

П.О.Приставка

Національний авіаційний університет

**ПРОЦЕДУРИ НЕБІНАРНОГО *SUBDIVISION* НА ОСНОВІ
ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ *B*-СПЛАЙНІВ,
БЛИЗЬКИХ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ**

Запропоновано загальну постановку задачі на проведення небінарного *subdivision* на основі локальних сплайнів, наведено відповідні лінійні оператори, визначено місцезнаходження відліків для проектування числових послідовностей.

Постановка проблеми. Стала тенденція до збільшення обсягів даних, що обробляються, на сьогодні є об'єктивною реальністю. Серед інформації, котра зберігається в електронному вигляді є певна категорія даних, які потребують при обробці математичних процедур, що побудовані на основі методів інтерполяції: цифрові зображення та відео, часові ряди та цифрові сигнали, комп'ютерні анімаційні та інші просторові моделі, тощо. Розробники відповідного програмного забезпечення, що працюють з такими даними, давно використовують швидкодючі процедури, засновані на локальній інтерполяції (типово – *B*-сплайни), проте, є необхідність враховувати потребу у зменшенні кількості обчислювальних операцій при побудові апроксимацій.

Дані, про які мова, в електронному вигляді представлені у вигляді послідовностей відліків (сигналів, тощо), заданих у вузлових точках. Зміна кількості відліків у послідовностях у довільну кількість раз (необов'язково у цілочисельну) можна забезпечити на основі неперервних інтерполяцій. Але, якщо зміна масштабу послідовності здійснюється на певний наперед відомий коефіцієнт, то в цьому разі для апроксимацій, що мають явний вигляд, можна отримати обчислювальні процедури з меншою обчислювальною складністю, як часткові випадки. Як приклад – *subdivision*-процедури, для котрих отримання нових та вдосконалення алгоритмізації існуючих є задачею актуальною.

Аналіз досліджень та постановка задачі. З точки зору постановки задачі, застосування апроксимацій гладких функцій є спрощенням при виборі методу неперервної апроксимації, придатного для зміни кількості

членів цифрових послідовностей. Таке спрощення не є грубим на разі використання методів на основі фінітних функцій, зокрема B -сплайнів. Високий внесок в фундаментальну розробку апарату апроксимацій на основі B -сплайнів внесли І.Шоенберг, К.Де Бор, М.П.Корнійчук, А.О.Лигун [1 – 3] та інші. Теоретичні та практичні дослідження сплайнів на основі B -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, подано, наприклад, в роботах [4; 5]. Стосовно останнього типу сплайнів можна відмітити, що вибір в якості апарату апроксимації операторів, що є близькими до інтерполяційних у середньому, обумовлений більш високою стійкістю оцінки наближення за даними, що є різного роду результатами вимірювань та можуть бути використані в якості моделі аналогового сигналу [6].

Нехай з кроком $h > 0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h : t_i = ih, i \in \mathbb{Z}$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t)$, визначеної на $\mathbb{R}_1(-\infty; \infty)$. Вважаємо, що інформацію про функцію $p(t)$ задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла

$$\bar{p}_i = \frac{1}{h} \int_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t) dt, \quad (1)$$

при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах таке:

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i, \quad i \in \mathbb{Z},$$

де ε_i – похибка.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h , застосовують поліноміальні сплайни, що є близькими до інтерполяційних у середньому на основі B -сплайнів другого – п'ятого порядку [4; 5; 7]. Наприклад, сплайн

$$S_{2,1}(p, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(p_i - \frac{1}{6} \Delta^2 p_i \right) B_{2,h}(t - (i + 0,5)h), \quad (2)$$

де

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2; 3h/2], \\ (3 + 2t/h)^2 / 8, & t \in [-3h/2; -h/2], \\ 3/4 - (2t/h)^2 / 4, & t \in [-h/2; h/2], \\ (3 - 2t/h)^2 / 8, & t \in [h/2; 3h/2]; \end{cases}$$

$$\Delta^2 p_i = p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1},$$

має високу якість апроксимації, зокрема, при $h \rightarrow 0$ для довільної $p(t) \in C^3$ буде виконуватись

$$\|p(t) - S_{2,1}(\bar{p}, t)\| = \frac{h^3}{12\sqrt{3}} \|p^{(3)}(t)\| + o(h^3).$$

