25-30.
- 3.21. *Гужов В.И.* Расширение области фазовой однозначности при интерференционных измерениях /Автометрия. –1998.-№3. –С.99–107.

- 3.22. Гуляев Ю.В., Меш М.Я., Проклов В.В. Модуляционные эффекты в волоконных световодах и их применение. – М.: Радио и связь, 1991. – 152 с.
- 3.23. Дёч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов: Пер. с англ.– М.:Сов. радио, 1965.–206с.
- 3.24. Заездный А.М., Окуневи Ю.Б., Рахович Л.М. Фазоразностная модуляция и ее применение для передачи дискретной информации. – М.: Связь, 1967. – 304 с.
- 3.25. Застрогин Ю.Ф. Прецизионные измерения параметров движения с использованием лазера. – М.: Машиностроение, 1986. – 272 с.
- 3.26. Зубарев П.В., Хильченко А.Д. Прецизионный фазовый детектор для гетеродинной интерферометрической методики измерения плотности плазмы// Приборы и техника эксперимента, 2003.-№2. –С.35–41.
- 3.27. Измерения в электронике: Справочник/ В.А. Кузнецов, В.А. Долгов, В.М. Коневских и др. – М.: Энергоатомиздат, 1987. –512 с.
- 3.28. Измерительные устройства с комутационно-модуляционными преобразователями./ Скрипник Ю.А. – К.: Вща школа, 1975. – 256 с.
- 3.29. Кинкулькин И.Е., Рубцов В.Д., Фабрик М.А. Фазовый метод определения координат. – М.: Сов.радио, 1979. – 280 с.
- 3.30. Киселев М.И., Пронякин В.И. Фазовый метод исследования циклических машин и механизмов на основе хронометрического подхода // Измерительная техника. –2001. –№9. –С.15–18.
- 3.31. Колосніченко М.В., Скрипник Ю.О., Полька Т.О. Розробка фазового способу визначення коефіцієнта температуропровідності текстильних матеріалів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2000. –№4. –С.155–158.
- 3.32. Куц Ю.В. Застосування системи залишкових класів в задачах захисту інформації // Защита информации. Сб. науч. Трудов НАУ.-2003.-Вип 10.- С.137-149.
- 3.33. Куц Ю.В. Обробка кутових спостережень // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. –2003. –№2. – С.76–84.
- 3.34. Куц Ю.В. Інтервальні оцінки статистичних характеристик кутових вимірювань / Технологические системы.-2004.-№3. – С.72–78.
- 3.35. Куц Ю.В. Способи визначення кумулятивних фазових зсувів сигналів // Труды III Міжнар. наук.-техн. конф. “Авіа-2001”.– Т. 3. – С.8.57–8.60.
- 3.36. Лобачев В.М. Радиоэлектронная геодезия. – М.: Недра, 1980. – 327 с.
- 3.37. Маєвський С.М., Куц Ю.В. Гетеродинна інтерференційна система контролю якості дзеркал // Тези доп. школи-семінару “Автоматизація фізичних методів контр. в технічній діагностиці та медицині”. –Славське Львівської обл.:ЛПІ.– 1995. – С.19.
- 3.38. Маєвський О.В., Приймак М.В., Щербак Л.М. Гістограмний аналіз періодичних випадкових процесів і його використання в прикладних дослідженнях // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2003. –№2. –С.26–31.

