УДК 517.5:519.6

М.Н. МОСКАЛЬКОВ, Д. УТЕБАЕВ

О СХОДИМОСТИ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Ключевые слова: *метод конечных элементов, разностная схема, оценки точности.*

При изучении движения внутренних волн, распространяющихся в стратифицированной жидкости, которая находится в состоянии покоя или равномерного вращения, в качестве математической модели принимаются уравнения в частных производных, содержащие дополнительные члены, которые приводят к сильной дисперсии этих волн. Такие уравнения применяются в геофизике, океанологии, физике атмосферы [1].

В настоящей статье рассмотрена первая краевая задача для нестационарного трехмерного уравнения внутренних волн и получены оценки точности метода конечных элементов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(L_1 u)+L_2 u=f(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T=\{x\in\Omega,\ t\in(0,T]\},$$

$$u=0,\ \ x\in\Gamma=\partial\Omega,\ \ t\in[0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x).$$

Здесь $L_1 u=\Delta_3 u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$, $L_2 u=\omega_0^2\Delta_2 u\equiv\omega_0^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$; ω_0 — частота Вяйсяля–Брента; $\Omega=\{0<x_k<l_k,\ k=1,2,3\}$.

Сформулируем обобщенную постановку задачи (1). Назовем обобщенным решением задачи (1) функцию $u(x,t)$, которая при каждом $t\in(0,T]$ принадлежит пространству $H=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, обладает производной $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\in W_2^1(\Omega)$ и почти всюду для всех $t\in(0,T]$ удовлетворяет соотношениям $\forall\vartheta(x)\in H$:

$$a_1\left(\frac{d^2u(t)}{dt^2},\vartheta\right)+a_2(u(t),\vartheta)=(f(t),\vartheta),\ \ u(0)=u_0\in H,\ \ \frac{du}{dt}(0)=u_1\in H. \tag{2}$$

Здесь

$$a_1(w(t),\vartheta)=\int_\Omega\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial w}{\partial x_k}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}dx;\ \ a_2(u(t),\vartheta)=\omega_0^2\int_\Omega\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}dx;$$

$u(t)$ — функция абстрактного аргумента $t\in[0,T]$ со значениями в $H=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Вопросы существования, гладкости и единственности решения этой задачи обсуждаются в [1].

Обозначим $|u|_m = \sqrt{a_m(u,u)}$, $m=1,2$, энергетические полунормы в H, соответствующие билинейным формам $a_m(u,\vartheta)$. Энергетическое пространство H_{A_1}, порожденное полунормой $|u|_1$, эквивалентно пространству $H = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ [2], поэтому справедливы оценки $c_1\|u\|_1 \le |u|_1 \le c_2\|u\|_1$, $c_1>0$, где $\|u\|_1$ — норма в H. Для другой энергетической полунормы справедлива оценка $0 \le |u|_2 \le \omega_0 c_2 \|u\|_1$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПО ПРОСТРАНСТВУ

Дискретизируем задачу по пространственным переменным с помощью метода конечных элементов. Пусть $H_h \subset H$ — множество элементов вида $\vartheta_h = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x)$. Здесь $\{\varphi_i = \varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ — базис из кусочно-полиномиальных функций, являющихся многочленом степени k на каждом конечном элементе.

Поставим в соответствие (2) полудискретную задачу для $t\in[0,T]$:

$$a_1\left(\frac{d^2u_h(t)}{dt^2}, \vartheta_h\right) + a_2(u_h,\vartheta_h) = (f(t),\vartheta_h) \quad \forall \vartheta_h \in H_h,$$
$$u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}. \tag{3}$$

Здесь $u_{0,h} = u_I(0) = P_h u_0(x)$ — интерполянт начального значения решения, где P_h — оператор проектирования $P_h : H \to H_h$.

Задаче (3) соответствует задача Коши

$$D\frac{d^2u_h(t)}{dt^2} + Au_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}. \tag{4}$$

Здесь операторы D, A действуют из H_h в H_h. Им соответствуют матрицы жесткости $\mathbf{D} = (a_1(\varphi_i,\varphi_j))_{i,j=1}^N$ и $\mathbf{A} = (a_2(\varphi_i,\varphi_j))_{i,j=1}^N$.