З іншого боку, наприклад, для сплайну

$$S_{4,0}(p, t) = \sum_{i \in Z} p_i B_{4,h}(t - (i + 0,5)h), \quad (3)$$

де

$$B_{4,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-5h/2; 5h/2], \\ (t/h + 5/2)^4 / 24, & t \in [-5h/2; -3h/2], \\ \Psi(t/h) - 5(t/h + 1/2)^4 / 12, & t \in [-3h/2; -h/2], \\ \Psi(t/h), & t \in [-h/2; h/2], \\ \Psi(t/h) - 5(t/h - 1/2)^4 / 12, & t \in [h/2; 3h/2], \\ (t/h - 5/2)^4 / 24, & t \in [3h/2; 5h/2]; \end{cases}$$

$$\Psi(t) = \frac{115}{192} - \frac{5}{8}t^2 + \frac{1}{4}t^4,$$

притаманна властивість згладжування: при $h \rightarrow 0$ для довільної функції $p(t) \in C^2$ справедливо таке:

$$\|p(t) - S_{4,0}(\bar{p}, t)\| = \frac{h^2}{4} \|p''(t)\| + o(h^2).$$

Отже, при застосуванні того, чи іншого типу сплайну, залежно від потреби, можна отримувати або асимптотично точні оцінки, або ж забезпечувати згладжування локальних осциляцій в даних. При обчисленнях сплайни зручно подавати у явному вигляді, наприклад, вирази (2) та (3) можна записати так:

$$S_{2,1}(p, t) = \frac{1}{48} \left(-(1-x)^2 p_{i-2} + (2 - 16x + 10x^2) p_{i-1} + (46 - 18x^2) p_i + (2 + 16x + 10x^2) p_{i+1} - (1+x)^2 p_{i+2} \right), \quad (4)$$

$$S_{4,0}(p, t) = \frac{1}{384} \left((1-x)^4 p_{i-2} + (76 - 88x + 24x^2 + \right.$$

$$+8x^3 - 4x^4)p_{i-1} + (230 - 60x^2 + 6x^4)p_i + \\ + (76 + 88x + 24x^2 - 8x^3 - 4x^4)p_{i+1} + (1+x)^4 p_{i+2}), \quad (5)$$

де $x = \frac{2}{h}(t - (i + 0,5)h)$, $|x| \leq 1$.

Перехід від неперервних наближень на основі лінійних комбінацій B -сплайнів до процедур *subdivision* викликає практичний інтерес вже майже протягом останніх тридцяти років. Наприклад в монографії [8] є чимало подібних процедур, при цьому бібліографія складає 180 робіт. Автори роботи [9] започаткували цілу низку публікацій, що пропонують підходи до побудови *subdivision* що базуються на локальних сплайнах на основі B -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, наприклад [10]. В роботах [11; 12] отримані лінійні оператори небінарного масштабування одно- та двовимірних послідовностей відліків гладких функцій, які дозволяють здійснювати вказану операцію як з вимогою згладжування, так і асимптотично точно. Проте, загальної постановки задачі для процедур небінарного *subdivision* зроблено не було. Обумовлено це тим, що вибір конкретних часткових випадків локальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, потребує автоматизованого визначення вузлів інтерполювання. Тож, це питання потребує узагальнення, що й визначає мету даної публікації.

Виклад основного матеріалу. Нехай у вузлах розбиття

$$\Delta_{h_M} : t_j = jh_M, \quad h_M > 0$$

задано $P = \{p_{j,\kappa}\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $\kappa = 1, 2, \dots$ – послідовність відліків гладкої функції $p(t)$. Під κ будемо розуміти ітераційний крок небінарного масштабування проектування послідовності P . Тоді, якщо $\{p_{i,\kappa-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – початкова послідовність, визначена у вузлах розбиття

$$\Delta_{h_N} : t_i = ih_N, \quad h_N > 0,$$

а $\{p_{j,\kappa}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ – утворена, шляхом «проектування» будь-яких N послідовних точок в M , то маємо визначення для $p_{j,\kappa}$, наведене нижче.

