УДК 532.542:004.942(043.5)

Моделювання ламінарного потоку в трубі з проникним шаром перешкод в околі осі

О. М. Бердник[1], Є. О. Гаєв[2]
[1]*Національний авіаційний університет, м. Київ, Україна*
[2]*Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ, Україна*

В статті розглядається математична модель ламінарного потоку в'язкої нестисливої рідини в круглій трубі з проникним шаром перешкод в околі осі, який названо легкопроникною шорсткістю (ЛППШ). Знайдено аналітичний розв'язок для швидкості та тертя. Досліджено вплив параметрів ЛППШ на характеристики потоку. Запропоновано методику розрахунку гідравлічного опору такої труби.

Ключові слова: *ламінарний потік, рідина, труба, перешкоди, шорсткість, аналітичний розв'язок, гідравлічний опір.*

В статье рассматривается математическая модель ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе, имеющей проницаемый слой препятствий в окрестности оси, который назван легкопроницаемой шероховатостью (ЛППШ). Определено аналитическое решение для скорости и трения. Проведено исследование влияния параметров ЛППШ на характеристики потока. Предложена методика расчета гидравлического сопротивления такой трубы.

Ключевые слова: *ламинарное течение, жидкость, труба, препятствия, шероховатость, аналитическое гидравлическое сопротивление.*

In the paper we consider is the task about laminar flow of incondensable liquid in round pipe with permeable layer of obstacles in vicinities of the axis, known as easily penetrable rougness (EPR). It is found the analytical solution for velocity and friction. Was explored influence parameters of EPR into features of the stream.There is offered methodology of the calculation of the hydraulic resistance of such pipe.

Key words: *the laminar current, liquid, pipe, obstacle, roughness, analytical solution, hydraulic resistance.*

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

Робочим елементом багатьох машин і апаратів є рідина, рух якої здійснюється по трубам та каналам. Зокрема, гідравлічний розрахунок характеру цього руху визначає вибір раціонального режиму роботи авіаційних та ракетних теплообмінних пристроїв, конструкцію даного типу устаткування. Саме пошуком нових технічних рішень для теплообмінної апаратури зумовлена актуальність вивчення складних гідромеханічних процесів, що відбуваються в трубі з ЛППШ.

2. Аналіз останніх досліджень, виділення невирішених проблем

Дана робота продовжує розвиток концепції легкопроникної шорсткості (ЛППШ) [1,2] для внутрішніх потоків. Принципова відмінність дослідження від відомих публікацій [3–10] полягає у тому, що розглядається шар перешкод в околі осі труби. Вивчення залежності фундаментальних властивостей течій в таких умовах від параметрів ЛППШ є важливим як в прикладному аспекті, так і в науковому.

3. Мета роботи

Мета статті – побудува фізико-математичної моделі для стабілізованого ламінарного потоку в'язкої нестисливої рідини в трубі з проникним шаром перешкод (ЛППШ) в околі осі та розробка методики розрахунку гідравлічного опору такого каналу.

4. Вихідні положення

Нехай однорідний ламінарний потік в'зкої нестисливої рідини, фізичні властивості якого не залежать від температури (густина $° = const$, коефіцієнт динамічної в'язкості $« = const$), направлений вздовж труби радіуса R з шаром перешкод, що утворює деякий уявний циліндр радіуса h, вісь якого співпадає з віссю каналу (рис. 1). Обмежимось випадком повністю стабілізованої течії ($p' = \Delta p / l = const$). Елементами ЛППШ є малі нерухомі сфери, рівномірно розподілені в об'ємі уявного циліндра, тобто концентрація перешкод в одиниці об'єму є сталою $n = const$, $м^{-3}$. Побудуємо фізико-математичну модель ламінарного потоку в трубі з однорідною ЛППШ в околі осі.