Теорема 1. Пусть $u(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in C([0,T]; W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$. Если сужение пространства H_h на отдельный конечный элемент является многочленом степени k, то для решения задачи (4) имеет место оценка точности

$$\|u(x,t) - u_h(x,t)\|_1 \le$$
$$\le Mh^k\left(\max_t \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\|_{k+1} + \sqrt{\int_0^t \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t')\right\|_{k+1}^2 dt'} + \sqrt{\int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2\, dt'}\right)$$
$$\forall t \in [0,T], \quad M = M(T, \omega_0^2, c_2) > 0.$$

Доказательство. Проинтегрируем тождества (2) и (3) по $t\in(t_n, t_{n+1})$. Применяя к ним формулу интегрирования по частям и вычитая из первого тождества второе, получаем

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} [-a_1(\dot u - \dot u_h, \dot\vartheta_h) + a_2(u-u_h,\vartheta_h)]dt +$$
$$+ a_1(\dot u - \dot u_h, \vartheta_h)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}} = 0 \quad \forall \vartheta_h(x) \in H_h. \tag{5}$$

Здесь $\dot{u} = \partial u / \partial t$. Обозначим $z_h = u - u_h$, $e_h = u - u_I$, $\xi_h = u_I - u_h$, где $u_I = P_h u(x, t)$. Следовательно, $z_h = e_h + \xi_h$. Выберем

$$\vartheta_h(t) = -\int_t^s \xi_h(t')\,dt' \in H_h,\ t < s;\ \vartheta_h(t) = 0,\ t \ge s,\ \dot{\vartheta}_h(t) = \xi_h(t),\ \vartheta_h(s) = 0.$$

Из (5) с учетом тождества $(\dot{\xi}_h, \xi_h) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(\xi_h, \xi_h)$ и $a_k(\dot{\vartheta}_h, \vartheta_h) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt} a_k(\vartheta_h, \vartheta_h)$, $k = 1, 2$, получим

$$-\frac{1}{2} a_1(\xi_h, \xi_h)(t_{n+1}) + \frac{1}{2} a_2(\vartheta_h, \vartheta_h)(t_{n+1}) + a_1(\dot{\xi}_h, \vartheta_h)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}} =$$
$$= -a_1(\dot{e}_h, \vartheta_h)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}} - \frac{1}{2} a_1(\xi_h, \xi_h)(t_n) +$$
$$+ \frac{1}{2} a_2(\vartheta_h, \vartheta_h)(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [a_1(\dot{e}_h, \xi_h) - a_2(e_h, \vartheta_h)]\,dt.$$

Просуммируем это тождество по $n = \overline{1, m-1}$, где номер m соответствует моменту времени $s = m\tau$. Тогда с учетом свойства функции $\vartheta_h(t)$, начального условия $\xi_h(0) = 0$ при выборе $w_h(t) = \int_0^t \xi_h(t')dt' \in H_h$, $t < s$; $w_h(t) = 0$, $t \ge s$, получим следующее энергетическое тождество:

$$\frac{1}{2} a_1(\xi_h, \xi_h)(s) + \frac{1}{2} a_2(w_h, w_h)(s) =$$
$$= -a_1(\dot{e}_h(0), w_h(s)) - \int_0^s [a_1(\dot{e}_h, \xi_h) - a_2(e_h, w_h(t) - w_h(s))]\,dt. \tag{6}$$

Оценим слагаемые в правой части с помощью неравенства Коши–Буняковского и ε-неравенства:

