Лекция 3: Опис великих систем у частотній області. Перетворення Фур‘є, Лапласа та

1. Перетворення Фур‘є
2. Перетворення Лапласа
3. Z-перетворення.

Опис системи в часовій області не завжди є достатнім. Тому також використовують опис в частотній області. Кожна система працює у своєму частотному діапазоні, тобто реагує на зовнішній вплив в залежності від частот.

Частотні методи використовують аналіз функції й комплексної змінної і перетворення Лапласа. Головні елементи цього підходу — передатні функції, функціональні блок-схеми і їх перетворення, аналіз нулів і полюсів. До переваг аналізу систем в частотній області відноситься можливість зібрати відповідні експериментальні дані, що дозволяють безпосередньо побудувати модель системи. Через це метод частотних характеристик звичайно використовують при описі складних систем, наприклад підсилювачів із зворотним зв'язком, а також багатьох електромеханічних пристроїв і систем. Якщо описується тільки зв'язок між вхідними і вихідними сигналами, то деякі внутрішні змінні і їх взаємозв'язки залишаються прихованими, представлення системи стає компактнішим і має менше число параметрів, ніж опис в просторі станів. Оскільки в модель включені вхідні і вихідні змінні, то вона називається зовнішнім описом (external description) у протилежність внутрішньому уявленню рівняннями стану. Багато Регуляторів, наприклад ПІД-регулятор, описаний в главі 6, налаштовуються на базі моделі технічного процесу у вигляді відносин вхідних і вихідних змінних. З внутрішнього опису системи можна виключити вектор х і одержати опис системи у вигляді

$$\frac{d^n y}{dt_n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt_{n-1}}+\cdots+a_n y-b_0\frac{d^n u}{dt_n}+b_1\frac{d^{n-1}u}{dt_n}+\ldots+b_n u$$

Де коефіцієнти a_i і b_j .можуть бути одержані з матриць A, B, C, D. В системах з багатьма вхідними і вихідними змінними для кожної пари вхід/вихід існує своя залежність (надалі розгляд буде обмежений системами тільки з одним входом u і одним виходом y.) Для диференціального рівняння порядку п можна виконати перетворення Лапласа

$$\left(S^n+a_1\cdot S^n+\ldots+a_n\right)\cdot Y(s)-(b_0\cdot S^n+b_1 S^{n-1}+\ldots+b_n)\cdot U(s)$$

де s — змінна Лапласа, а

$U(s)$ і $Y(s)$— результат перетворення Лапласа (зображення) для y(t)і u(t)відповідно. Перевага цього методу у тому, що комплексними змінними s, які є операторами диференціювання, можна маніпулювати методами алгебри. Тут вважається, що початкові значення змінних стану — нульові.

Зв'язок між вхідними і вихідними змінними лінійної системи можна виразити її передатною функцією (transfer function), яка визначається як відношення між зображеннями Лапласа вихідного і вхідного сигналів системи

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0\cdot S^n+b_1 S^{n-1}+\ldots+b_n}{S^n+a_1\cdot S^n+\ldots+a_n}$$

Передавальну функцію також можна розрахувати безпосередньо з внутрішнього опису в змінних стану рівняння (3.1) і (3.2). Має місце наступне співвідношення

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot B+D$$

де I — одинична матриця порядку п. Висновок цього виразу дуже простий і приводиться в більшості книг по управлінню. У системі з одним входом і одним виходом матриця C складається з одного рядка, а матриця B — з одного стовпця, матриця A має розмірність nxn. Звично матриця D (що має при цьому розмірність 1x1) — нульова. В цьому випадку G стає скаляром. Для декількох входів і виходів G(s) є матрицею з елементами $G_{ij}(s)$, які суть передавальні функції для кожної пари вхід u_{ii} вихід y_j

