Лекція 12. Задача максимальної швидкодії для лінійних об'єктів.

Для лінійних об'єктів диференціальні рівняння математичної моделі записуються у вигляді:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \qquad (12.1)$$

з початковими та кінцевими умовами.

В цьому випадку функція Гамільтона має вигляд:

$$\overline{H}(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k.$$ або $$\overline{H}(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \psi^{\mathrm{T}} \mathbf{Ax} + \psi^{\mathrm{T}} \mathbf{Bu}. \qquad (12.2)$$

а спряжена система записується так:

$$\dot{\phi}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \left[\sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu} x_\mu + \sum_{k=1}^{m} b_{jk} u_k \right]}{\partial x_i} \phi_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \phi_j \quad (i = \overline{1, n}). \qquad (12.3)$$

Для лінійних об'єктів принцип максимуму є не лише необхідною, але й достатньою умовою оптимального керування. Функція H_1 досягає максимуму якщо:

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} b_{ik} \phi_i(t) \right] u_k(t) = \max_{|u_k(t)| \le u_k^*} \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} b_{ik} \phi_i(t) \right] u_k. \qquad (12.4)$$

($\psi^{\mathrm{T}} \mathbf{Bu} = \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \psi_i b_{ik} \right] u_k.$)

А при m=1 і обмеженнях $|u(t)| \le u^*$ ця умова прийме вигляд:

$$\sigma_1(t) u(t) = \max_{|u_k(t)| \le u^*} \sigma_1(t) u, \qquad (12.5)$$

де $\sigma_1(t) = \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \psi_i(t)$.

Тут функція H_1 лінійна відносно ***u***, а її похідна не залежить від ***u***, тому, якщо не має обмежень на керування, то не існує максимуму функції H_1. Якщо функція H_1 розглядається в замкненому інтервалі ***[-u*,u*]*** зміни змінної ***u***, то в цьому інтервалі вона досягає максимуму і мінімуму на границях інтервалу

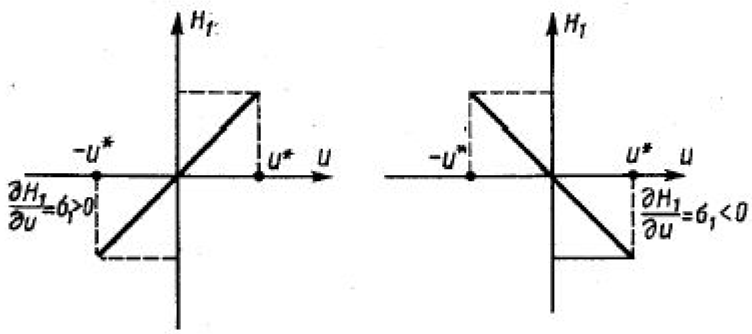

Рис.5. Залежність гамільтоніана від керування

$$u = u^* sign\frac{\partial H}{\partial u} = u^* sign\sigma_1 \text{ або } u = u^* sign\sum_{i=1}^{n} b_{i1}\psi_i(t)\,. \qquad (12.6)$$

А в загальному випадку:

$$u_k(t) = u_k^* sign\sum_{i=1}^{n} b_{ik}\psi_i(t), \quad k = 1,2,...,m\,. \qquad (12.7)$$

Отже, для лінійного об'єкта оптимальне керування за швидкодією має вигляд:

$$u_k(t) = u_k^* sign\mathbf{B}_k^T \mathbf{ш}(t), \quad k = 1,2,...,m\,, \qquad (12.8)$$

де $\mathbf{B}^T{}_k$ – k-ий стовпчик матриці **B**, а спряжена система записується:

$$\dot{\mathbf{ш}}(t) = -\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{ш}(t). \qquad (12.9)$$

Відмітимо, що якщо об'єкт асимптотично стійкий, то спряжена система нестійка, що призводить до проблем при числовому розв'язку крайової задачі.

Теорема про n-інтервалів.

Кожен компонент оптимального керування являє собою кусочно-постійну функцію, точками розриву якої є точки перетину з віссю абсцис функції:

$$o_k(t) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\psi_i(t),\ k = 1,2,..,m \qquad (12.10)$$

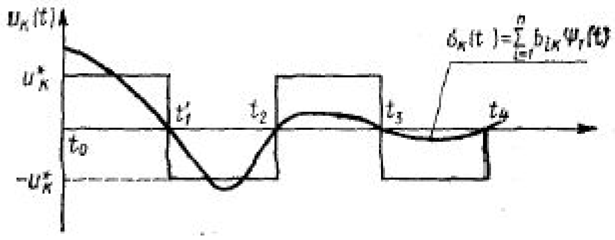

Рис.6. Функція оптимального керування.