$$-a_1(\dot{e}_h(0), w_h(s)) \le |\dot{e}_h(0)|_1 |w_h(s)|_1 \le \frac{\varepsilon_1}{2} |w_h(s)|_1^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} |\dot{e}_h(0)|_1^2,$$
$$-\int_0^s a_1(\dot{e}_h, \xi_h)(t)\,dt \le \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^s |\xi_h(t)|_1^2\,dt + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_0^s |\dot{e}_h(t)|_1^2\,dt,$$
$$\int_0^s a_2(e_h, w_h)(t)\,dt \le \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^s |w_h(t)|_2^2\,dt + \frac{1}{2\varepsilon_3} \int_0^s |e_h(t)|_2^2\,dt,$$
$$-\int_0^s a_2(e_h(t), w_h(s))\,dt \le \frac{\varepsilon_4 s}{2} |w_h(s)|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4} \int_0^s |e_h(t)|_2^2\,dt.$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ — произвольные положительные постоянные. Так как $|w_h(t)|_1^2 = \int_\Omega \sum_{k=1}^3 \left[\int_0^s \dfrac{\partial \xi_h}{\partial x_k}(x, t')\,dt'\right]^2 dx \le 3s \operatorname{mes}\Omega \int_0^s |\xi_h(t')|_1^2\,dt'$, то из (6) для $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 0.5$, $\varepsilon_4 = \dfrac{1}{2T}$ получим оценку

$$|\xi_h(s)|_1^2 + \frac{1}{2}|w_h(s)|_1^2 \le (1 + 3T \operatorname{mes}\Omega) \int_0^s |\xi_h(t)|_1^2\,dt + \frac{1}{2}\int_0^s |w_h(t)|_2^2\,dt +$$
$$+ |\dot{e}_h(0)|_1^2 + \int_0^s |\dot{e}_h(t)|_1^2\,dt + (2 + 2T)\int_0^s |e_h(t)|_2^2\,dt. \tag{7}$$

Введем функции $g(t)=|\xi_h(t)|_1^2+\frac{1}{2}|w_h(t)|_1^2$, $b(t)\le|\dot{e}_h(t)|_1^2+2(1+T)|e_h(t)|_2^2$. Из (7) получим оценки

$$\frac{dg}{ds}\le Ag(s)+b(s),\ g(0)\le|\dot{e}_h(0)|_1^2,$$

где $A=1+3T\,\mathrm{mes}\,\Omega$. Первая оценка получается дифференцированием (7) по s. Тогда на основании леммы Гронуола [3] имеем оценку

$$g(t)\le\exp(At)g(0)+\int_0^t\exp(A(t-s))b(s)ds$$

или

$$|\xi_h(t)|_1^2+\frac{1}{2}|w_h(t)|_2^2\le M\left[|\dot{e}_h(0)|_1^2+\int_0^t(|\dot{e}_h(s)|_1^2+|e_h(s)|_2^2)ds\right].$$

Здесь $M=2(1+T)e^{AT}$. Учитывая свойства энергетических полунорм $|\xi_h(t)|_1$, $|w_h(t)|_2$ (см. разд. 1), получаем оценку

$$||\xi_h(s)||_1^2\le M\left(||\dot{e}_h(0)||_1^2+\int_0^s||\dot{e}_h(t)||_1^2\,dt+\int_0^s||e_h(t)||_1^2\,dt\right). \tag{8}$$

Для $u(x,t),\ \dot{u}(x,t)\in W_2^{k+1}(\Omega)$ $\forall t\in[0,T]$ имеют место оценки [2, 4]: $||e_h(t)||_1\le$ $\le Mh^k||u(t)||_{k+1}$, $||\dot{e}_h(t)||_1\le Mh^k||\dot{u}(t)||_{k+1}$, где $||u||_{k+1}$ — норма пространства $W_2^{k+1}(\Omega)$. Следовательно, на основании (8) и неравенства $||z_h||_1\le||e_h||_1+||\xi_h||_1$ имеет место утверждение теоремы.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ПО ВРЕМЕНИ