Для довільного індексу i зафіксуємо N вузлів $\{t_{i+u,\kappa-1}\}_{i \in \mathbb{Z}, \substack{u=0, N-1}}$ в

яких визначено значення $\{p_{i+u, \kappa-1}\}_{\substack{i \in \mathbb{Z}, \\ u=0, N-1}}$. Суть проектування N точок

в M полягає в тому, що на кожній ітерації в межах інтервалу

$$\left[-h_N/2 + ih_N, ih_N + (N-1)h_N + h_N/2\right]$$

визначаємо нові вузли з рівномірним кроком $h_M > 0$.

На інтервалі

$$\left[-h_M/2 + jh_M, jh_M + (M-1)h_M + h_M/2\right],$$

де

$$-h_N/2 + ih_N = -h_M/2 + jh_M;$$

$$h_M = \frac{N}{M} h_N.$$

будемо визначати члени послідовності $P = \{p_{j, \kappa}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ на основі лінійних операторів, що базуються на даних попереднього кроку рекурсії:

$$p_{j+l, \kappa} = A_l(p^{\kappa-1, i}), \quad l = 0, M-1,$$

де $A_l(p^{\kappa-1, i})$ неважко отримати як часткові випадки сплайнів на зразок (2), (3).

У загальному випадку для конкретного l знаходимо величини

$$u^* = \frac{N(2l+1)}{2M}, \quad u = [u^*], \quad \text{де } [\cdot] - \text{ціла частина,}$$

$$x_l = 2(u^* - u) - 1$$

та підставляємо в явну формулу для сплайну, визначеного на розбитті Δ_{h_N} . Наприклад з виразу (4) отримуємо:

$$p_{j+l, \kappa} = \frac{1}{48} \left(-(1-x_l)^2 p_{i+u-2, \kappa-1} + (2-16x_l+10x_l^2) p_{i+u-1, \kappa-1} + \right. \\ \left. + (46-18x_l^2) p_{i+u, \kappa-1} + (2+16x_l+10x_l^2) p_{i+u+1, \kappa-1} - (1+x_l)^2 p_{i+u+2, \kappa-1} \right). \quad (6)$$

Для зменшення обчислювальної складності пропонується замість формул на зразок (6) використовувати наперед визначені часткові випадки сплайнів при конкретних значеннях аргументу x . Наприклад, при $x_l = 1/3$ вираз (6) переписеться так:

$$p_{j+l,\kappa} = \frac{1}{108} (-p_{i+u-2,\kappa-1} - 5p_{i+u-1,\kappa-1} + 99p_{i+u,\kappa-1} + 19p_{i+u+1,\kappa-1} - 4p_{i+u+2,\kappa-1})$$

або

$$p_{j+l,\kappa} = \sum_{ii=i+u-2}^{i+u+2} \gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(2,1)}{}_{ii-i+u} \cdot p_{ii,\kappa-1},$$

$$\text{де } \gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(2,1)} = (-1 \quad -5 \quad 99 \quad 19 \quad -4)^T / 108.$$

Загалом, для часткових випадків локальних поліноміальних сплайнів парних ступенів на основі B -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому [4;5], має місце загальна формула для визначення лінійних операторів небінарного *subdivision*:

$$p_{j+l,\kappa} = \sum_{ii=i+u-w}^{i+u+w} \gamma_{(x)}^{(r,v)}{}_{ii-i+u} \cdot p_{ii,\kappa-1}, \quad (7)$$

де $\gamma_{(x)}^{(r,v)}$ – маска оператора дискретної згортки; $2 \cdot w + 1$ – ширина маски;

r – порядок сплайну; v – порядок уточнення сплайну; x – часткове значення аргументу в явному поданні сплайну.

Наприклад, для x , що може набувати значення із множини

$$\left\{ -1, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1 \right\}, \quad (8)$$

мають місце такі маски, отримані з часткових випадків виразу (4):