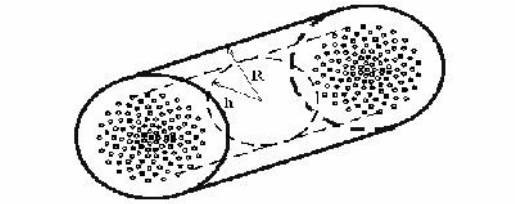

Рис. 1. Схема труби з ЛППШ в околі осі

5. Математична постановка задачі

Як відомо [11], якщо стінки труби є гладкими, то для опису ізотермічного потоку в'язкої нестисливої рідини використовується рівняння:

$$« \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr} \right) = p', \quad p' < 0 \tag{5.1}$$

з межовими умовами:

$$U(R) = 0 \; ; \quad \left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=0} = 0. \tag{5.2}$$

Очевидно, що у середині труби ($0 \le r < h$) рідина гальмується елементами ЛППШ – назвемо цю частину потоку «областю ЛППШ», а зовні ($0 \le r < h$), поблизу стінок тече вільно, відповідно «область без ЛППШ». Враховуючи припущення про однорідність легкопроникної шорсткості, можна говорити і про рівномірний розподіл локальних сил опору [1–10], які діють з боку кожної перешкоди. Щоб врахувати особливість потоку, сформованого ЛППШ, введемо в рівняння (5.1)

розподілену в об'ємі силу f^* ($Н/м^3$), що є функцією розривного характеру:

$$f^*(r)=\begin{cases} -k\cdot nU & r\in[0;h] \\ 0, & r\in(h;R], \end{cases} \tag{5.3}$$

де k – емпіричний коефіцієнт ($м^3/с$). Тоді у правій частині рівняння (5.1) з'явиться ще один доданок:

$$\mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)=p'+\begin{cases} k\cdot nU(r), & 0\le r\le h; \\ 0, & h<r\le R. \end{cases} \tag{5.4}$$

Очевидно, що будуть виконуватися межові умови (5.2) та умови спряження на рівні ЛПШ при $r=h$:

$$U_h=U(R-h-0)=U(R-h+0)\,,\ \tau_h=\tau(R-h-0)=\tau(R-h+0)\,. \tag{5.5}$$

З метою зменшення параметрів задачі (5.4) введемо нові безрозмірні змінні (позначаючи їх рискою зверху):

$$\bar r=\frac{r}{R},\quad \overline{U}=\frac{U}{W},\quad \bar\tau=\frac{\tau}{\tau_w}, \tag{5.6}$$

де $W\overset{Df}{=}U(0)=-\frac{1}{4\mu}p'R^2$ – швидкість на осі; $\tau_w=\tau(R)=-\frac{1}{2}p'R$ – тертя на стінці (wall) гладкої труби [11]. Тоді вихідна задача (5.4) набуває вигляду:

$$\frac{1}{\bar r}\frac{d}{d\bar r}\left(\bar r\frac{d\overline{U}}{d\bar r}\right)=-4+\begin{cases} A\overline{U}, & \bar r\in[0,\bar h]; \\ 0, & \bar r\in(\bar h,1]; \end{cases} \tag{5.7}$$

де параметр $A=knR^2/\mu$ – безрозмірна щільність ЛПШ. При цьому межові умови (5.2)та умови спряження (5.5) відповідно будуть:

$$\overline{U}(1)=0\,;\qquad d\overline{U}(0)/d\bar r=0\,, \tag{5.8}$$

$$\overline{U}_{\bar h}=\overline{U}(\bar h-0)=\overline{U}(\bar h+0)\,,\ \bar\tau_h=\bar\tau(\bar h-0)=\bar\tau(\bar h+0)\,. \tag{5.9}$$

Невідомі поки що значення «швидкості ковзання» $\overline{U}_h$, та тертя $\bar\tau_h$ відповідають рівню ЛПШ, коли $\bar r=\bar h$. Причому враховуючи фізичний бік процесу безрозмірне тертя визначатиметься за формулою:

$$\bar\tau(\bar r)=\frac{1}{2}\frac{d\overline{U}}{d\bar r}. \tag{5.10}$$

Надалі риску як ознаку безрозмірності опускатимемо.

5. Розрахунок безрозмірних профілів швидкості та тертя

Розв'язок задачі (5.7)–(5.8) будемо шукати в кожній з двох частин потоку окремо, а потім об'єднаємо в єдиний профіль на основі умов спряження (5.9).

