УДК 519.254:519.652(045)

П.О.Приставка, О.Г.Чолишкіна, Б.І. Мартюк

Національний авіаційний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОХІДНИХ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЙ *B*-СПЛАЙНІВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Отримано похідні першого та другого порядку для поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, на основі *B*-сплайнів четвертого порядку, визначених на рівномірному розбитті вісі аргументу. Досліджено властивості отриманих похідних, подано теореми про норми та якості апроксимації.

Ключові слова: *сплайн, похідні, аналогові сигнали.*

Получены производные первого и второго порядка для полиномиальных сплайнов, близких к интерполяционным в среднем, на основании *B*-сплайнов четвертого порядка, определенных на равномерном разбиении оси аргумента. Исследовано особенности полученных производных, представлены теоремы о нормах и качестве аппроксимации.

Ключевые слова: *сплайн, производные, аналоговые сигналы.*

Obtained derivatives of the first and second-order polynomial splines, interpolation close to the average, based on the *B*-splines of the fourth order, defined on a uniform partition argument axis. The features of the obtained derivatives represented theorem on approximation of standards and quality.

Keywords: *spline, derivative, analog signals***.**

Постановка проблеми. При фіксації аналогового сигналу має місце наступне. Нехай $\phi(t)$ – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал $p(t)$. Враховуючи технічні властивості систем реєстрації, результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації:

$$(p*\phi)(ih)=\frac{1}{h}\int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} p(t)\phi(t-ih)\,dt=\overline{p}_i\,.$$

Тоді цифровий сигнал має наступне подання:

$$p_i=\overline{p}_i+\varepsilon_i\,,\ i\in\mathbb{Z}\,, \qquad (1)$$

де ε_i – випадкова вада.

В задачах обробки цифрових сигналів, що задані співвідношенням (1), в якості моделі $p(t)$ є потреба використовувати наближення з властивостями імпульсного не рекурсивного низькочастотного фільтру, наприклад, лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому [1].

Відомо [2; 5], що будь-який *B*-сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є. Актуальним є дослідження лінійних комбінацій *B*-сплайнів вищого порядку та їх похідних, що дозволить очікувати більш високі згладжувальні властивості при відносно низькій обчислювальній складності.

Для пошуку особливостей аналогового сигналу можна використовувати першу та другу похідні лінійних комбінацій *B*-сплайнів, відповідно, постає питання дослідження цих похідних. Так в роботах [3; 4] досліджено властивості похідних локальних поліноміальних сплайнів на основі *B*-сплайнів другого та третього порядків. Тому актуальною є потреба отримання та дослідження похідних лінійних комбінацій *B*-сплайнів більш високого порядку, зокрема четвертого, що обумовлено властивостями відповідних *B*-сплайнів [1].

Аналіз досліджень та постановка задачі. Задача відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено у роботах І.Шоенберга, К.Де Бора, М.П.Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О.Лигуном, О.А.Шумейко, В.В.Кармазіною [2-4] та у авторських роботах [5].

Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h: t_i=ih$, $i\in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t)\in C^r$, $r\geq 2$, визначеної на $\mathbb{R}_1(-\infty;\infty)$. Вважають, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла $\overline{p}_i = \frac{1}{h}\int_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt$, при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах визначається аналогічно виразу (1).

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h, вводяться такі поліноміальні сплайни на основі *B*-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому [5]:

$$S_{4,0}(p,t) = \sum_{i\in Z} p_i B_{4,h}\left(t-(i+0,5)h\right),$$

$$S_{4,1}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{4}\Delta^2 p_i\right) B_{4,h}\left(t-(i+0,5)h\right),$$

$$S_{4,2}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{4}\Delta^2 p_i + \frac{13}{240}\Delta^4 p_i\right) B_{4,h}\left(t-(i+0,5)h\right).$$

де *B*-сплайн $B_{r,h}(t)$ порядку r ($r \ge 1$) визначається рекурентно наступним чином: якщо

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1, & t \in [-h/2; h/2], \end{cases}$$