$$\gamma_{(-1)}^{(2,1)} = (-1 \quad 7 \quad 7 \quad -1 \quad 0)^T / 12;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{4}{5}\right)}^{(2,1)} = (-81 \quad 530 \quad 862 \quad -110 \quad -1)^T / 1200;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{4}\right)}^{(2,1)} = (-49 \quad 314 \quad 574 \quad -70 \quad -1)^T / 768;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{3}\right)}^{(2,1)} = (-25 \quad 154 \quad 342 \quad -38 \quad -1)^T / 432;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{5}\right)}^{(2,1)} = (-16 \quad 95 \quad 247 \quad -25 \quad -1)^T / 300;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{2}\right)}^{(2,1)} = (-9 \quad 50 \quad 166 \quad -14 \quad -1)^T / 192;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{5}\right)}^{(2,1)} = (-49 \quad 250 \quad 1078 \quad -70 \quad -9)^T / 1200;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{3}\right)}^{(2,1)} = (-4 \quad 19 \quad 99 \quad -5 \quad -1)^T / 108;$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}^{(2,1)} &= (-25 \ 106 \ 718 \ -22 \ -9)^T / 768; \\
\gamma_{\left(-\frac{1}{5}\right)}^{(2,1)} &= (-9 \ 35 \ 283 \ -5 \ -4)^T / 300; \\
\gamma_{(0)}^{(2,1)} &= (-1 \ 2 \ 46 \ 2 \ -1)^T / 48; \\
\gamma_{\left(\frac{1}{5}\right)}^{(2,1)} &= (-4 \ -5 \ 283 \ 35 \ -9)^T / 300; \\
\gamma_{\left(\frac{1}{4}\right)}^{(2,1)} &= (-9 \ -22 \ 718 \ 106 \ -25)^T / 768; \\
\gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(2,1)} &= (-1 \ -5 \ 99 \ 19 \ -4)^T / 108; \\
\gamma_{\left(\frac{2}{3}\right)}^{(2,1)} &= (-9 \ -70 \ 1078 \ 250 \ -49)^T / 1200; \\
\gamma_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{(2,1)} &= (-1 \ -14 \ 166 \ 50 \ -9)^T / 192; \\
\gamma_{\left(\frac{3}{5}\right)}^{(2,1)} &= (-1 \ 25 \ 247 \ 95 \ -16)^T / 300; \\
\gamma_{\left(\frac{2}{3}\right)}^{(2,1)} &= (-1 \ -38 \ 342 \ 154 \ -25)^T / 432; \\
\gamma_{\left(\frac{3}{4}\right)}^{(2,1)} &= (-1 \ -70 \ 574 \ 314 \ -49)^T / 768; \\
\gamma_{\left(\frac{4}{5}\right)}^{(2,1)} &= (-1 \ -110 \ 862 \ 530 \ -81)^T / 1200; \\
\gamma_{(1)}^{(2,1)} &= (0 \ -1 \ 7 \ 7 \ -1)^T / 12.
\end{aligned}$$

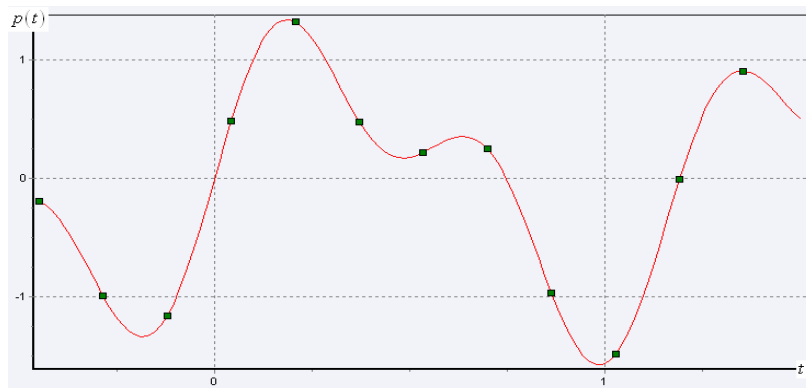
Для сплайну (5), коли x може набувати значення із множини (8), мають місце наступні маски:

$$\begin{aligned}
\gamma_{(-1)}^{(4,0)} &= (1 \ 11 \ 11 \ 1 \ 0)^T / 24; \\
\gamma_{\left(-\frac{4}{5}\right)}^{(4,0)} &= (6561 \ 97516 \ 121286 \ 14636 \ 1)^T / (24 \cdot 10^4); \\
\gamma_{\left(-\frac{3}{4}\right)}^{(4,0)} &= (2401 \ 38620 \ 50726 \ 6556 \ 1)^T / 98304; \\
\gamma_{\left(-\frac{2}{3}\right)}^{(4,0)} &= (625 \ 11516 \ 16566 \ 2396 \ 1)^T / 31104; \\
\gamma_{\left(-\frac{1}{5}\right)}^{(4,0)} &= (256 \ 5281 \ 8171 \ 1291 \ 1)^T / 15000;
\end{aligned}$$