- 3.39. Математическая энциклопедия / Гл. ред. *И. М. Виноградов*. – М.: Советская энциклопедия. Т. 4, 1984. – 1216 с
- 3.40. Методы и средства лазерной прецизионной дальнометрии / *А.М. Андрусенко, В.П. Данильченко, А.В. Прокопов и др.* – М.: Изд-во стандартов, 1987. – 224 с.
- 3.41. Методы неразрушающих испытаний. Физические основы, практические применения, перспективы развития / Под ред. *Р. Шарпа*: Пер с англ. – М.: Мир, 1972. – 494 с.
- 3.42. *Мирский Г.Я.* Электронные измерения. – М.: Радио и связь, 1986. – 440 с.
- 3.43. *Михеечев В.В.* Геодезические светодальномеры. – М.: Недра, 1979. – 222 с.
- 3.44. *Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Методы модуляции и сканирования света. – М.: Наука, 1970. – 295 с.3.
- 3.45. Неразрушающий контроль. В 5 кн. Кн. 3. Электромагнитный контроль: Практ. Пособие / Под ред. *В.В. Сухорукова*. – М.: Высш. шк., 1992. – 312с.
- 3.46. *Окоси Т. и др.* Волоконно-оптические датчики / *Т. Окоси, К. Окамото, М. Оцу, Х. Нисихара, Кю Кюма, К. Хататэ*; Под ред. Т. Окоси: Пер. с япон. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. –2565 с.
- 3.47. *Орнатский П.П.* Автоматические измерения и приборы. – Киев: Выща школа, 1980. – 560 с.
- 3.48. *Панин В.В., Степанов Б.М.* Измерение импульсных магнитных и электрических полей. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 120 с.
- 3.49. *Переход П.Г.* Измерение параметров фазы случайных сигналов. – Томск: Томское отд. Изд-ва “Радио и связь. – 1991. – 310 с.
- 3.50. *Пестряков В.Б.* Фазовые радиотехнические системы (Основы статистической теории). – М.: Сов. радио, 1968. – 466 с.
- 3.51. *Поліщук Є.С. та ін.* Засоби та методи вимірювань неелектричних величин: Підручник / *Є.С. Поліщук, М.М. Дорожовець, Б.І. Стадник, О.В. Івахів, Т.Г. Бойко, А. Ковальчик*; За ред. Є.С. Поліщука – Львів : Видавництво “Бескид Біт”, 2008. – 618 с.
- 3.52. Применение методов фазометрии для прецизионного измерения расстояния / *С.М. Маевский, В.Г. Баженов, Е.К. Батуревич., Ю.В. Куц.*– К.:Вища шк., 1983.–83с
- 3.53. *Прокопенко І.Г.* Методи і засоби обробки сигналів. Оцінювання, виявлення, фільтрація: Підручник. – К.: НАУ, 2003. – 200 с.
- 3.54. *Протопопов В.В., Устинов Н.Д.* Лазерное гетеродинамирование. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 288 с.
- 3.55. Радиотехнические системы. Учеб. Для вузов по спец “Радиотехника” / *Ю.П. Гришин, В. П. Ипатов, Ю. М. Каразинов и др.*; Под ред. *Ю. М. Каразинова*. – М.: Высш. шк., 1990. – 496 с.
- 3.56. *Сандомирский С.Г., Ревяко С.А.* Использование угловых измерений при контроле параметров материалов магнитным методом. 1.Методические основы //Дефектоскопия. –2003. –№9. –С.60–70.
- 3.57. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604с.

- 3.58. *Смирнов П.Т.* Цифровые фазометры. –Л.: Энергия, 1974. – 140 с.
- 3.59. *Сопрунюк П.М., Коваль Л.А., Цибульский В.С.* Амплитудно-фазовые измерения в диапазоне инфранизких частот.- К.: Наукова думка, 1983. – 176с.
- 3.60. *Тетерко А.Я.* Обобщенный фазовый метод увеличения чувствительности селективного вихретокового контроля //Техническая диагностика и неразрушающий контроль. –1997. –№2. – С.9–18
- 3.61. *Троцишин І.В.* Вимірювання та перетворення фазочастотних параметрів радіосигналів. –Хмельницький.:ПП Ковальський В.В., 2002. – 382 с.
- 3.62. *Ураксеев М.А., Марченко Д.А., Шишкин С.Л.* Современные оптические измерительные устройства // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. –2001. – №3. –С.52–55.
- 3.63. *Фендриков А.И., Красковский А.П., Богочев И.В.* Фазоизмерительная аппаратура для неразрушающего контроля. – К.: Знание, 1983. – 17 с.
- 3.64. Физический энциклопедический словарь /Гл. ред. *А.М. Прохоров*. Ред. кол. *Д.М., Алексеев, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др.* – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – 944 с.
- 3.65. *Фрумкин В.Д., Рубичев Н.А.* Теория вероятностей и статистика в метрологии и измерительной технике. – М., Машиностроение, 1987. – 168 с.
- 3.66. *Хамидуллин В.К.* Ультразвуковые контрольно-измерительные устройства и системы. – Л.: Изд.-во Ленинград. ун.-та, 1989. – 248 с.
- 3.67. *Чмыч М.К.* Цифровая фазометрия. – М.: Радио и связь, 1993. – 184 с.
- 3.68. *Mayevsky S.* Precise Measurement of Ultrasound Velocity. // Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. Vol.20B. Editors Donald O. Thompson, Dale E. Chimenti. -Vtlville, New York: AIP Conference Proceeding. – 2000. – P.1587–1591.