то

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau)\,d\tau. \qquad (2)$$

Таким чином *B*-сплайн четвертого порядку має вигляд [5]:

$$B_{4,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-5h/2; 5h/2], \\ (t/h+5/2)^4/24, & t \in [-5h/2; -3h/2], \\ \psi(t/h) - 5(t/h+1/2)^4/12, & t \in [-3h/2; -h/2], \\ \psi(t/h), & t \in [-h/2; h/2], \\ \psi(t/h) - 5(t/h-1/2)^4/12, & t \in [h/2; 3h/2], \\ (t/h-5/2)^4/24, & t \in [3h/2; 5h/2]. \end{cases} \qquad (3)$$

де $\psi(t) = \frac{115}{192} - \frac{5}{8}t^2 + \frac{1}{4}t^4$.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h, зручно використовувати лінійні комбінації *B*-сплайнів (3):

$$\begin{aligned} S_{4,0}(p,t) = {} & \frac{1}{384}\left(p_{i-2} - 4p_{i-1} + 6p_i - 4p_{i+1} + p_{i+2}\right)x^4 + \frac{1}{96}(-p_{i-2} + \\ & +2p_{i-1} - 2p_{i+1} + p_{i+2})x^3 + \frac{1}{64}\left(p_{i-2} + 4p_{i-1} - 10p_i + 4p_{i+1} + p_{i+2}\right)x^2 + \\ & + \frac{1}{96}\left(-p_{i-2} - 22p_{i-1} + 22p_{i+1} + p_{i+2}\right)x + \frac{1}{384}(p_{i-2} + 76p_{i-1} + \\ & +230p_i + 76p_{i+1} + p_{i+2}), \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} S_{4,1}(p,t) = {} & \frac{1}{1536}(-p_{i-3} + 10p_{i-2} - 31p_{i-1} + 44p_i - 31p_{i+1} + 10p_{i+2} - \\ & -p_{i+3})x^4 + \frac{1}{384}\left(p_{i-3} - 8p_{i-2} + 13p_{i-1} - 13p_{i+1} + 8p_{i+2} - p_{i+3}\right)x^3 + \\ & + \frac{1}{256}\left(-p_{i-3} + 2p_{i-2} + 33p_{i-1} - 68p_i + 33p_{i+1} + 2p_{i+2} - p_{i+3}\right)x^2 + \\ & + \frac{1}{384}\left(p_{i-3} + 16p_{i-2} - 131p_{i-1} + 131p_{i+1} - 16p_{i+2} - p_{i+3}\right)x + \\ & + \frac{1}{1536}\left(-p_{i-3} - 70p_{i-2} + 225p_{i-1} + 1228p_i + 225p_{i+1} - 70p_{i+2} - p_{i+3}\right), \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} S_{4,2}(p,t) = {} & \frac{1}{92160}(13p_{i-4} - 164p_{i-3} + 964p_{i-2} - 2588p_{i-1} + 3550p_i - \\ & -2588p_{i+1} + 964p_{i+2} - 164p_{i+3} + 13p_{i+4})x^4 + \frac{1}{23040}(-13p_{i-4} + \\ & +138p_{i-3} - 662p_{i-2} + 962p_{i-1} - 962p_{i+1} + 662p_{i+2} - 138p_{i+3} + 13p_{i+4})x^3 + \\ & + \frac{1}{46080}(39p_{i-4} - 180p_{i-3} - 420p_{i-2} + 8436p_{i-1} - 15750p_i + 8436p_{i+1} - \\ & -420p_{i+2} - 180p_{i+3} + 39p_{i+4})x^2 + \frac{1}{23040}(-13p_{i-4} - 174p_{i-3} + \\ & +2026p_{i-2} - 9238p_{i-1} + 9238p_{i+1} - 2026p_{i+2} + 174p_{i+3} + 13p_{i+4})x + \\ & + \frac{1}{92160}(13p_{i-4} + 876p_{i-3} - 5084p_{i-2} + 8404p_{i-1} + 83742p_i + \\ & +8404p_{i+1} - 5084p_{i+2} - 876p_{i+3} + 13p_{i+4}). \end{aligned} \qquad (6)$$

Нехай у вузлах розбиття Δ_h для значень деякої гладкої неперервної функції $p(t)$ виконується умова (1). Тоді для сплайну (4-6) має місце наступна рівність

$$S_{4,u}(p,t) = S_{4,u}(\overline{p},t) + S_{4,u}(\varepsilon,t),\ u = 0,1,2.$$

Оцінка якості відтворення функції $p(t)$ зводиться до оцінки відхилення

$$\left|p(t)-S_{4,u}(p,t)\right|=\left|p(t)-S_{4,u}(\overline{p},t)-S_{4,u}(\varepsilon,t)\right|,$$