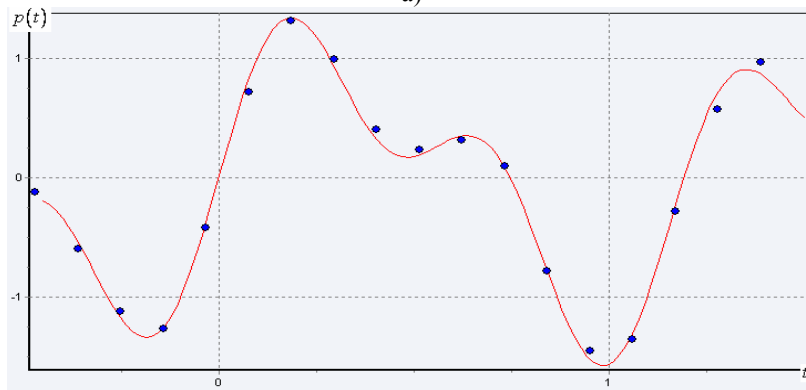
$$\begin{aligned}
\gamma_{(-\frac{1}{2})}^{(4,0)} &= (81 \ 1996 \ 3446 \ 620 \ 1)^T / 6144; \\
\gamma_{(-\frac{2}{3})}^{(4,0)} &= (2401 \ 71516 \ 137846 \ 28156 \ 81)^T / (24 \cdot 10^4); \\
\gamma_{(-\frac{1}{3})}^{(4,0)} &= (16 \ 545 \ 1131 \ 251 \ 1)^T / 1944; \\
\gamma_{(-\frac{1}{4})}^{(4,0)} &= (625 \ 21212 \ 57926 \ 18460 \ 81)^T / 98304; \\
\gamma_{(-\frac{1}{5})}^{(4,0)} &= (81 \ 3691 \ 8891 \ 2321 \ 16)^T / 15000; \\
\gamma_{(0)}^{(4,0)} &= (1 \ 76 \ 230 \ 76 \ 1)^T / 384; \\
\gamma_{(\frac{1}{5})}^{(4,0)} &= (16 \ 2321 \ 8891 \ 2321 \ 81)^T / 15000; \\
\gamma_{(\frac{1}{4})}^{(4,0)} &= (81 \ 18460 \ 57926 \ 21212 \ 625)^T / 98304; \\
\gamma_{(\frac{1}{3})}^{(4,0)} &= (1 \ 251 \ 1131 \ 545 \ 16)^T / 1944; \\
\gamma_{(\frac{2}{3})}^{(4,0)} &= (81 \ 28156 \ 137846 \ 71516 \ 2401)^T / (24 \cdot 10^4); \\
\gamma_{(\frac{1}{2})}^{(4,0)} &= (1 \ 620 \ 3446 \ 1996 \ 81)^T / 6144; \\
\gamma_{(\frac{3}{5})}^{(4,0)} &= (1 \ 1291 \ 8171 \ 5281 \ 256)^T / 15000; \\
\gamma_{(\frac{2}{3})}^{(4,0)} &= (1 \ 2396 \ 16566 \ 11516 \ 625)^T / 31104; \\
\gamma_{(\frac{3}{4})}^{(4,0)} &= (1 \ 6556 \ 50726 \ 38620 \ 2401)^T / 98304; \\
\gamma_{(\frac{4}{5})}^{(4,0)} &= (1 \ 14636 \ 121286 \ 97516 \ 6561)^T / (24 \cdot 10^4); \\
\gamma_{(1)}^{(4,0)} &= (0 \ 1 \ 11 \ 11 \ 1)^T / 24.
\end{aligned}$$

На графіках (рис.1) подано приклад небінарного *subdivision* при проектуванні кожних 2-х послідовних точок в 3-и. В якості лінійних операторів масштабування брались часткові випадки сплайну (4) відповідно в точках $x = -1/3$, $x = -1$, $x = 1/3$, котрим, згідно виразу (7) відповідають маски

