

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

Volume 9, Issue 2

2013

TABLE OF CONTENTS

Исполнилось 80 лет А.В. Перельмутеру	<u>14</u>
Заметки о прикладной науке <i>А.В. Перельмутер</i>	<u>15</u>
Роль парадоксов в оценке корректности расчетных моделей <i>Л.С. Ляхович, А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер</i>	<u>34</u>
Модели взаимодействия гибких, нелинейно-деформируемых оболочек с агрессивной внешней средой <i>В.В. Петров</i>	<u>43</u>
Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 1: Континуальные постановки задачи <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>51</u>
Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 2: Численная реализация метода <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>56</u>
Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов <i>П.А. Акимов, М.Л. Мозгалева, В.Н. Сидоров</i>	<u>80</u>
Методы компьютерного моделирования процессов возведения высотных зданий <i>М.С. Барабаш</i>	<u>98</u>
Модернизация первого и третьего уровней крестообразных образцов с предельно допустимой длиной фланговых швов на основе трехмерного конечноэлементного моделирования <i>В.А. Белов, А.А. Гусев, С.В. Щербина</i>	<u>108</u>
Алгоритм корректировки вычислительной расчетной модели сооружения при его мониторинге <i>В.Н. Сидоров</i>	<u>118</u>

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВОЗВЕДЕНИЯ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ

М.С. Барабаш

Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ: В статье рассматривается влияние процесса возведения на усилия, возникающие в элементах каркасного здания с монолитным ядром жесткости. Цель теоретических исследований состоит в установлении влияния процесса возведения на напряженно-деформированное состояние несущих систем высотных зданий.

Ключевые слова: моделирование, жизненный цикл, процесс возведения, несущая система, информационная технология

THE METHODS OF COMPUTER SIMULATION ERECTION PROCESS OF HIGH-RISE BUILDINGS

Maria S. Barabash

National Aviation University, Kiev, UKRAINE

ABSTRACT: In given article is considered the influence of erection process on efforts that arise in elements of skeleton type buildings with cast-in-situ stiffening core. The aim of theoretical research was concluded in determination of erection process influence on bearing systems' stress-strain state of multistory buildings.

Key words: modeling, life cycle, erection process, bearing system, information technology

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

Прогресс в строительстве и во многих других отраслях промышленности в значительной мере определяется достигнутыми к настоящему времени результатами в области математического моделирования тех или иных процессов и физических явлений, в частности, процессов деформирования и разрушения конструкций зданий. В области строительства принятие многих проектных решений для какого-либо сооружения, как правило, регламентируется строительными нормами и правилами, которые зачастую дают лишь рекомендации по учету особенностей, отражающих действительное напряженно-деформированное состояние (НДС). Кроме того, регламентирующие документы не всегда используют последние достижения в области математического моделирования

процессов деформирования и разрушения. В частности, разделы строительных норм, относящиеся к методам прочностного анализа элементов строительных конструкций, содержат более простые методы по сравнению с современными возможностями математического описания и численного моделирования процессов деформирования сложных систем многоэтажных зданий. В этом плане существует определенный разрыв между существующими нормами, регламентирующими деятельность проектировщиков и строительную практику, и возможностями уточненных расчетов элементов конструкций и сооружений, основанных на современных методах, использующих более точную постановку практических задач и их реализацию на компьютере.

С развитием крупных городов в строительстве выявилась тенденция к росту этажности возводимых объектов, обусловленная увеличением населения с одной стороны и ограниченностью городского пространства с другой, рост этажности, в свою очередь, усложняет архитектурные и конструктивные формы зданий. В последнее время часто возникают вопросы, связанные с реконструкцией или утилизацией жилых, общественных зданий и сооружений старой застройки. Это приводит к необходимости более точной оценки НДС несущих систем. Так как с одной стороны необходимо обеспечить полную безопасность людей находящихся в здании, а с другой обеспечить минимальные затраты на его возведение, эксплуатацию и утилизацию или реконструкцию. Традиционные методы расчёта не всегда позволяют полностью обеспечить данные требования. В связи с этим развиваются методы расчёта максимально приближенные к реальным условиям. Большое значение приобретает выбор математических моделей, адекватно описывающих пространственную работу несущих систем высотных зданий.

ОБЛАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЙ

Информация об объекте и НДС несущей системы на каждой из стадий жизненного цикла претерпевает значительные изменения, причины которых могут быть различны. Стадией, формирующей НДС, является стадия возведения. На этом этапе НДС изменяются в зависимости от последовательности возведения, что обуславливает изменение конструктивной и расчетной схемы здания. На стадии эксплуатации, самой продолжительной для многоэтажных зданий, к несущей системе прикладываются временные нагрузки, изменяются свойства материала несущих конструкций. Эти изменения зависят от многих факторов, при этом материалы и

конструктивные элементы проявляют нелинейный характер работы.