або для $\left|\varepsilon_i\right|<\varepsilon$, $i\in Z$, до оцінки нерівності

$$\left|p(t)-S_{4,u}(p,t)\right|\le\left|p(t)-S_{4,u}(\overline{p},t)\right|+\varepsilon\left\|S_{4,u}\right\|, \qquad (7)$$

де

$$\left\|S_{4,u}\right\|=\sup_{|\varepsilon_i|}\max_t\left|S_{4,u}(\varepsilon,t)\right|, \qquad (8)$$

норма сплайн-оператора $S_{4,u}(p,t)$.

Поставимо за мету даної роботи отримати явний вигляд похідних сплайнів $S_{4,0}(p,t)$, $S_{4,1}(p,t)$, $S_{4,2}(p,t)$ та знаходження норм і якості апроксимації для даних похідних.

Виклад основного матеріалу. Отримаємо явний вигляд 1-ї та 2-ї похідної для сплайнів $S_{4,0}(p,t)$, $S_{4,1}(p,t)$, $S_{4,2}(p,t)$.

$$S'_{4,0}(p,t)=\frac{1}{96}(p_{i-2}-4p_{i-1}+6p_i-4p_{i+1}+p_{i+2})x^3+\frac{1}{32}(-p_{i-2}+$$
$$+2p_{i-1}-2p_{i+1}+p_{i+2})x^2+\frac{1}{32}(p_{i-2}+4p_{i-1}-10p_i+4p_{i+1}+p_{i+2})x+$$
$$+\frac{1}{96}(-p_{i-2}-22p_{i-1}+22p_{i+1}+p_{i+2}), \qquad (9)$$

$$S''_{4,0}(p,t)=\frac{1}{32}(p_{i-2}-4p_{i-1}+6p_i-4p_{i+1}+p_{i+2})x^2+\frac{1}{16}(-p_{i-2}+$$
$$+2p_{i-1}-2p_{i+1}+p_{i+2})x+\frac{1}{32}(p_{i-2}+4p_{i-1}-10p_i+4p_{i+1}+p_{i+2}), \qquad (10)$$

$$S'_{4,1}(p,t)=\frac{1}{384}(-p_{i-3}+10p_{i-2}-31p_{i-1}+44p_i-31p_{i+1}+10p_{i+2}-$$
$$-p_{i+3})x^3+\frac{1}{128}(p_{i-3}-8p_{i-2}+13p_{i-1}-13p_{i+1}+8p_{i+2}-p_{i+3})x^2+$$
$$+\frac{1}{128}(-p_{i-3}+2p_{i-2}+33p_{i-1}-68p_i+33p_{i+1}+2p_{i+2}-p_{i+3})x+$$
$$+\frac{1}{384}(p_{i-3}+16p_{i-2}-131p_{i-1}+131p_{i+1}-16p_{i+2}-p_{i+3}), \qquad (11)$$

$$S''_{4,1}(p,t)=\frac{1}{128}(-p_{i-3}+10p_{i-2}-31p_{i-1}+44p_i-31p_{i+1}+10p_{i+2}-$$
$$-p_{i+3})x^2+\frac{1}{64}(p_{i-3}-8p_{i-2}+13p_{i-1}-13p_{i+1}+8p_{i+2}-p_{i+3})x+$$
$$+\frac{1}{128}(-p_{i-3}+2p_{i-2}+33p_{i-1}-68p_i+33p_{i+1}+2p_{i+2}-p_{i+3}), \qquad (12)$$

$$S'_{4,2}(p,t)=\frac{1}{23040}(13p_{i-4}-164p_{i-3}+964p_{i-2}-2588p_{i-1}+3550p_i-$$
$$-2588p_{i+1}+964p_{i+2}-164p_{i+3}+13p_{i+4})x^3+\frac{1}{7680}(-13p_{i-4}+138p_{i-3}-$$
$$-662p_{i-2}+962p_{i-1}-962p_{i+1}+662p_{i+2}-138p_{i+3}+13p_{i+4})x^2+$$
$$+\frac{1}{23040}(39p_{i-4}-180p_{i-3}-420p_{i-2}+8436p_{i-1}-15750p_i+8436p_{i+1}-$$
$$-420p_{i+2}-180p_{i+3}+39p_{i+4})x+\frac{1}{23040}(-13p_{i-4}-174p_{i-3}+2026p_{i-2}-$$
$$-9238p_{i-1}+9238p_{i+1}-2026p_{i+2}+174p_{i+3}+13p_{i+4}), \qquad (13)$$