Область без ЛПШ: $r\in(h;1]$. Тут рівняння (5.7) має вигляд:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)=-4\,, \tag{5.11}$$

а межовими будуть умови:

$$U(1)=0\,,\;\; U(h)=U_h\,.$$

Проінтегрувавши двічі (5.11), отримаємо вираз:

$$U(r)=-r^2+\frac{U_h+h^2-1}{\ln h}\ln|r|+1\,. \tag{5.12}$$

Знайдений профіль можна було б побудувати, якби значення U_h було відоме Для цього знайдемо:

$$\frac{dU}{dr}=-2r+\frac{U_h+h^2-1}{r\ln h}\,, \tag{5.13}$$

звідки

$$\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=h}=-2h+\frac{U_h+h^2-1}{h\ln h}\,. \tag{5.14}$$

Розглянемо тепер *область ЛПШ*: $r\in[0;h]$. Тут для опису потоку рідини потрібно рівняння (5.7) розглянути в такому вигляді:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)=-4r+ArU\,. \tag{5.15}$$

Очевидно, що для даного випадку граничними умовами будуть: умова симетрії із (5.8) та рівність (5.14), яка згідно (5.9) відповідає умові спряження тертя на рівні ЛПШ.

Аналітичний розв’язок поставленої задачі містить функції Бесселя першого роду та безрозмірні параметри ЛПШ – щільність A та висоту h:

$$U(r)=\left(U_h-\frac{4}{A}\right)\frac{J_0(\sqrt{-A}\cdot r)}{J_0\sqrt{-A}\cdot h}+\frac{4}{A}\,. \tag{5.16}$$

Тоді

$$\frac{dU}{dr}=-\sqrt{-A}\left(U_h-\frac{4}{A}\right)\frac{J_1(\sqrt{-A}\cdot r)}{J_0\sqrt{-A}\cdot h}\,. \tag{5.17}$$

Прирівнявши вирази (5.13) і (5.17) згідно (5.9), можна визначити «швидкість ковзання» U_h та побудувати єдиний розподіл швидкості та тертя для труби з ЛПШ в околі осі, як продемонстровано на рис. 2 (варіюються параметри ЛПШ).

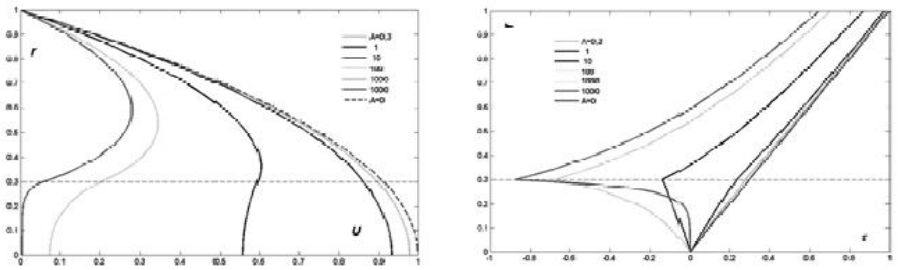

Рис. 2. Розподіли безрозмірних швидкості та тертя в трубі з ЛПШ в околі осі

6. Методика розрахунку ггідравлічного опору труби з ЛППШ в околі осі

З'ясуємо, як присутність ЛППШ в потоці впливає на гідравлічний опір труби, характерним параметром якого є коефіцієнт гідравлічного опору λ. Зокрема, згідно визначення коефіцієнту гідравлічного опору [11] та з урахуванням вибраного масштабу швидкості випливає:

$$\lambda = -\frac{8p'R^2}{\rho U_{cep}} \cdot \frac{1}{\mathrm{Re}} = -\frac{8p'R^2}{\rho W \overline{U}_{cep}} \cdot \frac{1}{\mathrm{Re}} = \frac{32}{\overline{U}_{cep}} \cdot \frac{1}{\mathrm{Re}}, \qquad (5.18)$$

де безрозмірна середня швидкість обчислюється як

$$\overline{U}_{cep} \overset{Df}{=} \frac{U_{cep}}{W} = 2\int_0^1 \bar{r}\,\overline{U}\left(\bar{r}\right) d\bar{r}, \qquad (5.19)$$

Перший множник у (5.18) для випадку труби без ЛППШ дорівнює 64, бо $\overline{U}_{cep} = 1/2$. При наявності ж ЛППШ $\overline{U}_{cep}$ має зовсім інше значення, бо ще залежить від A та h, і обчислюється чисельним інтегруванням знайдених профілів швидкості за формулою (5.19). Графічні результати обчислень добутку коефіцієнта гідравлічного опору на число Рейнольдса $\lambda\,\mathrm{Re}$ при різних характерних параметрах ЛППШ наведено на рис. 3 ($h = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4$).