В процессе эксплуатации жилых, общественных, зданий происходит старение конструкционных материалов, зависящее не только от времени, но и от различного рода аварийных и нештатных ситуаций, техногенных воздействий. В связи с этим часто возникают вопросы, связанные с реконструкцией, демонтажем, утилизацией и капитальным ремонтом зданий. Для оценки безопасности здания необходимо знать историю его нагружения, схемы приложения внешних нагрузок, историю формирования усилий в конструктивных элементах, иметь возможность определить его НДС в любой момент времени. Поэтому необходимо обобщить в единую информационную модель соответствующие математические модели, создать программный комплекс, обеспечивающий моделирование этих процессов. Реальное НДС несущих конструктивных элементов можно определить при проведении на базе программного комплекса ряда численных экспериментов, моделирующих те или иные ситуации и процессы.

Таким образом, информационная поддержка жизненного цикла несущей системы производится посредством использования информационной модели конкретного здания или сооружения, отражая его свойства, состояние, взаимосвязь с внешней средой. В настоящее время, во многих отраслях промышленности, при создании информационных систем используют CALS-технологии (Continuous Acquisition and Lifecycle Support), которые позволяют в период проектирования и строительства формировать информационную модель объекта. Основным блоком CALS являются стандарты, обеспечивающие взаимосвязанность данных в процессах проектирования, производства и эксплуатации объекта. Стандартом CALS является модель, которая определяет технологию электронного представления

данных об объекте (составе, свойствах, геометрических и физических характеристиках, изменениях модели и т.д.), и логическую модель данных представляющую собой готовое решение, на основе которого создается логично организованная база инженерных данных. Исходя из этого, создание информационной модели многоэтажного здания может основываться на использовании CALS-технологий.

Поэтому обобщение в единую информационную модель математических моделей, методов, и программного обеспечения для определения НДС элементов несущей системы здания, адекватно описывающих поведение несущих конструкций на любой стадии жизненного цикла объекта строительства, является актуальной задачей.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Методы расчёта, основанные на классических численных методах, не всегда позволяют полностью обеспечить выполнение данных требований. В связи с этим создаются методы расчёта максимально приближенные к реальным условиям. Поэтому большое значение приобретает выбор математических моделей адекватно

описывающих пространственную работу несущих систем многоэтажных зданий.

Конструктивной основой многоэтажных зданий служит пространственная несущая система, состоящая в основном из вертикальных (колонны, пилоны, диафрагмы), горизонтальных (плиты перекрытий, фундаментные плиты) и наклонных (пандусы, лестничные марши, связи) элементов. Вертикальные несущие элементы объединены в единую пространственную систему с помощью горизонтальных несущих конструкций - перекрытий здания.

Современные концепции численного исследования конструкций высотных зданий рекомендуют учитывать совместную работу конструктивной схемы (наземная часть - фундаментная плита - основание)[1]. Такая постановка задачи дает результаты, достаточно отличающиеся от ранее используемых схем: сначала рассчитывалась надземная часть на жестких опорах, а затем фундаментная плита на упругом основании на нагрузку от опорных реакций (рис.1).

Расчетная схема содержит информацию о топологии (взаиморасположение конструктивных элементов), геометрии системы, сечениях и материале элементов, нагрузках. В задачу расчета входит определение перемещений, усилий (напряжений) в элементах на основе этой информации.

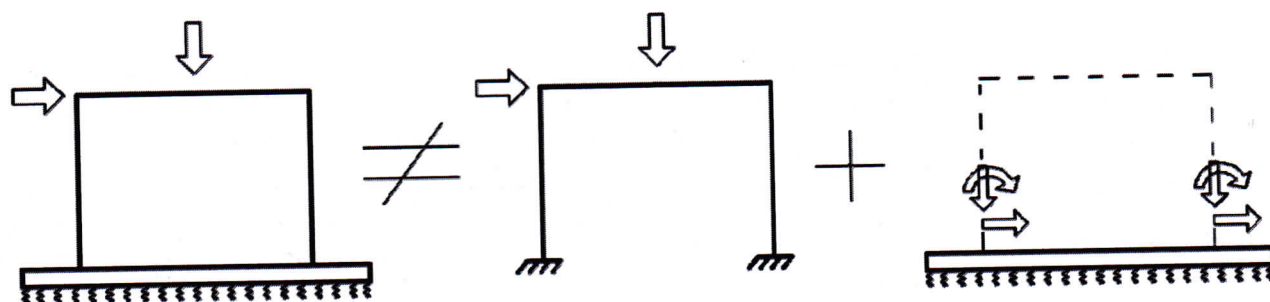


Рис. 1. Учет совместной работы «надземное строение – фундаментная плита – грунтовое основание»