$$S''_{4,2}(p,t)=\frac{1}{7680}(13p_{i-4}-164p_{i-3}+964p_{i-2}-2588p_{i-1}+3550p_i-$$
$$-2588p_{i+1}+964p_{i+2}-164p_{i+3}+13p_{i+4})x^2+\frac{1}{3840}(-13p_{i-4}+138p_{i-3}-$$
$$-662p_{i-2}+962p_{i-1}-962p_{i+1}+662p_{i+2}-138p_{i+3}+13p_{i+4})x+$$
$$+\frac{1}{23040}(39p_{i-4}-180p_{i-3}-420p_{i-2}+8436p_{i-1}-15750p_i+8436p_{i+1}-$$
$$-420p_{i+2}-180p_{i+3}+39p_{i+4}). \qquad (14)$$

Подальша задача оцінки якості відтворення $p(t)$ складається з двох етапів: знаходження норм похідних сплайн-операторів $S_{4,0}(p,t)$, $S_{4,1}(p,t)$, $S_{4,2}(p,t)$ і задача визначення якості апроксимації.

Проведемо оцінку норм перших та других похідних сплайнів $S_{4,0}(p,t)$, $S_{4,1}(p,t)$, $S_{4,2}(p,t)$.

Теорема 1. Для сплайну $S'_{4,0}(p,t)$ є вірним:

$$\left\|S'_{4,0}(p,t)\right\|_C=\frac{2}{3}\left\|p(t)\right\|_C.$$

Доведення. За визначенням норми оператору лінійного нормового простору для похідної сплайну $S'_{4,0}(p,t)$ маємо:

$$\left\|S'_{4,0}(p,t)\right\|_C=\sup_{p_i}\max_t\left|S'_{4,0}(p_i,t)\right|.$$

Згрупуємо сплайн (9) відносно p_i:

$$S'_{4,0}(p,t)=\frac{1}{96}\Big(-(1-x)^3\,p_{i-2}+\left(-22+12x+6x^2-4x^3\right)p_{i-1}+$$
$$+\left(-30x+6x^3\right)p_i+\left(22+12x-6x^2-4x^3\right)p_{i+1}+(1+x)^3\,p_{i+2}\Big). \quad (15)$$

З представлення сплайну $S'_{4,0}(p,t)$ у вигляді (15) слідує, що

$$\left\|S'_{4,0}(p,t)\right\|_C \le \frac{1}{96}\left\|p(t)\right\|_C \max_{|x|\le 1} A(x),$$

де

$$A(x)=\left|1-x\right|^3+\left|-22+12x+6x^2-4x^3\right|+\left|-30x+6x^3\right|+$$
$$+\left|22+12x-6x^2-4x^3\right|+\left|1+x\right|^3.$$

Враховуючи, що функція $A(x)$ парна, для знаходження її максимуму достатньо розглянути її для $x\in[0;1]$. Для цих x, зважаючи, що вирази під знаком модуля більші нуля, маємо:

$$\max_{x\in[0;1]} A(x)=A(1)=64.$$

Таким чином

$$\left\|S'_{4,0}(p,t)\right\|_C \le \frac{2}{3}\left\|p(t)\right\|_C, \quad (16)$$

з іншого боку при $x=0$ з (9) маємо

$$S'_{4,0}(p,t)=\frac{1}{96}(-p_{i-2}-22p_{i-1}+22p_{i+1}+p_{i-2}).$$

Тоді для деякого часткового випадку

$$p^*_{i-2}=p^*_{i-1}=p^*_{i}=p^*_{i+1}=p^*_{i+2}=p^*,$$

то

$$\left\|S'_{4,0}(p,t)\right\|_C \ge \left\|S'_{4,0}\left(p^*,t\right)\right\|_C \ge \left|S'_{4,0}\left(p^*,t\right)\right|=\frac{2}{3}\left\|p(t)\right\|_C.$$

Разом з нерівністю (16) це співвідношення доводить сформовану теорему.