Кожна точка розриву називається точкою переключення. Число переключень кожного з управлінь $u_k(t),\ k = 1,2,..,m$ визначається числом нулів функції $o_k(t),\ k = 1,2,..,m$ і може бути досить великим. Але в деяких випадках можна точно оцінити їх кількість.

Теорема (про n-інтервалів). Якщо корені характеристичного поліному об'єкта ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$) дійсні, то число переключень кожного з управлінь

$u_1(t),...,u_m(t)$ не перевищує n-1.

Приклад.

Дано математичну модель випарної установки цукрового заводу за рівнями ($t=0.001\tau$, де τ, с)

$$\begin{cases} 2.36\dfrac{d\Delta h_1}{dt} = -8.475\Delta h_1 + 8.475\Delta h_2 - 433.03\Delta f_{\text{кл}1} + \Delta S_0 - \Delta W_1, \\ 3.00\dfrac{d\Delta h_2}{dt} = 8.475\Delta h_1 - 16.38\Delta h_2 + 7.9\Delta h_3 + 433.03\Delta f_{\text{кл}1} - 403.75\Delta f_{\text{кл}2} - \Delta W_2, \\ 1.80\dfrac{d\Delta h_3}{dt} = 7.9\Delta h_2 - 22.5\Delta h_3 + 14.6\Delta h_4 + 403.72\Delta f_{\text{кл}2} - 371.98\Delta f_{\text{кл}3} - \Delta W_3, \\ 1.0\dfrac{d\Delta h_4}{dt} = 14.6\Delta h_3 - 21.5\Delta h_4 + 7.15\Delta h_5 + 371.98\Delta f_{\text{кл}3} - 365.31\Delta f_{\text{кл}4} - \Delta W_4, \\ 0.6\dfrac{d\Delta h_5}{dt} = 7.15\Delta h_4 - 8.58\Delta h_5 + 365.31\Delta f_{\text{кл}4} - 363.26\Delta f_{\text{кл}5} - \Delta W_5, \end{cases} \tag{12.11}$$

де $\mathbf{x} = [\ \Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3, \Delta h_4, \Delta h_5\ ]^T$ – вектор координат стану системи, що складається з рівнів в корпусах випарної установки; $\mathbf{u} = [\ \Delta f_{\text{кл}1}, \Delta f_{\text{кл}2}, \Delta f_{\text{кл}3}, \Delta f_{\text{кл}4}, \Delta f_{\text{кл}5}\ ]^T$ – вектор управління, що включає потоки між відповідними корпусами, які обмежені нерівністю $|\mathbf{u}(t)| \le 0.1$; $\mathbf{z} = [\Delta S_0, \Delta W_1, \Delta W_2, \Delta W_3, \Delta W_4, \Delta W_5\ ]^T$ – вектор збурень, що складається з витрат вхідного соку та вторинної пари за корпусами.

Знайти оптимальне керування, що переводить об’єкт на новий режим роботи $\mathbf{x}^1 = [\ +0.4, +0.3, +0.25, +0.22, +0.2\ ]^T$ за мінімальний час.

Розв’язання.

Даний об’єкт є лінійним, тому можемо використати готові формули для принципу максимуму за швидкодією для лінійних об’єктів.

1. Переводимо об’єкт до простору змінних стану:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{z} \rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3.591 & 3.591 & 0 & 0 & 0 \\ 2.825 & -5.46 & 2.63 & 0 & 0 \\ 0 & 4.389 & -12.5 & 8.111 & 0 \\ 0 & 0 & 14.6 & -21.5 & 7.15 \\ 0 & 0 & 0 & 11.9 & -14.3 \end{bmatrix};$$

$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -183.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 144.3 & -134.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 224.3 & -206.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 372.0 & -365.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 608.9 & -605.4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.424 & -0.424 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.556 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.7 \end{bmatrix}. \qquad (12.12)
$$