Учет процесса возведения, по сути, является нелинейной задачей. В работах Перельмутера А.В. [2] введено понятие «генетической нелинейности». Этот термин

достаточно логичен, так как отображает родословную конструкции. Хотя, с другой стороны, существующий термин «конструктивная нелинейность» для описания процесса возведения также подходит. Генетическая (конструктивная) нелинейность проявляется даже тогда, когда расчет с учетом процесса возведения выполняется в линейной постановке. Рассмотрим пример – двухэтажная рама (рис.2) возводится поэтапно. На первом этапе возведения к ригелю первого этажа приложена монтажная нагрузка $P = 60$ т. После того, как возведен второй этаж рамы, эта нагрузка убирается. Для корректности численного эксперимента нагрузка от собственного веса не учитывается. На рис.3 приведено НДС возведенной ненагруженной конструкции. Т.е. усилия в конструкции

имеются после того, как удалена приложенная нагрузка. Это говорит о том, что конструкция хранит свою историю (родословную) возведения. На рис.4 схематично отмечено, что суперпозиция отсутствует, а это первый признак нелинейности.

Необходимость учета совместной работы конструктивной схемы «надземная часть – фундаментная плита – грунтовое (свайное) основание», нерегулярное расположение колонн, пилонов, диафрагм, сложное очертание перекрытий в плане с наличием большого количества отверстий и много других конструктивных особенностей обуславливает применение численных методов расчета, основанных на непосредственной дискретизации конструктивных схем.