Теорема 2. Якщо $p(t)\in C^5$, то при $h\to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p'(t)-S'_{4,0}(\overline{p},t)=-\frac{1}{4}p'''(t)h^2-\frac{1}{4}p^{(4)}(t)h^2\tau-$$
$$-p^{(5)}(t)\left(\frac{161}{5760}h^4-\frac{7}{48}h^2\tau^2+\frac{1}{24}\tau^4\right)+o\left(h^3\right),$$

де

$$\tau=t-(i-0,5)h.$$

Доведення: Розкладемо сплайн $S'_{4,0}(\overline{p},t)$ в ряд Тейлора в околі точки $(i-0,5)h$ з урахуванням $S'_{4,0}(\overline{p},t)\in C^3$.

$$S'_{4,0}(\overline{p},t)=S'_{4,0}\left(\overline{p},t^*\right)+S''_{4,0}\left(\overline{p},t^*\right)\tau+S'''_{4,0}\left(\overline{p},t^*\right)\frac{\tau^2}{2!}+$$
$$+S^{(4)}_{4,0}\left(\overline{p},t^*\right)\frac{\tau^3}{3!}+o(h^3), \quad (17)$$

де

$$S'_{4,0}\left(\overline{p},t^*\right)=\frac{1}{48h}(-\overline{p}_{i-2}-22\overline{p}_{i-1}+22\overline{p}_{i+1}-\overline{p}_{i+2}), \quad (18)$$

$$S''_{4,0}\left(\overline{p},t^*\right)=\frac{1}{8h^2}(\overline{p}_{i-2}+4\overline{p}_{i-1}-10\overline{p}_{i}+4\overline{p}_{i+1}+\overline{p}_{i+2}), \quad (19)$$

$$S'''_{4,0}\left(\overline{p},t^*\right)=\frac{1}{2h^3}(-\overline{p}_{i-2}+2\overline{p}_{i-1}-2\overline{p}_{i+1}+\overline{p}_{i+2}), \quad (20)$$

$$S^{(4)}_{4,0}\left(\overline{p},t^*\right)=\frac{1}{h^4}(\overline{p}_{i-2}-4\overline{p}_{i-1}+6\overline{p}_{i}-4\overline{p}_{i+1}+\overline{p}_{i+2}), \quad (21)$$

$$t^*=(i-0,5)h.$$

З урахуванням розкладу $S'_{4,0}(\overline{p},t)$ та $p(t)\in C^5$ в ряд Тейлора в околі точки $(i-0,5)h$, нескладно отримати, що для $\forall p(t)\in C^5$ при $h\to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p'(t)=p'\left(t^*\right)+p''\left(t^*\right)\tau+p'''\left(t^*\right)\frac{\tau^2}{2!}+p^{(4)}\left(t^*\right)\frac{\tau^3}{3!}+$$
$$+p^{(5)}\left(t^*\right)\frac{\tau^4}{4!}+o(h^4), \quad (22)$$

при чому:

$$\overline{p}_{i\pm 2}=p\left(t^*\right)\pm 2p'\left(t^*\right)h+\frac{49}{24}p''\left(t^*\right)h^2\pm\frac{17}{12}p'''\left(t^*\right)h^3+$$
$$+\frac{1441}{1920}p^{(4)}\left(t^*\right)h^4\pm\frac{931}{2880}p^{(5)}\left(t^*\right)h^5+o(h^5),$$

$$\overline{p}_{i\pm1} = p\left(t^*\right) \pm p'\left(t^*\right)h + \frac{13}{24}p''\left(t^*\right)h^2 \pm \frac{5}{24}p'''\left(t^*\right)h^3 +$$

$$+\frac{121}{1920}p^{(4)}\left(t^*\right)h^4 \pm \frac{91}{5760}p^{(5)}\left(t^*\right)h^5 + o(h^5),$$

$$\overline{p}_i = p\left(t^*\right) + \frac{1}{24}p''\left(t^*\right)h^2 + \frac{1}{1920}p^{(4)}\left(t^*\right)h^4 + o(h^5).$$