Аппроксимируем задачу (4) разностной схемой, которая получена методом конечных элементов по времени с использованием эрмитового полинома третьей степени на интервале $t\in(t_n,t_{n+1})$ (см. [5, 6]):

$$(D-\gamma\tau^2A)\frac{\hat{\dot{y}}-\dot{y}}{\tau}+A\frac{\hat{y}+y}{2}=\varphi_1,\ (D-\alpha\tau^2A)\frac{\hat{y}-y}{\tau}-(D-\beta\tau^2A)\frac{\hat{\dot{y}}+\dot{y}}{2}=\varphi_2, \tag{9}$$

$$y^0=u_0,\ \dot{y}^0=u_1.$$

Здесь

$$y=y^n=y(t_n),\ \hat{y}=y^{n+1},\ \dot{y}^n=\frac{dy}{dt}(t_n),\ \varphi_k=\int_0^1 f(t_n+\tau\xi)\vartheta_k(\xi)d\xi,\ k=1,2,$$

$$\xi=\frac{t-t_n}{\tau},\ \vartheta_1(\xi)=p_1\vartheta_1^{(1)}(\xi)+p_2\vartheta_1^{(2)}(\xi),\ \vartheta_2(\xi)=s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi)+s_2\vartheta_2^{(2)}(\xi),$$

$$\vartheta_1^{(1)}(\xi)=1,\ \vartheta_1^{(2)}(\xi)=\xi^2-\xi,\ \vartheta_2^{(1)}(\xi)=\tau\left(\xi-\frac{1}{2}\right),\ \vartheta_2^{(2)}(\xi)=\tau\left(\xi^3-\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\xi\right),$$

$$p_1=6-60\gamma,\ p_2=30-360\gamma,\ s_1=180\beta-40\alpha,\ s_2=1680\beta-280\alpha.$$

Тогда

$$y(t)=y^n\varphi_{00}^n(t)+\dot{y}^n\varphi_{10}^n(t)+y^{n+1}\varphi_{01}^n(t)+\dot{y}^{n+1}\varphi_{11}^n(t), \tag{10}$$

где

$$\varphi_{00}^n(t)=2\xi^3-3\xi^2+1,\ \varphi_{01}^n(t)=3\xi^2-2\xi^3,$$

$$\varphi_{10}^n(t)=\tau(\xi^3-2\xi^2+\xi),\ \varphi_{11}^n(t)=\tau(\xi^3-\xi^2).$$

Для равенства

$$\alpha+\gamma=\beta+1/6 \tag{11}$$

схема (9) аппроксимирует задачу (3) с четвертым порядком по шагу τ. Примером параметров, удовлетворяющих условию (11), могут служить такие значения: $\alpha=1/8$, $\beta=1/24$, $\gamma=1/12$.

Теорема 2. Пусть $D^*=D>0$, $A^*=A>0$. Кроме того, пусть выполнены условия аппроксимации (11) и устойчивости

$$D-m\tau^2 A\geq \varepsilon D,\ 0<\varepsilon<1,\ m=\max\{\alpha,\beta,\gamma,0\}. \tag{12}$$

Тогда для решения схемы (9), аппроксимирующего решение задачи (4), такого, что $\dfrac{d^4u_h}{dt^4}(t)\in C[0,T]$, справедлива оценка точности

$$\|u_h(t)-y(t)\|_1\leq M\tau^3\sqrt{\int_0^t\left\|\frac{d^4u_h}{dt^4}(t')\right\|_1^2dt'}.$$

Доказательство. В работе [5] доказана равномерная устойчивость схемы (9) по начальным данным u_0, u_1 при выполнении условия (12) и получена оценка по правым частям φ_1 и φ_2. В настоящей статье получим оценку точности другим способом.

Пусть $y(t)\in H_\tau$, где H_τ — пространство функций аргумента t, являющихся кубическим многочленом (10) на интервале $t\in(t_n,t_{n+1})$ и эрмитовым сплайном для $t\in[0,T]$. Одновременно $y(t)$ для каждого $t\in(t_n,t_{n+1})$ является элементом пространства H_h. Фактически $y=y(x,t)\in H_h^\tau=H_h\otimes H_\tau$.