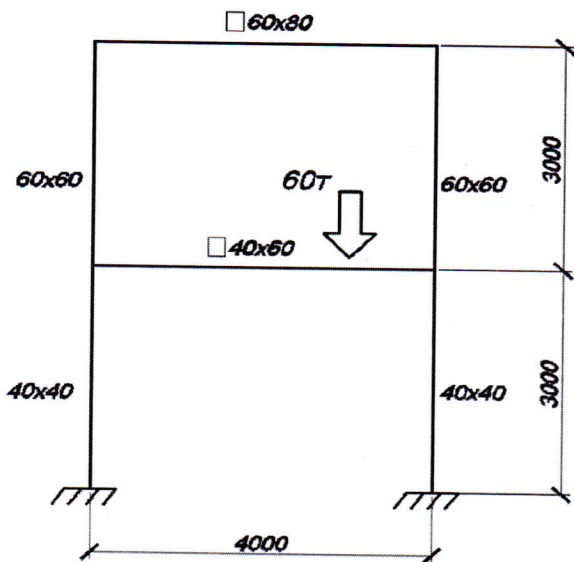


Рис. 2. Расчетная схема двухэтажной рамы

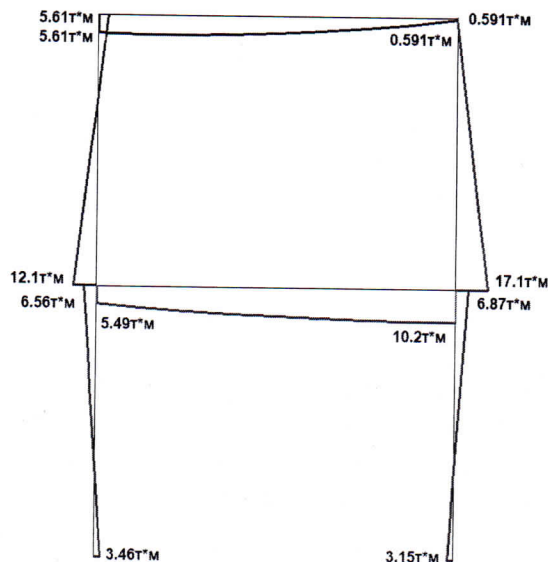


Рис. 3. НДС возведенной конструкции

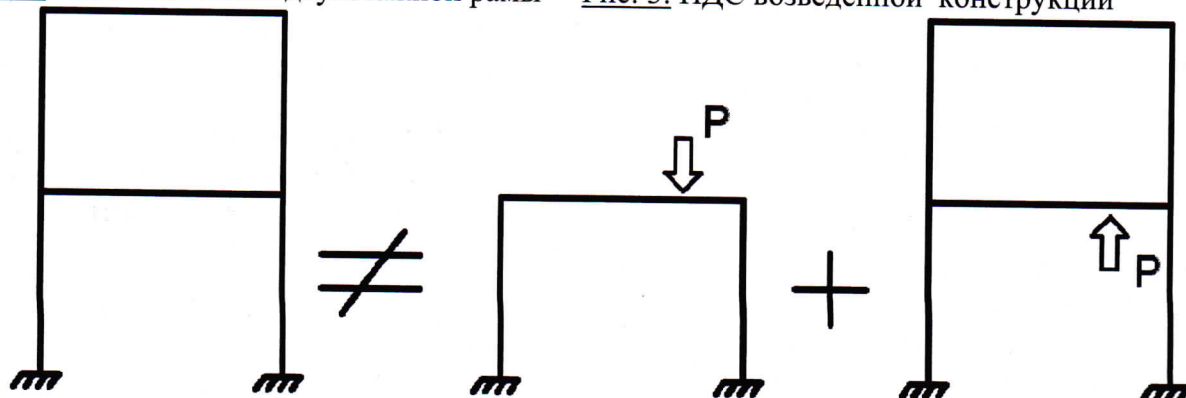


Рис. 4. Учет процесса возведения.

Метод конечных элементов (МКЭ) [2,3] основан на дискретизации самого объекта, который представляется в виде отдельных конечных элементов. Каждый конечный элемент имеет свои размеры, жесткостные характеристики, нагрузки, законы интерполяции узловых значений параметров НДС. В этом основное отличие конечно-элементной сетки, которая представляет конструкцию в виде набора конечных элементов от абстрактной разностной сетки, которая служит только для того, чтобы заменить дифференциальные операторы разностными аналогами. В настоящее время используется метод конечных элементов в перемещениях, т.е. в узлах сетки сначала находятся перемещения, а затем остальные параметры НДС.

Процедура решения задачи по МКЭ в перемещениях выглядит следующим образом:

- нанесение конечно-элементной сетки;
- назначение каждому конечному элементу необходимых характеристик – тип, жесткости, размеры и др.;
- построение для каждого конечного элемента матрицы жесткости;
- построение канонических уравнений МКЭ;
- решение канонических уравнений и определение перемещений в узлах сетки;
- определение параметров НДС (усилий, напряжений, перемещений) по всей области конструкции.

Эта процедура полностью соответствует механике стержневых систем. Если в докомпьютерный период методы строительной механики стержневых систем и методы теории упругости для расчета пластинчатых и трехмерных объектов были различны, то МКЭ решает эти задачи однотипно. Следовательно, возможно решение комбинированных конструкций, например, расчет каркасного здания совместно с основанием: каркас – это стержневая система, плиты перекрытий, фундаментная плита и диафрагма – это

пластинчатые системы, грунтовое основание – это трехмерный объект.

Последовательность численного решения метода конечных элементов описана в работе [3,4]. Однако применение метода для расчета высотных зданий затруднено. Это связано с тем, что реальные размеры зданий не позволяют расчленить их на большое число конечных элементов, т.к. это приводит к увеличению объема исходных данных, числа уравнений и времени расчетов на компьютере. В работе [5] было предложено использовать пространственные конечные элементы, предварительно создавая библиотеки матриц жесткостей крупных элементов здания, и только затем определять перемещения всей системы. Это приводит к определенным трудностям, связанным с многообразием конструктивных решений многоэтажных зданий, а предложенный метод требует введения гипотез о законе перемещений для горизонтальных сечений всего здания. В этом случае использование метода суперэлементов представляется более целесообразным.

ДААННЫЕ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МЕТОДЫ

Для современных сложных сооружений (мосты, большепролетные покрытия, высотные здания и др.), как правило, конструктивная схема обуславливается не только эксплуатационной стадией, но и стадией возведения. В процессе возведения конструктивная схема сооружения может многократно изменяться, усилия и перемещения «замораживаться», определяя сечения элементов и конструкции узлов именно на этой стадии.

Для изучения физической системы методами математического моделирования ее заменяют абстрактной системой – математической моделью.

Реализация математической модели на компьютере дает возможность многократно

и в широком диапазоне изменять входные параметры и условия функционирования сложных систем, заменяя, таким образом, экспериментальные исследования вычислительным экспериментом. Кроме того, при решении ряда сложных конструкторских задач возможно и необходимо применение вариантного проектирования.