Підставляючи ці рівності в рівності (18) – (21) отримаємо:

$$S'_{4,0}(\overline{p},t^*) = p'\left(t^*\right) + \frac{1}{4}p'''\left(t^*\right)h^2 + \frac{161}{5760}p^{(5)}\left(t^*\right)h^4 + o(h^5), \qquad (22)$$

$$S''_{4,0}(\overline{p},t^*) = p''\left(t^*\right) + \frac{1}{4}p^{(4)}\left(t^*\right)h^2 + o(h^5), \qquad (23)$$

$$S'''_{4,0}(\overline{p},t^*) = p'''\left(t^*\right) + \frac{7}{24}p^{(5)}\left(t^*\right)h^2 + o(h^5), \qquad (24)$$

$$S^{(4)}_{4,0}(\overline{p},t^*) = p^{(4)}\left(t^*\right) + o(h^5). \qquad (25)$$

Тоді підставляючи рівності (22) – (25) в (17), будемо мати:

$$S'_{4,0}(\overline{p},t) = \left(p'\left(t^*\right) + \frac{1}{4}p'''\left(t^*\right)h^2 + \frac{161}{5760}p^{(5)}\left(t^*\right)h^4\right) +$$

$$+\left(p''\left(t^*\right) + \frac{1}{4}p^{(4)}\left(t^*\right)h^2\right)\tau + \left(p'''\left(t^*\right) + \frac{7}{24}p^{(5)}\left(t^*\right)h^2\right)\frac{\tau^2}{2!} +$$

$$+p^{(4)}\left(t^*\right)\frac{\tau^3}{3!} + o(h^3). \qquad (26)$$

За рівністю (22) та (26).

$$p'(t) - S'_{4,0}(\overline{p},t) = -\frac{1}{4}p'''(t)h^2 - \frac{1}{4}p^{(4)}(t)h^2\tau -$$

$$-p^{(5)}(t)h^4\left(\frac{161}{5760}h^4 - \frac{7}{48}h^2\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4\right) + \mathrm{o}\left(h^3\right).$$

Теорему доведено.

<u>*Наслідок 1*</u>. Для сплайну $S'_{4,0}(p,t)$, при $p(t) \in C^3$ є вірним

$$\left\|p'(t) - S'_{4,0}(\overline{p},t)\right\|_C \le \frac{h^2}{4}\left\|p'''(t)\right\|_C + \frac{2}{3}\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C + \mathrm{o}\left(h^3\right).$$

Аналогічно для сплайнів $S''_{4,0}(p,t)$, $S'''_{4,0}(p,t)$, $S^{(4)}_{4,0}(p,t)$.

<u>*Теорема 3.*</u> Для сплайнів $S''_{4,0}(p,t)$, $S'''_{4,0}(p,t)$, $S^{(4)}_{4,0}(p,t)$ є вірним:

$$\left\|S''_{4,0}(p,t)\right\|_C = \frac{5}{8}\left\|p(t)\right\|_C, \quad \left\|S'''_{4,0}(p,t)\right\|_C = \left\|p(t)\right\|_C,$$

$$\left\|S^{(4)}_{4,0}(p,t)\right\|_C = \left\|p(t)\right\|_C.$$

Доведення є аналогічним доведенню теореми 1.

<u>*Теорема 4.*</u> Якщо $p(t) \in C^5$, то при $h \to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p''(t) - S''_{4,0}(\overline{p},t) = -\frac{1}{4}p^{(4)}(t)h^2 - p^{(5)}(t)\tau\left(\frac{7}{24}h^2 - \frac{1}{6}\tau^2\right) + \mathrm{o}\left(h^2\right),$$

$$p'''(t) - S'''_{4,0}(\overline{p},t) = -p^{(5)}(t)\left(\frac{7}{24}h^2 - \frac{1}{2}\tau^2\right) + \mathrm{o}(h).$$

Доведення є аналогічним доведенню теореми 2.

<u>*Наслідок 2*</u>. Для сплайну $S''_{4,0}(p,t)$, при $p(t) \in C^4$ та для сплайну $S'''_{4,0}(p,t)$ при $p(t) \in C^5$ є вірним:

$$\left\|p''(t) - S''_{4,0}(\overline{p},t)\right\|_C \le \frac{h^2}{4}\left\|p^{(4)}(t)\right\|_C + \frac{5}{8}\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C + \mathrm{o}\left(h^2\right),$$

$$\left\|p'''(t) - S'''_{4,0}(\overline{p},t)\right\|_C \le \frac{7h^2}{24}\left\|p^{(5)}(t)\right\|_C + \varepsilon\left\|p(t)\right\|_C + \mathrm{o}(h).$$