Передатна функція механічної системи Передатна функція системи має вигляд

$$G(s)=\frac{Z(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2}$$

де Z(s) F(s) — зображення Лапласа для координати z і сили F відповідно. Рівняння стану були одержані в прикладі 3.11. Передатну функцію можна також обчислити безпосередньо з рівнянь стану [див. рівняння

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s & -1\\ 0 & s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ ms^2\end{pmatrix}=\frac{1}{ms^2}$$

Низькочастотний фільтр. Низькочастотний RC- фільтр можна характеризувати його передатною функцією. У припущенні, що початкові напруги рівні нулю, зв'язок вхід/вихід можна записати як

$$G(s)=\frac{V_0(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{1+s\cdot R\cdot C}$$

Зміна амплітуди виходу і фазове зміщення для синусоїдального сигналу виходять при заміні в передатної функції s на j_w Оскільки опис вхід/вихід містить менше число коефіцієнтів, ніж внутрішній опис в просторі станів, то його завжди можна одержати з останнього; проте зворотне перетворення неоднозначне. Це абсолютно природно, оскільки вектор станів x випливає підстановки в початкові рівняння нових змінних, які можна вибрати довільно, а у і u від фізичної природи процесу і тому визначені однозначно. Знаменник передатної функції називається характеристичним рівнянням (characteristic equation). Коріння характеристичного рівняння називається полюсами (poles) і має фундаментальне значення. Значення полюсів ідентичні власним числам матриці А. Корні чисельника передавальної функції називаються нулями (zeros). Якщо нулі позначити $z_1 \cdots z_m$, а полюси $p_1 \cdots p_n$, то при n>m передатну функцію можна записати у вигляді

$$G(s)=\frac{K\cdot(s\ \ z_1)\cdots(s\ \ z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}=\frac{a_1}{s-p}+\cdots+\frac{a_n}{s-p_n}$$

де a_1 — дійсні або комплексні константи. Це означає, що вихідну змінну у можна представити сумою показових функції, які називаються становлячими рухи або модами (modes)

$y(t)=c_1*e^{-p_1 t}+\ldots c_n*e^{-p_n t}$

Дійсний полюс відповідає доданку з дійсним показником ступеня, а два комплексно-спряжені полюси завжди можна представити в виді одного доданку.

Якщо два полюси мають значення

$P_{k,k+1}=-\sigma\pm jw$,

цій парі відповідає доданок передатної функції

$c_k*e^{-ot}*sin(wt)$

Полюси (або власні числа матриці А) лінійної системи повністю визначають її стійкість. Якщо дійсні частини полюсів — негативні, то реакція на вхідний обмежений сигнал u, також завжди обмежена, система стійка.

Нулі визначають значення коефіцієнтів експоненціальних функцій у відгуку, але при цьому не впливають на стійкість системи. Якщо полюс розташовується близько до кулю, то відповідна мода мала. Якщо полюс і нуль співпадають, то мода зникає.

<u>Визначення z - перетворення.</u>

Z -перетворення є узагальненням дискретного перетворення Фур'є. Особливо ефективно воно використовується при аналізі дискретних систем і, зокрема, при проектуванні рекурсивних цифрових фільтрів.Вперше z -перетворення введено у вжиток П.Лаплас в 1779 і повторно "відкрито" В.Гуревічем в 1947 році зі зміною символіки на z_k. В даний час в технічній літературі мають місце обидва види символіки. На практичне використання перетворення це не впливає , тому що зміна знака тільки дзеркально змінює нумерацію членів полінома (щодо z_0) , числове простір яких в загальному випадку від -∞ до + ∞. Надалі в якості основної будемо використовувати символіку позитивних ступенів z, даючи пояснення щодо особливостей негативної символіки, якщо така є.