На современном этапе развития компьютерной техники разработано множество программных комплексов (ЛИРА-САПР, МОНОМАХ-САПР, SCAD, STARK, COSMOS, ANSYS, NASTRAN и др.), реализующих метод конечных элементов и позволяющих производить расчеты сложных систем.

Программный комплекс ЛИРА-САПР предназначен для расчета и проектирования строительных конструкций различного назначения с реализацией метода суперэлементов и визуализацией на всех этапах, производит расчеты геометрически и физически нелинейных сложных систем. Он позволяет пользователю быстро и удобно создать расчетную схему сооружения, обладает функциями документирования, встроенной графической средой САПФИР-Конструкции, выполняющей функции препроцессора. С помощью программного комплекса МОНОМАХ-САПР рассчитываются и проектируются железобетонные конструкции многоэтажных зданий с планами произвольной конфигурации, в том числе зданий из монолитного железобетона. Автором настоящей статьи проводились исследования каркасно-монолитных зданий. В расчетах колонны и ригели моделировались пространственными стержнями с жесткими узлами, несущие стены, диафрагмы - универсальными конечными элементами плоской задачи теории упругости, перекрытия - конечными элементами плиты, работающими в двух плоскостях.

Моделирование процесса возведения имеет большое значение для конструкций

высотных зданий из монолитного железобетона, так как в этом случае необходимо учитывать такие эффекты:

- неравномерная осадка вертикальных элементов (колонны и пилоны имеют большие деформации, чем стены и диафрагмы);
- конструкции, как правило, включаются в работу до набора бетоном расчетной прочности (как правило, распалубка производится значительно раньше, чем бетон наберет расчетную 28-дневную прочность);
- установка и удаление временных стоек, которые существенно изменяют конструктивную схему здания на этапах возведения;

и многие другие эффекты.

Учет особенностей возведения железобетонных конструкций высотных зданий реализован в программных комплексах ЛИРА-САПР, МОНОМАХ-САПР. Моделирование процесса возведения, по сути, является нелинейной задачей, обусловленной не только последовательно изменяющейся расчетной схемой (генетическая и конструктивная нелинейность), но и учетом нелинейных свойств материала (физическая нелинейность). Решение этой задачи в ПК ЛИРА САПР и МОНОМАХ САПР основана на основных методах, которые в физическом смысле представляют собой моделирование процесса нагружения с изменяемой расчетной схемой.

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА ВОЗВЕДЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННУЮ РАБОТУ НЕСУЩИХ СИСТЕМ ЗДАНИЙ.

Существует большое число работ, авторы которых имеют разные подходы к расчету зданий и сооружений. Однако не каждый метод позволяет отразить реальную работу несущей системы здания. Большая часть этих методов предполагает определение

НДС несущих элементов, исходя из готовой расчётной схемы здания, загруженной полной нагрузкой. Часть методов ориентирована на определение характеристик только отдельных элементов здания, что также приводит к искажению реальной работы здания. Поэтому требуется их дальнейшее развитие и доработка. Целью теоретических и экспериментальных исследований многих ученых в настоящее время является определение влияния процесса возведения на НДС элементов несущих систем зданий. Исследование формирования НДС несущих систем в процессе возведения проводилось в работах Городецкого А.С., Перельмутера В.С., и других отечественных и зарубежных ученых [1,2,5,6]. В них отмечается влияние изменения расчетной схемы и величины вертикальной нагрузки в процессе монтажа на формирование конечных внутренних усилий в элементах несущих систем многоэтажных зданий.

В зависимости от конструктивных решений, экономичности и безопасности, а также других условий строительного производства применяют различные методы возведения многоэтажных зданий. Но во всех случаях процесс возведения заключается в том, что собственная масса здания растет по мере монтажа, с возведением нового этажа изменяется высота здания, погонная жесткость вертикальных элементов и нагрузка на каждом новом этапе возведения прикладывается к новой расчетной схеме. Это подтверждает значимость данных параметров при математическом моделировании процесса возведения.

Наибольшее влияние процесс возведения оказывает на НДС несущих систем многоэтажных зданий с ядром жесткости. В случае возведения зданий каркасного типа ядро жесткости служит мощной пространственной конструкцией, воспринимающей не только часть вертикальной нагрузки, но и всю горизонтальную нагрузку, действующую на