До розділу 4

- 4.1. *Акушский И.Я., Юдицкий Д.И.* Машинная арифметика в остаточных классах. – М.: Сов. радио, 1968. – 440 с.
- 4.2. *Бабак В.П., Куц Ю.В.* Метод однозначного визначення великих фазових зсувів сигналів // Вісник НАУ. - 2003.-№1.- С.3-8.
- 4.3. *Бабак В.П., Куц Ю.В.* Використання коригуючих властивостей системи залишкових класів у фазометрії // Вісник НАУ.-2004.-№1.-С.3-9.
- 4.4. *Болкушов А.А., Овчаренко Л.А.* Синтез структуры ЭВМ в системе остаточных классов/ Электронное моделирование. – 2001. –Т. 23, №4. – С.116–120.
- 4.5. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. –М.: Гл. ред. физ.-мат. литературы изд-ва «Наука», 1981.– 176 с.
- 4.6. Вимірювання різниці фаз у радіоелектроніці / *Н. Т. Бова, В. А. Гойжевський, С. М. Маєвський В.В. Молебний.*– К.: Вища шк., 1972.–231 с.
- 4.7. *Вишенчук И.М., Котюк А.Ф., Мизюк П.Я.* Электромеханические и электронные фазометры. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 207 с.
- 4.8. *Волков В.М., Иванько А.А.* Нестационарные процессы в элементах фазометрических систем. – К.: Техніка, 1977.- 120 с.



- 4.9. *Галахова О.П., Колтик Е.Д. Кравченко С.А.* Основы фазометрии. Л.: Энергия, 1976.-256 с.
- 4.10. *Глинченко А.С. и др.* Цифровые методы измерения сдвига фаз.- Новосибирск: Наука, 1979.- 288 с.
- 4.11. *Гужов В.И.* Расширение области фазовой однозначности при интерференционных измерениях /Автометрия. –1998.-№3. –С.99–107.
- 4.12. *Гужов В.И., Картавых Е.В.* Проблема фазовой неоднозначности и ее решение в лазерной интерферометрии. – Автометрия. – 2000. – №5. – С.102–107.
- 4.13. Измерения в электронике: Справочник/ *В.А. Кузнецов, В.А. Долгов, В.М. Коневских и др.* – М.: Энергоатомиздат, 1987. –512 с.
- 4.14. *Кинкулькин И.Е., Рубцов В.Д., Фабрик М.А.* Фазовый метод определения координат. – М.: Сов.радио, 1979. – 280 с.
- 4.15. *Куц Ю.В.* Способи визначення кумулятивних фазових зсувів сигналів // Труды III Міжнар. наук.-техн. конф. “Авіа-2001”.– Т. 3. – С.8.57–8.60.
- 4.16. *Куц Ю.В.* Вимірювання кумулятивних фазових зсувів //Технічна електродинаміка.-2001.-№5.-С.67-72.
- 4.17. *Куц Ю.В.* Застосування алгебри залишкових числових класів в задачах фазових вимірювань // Матеріали IV Міжнар. науково-техн. конф. “Авіа-2002”.– Т. 1. –К.:НАУ. – С.11.21–11.24.
- 4.18. *Куц Ю.В.* Усунення неоднозначності визначення великих фазових зсувів сигналів // Вісник Технічного ун-ту Поділля. –Т. 2. Технічні науки. – Хмельницький. –2003. – №3. –С.158–162.
- 4.19. *Куц Ю.В., Щербак Л.М.* Застосування фазових методів в задачах захисту інформації // Захист інформації. – 2004. –№1. – С43–51.
- 4.20. *Лобачев В.М.* Радиоэлектронная геодезия. – М.: Недра, 1980. – 327 с.
- 4.21. *Маркова В.П.* Применение модулярной арифметики для моделирования диффузии //Автометрия. –2003. – №3. – С60–71.
- 4.22. *Михеечев В.В.* Геодезические светодальномеры. – М.: Недра, 1979. – 222 с.
- 4.23. *Молодов В.Д.* Корреляционный метод измерения фазового сдвига // Контрольно-измерительная техника. – 1969. – С.40-43.
- 4.24. *Орнатский П.П.* Автоматические измерения и приборы. – Киев: Выща школа, 1980. – 560 с.
- 4.25. *Пестряков В.Б.* Фазовые радиотехнические системы (Основы статистической теории). – М.: Сов. радио, 1968. – 466 с.
- 4.26. Применение методов фазометрии для прецизионного измерения расстояния / *С.М. Маевский, В.Г. Баженов, Е.К. Батуревич., Ю.В. Куц.*– К.:Вища шк., 1983.–83с.
- 4.27. *Рябинин Ю.А.* Стробоскопическое осциллографирование. М.: Сов. Радио, 1972.- 272 с.
- 4.28. *Смирнов П.Т.* Цифровые фазометры. –Л.: Энергия, 1974. – 140 с.
- 4.29. *Торгашев В.А.* Система остаточных классов и надежность ЦВМ. М.: Сов. радио, 1973. – 120 с.