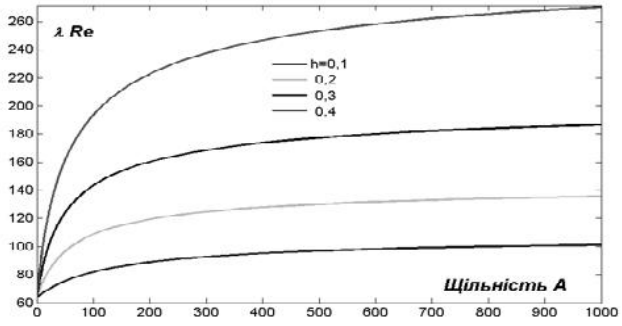

Рис. 3. Залежність опору труби з ЛППШ на осі від її параметрів:
h – висоти ЛППШ; A – щільності

Спостерігаємо наступну поведінку коефіцієнту гідравлічного опору λ: якщо $A \to 0$, то добуток $\lambda\,\mathrm{Re}$ наближається до відомого значення 64 для гладкої труби за умов ламінарного потоку; зростання ж щільності A, природно, призводить до зростання гідравлічного опору. При цьому пояснимо термін «щільність ЛППШ наближається до нуля» – фактично, випадок відсутності ЛППШ. Справа у тому, що знайдені розподіли швидкості та тертя сингулярні при $A = 0$. Тому ми шляхом чисельного експерименту для $A = 0{,}5$; $A = 0{,}1$; $A = 0{,}01$ і т.д. у напрямку $A \to 0$ перевірили коректну граничну поведінку для всіх кривих. Така картина надає впевненості у достовірності отриманих результатів.

7. Висновки

Таким чином, побудовано фізико-математичну модель для стабілізованого ламінарного потоку в'язкої нестисливої рідини в трубі з ЛПШ в околі осі, знайдено аналітичниі розв'язки для безрозмірних швидкості та тертя, запропоновано методику розрахунку гідравлічного опору такого каналу.

Проте проблема вивчення течій, що сформовані ЛПШ в околі осі, далеко не вичерпується даною статтею. Зокрема, подальший розвиток роботи може відбуватися у напрямку теплового розрахунку турбулентних потоків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гаев Е.А., Никитин И.К. Гидродинамика потока при наличиии легкопроницаемой шероховатости. Ламінарній режим. // Гидромеханика – 1982. Вып.45. – С.65-73.
2. Гаєв Є.О. Моделі легкопроникної шорсткості для задач гідромеханіки і теплофізики: дис. д-ра техн. наук: 01.02.05 – К.: ІГМ НАН України, 2000. – 345 с.
3. Гаєв Є.О., Бердник О.М. Одновимірна ламінарна течія через круглу трубу з легкопроникною шорсткістю // Промислова гідравліка і пневматика – 2008. – №4(22) – С.34-38.
4. Бердник О.М. Моделювання стабілізованого потоку рідини в трубах різного перерізу з шаром перешкод на стінках // Матеріали XVI Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (8-9 жовтня 2009р., м.Львів) – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім.І.Франка, 2009. – С.23.
5. Бердник О.М. Про математичні аспекти дослідження потоку в'язкої рідини в каналі з перешкодами // Матеріали Тринадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка М.Кравчука (13–15 травня 2010р., м.Київ) – Київ, НТУУ "КПІ" 2010. – Т2. – С. 54.
6. Бердник О.М., Гаєв Є.О. Стабілізований потік в'язкої рідини через трубу прямокутного перерізу з легкопроникною шорсткістю на стінках // Наукові вісті. – 2010. – № 2 (70). – С. 83–88.
7. Бердник О.М. Моделювання ламінарного потоку в еліптичному каналі з легкопроникною шорсткістю // Вісник Харківського нац.ун-ту ім. В.Н. Каразіна. – 2010. – № 926. – С. 31–38.
8. Гаєв Є.О., Бердник О.М. Потік в'язкої рідини через труби некругових перерізів з легкопроникною шорсткістю на стінках // Промислова гідравліка і пневматика. – 2010. – №4 (30) – С. 15 – 18.
9. Гаев Е.А., Бердник О.М. Моделирование стабилизированного потока вязкой жидкости в некруглых каналах с легкопроницаемой шероховатостью // Прикладна гідромеханіка – 2011. – Т. 13, №2. – С. 3–16.
10. Бердник О.М. Про вплив неоднорідного шару перешкод на стабілізований потік рідини в круглій трубі // Матеріали X міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2011» – К.: НАУ, 2011. – Т.1. – С. 6.72–6.75.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. − М.: Наука, 1987. − 840 с.

Надійшла у першій редакції 08.10.2011, в останній – 12.03.2012.