здание. При возведении зданий каркасного или панельного типа, возникают плотные связи сдвига, при монтаже зданий методом подъема этажей или перекрытий связи сдвига устраиваются одновременно с монтажом наружных стен. В возведенном до монтажа наружных стен ядре жесткости успевают произойти упругие деформации, часть деформаций ползучести и усадки. Несущие вертикальные элементы и несущие стены деформируются по мере увеличения нагрузки в процессе возведения уже в составе всей несущей системы, поскольку при возведении вертикальных несущих элементов и ограждающих конструкций одновременно происходит их соединение с ядром жесткости. Обычно монолитное ядро жесткости возводится с опережением по отношению к ограждающим конструкциям, поэтому основная часть деформаций ядра происходит до монтажа ограждающих конструкций. Колонны каркаса, напротив, укорачиваются по мере возведения и возрастания нагрузки. Разность продольных деформаций колонн и ядра приводит к соответствующему деформированию перекрытий. Каждое новое перекрытие возводится в строго горизонтальном положении после того, как колонны уже укоротились от всех нижерасположенных перекрытий. Поэтому каждое вновь возведенное перекрытие будет деформироваться, в основном, только от действия местной нагрузки, и нагрузки от вышерасположенных этажей.

На рис.5 представлен пример расчета многоэтажной рамы, который демонстрирует необходимость учета процесса возведения. Рама (рис.5, а, б) в определенной степени моделирует каркасное здание – ригели имеют сечение 400x20 см, что моделирует плиту перекрытия. Нагружение, кроме собственного веса включает полезную нагрузку $q=2.06$ т/м и нагрузку от стен $P=3$ т. Как правило, перекрытия высотных зданий рассчитываются исходя из предположения, что опоры перекрытий (колонны, пилоны,

диафрагмы) не имеют вертикальных перемещений. В такой постановке моменты в верхнем ригеле (определенный аналог верхнего перекрытия) АВ (рис.5,а) будут равняться $M_A = -2.7$ т м и $M_B = -7.7$ т м ; а прогиб в центре ригеля $W_C = 0.5$ см. На рис. 6 приведена деформированная схема рассматриваемой конструкции при расчете с учетом процесса возведения. Расчет выполнялся по изменяемой в процессе возведения схеме: сначала первые два этажа, затем два последующих этажа, затем два

верхних этажа. Расчет выполнялся на нагрузку только от собственного веса.

К окончательной (возведенной) схеме прикладывалась полезная нагрузка. Расчет выполнялся в физически нелинейной постановке, т.е. учитывались нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями для бетона и арматуры. Методы расчета конструкций в физически нелинейной постановке описаны в работах [1,6,7].