Как и при доказательстве теоремы 1, для $y(t)$ имеем

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}[-a_1(\dot y(t),\dot\vartheta_\tau)+a_2(y(t),\vartheta_\tau)]dt+a_1(\dot y(t),\vartheta_\tau)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}}=$$

$$=\int_{t_n}^{t_{n+1}}(f(t),\vartheta_\tau)dt\quad \forall\vartheta_\tau(x)\in H_h^\tau.$$

Вычитая из (2) при $\vartheta=\vartheta_\tau$ последнее тождество, для погрешности $\zeta_\tau(t)=u_h(t)-y(t)$ получаем тождество

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}[-a_1(\dot\zeta_\tau(t),\dot\vartheta_\tau)+a_2(\zeta_\tau(t),\vartheta_\tau)]dt+a_1(\dot\zeta_\tau(t),\vartheta_\tau)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}}=0\quad\forall\vartheta_\tau(x,t)\in H_h^\tau. \tag{13}$$

Поскольку $\zeta_\tau(t)=\xi_\tau(t)+e_\tau(t)$, из (10) для $\vartheta_\tau(t)=-\int_t^s\xi_\tau(t)dt'$, $t<s$, и $\vartheta_\tau(t)=0$, $t\geq s$, получим энергетическое тождество

$$\frac12 a_1(\xi_\tau,\xi_\tau)(s)+\frac12 a_2(\vartheta_\tau,\vartheta_\tau)(0)=a_1(\dot e_\tau,\vartheta_\tau)(0)+\int_0^s[a_1(\dot e_\tau,\xi_\tau)-a_2(e_\tau,\vartheta_\tau)]dt.$$

Обозначим $w_\tau(t)=\int_0^t\xi_\tau(t')dt'\in H_h$, $t<s$, $w_\tau(t)=0$, $t\geq s$, и заметим, что $\dot e_\tau(0)=\dot u_h(0)-\dot u_I^\tau(0)=u_{1,h}-u_{1,h}=0$. Тогда из последнего тождества получим основное энергетическое тождество для погрешности $\xi_\tau(t)$

$$\frac12 a_1(\xi_\tau,\xi_\tau)(s)+\frac12 a_2(w_\tau,w_\tau)(s)=\int_0^s[a_1(\dot e_\tau,\xi_\tau)-a_2(e_\tau,w_\tau(t)-w_\tau(s))]dt. \tag{14}$$

Как и в разд. 2 (см. (8)), получим оценку

$$\| \xi_\tau (s) \|_1^2 \le M \left(\int_0^s \| \dot{e}_\tau (t) \|_1^2 \, dt + \int_0^s \| e_\tau (t) \|_1^2 \, dt \right). \qquad (15)$$

Рассмотрим погрешность $e_\tau (u_h) = u_h - u_I^\tau$. Введем замену переменной $t = t_n + \eta\tau$, $0 < \eta < 1$. Тогда

$$\widetilde{e}_\tau (\widetilde{u}_h (\eta)) = e_\tau (u_h) = u_h (t_n + \eta\tau) - u_I^\tau (t_n + \eta\tau) = \widetilde{u}_h (\eta) - \widetilde{u}_I^\tau (\eta).$$

Этот функционал ограничен для непрерывных функций $\widetilde{u}_h (\eta) \in C[0,1]$, тем более он ограничен и для $\widetilde{u}_h (\eta) \in W_2^4 [0,1]$. Значит,

$$| \widetilde{e}_\tau (\widetilde{u}_h) | = | \widetilde{u}_h (\eta) - \widetilde{u}_I^\tau (\eta) | \le M \sum_{m=0}^{4} \left(\int_0^1 \left(\frac{d^m \widetilde{u}_h}{d\eta^m} \right)^2 d\eta \right)^{1/2}.$$

Этот функционал обращается в нуль на многочленах до третьей степени включительно по переменной η, так как на отрезке $[0,1]$ $\widetilde{u}_I^\tau$ является многочленом третьей степени, который интерполирует $\widetilde{u}_h$. На основании леммы Брэмбла–Гильберта [7] из последней оценки можно получить

$$| \widetilde{e}_\tau (\widetilde{u}_h) | = | \widetilde{u}_h (\eta) - \widetilde{u}_I^\tau (\eta) | \le \overline{M} \left(\int_0^1 \left(\frac{d^4 \widetilde{u}_h}{d\eta^4} \right)^2 d\eta \right)^{1/2}.$$