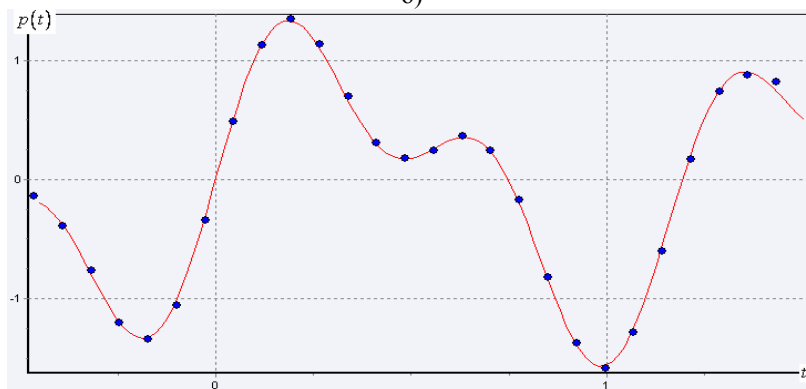
$$\gamma_{(-\frac{1}{3})}^{(2,1)}, \gamma_{(-1)}^{(2,1)}, \gamma_{(\frac{1}{3})}^{(2,1)}.$$



a)



б)



B)

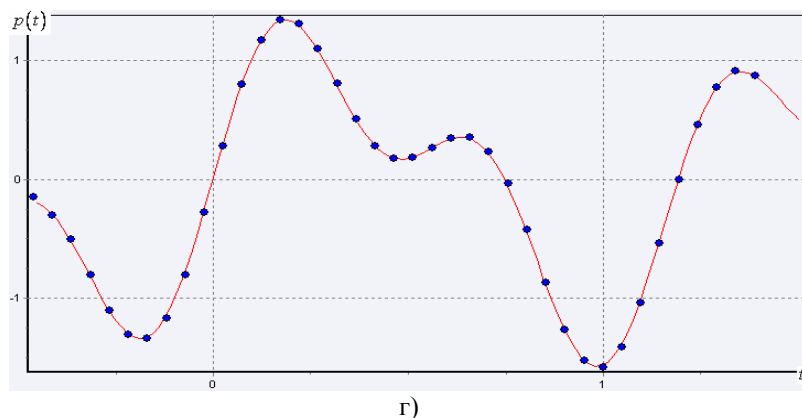


Рис.1. Небінарний *subdivision* «2 в 3» на основі сплайну (4):
 а) функція $p(t) = \sin(5t) + 0,6\sin(11t)$, $t \in [-0,45; 1,52]$ та її
 початкові відліки; б) *subdivision* при $\kappa = 1$; в) *subdivision* при $\kappa = 2$; г)
subdivision при $\kappa = 3$

Висновки. В роботі запропоновано загальну постановку задачі на проведення небінарного *subdivision* на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. Викладено загальний спосіб визначення місцезнаходження відліків для проектування числових послідовностей. Наведено часткові випадки сплайн-операторів у вигляді дискретної згортки послідовності відліків та відповідних масок.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на оцінку якості наближення функцій спостережень, при умові, коли данні задано з різними типами завад. Вартим уваги може бути питання узагальнення поданих процедур не бінарного *subdivision* на випадок багатовимірних послідовностей.

Література

1. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 303 с.
2. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
3. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
4. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых. – К.: ІМ НАН України, 1996. – 358 с.
5. Приставка П.О. Поліномаїльні сплайни при обробці даних – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.

6. Приставка П.О. Лінійні комбінації B -сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : Зб. наук. праць. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2011. – Т.15. –С.4–17.
7. Приставка П.О., Чолишкіна О.Г. Дослідження B -сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації / Математичне моделювання. – ДДТУ, Дніпродзержинськ. – 2007. – №1(16). – С.14–17.
8. Andersson L.-E., Stewart N. Introduction to the mathematics of subdivision surfaces. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. – 356 p.
9. Лигун А.А., Шумейко А.А. Исследования линейных операторов порожденных методами пополнения данных // Математичне моделювання, Дніпродзержинськ, ДДТУ, 2 (5), 2000, с.11–19.
10. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2003. –Т.7. –С.39–53.
11. Приставка П.О. Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій лінійними операторами на основі поліноміальних сплайнів / Вісн. НАУ. – К.: НАУ. – 2008. –№3. –С. 85–89.
12. Приставка П.О. Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій двох змінних лінійними операторами / Вісн. НАУ. – К.: НАУ. – 2009.-№2. –С. 173– 177.