Довільної неперервної функції s (t), рівномірно дискретизованої і відображеної отсчетами sk = s (kΔt), так само як і безпосередньо дискретної функції, можна поставити в однозначна відповідність статечної поліном по z, послідовними коефіцієнтами якого є значення s_k:

$$s_k = s(k\Delta t) \Leftrightarrow TZ[s(k\Delta t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k\, z^k = S(z)$$

де $z = \sigma+j\omega = r\cdot\exp(-j\varphi)$ - довільна комплексна змінна. У показовій формі:

$z = r\cdot\exp(-j\varphi)$, где $r = |z| = \sqrt{\sigma^2+\omega^2}$, $\varphi = \arg(z) = \mathrm{argtg}(\omega/\sigma)$.

У каузальних системах значення імпульсного відгуку систем існують при $k \geq 0$ діє в односторонньому варіанті:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k\, z^k.$$

У загальному випадку, z-перетворення - це статечної ряд з нескінченною кількістю членів, тому він може сходитися задля всього простору значень z. Область z, в якій z-перетворення сходиться і значення S (z) кінцеві, називають областю збіжності.

Функціональні перетворення. Одним з основних методів частотного аналізу та обробки сигналів є перетворення Фур'є. Розрізняють поняття "перетворення Фур'є" і "ряд Фур'є". Перетворення Фур'є передбачає безперервний розподіл частот, ряд Фур'є задається на дискретній наборі частот. Сигнали також можуть бути призначені в наборі тимчасових відліків або як безперервна функція часу. Це дає чотири варіанти перетворень - перетворення Фур'є з безперервним або з дискретним часом, і ряд Фур'є з безперервним часом чи з дискретним часом . Найбільш практична з точки зору цифрової обробки сигналів дискретизація і в тимчасовій, і в частотній області , але не слід забувати, що вона є апроксимацією безперервного перетворення. Безперервне перетворення Фур'є дозволяє точно представляти будь-які явища . Сигнал , представлений рядом Фур'є, може бути тільки періодичний . Сигнали довільної форми можуть бути представлені поруч Фур'є тільки наближено. при цьому передбачається періодичне повторення розглянутого інтервалу сигналу за межами його завдання. На стиках періодів при цьому можуть виникати розриви і злами сигналу, і виникати помилки обробки , викликані явищем Гіббса, для мінімізації яких застосовують певні методи (вагові вікна , продовження інтервалів завдання сигналів , тощо).

При дискретизації і в тимчасовій, і в частотній області, замість "дискретно - часовий ряд Фур'є" звичайно (що не дуже точно) говорять про дискретно перетворенні Фур'є (ДПФ):

$S(n) = \sum_k s(k)\, exp(-j\ 2\ kn/N)$,

де N- кількість відліків сигналу. Застосовується воно для обчислення спектрів потужності , оцінювання передавальних функцій і імпульсних відгуків, швидкого обчислення згорток при фільтрації , розрахунку кореляції, розрахунку перетворень Гільберта, і т.п. Розрахунок ДПФ за наведеною формулою вимагає обчислення n коефіцієнтів, кожен з яких залежить від k елементів вихідного відрізка , так що число операцій не може бути менше nk . Існує ціле сімейство алгоритмів , відоме , як "Швидке Перетворення Фур'є" - ШПФ, що скорочує час роботи до nlog(k) операцій. "Швидке" не слід трактувати, як "спрощене" і "неточне". При точної арифметиці результати розрахунків ДПФ і за алгоритмами ШПФ збігаються.

Відоме застосування знаходять і варіанти перетворення Фур'є: косинусне для парних і Синусний для непарних сигналів, а також перетворення Хартлі, де базисними функціями є суми синусів і косинусів, що дозволяє підвищити продуктивність обчислень і позбутися від комплексної арифметики. Замість косинусних і синусних функцій використовуються також функції Уолша, що приймають значення тільки +1 і -1. І , нарешті , останнім часом в задачах спектрально- тимчпсову аналізу нестаціонарних сигналів, вивчення нестаціонарні і локальних особливостей сигналів "під мікроскопом", очищення від шумів і стиснення сигналів починають отримувати в якості базисів розкладання вейвлети ("короткі хвилі"), локалізовані як під тимчасової, так і в частотній області.