2. Відкидаючи останній доданок (вважаючи $\mathbf{z} = 0$), функція Гамільтона визначається:

$$
H_1 = \mathbf{ш}^{\mathbf{T}}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}) =
$$

$$
\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} -3.591 & 3.591 & 0 & 0 & 0 \\ 2.825 & -5.46 & 2.63 & 0 & 0 \\ 0 & 4.389 & -12.5 & 8.111 & 0 \\ 0 & 0 & 14.6 & -21.5 & 7.15 \\ 0 & 0 & 0 & 11.9 & -14.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -183.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 144.3 & -134.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 224.3 & -206.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 372.0 & -365.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 608.9 & -605.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \right) =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} -3.591x_1 + 3.591x_2 \\ 2.825x_1 - 5.46x_2 + 2.63x_3 \\ 4.389x_2 - 12.5x_3 + 8.111x_4 \\ 14.6x_3 - 21.5x_4 + 7.15x_5 \\ 11.9x_4 - 14.3x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -183.5u_1 \\ 144.3u_1 - 134.5u_2 \\ 224.3u_2 - 206.7u_3 \\ 372.0u_3 - 365.3u_4 \\ 608.9u_4 - 605.4u_5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} -3.591x_1 + 3.591x_2 - 183.5u_1 \\ 2.825x_1 - 5.46x_2 + 2.63x_3 + 144.3u_1 - 134.5u_2 \\ 4.389x_2 - 12.5x_3 + 8.111x_4 + 224.3u_2 - 206.7u_3 \\ 14.6x_3 - 21.5x_4 + 7.15x_5 + 372.0u_3 - 365.3u_4 \\ 11.9x_4 - 14.3x_5 + 608.9u_4 - 605.4u_5 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \psi_1(-3.591x_1 + 3.591x_2 - 183.5u_1) + \psi_2(2.825x_1 - 5.46x_2 + 2.63x_3 + 144.3u_1 - 134.5u_2) + \psi_3(4.389x_2 - 12.5x_3 + 8.111x_4 +
$$
$$
+ 224.3u_2 - 206.7u_3) + \psi_4(14.6x_3 - 21.5x_4 + 7.15x_5 + 372.0u_3 - 365.3u_4) + \psi_5(11.9x_4 - 14.3x_5 + 608.9u_4 - 605.4u_5)
$$

3. Спряжена система за (3.40) запишеться:

$$
\begin{cases} \psi_1' = -\sum\limits_{j=1}^{n} a_{j1}\psi_j = 3.591\psi_1 - 2.825\psi_2, \\ \psi_2' = -\sum\limits_{j=1}^{n} a_{j2}\psi_j = -3.591\psi_1 + 5.46\psi_2 - 4.389\psi_3, \\ \psi_3' = -\sum\limits_{j=1}^{n} a_{j3}\psi_j = -2.63\psi_2 + 12.5\psi_3 - 14.6\psi_4, \\ \psi_4' = -\sum\limits_{j=1}^{n} a_{j4}\psi_j = -8.111\psi_3 + 21.5\psi_4 - 11.9\psi_5, \\ \psi_5' = -\sum\limits_{j=1}^{n} a_{j5}\psi_j = -7.15\psi_4 + 14.3\psi_5, \end{cases} \qquad (12.13)
$$

4. Оптимальне керування розраховується за (3.39):

$$
\begin{aligned} u_1 &= 0.1 * sign(-183.5\psi_1 + 144.3\psi_2), \\ u_2 &= 0.1 * sign(-134.5\psi_2 + 224.3\psi_3), \\ u_3 &= 0.1 * sign(-206.7\psi_3 + 372\psi_4), \\ u_4 &= 0.1 * sign(-365.3\psi_4 + 608.9\psi_5), \\ u_1 &= 0.1 * sign(-605.4\psi_5), \end{aligned} \qquad (12.13)
$$

5. Випишемо крайові умови:

$$
\begin{aligned} &\mathbf{x}^0 = [\ 0, 0, 0, 0, 0\ ]^T, \\ &\mathbf{x}^1 = [\ 0.4, 0.3, 0.25, 0.22, 0.2\ ]^T, \qquad (12.14) \\ &H_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{ш}(t), \mathbf{u}(t))\big|_{t=t_1} \geq 0\ . \end{aligned}
$$

Відмітимо, якщо заданий початковий та кінцевий стан системи не точками фазового простору, а областями (задача з рухомими кінцями):

$$\varphi_l(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ \ l = \overline{1, p}, \ \ p \le n, \tag{12.15}$$