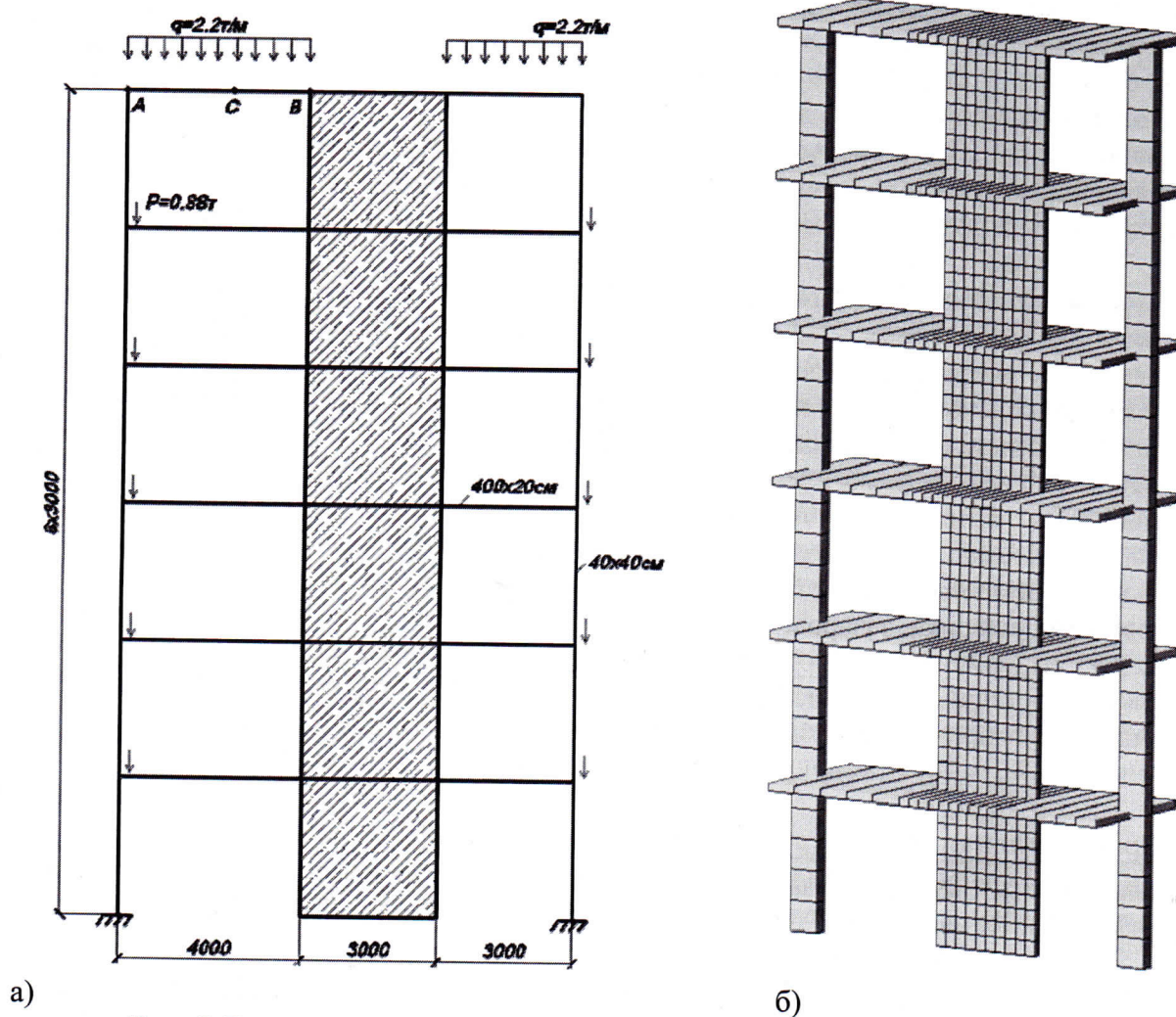


Рис. 5. Расчетная схема (а) и компьютерная модель (б) многоэтажной рамы.

Для сравнения рассматриваемая конструкция рассчитывалась без учета процесса возведения, т.е. на окончательную схему прикладывалась вся нагрузка.

В таблице 1 приведены усилия ригеля А-В, полученные по трем различным схемам. Анализируя результаты расчета, приведенные в таблице 1 можно сделать вывод, что НДС ригеля (аналог перекрытия),

полученное на основе нелинейного расчета для всей схемы и, особенно, с учетом возведения значительно отличается от результатов расчета отдельно взятого ригеля (перекрытия) в линейно-упругой постановке.

В процессе исследований было установлено:

- монтаж элементов несущей системы приводит к изменению расчетной схемы здания, приложение увеличивающейся вертикальной нагрузки к измененной расчетной схеме здания влияет на НДС конструктивной схемы;
- формирование напряженно-деформированного состояния несущей системы в значительной степени зависит от способа монтажа;
- расчет ригелей (перекрытий) в общей системе здания значительно отличается от расчета отдельно взятого ригеля (перекрытия) на несмещаемых вертикальных опорах;
- расчет с учетом возведения дает результаты, несколько отличающиеся от традиционного расчета (окончательная схема рассчитывается на всю нагрузку).

Учет процесса возведения показывает насколько меньше перемещения вертикальных элементов, что объясняется моделированием выборки зазоров, которые обусловлены деформациями вертикальных элементов от собственного веса возведенной конструкции, при бетонировании перекрытий.