- 4.30. Червяков Н.И., Тынчеров К.Т., Велигоша А.В. Высокоскоростная цифровая обработка сигналов с использованием непозиционной арифметики / Радиотехника. – 1997. – №10. – С.23–27.
- 4.31. Чмых М.К. Цифровая фазометрия. – М.: Радио и связь, 1993. – 184 с.
- 4.32. Шпилька В.Н. Исследование и разработка широкодиапазонных автоматических цифровых компенсационных фазометров: Автореферат дис... канд. техн. наук: 05.11.05 / Киев. политехн. ин-т.-К., 1980. – 24 с.

До розділу 5

- 5.1. А.с.1128187 СССР, МКИ<sup>3</sup> G01 R25/00. Цифровой фазометр / Ю.В.Куц, С. М. Маевский, Н.В. Сандрацкий, В. Н. Шпилька, К. О. Орехов /СССР/.- №3620502/24-21; Заявлено 13.07.83; Оpubл. 07.12.84; Бюл.№ 45.
- 5.2. А.с. 1318927 СССР, МКИ<sup>3</sup> G01 R25/00. Следящий фазометр /В.Г. Баженов, Ю.В. Куц, С. М. Маевский, О.К. Негребецкая /СССР/.- №4007122/24-21; Оpubл. 23.06.87; Бюл. № 23.
- 5.3. А.с. 1348746 СССР, МКИ<sup>3</sup> G01 R25/00. Следящий фазометр /Ю.В. Куц /СССР/.- №4060300/24-21; Заявлено 21.04.86; Оpubл. 30.10.87; Бюл. № 40
- 5.4. А.с. 1359751 СССР, МКИ<sup>3</sup> G01 R25/00. Измерительный двухфазный генератор /Ю.В. Куц, О.К. Негребецкая /СССР/.-№4048524/24-21; Заявлено 03.04.86; Оpubл. 15.12.87; Бюл. № 46.
- 5.5. А.с. 1442931 СССР, МКИ<sup>3</sup> G01 R25/00. Измерительный двухфазный генератор / Ю.В. Куц, С. М Маевский, О.К Негребецкая /СССР/.-№4236565/24-21; Заявлено 27.04.87; Оpubл. 07.12.88; Бюл. № 45.
- 5.6. Бабак В.П., Дегтярьов В.В., Куц Ю.В. Щербак Л.М. Автоматизована система вимірювань фазових характеристик періодичних сигналів на базі технології LabVIEW // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – 2004. – №1(13). – С.61–68
- 5.7. Батуревич Е.К. Исследование и разработка широкодиапазонных многозначных мер фазовых сдвигов и методов их поверки: Автореферат дисс. ... канд. техн. наук: 05.11.05. – Киев 1973. – 24 с.
- 5.8. Батуревич Е.К., Бураков Е.С. Методы и аппаратура для воспроизведения и регулирования фазовых сдвигов. – Киев: Знание, 1981. –25 с.
- 5.9. Вимірювання різниці фаз у радіоелектроніці / Н. Т. Бова, В. А. Гойжевський, С. М. Маєвський В.В. Молебний.– К.: Вища шк., 1972.–231 с.
- 5.10. Галахова О.П., Колтик Е.Д. Кравченко С.А. Основы фазометрии. Л.: Энергия, 1976.-256 с.
- 5.11. Глинченко А.С. и др. Цифровые методы измерения сдвига фаз.- Новосибирск: Наука, 1979.- 288 с.
- 5.12. Дворяшин Б.В., Кузнецов Л.И. Радиотехнические измерения. Учебн. пособие для вузов. – М.: Сов. Радио, 1978. – 360 с.
- 5.13. Измерения в электронике: Справочник/ В.А. Кузнецов, В.А. Долгов, В.М. Коневских и др. – М.: Энергоатомиздат, 1987. –512 с.
- 5.14. Колтик Е.Д. Фазосдвигающие устройства.–М.:Изд-во стандартов, 1981.–

164с.

- 5.15. *Кравченко С.А.* Калибраторы фазы. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 100 с.
- 5.16. *Кукуш В. Д.* Электрорадиоизмерения: Учебн. Пособие для вузов. \_ М.: Радио и связь, 1985.- 368 с.
- 5.17. *Кушнир Ф. В., Савенко В.Г., Верник С.М.* Измерения в технике связи. Учебник для вузов.– М.:Связь, 1976.-431 с.
- 5.18. *Орнатский П.П.* Автоматические измерения и приборы. – Киев: Выща школа, 1980. – 560 с.
- 5.19. Применение методов фазометрии для прецизионного измерения расстояния / *С.М. Маевский, В.Г. Баженов, Е.К. Батуревич., Ю.В. Куц.*– К.:Вища шк., 1983.–83с.
- 5.20. *Смирнов П.Т.* Цифровые фазометры. –Л.: Энергия, 1974. – 140 с
- 5.21. *Сопрунюк П.М., Коваль Л.А., Цибульский В.С.* Амплитудно-фазовые измерения в диапазоне инфранизких частот.- К.: Наукова думка, 1983. – 176 с.
- 5.22. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. Глав. ред. И.П. Голямина.-М.: Сов. Энциклопедия, 1979.-400 с.
- 5.23. *Чмыч М.К.* Цифровая фазометрия. – М.: Радио и связь, 1993. – 184 с.
- 5.24. *Шпилька В.Н.* Исследование и разработка широкодиапазонных автоматических цифровых компенсационных фазометров: Автореферат дис... канд. техн. наук: 05.11.05 / Киев. политехн. ин-т.-К., 1980. – 24 с.
- 5.25. Pat. 3512085 USA, МКИ<sup>3</sup> G01 R25/00. Cumulative Phase Meter Using Whole Cycle and Partial Cycle Comparison / *Herbert L. Peterson, Washington P,С., George G.* – Оpubл.12.05.70. – Off. Gasette, vol/ 874 –НКН 324-83