та

$$\beta_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ \ \nu = \overline{1, k}, \ \ k \le n. \tag{12.16}$$

то до приведеного розв'язку необхідно додати умови трансверсальності виду:

$$\psi_i(t_0) = \sum_{l=1}^{p} \rho_l^- \cdot \left. \frac{\partial \varphi_l(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t_0)}, \ \ i = \overline{1, n}; \tag{12.17}$$

$$\psi_i(t_1) = \sum_{\nu=1}^{k} \rho_\nu^+ \cdot \left. \frac{\partial \beta_\nu(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t_1)}, \ \ i = \overline{1, n}; \tag{12.18}$$

де $\rho_l^-, \ \rho_\nu^+, \ \ l = \overline{1, p}, \ \nu = \overline{1, n}.$ – деякі числа ($\psi_0(t_0) = \rho_0^-$).

Отже, координати невідомих точок $\mathbf{x}^0$ та $\mathbf{x}^1$ разом з p+k невизначеними множниками Лагранжа $\rho_l^-, \ \rho_\nu^+, \ \ l = \overline{1, p}, \ \nu = \overline{1, n}.$ призводять до 2n+p+k невідомим числам, для визначення яких необхідно використати умови трансверсальності

Функція Гамільтона

Функція Гамільтона $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ визначається через узагальнені координати q_i і узагальнені імпульси p_i виходячи з функції Лагранжа $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ наступним чином.

Узагальнені імпульси визначаються, як

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Функція Гамільтона визначається згідно з

$$\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}.$$

Після цього всі узагальнені швидкості $\dot{q}_i$ d $\mathcal{H}$ виражаються через узагальнені імпульси й координати.

За своєю суттю функція Гамільтона є енергією системи, вираженою через координати й імпульси.

У випадку стаціонарних зв'язків і потенційних зовнішніх сил

$$\mathcal{H} = T + V,$$

тобто функція Гамільтона є сумою потенційної і кінетичної енергій, але при цьому кінетична енергія повинна бути виражена через імпульси, а не через швидкості.

Канонічні рівняння Гамільтона

Рівняння еволюції динамічної системи записуються в Гамільтоновій механіці у вигляді

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i},.$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$ Ці рівняння називаються канонічними рівняннями Гамільтона. Вони повністю визначають еволюцію системи з часом у тому сенсі, що знаючи значення узагальнених координат і швидкостей в певний початковий момент часу, можна визначити їхні значення в будь-який наступний момент часу, розв'язуючи дану систему рівнянь.

Практичні використання

Функція Гамільтона для заряду в електромагнітному полі[ред. • ред. код]

Загалом сила Лоренца не є потенціальною силою, оскільки залежить від швидкості руху заряду. Проте її можна включити в Гамільтонову механіку записавши функцію Гамільтона зарядженої частинки в наступній формі (гаусова система одиниць):

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2}{2m} + e\varphi$$

де e -- заряд частинки, φ — електростатичний потенціал, $\mathbf{A}$ -- векторний потенціал.

В релятивістському випадку:

$$\mathcal{H} = c\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2} + e\varphi\ .$$

Функція Гамільтона в теорії відносності[ред. • ред. код]

Функцію Гамільтона у релятивістському випадку можна отримати шляхом стандартної процедури, знаючи функцію Лагранжа $\mathcal{L}$ (див. "Механіку" Ландау):

$$\mathcal{H} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \mathcal{L} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Як видно, її вираз повністю збігається із виразом для потенціальної енергії релятивістської частки, і не залежить у явній формі від імпульса. Знаючи релятивістський імпульс, цей вираз можна переписати у вигляді квадратичної форми:

$$\mathcal{H}^2 = c^2(p^2 + m^2c^2)\ ,$$

з якої і отримуємо загальновизнаний вираз для функції Гамільтона:

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + mc^2}\ .$$

Цей вираз для функції Гамільтона широко використовується в класичній та квантовій механіці.

Використання у квантовій механіці

У квантовій механіці оператор енергії $\hat{H}$ будується із класичної функції Гамільтона заміною узагальнених імпульсів p_i на оператори імпульсу $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}$, де $\hbar$ -- зведена стала Планка. Такий оператор називається гамільтоніаном, а процедура переходу від функції Гамільтона до гамільтоніану називається процедурою квантування.

Гамільтоніан є головним оператором у квантовій механіці, оскільки входить в головне рівняння квантової механіки —рівняння Шредінгера.