Лекція 9: Методи одновимірної оптимізації

1. Методи одновимірної оптимізації.
2. Порівняльна характеристика.

1. Методи одновимірної оптимізації

Методи пошуку в одновимірному просторі засновані на послідовному обчисленні значень цільової функції в деяких точках . Потім отримані значення порівнюють і вибирають найменше (у разі пошуку мінімуму). Розробляючи методи пошуку, прагнуть знайти екстремум якомога швидше.

Загальний пошук. Очевидно, найбільш природнім способом звуження інтервалу невизначеності для одновимірної унімодальної функції є поділ його на декілька рівних частин з наступним обчисленням значень цільової функції у вузлах отриманої сітки. У результаті інтервал невизначеності звужується до двох кроків сітки.

Поділ відрізка навпіл. Користуючись тим же прийомом, що і в попередньому методі, але обчислюючи значення функції в підінтервалах неоднакову кількість разів, можна додатково підвищити ефективність пошуку. Обчислюючи N значень функції на i послідовно звужуваних інтервалах, отримаємо для коефіцієнта дроблення інтервалу невизначеності $f = \left(\frac{2}{N+1}\right)^i$. При такому методі пошуку цільову функцію доводиться обчислювати J разів, причому $J = Ni$. Можна знайти оптимальне значення N, при якому J при заданому f є мінімальним.

Метод дихотомії. У попередніх методах передбачалося, що значення цільової функції обчислюються при постійному зменшенні проектного параметра. Якщо зняти це обмеження, то ефективність пошуку можна підвищити. Як уже зазначалося, обчислення цільової функції в двох точках інтервалу невизначеності дозволяє його звузити. Можна вибрати ці точки таким чином, що інтервал невизначеності буде мінімальним.

Метод золотого перерізу. З кожних трьох значень цільової функції, обчислених в інтервалі невизначеності, надалі використовуються тільки два, а третє не дає додаткової інформації і надалі не використовується. У методі золотого перерізу цільова функція обчислюється в точках інтервалу невизначеності, розташованих таким чином, щоб кожне обчислене значення цільової функції давало нову корисну інформацію. Сутність цього методу полягає в наступному. Інтервал невизначеності ділиться на дві нерівні частини так, що відношення довжини великого відрізка до довжини всього інтервалу дорівнює відношенню довжини меншого відрізка до довжини більшого відрізка.

Метод Фібоначчі. Хоча метод золотого перерізу має високу ефективність, ясно, що він не є оптимальним при заданому числі обчислень цільової функції. Якщо заздалегідь відомо, що можна використовувати лише два значення цільової функції, то краще обирати метод дихотомії, який дозволяє зменшити інтервал невизначеності відразу вдвічі, а не в 1/0,618 рази, як метод золотого перерізу. Якщо є можливість у процесі пошуку оптимуму змінювати розташування крапок, у яких обчислюються значення цільової функції, то можна з'єднати переваги симетричного розташування точок, про які говорилося вище, з перевагами методу дихотомії й побудувати оптимальний алгоритм пошуку.

2. Порівняльна характеристика

Найкращими критеріями порівняння п'яти методів пошуку, описаних вище, є їхня ефективність і універсальність.

Під *ефективністю* алгоритму звичайно розуміють число обчислень функції, необхідне для досягнення необхідного звуження інтервалу невизначеності. Кращим щодо цього є метод Фібоначчі, а гіршим - метод загального пошуку.

Метод Фібоначчі використовується не часто, оскільки при його застосуванні потрібно заздалегідь задати число обчислень значень функції на відміну від методу золотого перетину. Як правило, виявляється, що ці два високоефективні методи, найбільше підходять для рішення одновимірних унімодальних задач оптимізації.

Універсальність алгоритму означає, що його можна легко застосувати для розв'язку найрізноманітніших завдань. Щодо цього метод Фібоначчі, очевидно, поступається іншим, тому що потребує окремого обчислення положення точок, у яких будуть визначатися значення цільової функції на кожному новому кроці. Цим доводиться розплачуватися за підвищення ефективності методу. З погляду універсальності малоефективний метод загального пошуку має принаймні одну перевагу - його можна з успіхом застосовувати для неунімодальних функцій, якщо вони досить гладкі..