До розділу 6

- 6.1. *Агекян Т.А.* Основы теории ошибок для астрономов и физиков. –М.:Главная редакция физико-математической лит. изд-ва “Наука”, 1972. – 172 с.
- 6.2. *Бабак В.П. та ін.* Обробка сигналів: Підручник/ В.П. Бабак, В.С. Хандецький, Е. Шрюфер. – К.: Либідь, 1999. – 496 с.
- 6.3. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. – М.: Мир,1989. –540 с.
- 6.4. *Бендат Дж., Пирсол А.* Применение корреляционного и спектрального анализа: Пер. с англ. – М.: Мир,1983. –312 с.
- 6.5. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. –М.: Наука. Физматлит. –1980. –976 с.
- 6.6. *Вакман В.Е.* Об определении понятия амплитуды, фазы и мгновенной частоты сигнала. // Радиотехника и электроника. – 1972. – Т.17, №5. – С.972–978.
- 6.7. *Вакман В.Е., Вайнштейн Л.А.* Амплитуда, фаза, частота – основные понятия теории колебаний. // Успехи физических наук. – 1977. –Т.123, №4. – С.657–682.
- 6.8. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. –М: Сов. радио, 1977.–608с.

- 6.9. ГОСТ 16465-70. Сигналы радиотехнические измерительные. – Введ. с 01.07.71. – М.: Изд-во стандартов, 1987. – 27 с.
- 6.10. Дёч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов: Пер. с англ.– М.:Сов. радио, 1965.–206с.
- 6.11. Коржик В.И. Огибающая сигнала и некоторые ее свойства. // Радиотехника. – 1968, т.23. – №4. – С.1–6.
- 6.12. Куц Ю.В., Щербак Л.М. Застосування перетворення Гільберта у фазометрії // Технологічні системи. –2004. –№2. – С.50–55.
- 6.13. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. –М.: Сов. Радио, 1969. – 752 с.
- 6.14. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.1.-М.: Советская энциклопедия, 1980. –1184 с.
- 6.15. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979. – 416 с.
- 6.16. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. – М.: Мир, 1971. – 495с.
- 6.17. Пестряков В.Б. Фазовые радиотехнические системы (Основы статистической теории). – М.: Сов. радио, 1968. – 466 с.
- 6.18. Ричард Лайонс. Цифровая обработка сигналов.- М.: ООО «Бином-Пресс», 2007. – 656 с.
- 6.19. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.– СПб.: Питер, 2003. – 604 с.
- 6.20. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
- 6.21. Babak V., Kuts U. Discret Hilbert Transform In Problems of the Measuring System Signal Analysis // Датчики и системы: Сборник докладов международной конф. Том III. СПб.: Изд-во СПбГПУ. – 2002. – С.32–36.
- 6.22. S. Lawrence Marple, Jr. Computing the Discrete-Time "Analytic" Signal via FFT // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1999. – Vol. 47, №9. – P.2600–2603.

До розділу 7

- 7.1. Бабак В.П., Куц Ю.В. Кутові намотані закони розподілу і їх застосування у фазометрії // Матеріали V Міжнар. наук.-техн. конф “Авіація – 2003”. – Т.1.-К.: НАУ, 2003.- С.11.71-11.76.
- 7.2. Бабак В.П. та ін. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.
- 7.3. Бабак В.П., Куц Ю.В., Щербак Л.М. Моделі та характеристики результатів статистичних куткових вимірювань // Вісник НАУ.-2006 -№ 4.-С.9-15.
- 7.4. Галахова О.П., Колтик Е.Д. Кравченко С.А. Основы фазометрии. Л.: Энергия, 1976.-256 с.