Используя переменную t, получаем оценку

$$| e_\tau (u_h (t)) | = | u_h (t) - u_I^\tau (t) | \le \overline{M} \tau^{7/2} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{d^4 u_h}{dt^4} \right)^2 dt \right)^{1/2} \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Тогда

$$\int_0^s \| e_\tau (t') \|_1^2 \, dt' = \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \| e_\tau (t') \|_1^2 \, dt' \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \overline{M}^2 \tau^7 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4} (t) \right\|_1^2 dt dt' = \overline{M}^2 \tau^8 \int_0^s \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4} (t) \right\|_1^2 dt. \qquad (16)$$

Далее рассмотрим функционал $\dot{e}_\tau (u_h) = \dot{u}_h - \dot{u}_I^\tau$:

$$| \dot{\widetilde{e}}_\tau (\widetilde{u}_h) | = \frac{1}{\tau} \left| \frac{d\widetilde{u}_h}{d\eta} (\eta) - \frac{d\widetilde{u}_I^\tau}{d\eta} (\eta) \right| \le \overline{M} \frac{1}{\tau} \left(\int_0^1 \left(\frac{d^4 \widetilde{u}_h}{d\eta^4} \right)^2 d\eta \right)^{1/2}.$$

Аналогично (16) имеем оценку

$$\int_0^s \| \dot{e}_\tau (t) \|_0^2 \, dt \le \overline{M}^2 \tau^6 \int_0^s \left\| \frac{d^4 u_h}{dt^4} (t) \right\|_0^2 dt. \qquad (17)$$

Следовательно, из оценок (15)–(17) вытекает утверждение теоремы.

4. СХОДИМОСТЬ СХЕМЫ

Заметим, что в оценке теоремы 2 погрешность зависит от решения $u_h(t)$ полудискретной задачи (4), однако более целесообразно иметь требования гладкости для решения исходной задачи (1). Для этого воспользуемся оценкой [8, с. 97]

$$|| u_h ||_k = || u - u + u_h ||_k \le || u ||_k + || u - u_h ||_k \le || u ||_k + Ch | u |_{k+1} \le \overline{C} || u ||_{k+1}, \ \ k = 0, 1 .$$

Постоянная $\overline{C}$ не зависит от h. Следовательно, оценка в теореме 2 будет иметь вид

$$|| u_h(t) - y(t) ||_1 \le M \tau^3 \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{d^4 u}{dt^4}(t') \right\|_2^2 dt'} .$$

На основе теорем 1 и 2 имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения схемы (9), аппроксимирующего решение задачи (1) $u(x, t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) \in C([0, T]$, $W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) \in C\{[0, T]; W_2^2(\Omega)\}$, справедлива оценка точности

$$|| u(x, t) - y(x, t) ||_1 \le M \left\{ h^k \left(\max_t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|_{k+1} + \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t') \right\|_{k+1}^2 dt'} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sqrt{\int_0^t || u(x, t') ||_{k+1}^2 dt'} \right) + \tau^3 \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t') \right\|_2^2 dt'} \right\} \ \ \forall t \in [0, T], \ \ M = M(T, \omega_0^2) > 0.$$

При выборе многочлена степени не ниже третьей на каждом конечном элементе по пространственным переменным имеем третий порядок точности по обоим шагам h, τ.

Таким образом, в настоящей статье построен метод повышенной скорости сходимости решения первой краевой задачи для уравнения внутренних волн. Получены оценки точности метода при достаточной гладкости решения дифференциальной задачи. Порядок точности по временной переменной равен трем, а порядок точности по пространственным переменным определяется степенью полиномов на пространственном конечном элементе: при выборе третьей степени полиномов скорость сходимости по пространству также равна трем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. — М.: Наука, 1990. — 344 с.
2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. — 512 с.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
4. Марчук Г. И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
5. Moskalkov M.N., Utebaev D. Investigation of difference schemes of finite element method for second-order unsteady-state equations // J. Comput. Appl. Math. — 2005. — N 92. — P. 70–76.
6. Москальков М.Н. Схема метода конечных элементов повышенной точности для решения нестационарных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. — 1980. — **16.** — С. 1283–1292.
7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977. — 352 с.
8. Quarteroni A., Valli A. Numerical approximation of partial differential equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1994. — 544 p.

Поступила 24.02.2010