Аналогічно для сплайнів $S'_{4,1}(p,t)$, $S''_{4,1}(p,t)$, $S'''_{4,1}(p,t)$, $S^{(4)}_{4,1}(p,t)$ маємо наступні теореми:

<u>*Теорема 5.*</u> Для сплайнів $S'_{4,1}(p,t)$, $S''_{4,1}(p,t)$, $S'''_{4,1}(p,t)$, $S^{(4)}_{4,1}(p,t)$ є вірним

$$\left\|S'_{4,1}(p,t)\right\|_C = \left\|p(t)\right\|_C, \qquad \left\|S''_{4,1}(p,t)\right\|_C = \frac{35}{32}\left\|p(t)\right\|_C,$$

$$\left\|S'''_{4,1}(p,t)\right\|_C = 2\left\|p(t)\right\|_C, \qquad \left\|S^{(4)}_{4,1}(p,t)\right\|_C = 2\left\|p(t)\right\|_C.$$

<u>*Теорема 6.*</u> Якщо $p(t) \in C^5$, то при $h \to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p'(t) - S'_{4,1}(\overline{p},t) = p^{(5)}(t)\left(\frac{319}{5760}h^4 - \frac{1}{48}h^2\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4\right) + \mathrm{o}\left(h^3\right),$$

$$p''(t) - S''_{4,1}(\overline{p},t) = -p^{(5)}(t)\tau\left(\frac{1}{24}h^2 + \frac{1}{6}\tau^2\right) + \mathrm{o}\left(h^2\right),$$

$$p'''(t)-S'''_{4,1}(\bar{p},t)=-p^{(5)}(t)\left(\frac{1}{24}h^2-\frac{1}{2}\tau^2\right)+o(h).$$

Наслідок 3. Для сплайнів $S'_{4,1}(p,t)$, $S''_{4,1}(p,t)$, $S'''_{4,1}(p,t)$ при $p(t)\in C^5$ є вірним:

$$\left\|p'(t)-S'_{4,1}(\bar{p},t)\right\|_C\le\frac{319h^4}{5760}\left\|p^{(5)}(t)\right\|_C+\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C+o\left(h^3\right),$$

$$\left\|p''(t)-S''_{4,1}(\bar{p},t)\right\|_C\le\frac{h^3}{24}\left\|p^{(5)}(t)\right\|_C+\frac{35}{32}\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C+o\left(h^2\right).$$

$$\left\|p'''(t)-S'''_{4,1}(\bar{p},t)\right\|_C\le\frac{h^2}{12}\left\|p^{(5)}(t)\right\|_C+\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C+o(h).$$

Теорема 7. Для сплайнів $S'_{4,2}(p,t)$, $S''_{4,2}(p,t)$, $S'''_{4,2}(p,t)$, $S^{(4)}_{4,2}(p,t)$ є вірним

$$\left\|S'_{4,2}(p,t)\right\|_C=1,218\left\|p(t)\right\|_C,\quad \left\|S''_{4,2}(p,t)\right\|_C=\frac{565}{384}\left\|p(t)\right\|_C,$$

$$\left\|S'''_{4,2}(p,t)\right\|_C=\frac{2683}{960}\left\|p(t)\right\|_C,\quad \left\|S^{(4)}_{4,2}(p,t)\right\|_C=\frac{43}{15}\left\|p(t)\right\|_C.$$

Теорема 8. Якщо $p(t)\in C^5$, то при $h\to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p'(t)-S'_{4,2}(\bar{p},t)=\frac{p^{(5)}(t)}{24}\left(\frac{7h^4}{240}+\frac{300961h^2\tau^2}{14400}+\tau^4\right)+o\left(h^3\right),$$

$$p''(t)-S''_{4,2}(\bar{p},t)=\frac{p^{(5)}(t)\tau}{6}\left(\frac{300961h^2}{28800}+\tau^2\right)+o\left(h^2\right),$$

$$p'''(t)-S'''_{4,2}(\bar{p},t)=\frac{p^{(5)}(t)}{2}\left(\frac{300961h^2}{86400}+\tau^2\right)+o(h).$$