- 7.5. *Еременко В.С., Куц Ю.В., Монченко О.В. Щербак Л.М.* Статистичні характеристики випадкових величин і випадкових кутів // Матеріали VII Міжнар. наук.-техн. конф. “Авіа- 2006”.-Т.1: Інформаційно-діагностичні системи.-К.: НАУ, 2006. - С.11.28-11.31.
- 7.6. *Куц Ю.В., Щербак Л.М.* Застосування перетворення Гільберта у фазометрії // Технологические системы. –2004. –№2. – С.50–55.
- 7.7. *Куц Ю.В., Щербак Л.М.* Імовірнісні характеристики вузькосмугових процесів при фазових вимірюваннях // Вісн. НАУ. –2004. –№2. – С.8–14.
- 7.8. Кореляційний аналіз фазових характеристик циклічних випадкових процесів // Вісник НАУ.-2005 -№4.-С.13-17.
- 7.9. *Куц Ю.В., Щербак Л.М.* Статистична обробка результатів кутових вимірювань сигналів // Вісн. НАУ. –2003. – №3-4. –С.22–26.
- 7.10. *Куц Ю.В.* Методи та системи статистичної фазометрії // Автореф. дис... д-ра техн. наук: 05.11.16 / Націон. авіац. ун-т. – К., 2004.-35 с.
- 7.11. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. –М.: Сов. Радио, 1969. – 752 с.
- 7.12. *Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений: Пер. с англ. – М.: Главная ред. физ.-мат. лит. изд-ва “Наука”, 1978. – 240 с.
- 7.13. *Марченко Б.Г., Приймак М.В., Щербак Л.М.* Теоретичні основи аналізу стохастичних сигналів і шумів. Навчальний посібник. – Тернопіль: ТДТУ ім. І. Пулюя, 2001. – 179 с.
- 7.14. *Пестряков В.Б.* Фазовые радиотехнические системы (Основы статистической теории). – М.: Сов. радио, 1968. – 466 с.
- 7.15. *Переход П.Г.* Измерение параметров фазы случайных сигналов. – Томск: Томское отд. Изд-ва “Радио и связь. – 1991. – 310 с.
- 7.16. *Хастингс Н., Пикок Дж.* Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980. – 95 с.
- 7.17. *Чмыч М.К.* Цифровая фазометрия. – М.: Радио и связь, 1993. – 184 с.

До розділу 8

- 8.1. *Агекян Т.А.* Основы теории ошибок для астрономов и физиков. –М.: Главная редакция физико-математической лит. изд-ва “Наука”, 1972. – 172 с.
- 8.2. *Бабак В.П., Куц Ю.В.* Кутові намотані закони розподілу і їх застосування у фазометрії // Матеріали V Міжнар. наук.-техн. конф “Авіація – 2003”. – Т.1.-К.: НАУ, 2003.- С.11.71-11.76.
- 8.3. *Бабак В.П., Куц Ю.В., Щербак Л.М.* Моделі та характеристики результатів статистичних кутових вимірювань // Вісник НАУ.-2006 -№ 4.-С.9-15
- 8.4. *Бабак В.П., Куц Ю.В.* Комп’ютерне моделювання задач кутових вимірювань // Матеріали IV Міжнар. наук.-техн. конф. “АВІА-2002”. – Т. 1. – К.:НАУ. – 2002. – С.11.1–11.4.
- 8.5. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ.– М.: Мир,1989. –540 с.