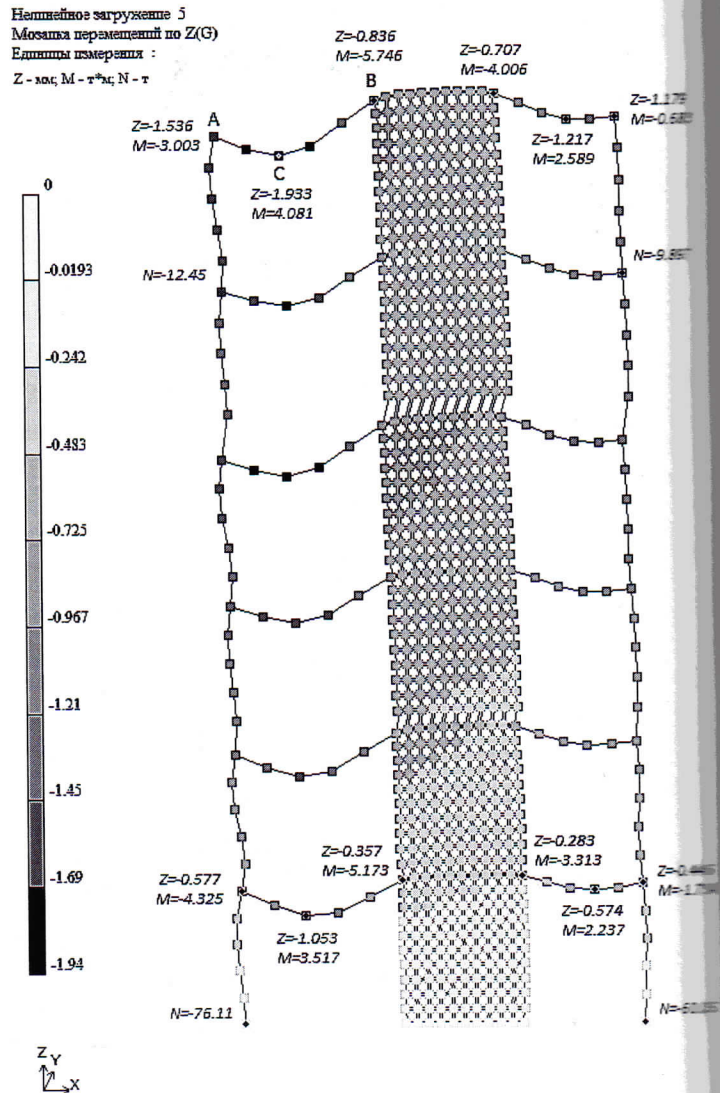


Рис. 6. Деформированная схема многоэтажного здания

Таблица 1

Сравнительная таблица результатов расчета рамы многоэтажного здания

Усилия и перемещения в сечениях ригеля АВ	Линейный расчет при несмещаемых вертикальных опорах	Нелинейный расчет без учета возведения	Нелинейный расчет с учетом возведения
Момент в сечении А, тм	-2.7	-2.9	-3.0
Момент в сечении В, тм	-7.7	-5.9	-5.7
Перемещения узла С, см	-0.5	-2.3	-1.9
Перемещения узла А, см	0	-2.0	-1.5
Перемещения узла В, см	0	-1.1	-0.8

ВЫВОДЫ

1. На современном этапе развития информационных технологий разработано множество программных комплексов, позволяющих производить расчеты сложных систем. Все они реализуют метод конечных элементов. Наиболее развитым программным комплексом, учитывающим реальную пространственную работу конструктивных элементов в процессе возведения, является ПК ЛИРА-САПР.
2. Большое число проведенных экспериментальных исследований пространственной работы несущих систем многоэтажных зданий дает возможность использовать существующие математические модели, и, используя разработанное на их основе программное обеспечение, проводить серии численных экспериментов.
3. Для определения напряженно-деформированного состояния несущей системы здания и обеспечения его информационной поддержки на протяжении всего жизненного цикла необходимо создание информационной модели объекта строительства, которая должна основываться на математических моделях, адекватно отражающих пространственную работу несущей системы на каждой стадии жизненного цикла. Внедрение CALS-технологии проектирования в строительную индустрию позволит: оперативно реагировать на аварийные ситуации; моделировать процессы развития тех или иных негативных процессов; оценивать напряженно-деформированное состояние на любой стадии жизненного цикла; решать ряд проектных и конструкторских задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Городецкий А.С., Евзеров И.Д.** Компьютерные модели конструкций. – М: Изд-во АСВ, 2009. – 360 с.
2. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа (издание 4-е переработанное и дополненное).- Москва: Изд-во СКАД СОФТ, Изд-во ДМК Пресс, Изд-во АСВ, 2011, 736 с
3. **Бате К., Вилсон Э.** Численные методы анализа и метод конечных элементов. Пер. с англ. - М. :Стройиздат, 1982. - 448с.
4. **Вайнберг Д.В., Городецкий А.С., Киричевский В.В., Сахаров А.С.** Метод конечного элемента в механике деформируемых тел // Прикл. мех. - 1972. -Т.8, №8. - с.3-28
5. **Норри Д., Фриз Ж.** Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ.- М.: Мир, 1981.-304с.
6. **Верюжский Ю.В., Колчунов В.И., Барабаш М.С., Гензерский Ю.В.** Компьютерные технологии проектирования железобетонных конструкций. – Учебное пособие. – К.: Книжное издательство НАУ, 2006. – 808с.
7. **Городецкий А.С. и др.** Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений. – М.: Изд-вл «Транспорт», 1981., - 143 с.

Барабаш Мария Сергеевна, Национальный авиационный университет, кафедра компьютерных технологий строительства, 03058, Украина, г. Киев, проспект Космонавта Комарова, дом 1
e-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua

Maria S. Barabash, Department of Computer Technology Construction, National Aviation University, 1, Kosmonavta Komarova, 03058, Kiev, UKRAINE, e-mail: bmari@ukr.net, bmari@liraland.com.ua.