Наслідок 4. Для сплайнів $S'_{4,2}(p,t)$ та $S''_{4,2}(p,t)$ при $p(t)\in C^3$ є вірним:

$$\left\|p'(t)-S'_{4,2}(\bar{p},t)\right\|_C\le\frac{306241h^4}{1382400}\left\|p^{(5)}(t)\right\|_C+1,218\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C+o\left(h^3\right),$$

$$\left\|p''(t)-S''_{4,2}(\bar{p},t)\right\|_C\le\frac{308161h^3}{345600}\left\|p^{(5)}(t)\right\|_C+\frac{565}{384}\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C+o\left(h^2\right),$$

$$\left\|p'''(t)-S'''_{4,2}(\bar{p},t)\right\|_C\le\frac{322561h^2}{172800}\left\|p^{(5)}(t)\right\|_C+\frac{2683}{960}\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C+o(h)$$

Наведемо приклади реалізації першої та другої похідних сплайну $S_{4,0}(p,t)$. На графіку (рис.1 (а)) точками відмічено відліки сигналу та подано реалізацію згладжування сплайном $S_{4,0}(p,t)$, похідні $S'_{4,0}(p,t)$, $S''_{4,0}(p,t)$ відображено на рис.1 (б) та (в), відповідно. Пунктиром (вертикальні ствпці на рис.1.(б,в)) відмічено окіл особливих точок сигналу. Як видно з графіків в особливих точках сигналу яким відповідають нулі похідної $S'_{4,0}(p,t)$, можна побачити мінімум або максимум сплайну $S_{4,0}(p,t)$, причому за мінімум відповідає додатньо визначена функція другої похідної $S''_{4,0}(p,t)$ з рис.1 (в), а за максимум – від'ємно визначена функція.

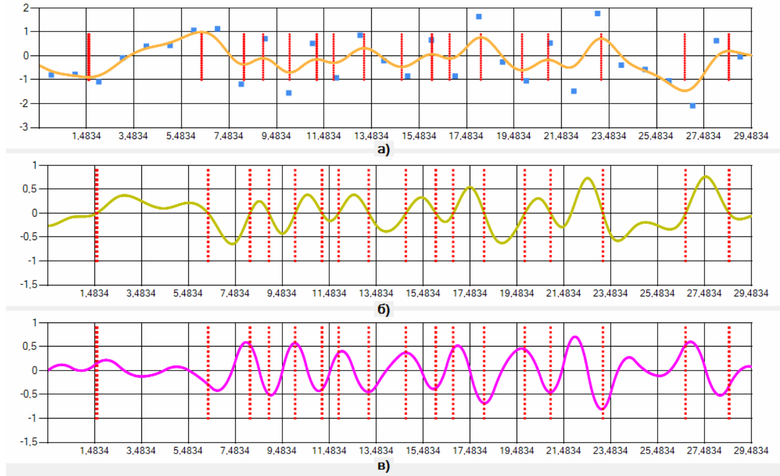

Рис. 1. Реалізація аналогового сигналу та згладжування його за допомогою сплайнів: а) відліки сигналу та сплайн $S_{4,0}(p,t)$; б) сплайн $S'_{4,0}(p,t)$; в) сплайн $S''_{4,0}(p,t)$.

Висновки. В роботі отримано явний вигляд похідних поліноміальних сплайнів $S_{4,0}(p,t)$, $S_{4,1}(p,t)$, $S_{4,2}(p,t)$. Подано та доведено теореми про норми та оцінки якості апроксимації функції зазначеними сплайнами, наведено приклад їх застосування для визначення особливих точок випадкового сигналу.

Подальші дослідження можуть полягати в дослідженні похідних поліноміальнгих сплайнів більш високого порядку задля реалізації їх в задачах обробки цифрових сигналів та узагальнені теоретичних результатів досліджень на двовимірних та багатовимірний випадків.

Бібліографічні посилання

1. **Приставка П.О.** Лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. праць. - Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2011. -Т.15. – С.4-17.
2. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых. . –К.: ІМ НАН України, 1996. - 358 с.
3. **Лигун А.А., Кармазина В.В.** О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989.-30 с.-Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N1559- Ук89.
4. **Лигун А.А., Кармазина В.В.** Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов/ Днепродзержинский индустр. ин-т. – Днепродзержинск: 1989. –38 с. –Деп. в УкрНИИНТИ 13.11.89, N2569– Ук89.
5. **Приставка П.О.** Поліномаільні сплайни при обробці даних. Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с

Надійшла до редколегії 07.09.16.