- 8.6. Вимірювання різниці фаз у радіоелектроніці / Н. Т. Бова, В. А. Гойжевський, С. М. Маєвський В.В. Молебний.– К.: Вища шк., 1972.–231 с.
- 8.7. Галахова О.П., Колтик Е.Д. Кравченко С.А. Основы фазометрии. Л.: Энергия, 1976.-256 с.
- 8.8. Глинченко А.С. и др. Цифровые методы измерения сдвига фаз.- Новосибирск: Наука, 1979.- 288 с.
- 8.9. Дёч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов: Пер. с англ.– М.:Сов. радио, 1965.–206с.
- 8.10. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 1999.:”Нолидж”,2001. –1296 с.
- 8.11. Ермаков С.И., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982. – 298 с.
- 8.12. Захаров И.П., Кукуш В.Д. Теория неопределенности в измерениях. Учеб. пособие: Харьков, Консум, 2002. – 256 с.
- 8.13. Захаров И.П. Теоретическая метрология. Учебное пособие. – Харьков: ХТУРЭ, 2000. – 172 с.
- 8.14. Куц Ю.В., Куц Н.Е. Применение выборочных характеристик расположения и рассеяния в фазометрии // Электронное моделирование.– 2004. – №2. – Т. 26.– С.89–97.
- 8.15. Куц Ю.В., Щербак Л.М. Застосування перетворення Гільберта у фазометрії // Технологічні системи. –2004. –№2. – С.50–55.
- 8.16. Куц Ю.В., Щербак Л.М. Імовірнісні характеристики вузькосмугових процесів при фазових вимірюваннях // Вісн. НАУ. –2004. –№2. – С.8–14.
- 8.17. Куц Ю.В., Щербак Л.М. Кореляційний аналіз фазових характеристик циклічних випадкових процес // Вісник НАУ.-2005 -№4.-С.13-17.
- 8.18. Куц Ю.В., Куц Н.Є. Моделирование случайных величин распределенных на окружности // Зб. наук. пр. – К.: Інститут проблем моделювання в енергетиці. –2003. – Вип. 21.- С.101-106.
- 8.19. Куц Ю.В. Обробка кутових спостережень// Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. –2003.-№2. - С.76-84.
- 8.20. Куц Ю.В. Інтервальні оцінки статистичних характеристик кутових вимірювань / Технологічні системи.-2004.-№3. – С.72–78.
- 8.21. Куц Ю.В., Монченко О.В. Використання невизначеності для обробки даних і подання результатів кутових вимірювань // Тез. докладов ІІ научн.-техн. семинара “Неопределенность измерения: нормативные, научные, методические и производственные аспекты”.-Харьков: Харківський національний університет радіоелектроніки, 2005.- С.34-36
- 8.22. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. –М.: Сов. Радио, 1969. – 752 с.
- 8.23. Мардиа К. Статистический анализ угловых наблюдений: Пер. с англ. – М.: Главная ред. физ.-мат. лит. изд-ва “Наука”, 1978. – 240 с.
- 8.24. Марченко В.Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике.– К.: Наук. думка, 1992.– 240 с.

- 8.25. *Мирский Г.Я.* Аппаратное определение характеристик случайных процессов. – М.: Энергия, 1972. – 455 с.
- 8.26. *Моисеев Н.Н.* Математика ставит эксперимент. – М.: Наука, 1979. – 234 с.
- 8.27. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
- 8.28. *Пестряков В.Б.* Фазовые радиотехнические системы (Основы статистической теории). – М.: Сов. радио, 1968. – 466 с.
- 8.29. *Переход П.Г.* Измерение параметров фазы случайных сигналов. – Томск: Томское отд. Изд-ва “Радио и связь”. – 1991. – 310 с.
- 8.30. *Попов Ю.П., Самарский А.А.* Вычислительный эксперимент. – М.: Знание, 1983. – 64 с.
- 8.31. *Самарский А.А.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. – М.: Вестник АН СССР, 1979, №5. – с. 18-33.
- 8.32. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок: Пер с англ. – М.: Мир, 1985. – 272с.
- 8.33. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ і синтез радиотехнических устройств и систем: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.
- 8.34. *Хастингс Н., Пикок Дж.* Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980. – 95 с.
- 8.35. *Чмыч М.К.* Цифровая фазометрия. – М.: Радио и связь, 1993. – 184 с.
- 8.36. *Циделко В.Д., Яремчук Н.А.* Невизначеність вимірювання. Обробка даних і подання результатів вимірювань: Монографія. – К.: “Видавництво «Політехніка»”, 2002. – 176 с.9.1.
- 8.37. *Шалыгин А.С., Палагин Ю.И.* Прикладные методы статистического моделирования. – Л.: Машиностроение, 1986. – 320 с.
- 8.38. *Яноши Л.* Теория и практика обработки результатов измерений. – М.: Мир, 1968. – 462 с

### До розділу 9

- 9.1. А.с. №1596268 СССР, МКИ<sup>3</sup>, G01 R25/00. Измеритель фазовых шумов источников колебаний / *Е.К Батуревич, В.Д. Кудрицкий, Ю.В. Куц, А.С. Милковский* (СССР). – №4438513/24-21; Заявлено 10.06.88; Опубл. 30.09.90; Бюл. №36. – 4 с.
- 9.2. *Бабак В.П.* та ін. Обробка сигналів: Підручник/ *В.П. Бабак, В.С. Хандецький, Е. Шрюфер.* – К.: Либідь, 1999. – 496 с.
- 9.3. *Бабак В.П., Дегтярьов В.В., Куц Ю.В. Щербак Л.М.* Автоматизована система вимірювань фазових характеристик періодичних сигналів на базі технології LabVIEW // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – 2004. – №1(13). – С.61–68.

- 9.4. *Бабак В.П., Дегтярьов В.В, Куц Ю.В. Щербак Л.М.* Спосіб ковзного дискретного перетворення Гільберта в задачах фазометрії // Матеріали VI Міжнар. наук.-техн. конф. “Авіа- 2004”. –Т.1. – К.: НАУ. – 2004. – С.11.39–11.43.
- 9.5. *Банкет В. Л., Дорофеев В. М.* Цифровые методы в спутниковой связи. – М.: Радио и связь, 1998. – 240 с.
- 9.6. *Г. Ван Трис.* Теория обнаружения и модуляции. Т. 1. / под ред. В.Н. Тихонова: Пер. с англ. – М.: Сов. Радио, 1972. – 744 с.
- 9.7. *Глинченко А.С. и др.* Цифровые методы измерения сдвига фаз.- Новосибирск: Наука, 1979.- 288 с.
- 9.8. *Дьяконов В.П.* Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 1999.:”Нолидж”,2001. –1296 с.
- 9.9. *Жарков Ф.П., Каратаев В.В. и др.* Использование виртуальных инструментов LabVIEW. М.: Солон-Р, Радио и связь, 1999. – 268с.
- 9.10. *Заездный А.М., Окуневи Ю.Б., Рахович Л.М.* Фазоразностная модуляция и ее применение для передачи
- 9.11. *Куц Ю.В., Щербак Л.М.* Застосування фазових методів в задачах захисту інформації // Захист інформації. – 2004. –№1. – С43–51.
- 9.12. *Куц Ю.В., Щербак Л.М.* Кодування інформації в системі залишкових класів з використанням шумових сигналів // Захист інформації. – 2004. –№2. – С.4–12.дискретной информации. – М.: Связь, 1967. – 304 с.
- 9.13. *Куц Ю.В., Щербак Л.М.* Задачі модуляції сигналів у системах захисту інформації з використанням дискретного перетворення Гільберта / Защита информации: Сборник научных трудов. – К.: НАУ, 2004. – С.135–144.
- 9.14. *Куц Ю.В., Монченко О.В.* Експериментальне дослідження фазового способу ультразвукової товщинометрії // Матеріали VIII Міжнародної наук.-техн. Конф. “Авіа-2007”.- 25-27 квітня 2007. -Т.1: Інформаційно-діагностичні системи.–К.: Изд. НАУ, 2007.-Т.1.-С.11.33-11.36
- 9.15. *Лазарев Ю.Ф.* Початки програмування у середовищі MatLAB: Навч. посібник. –К.: “Корнійчук”, 1999. – 160 с.
- 9.16. *Лазарев Ю.Ф.* *MatLAB 5.x.* – К.: Издательская группа ВНУ., 2000. – 384 с.
- 9.17. *Маєвський С.М., Куц Ю.В.* Гетеродинна інтерференційна система контролю якості дзеркал // Тези.доп. школи-семінару “Автоматизація фізичних методів контр. в технічній діагностиці та медицині”. –Славське Львівської обл.:ЛПІ.– 1995. – С.19.
- 9.18. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т. 1,2/ Под ред. Н.Г. Волкова: Пер. с фр. – М.: Мир, 1983. – 311,256 с.
- 9.19. *Основи комп’ютерної стеганографії / В.О.Хорошко, О.Д. Азаров, Ю.Є. Шелест та ін.* – Вінниця: ВДТУ, 2003. – 143 с.
- 9.20. *Пестряков В.Б.* Фазовые радиотехнические системы (Основы статистической теории). – М.: Сов. радио, 1968. – 466 с.
- 9.21. *Потемки В.Г.* Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: – В 2-х т. – М.: Диалог – МИФИ, 1999. – 366, 304 с.



- 9.22. Прокопенко І.Г. Методи і засоби обробки сигналів. Оцінювання, виявлення, фільтрація: Підручник. – К.: НАУ, 2003. – 200 с.
- 9.23. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604с.
- 9.24. Смирнов П.Т. Цифровые фазометры. –Л.: Энергия, 1974. – 140 с.
- 9.25. Столлингс В. Беспроводные линии связи и сети.: Пер. с англ. – М.:Издат. дом “Вильямс”, 2003. – 640 с.
- 9.26. Тейлор Дж. Введепние в теорию ошибок: Пер с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.
- 9.27. Туз Ю.М. Структурные методы повышения точности измерительных устройств. – К.: Вища школа, 1976. – 255 с.
- 9.28. Чмыч М.К. Цифровая фазометрия. – М.: Радио и связь, 1993. – 184 с.
- 9.29. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
- 9.30. Патент України на корисну модель № 18441, МПК, G01В 17/00. Спосіб ультразвукового вимірювання товщини багат шарових матеріалів та виробів / Єременко В.С., Куц Ю.В., Монченко О.В.– u200604354; Заявлено 18.04.2006; Опубл.

#### До додатку 1

- Д1.1. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия. Т. 4, 1984. – 1216 с.
- Д1.2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.– М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит. Т.2., 1969.- 799 с.
- Д1.3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. –М.: Наука. Физматлит. –1980. –976 с.
- Д1.4. Унковский В.А. Теория вероятностей.- М.: Военно-морское изд-во.-1953.- 320 с.